Topologie des espaces métriques

Licence de Mathématiques, 3ème année

Table des matières

Chapitre 1

Nombres réels

Tous les étudiants en mathématiques manipulent les nombres réels sans états d'âme ; et c'est très bien ainsi. Pourtant, il n'est pas si facile de répondre à la question

"qu'est-ce que c'est, un nombre réel ?"

à supposer que cette question ait véritablement un sens. Dans ce micro-chapitre, on donne une définition possible, sans trop entrer dans les détails ; puis, en se basant sur cette définition, on démontre les propriétés des nombres réels que chacun(e) est tenu(e) de connaître.

Même si on ne sait pas vraiment ce qu'est un nombre réel, on sait quand même bien que tout nombre réel positif x s'écrit sous la forme

$$x = \xi_0, \xi_1\xi_2\xi_3 \cdots ,$$

où $\xi_0 \in \mathbb{N}$ est la "partie entière" de x et $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dots$ sont les "chiffres après la virgule", $\xi_i \in [\![0, 9]\!]$. Une telle écriture est une *représentation décimale* du nombre x.

Par exemple, une représentation décimale d'un nombre *rationnel* $x = p/q$ s'obtient en effectuant la division euclidienne de p par q : parfois "ça tombe juste" et $x = p/q$ n'a alors qu'un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule ; mais parfois non, et il faut alors poursuivre la division à l'infini. Quand ça ne tombe pas juste, le développement décimal n'est cependant pas quelconque : il est périodique à partir d'un certain rang (par exemple : $22/7 = 3,142857142857 \cdots$).

Certains nombres admettent 2 représentations décimales : ce sont les nombres *décimaux*, ceux qui peuvent s'écrire avec un nombre fini de chiffres non nuls après la virgule ; autrement dit, les nombres de la forme $x = \xi_0, 000 \cdots$ avec $\xi_0 \neq 0$ (les entiers non nuls) ou $x = \xi_0, \cdots \xi_N 000 \cdots$ avec $\xi_N \neq 0$. On sait bien en effet que $\xi_0, 000 \cdots = (\xi_0 - 1), 999 \cdots$ (par exemple : $0,999 \cdots = 1$) et $\xi_0, \cdots \xi_N 000 \cdots = \xi_0, \cdots (\xi_N - 1)999 \cdots$ (par exemple : $13,46999 \cdots = 13,47$). Pour tous les autres nombres, la représentation décimale est unique.

Au vu de ce qui précède, il est tout à fait légitime de définir un *nombre réel positif* comme étant une suite $(\xi_i)_{i \geqslant 0}$, où $\xi_0 \in \mathbb{N}$ et les ξ_i pour $i \geqslant 1$ sont des entiers compris entre 0 et 9 ; en convenant que certaines suites doivent être identifiés comme il a été dit. Au lieu de $(\xi_i)_{i \geqslant 0}$, on continuera d'écrire $\xi_0, \xi_1\xi_2\xi_3 \cdots$ Un *nombre réel négatif* est un nombre réel positif précédé d'un signe "$-$". Enfin, un *nombre réel* est quelque chose qui est ou bien un nombre réel positif, ou bien un nombre réel négatif. On convient que $0,000 \cdots = -0,000 \cdots$, de sorte que 0 est le seul nombre réel à la fois positif et négatif.

Avec cette définition des nombres réels arrive tout de suite la notion assez importante de *valeur absolue* : la valeur absolue d'un nombre réel x, notée $|x|$, est le nombre réel positif qu'on obtient en enlevant son signe à x. Autrement dit, $|a| = a$ et $|-a| = a$ pour tout nombre réel positif a.

Si $x = \xi_0, \xi_1\xi_2\xi_3\cdots$ et $x' = \xi'_0, \xi'_1\xi'_2\xi'_3\cdots$ sont deux nombres réels positifs tels que $x \neq x'$, on déclare que $x < x'$ si $\xi_{\mathbf{i}(x,x')} < \xi'_{\mathbf{i}(x,x')}$, où $\mathbf{i}(x,x')$ est le plus petit indice i tel que $\xi_i \neq \xi'_i$. C'est ce qu'on appelle l'ordre *lexicographique*, ou l'*ordre du dictionnaire.* (Il faut vérifier que cela ne dépend pas de la représentation décimale si x ou x' est décimal.) Cet ordre est *total* : entre deux nombres réels positifs x et x', il y en a toujours un qui est plus grand que l'autre (exo). Autres propriétés importantes : il n'y a pas de plus grand nombre réel positif ; et entre deux nombres réels positifs x et x' tels que $x < x'$, on peut toujours en trouver un troisième (exos). L'ordre est étendu à l'ensemble de tous les nombres réels comme on l'imagine : tout nombre négatif est plus petit que tout nombre positif, et un nombre négatif $-x$ est plus petit qu'un nombre négatif $-x'$ si et seulement si x est plus grand que x'. On peut alors envisager de représenter l'ensemble des nombres réels comme une ligne orientée de la gauche vers la droite où on a marqué une origine notée 0. Enfin, avec l'ordre viennent les *intervalles* (ouverts, fermés, semi-ouverts) : par exemple, si a, b sont des nombres réels, alors $[a, b[$ est l'ensemble des nombres réels x tels que $a \leqslant x < b$.

On dit qu'une suite (x_n) de nombre réels positifs *converge* vers un nombre réel positif x s'il existe des représentations décimales $x = \xi_0, \xi_1\xi_2\xi_3\cdots$ et $x_n = \xi_{0n}, \xi_{1n}\xi_{2n}\xi_{3n}\cdots$ telles que : pour tout $i \geqslant 0$, on a $\xi_{in} = \xi_i$ à partir d'un certain rang n_i. Par exemple, si $x = \xi_0, \xi_1\xi_2\xi_3\cdots$ est un nombre réel positif quelconque et si on pose $x_n := \xi_0, \xi_1\cdots\xi_n$, alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 1}$ converge vers x. Un autre exemple : si on pose $x_n := 0,99\cdots 9$ (n fois le chiffre 9), alors la suite (x_n) converge vers 1. On étend la définition aux suites de nombres réels négatifs comme on l'imagine, puis aux suites quelconques en réfléchissant un peu. On peut alors montrer qu'une suite $(x_n) \subseteq \mathbb{R}$ converge vers un nombre réel x si et seulement si la chose suivante a lieu : pour tout intervalle ouvert I contenant x, on a $x_n \in I$ à partir d'un certain rang. Une conséquence importante est que les inégalités larges se conservent par passage à la limite : si (x_n) converge vers x et si $x_n \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $x \leqslant b$ (exo).

On est maintenant en mesure de démontrer à peu près rigoureusement tous les résultats de base concernant les nombres réels.

Théorème de la limite monotone. *Toute suite de nombres réels croissante et majorée converge dans $\mathbb{R}$. De même, toute suite décroissante et minorée converge.*

Démonstration. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels croissante et majorée.

Supposons que l'un des x_n, disons x_N, soit positif. Alors tous les x_n avec $n \geqslant N$ sont positifs puisque (x_n) est croissante. Pour $n \geqslant N$, on peut donc écrire

$$x_n = \xi_{0n}, \xi_{1n}\xi_{2n}\xi_{3n}\cdots$$

Comme la suite (x_n) est croissante, la suite des parties entières (ξ_{0n}) est croissante ; et comme les ξ_{0n} sont des entiers, la suite (ξ_{0n}) est donc *stationnaire* : il existe un indice n_0 et un entier $\xi_0 \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0 \ : \ \xi_{0n} = \xi_0.$$

De même, la suite $(\xi_{1n})_{n\geqslant n_0}$ est croissante ; donc il existe un entier $\xi_1 \in [\![0, 9]\!]$ et un indice $n_1 \geqslant n_0$ tels que $\forall n \geqslant n_1 \ : \ \xi_{1n} = \xi_1$. Et ainsi de suite : on voit apparaitre de proche en proche des entiers $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ et des indices $n_0 \leqslant n_1 \leqslant n_2 \leqslant n_3$ tels que

$$\forall i \geqslant 0 \ \forall n \geqslant n_i \ : \ \xi_{in} = \xi_i.$$

Par conséquent, la suite (x_n) converge vers le nombre réel $x := \xi_0, \xi_1\xi_2\xi_3\cdots$

Si tous les x_n sont négatifs, alors on peut écrire $x_n = -\xi_{0n}, \xi_{1n}\xi_{2n}\xi_{3n}\cdots$, chaque suite $(\xi_{in})_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissantes, et on peut raisonner comme précédemment. □

Remarque. Le Théorème de la limite monotone permet de définir la somme et le produit de deux nombres réels positifs $x = \xi_0, \xi_1\xi_2\xi_3\cdots$ et $y = \eta_0, \eta_1\eta_2\eta_3\cdots$: en notant $x_n := \xi_0, \xi_1\cdots\xi_n$ et $y_n := \eta_0, \eta_1\cdots\eta_n$ les “approximations décimales à l'ordre n” de x et y, les suites $(x_n+y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(x_ny_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont croissantes et majorées, donc on peut poser $x+y := \lim(x_n+y_n)$ et $xy := \lim(x_ny_n)$. (La définition de x_n+y_n et x_ny_n ne pose pas de problème car x_n et y_n sont des nombres décimaux : on fait comme on a appris à l'école). Il faut cependant vérifier que cela ne dépend pas des représentations décimales de x et y. On montre également que les opérations sont commutatives, et compatibles avec l'ordre : si x, x', y, y' sont des nombres positifs tels que $x \leqslant x'$ et $y \leqslant y'$, alors $x+y \leqslant x'+y'$ et $xy \leqslant x'y'$.

De même, si x est un nombre réel positif $\neq 0$, on peut définir $1/x := \lim 1/x_n$ car $x_n \neq 0$ à partir d'un certain rang (donc $1/x_n$ est un nombre rationnel bien défini) et la suite $(1/x_n)$ est décroisante. Il faut quand même montrer que $1/x$ fait bien ce qu'on veut, à savoir que $x\cdot(1/x) = 1$. Pour cela, on écrit que $x_n\cdot(1/x_n) = 1$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $x \geqslant x_n$ et $1/x \leqslant 1/x_n$, on en déduit $x\cdot(1/x_n) \geqslant 1$ et $x_n\cdot(1/x) \leqslant 1$; donc $x\cdot(1/x) \geqslant 1$ et $x\cdot(1/x) \leqslant 1$ par passage à la limite, et donc $x\cdot(1/x) = 1$.

On peut également définir de cette façon la *différence* de deux nombres réels positifs $x = \xi_0, \xi_1\xi_2\cdots$ et $y = \eta_0, \eta_1\eta_2\cdots$ tels que $x < y$: en posant $x_n := \xi_0, \xi_1\cdots\xi_n$, le nombre $y-x$ est la limite de la suite $(y-x_n)_{n\geqslant 1}$, qui est décroissante et minorée par 0. (La définition de $y-x_n$ ne pose pas de problème car x_n n'a qu'un nombre fini de chiffres après la virgule : on fait à nouveau comme on a appris à l'école.) Comme pour $1/x$, on montre que $y-x$ fait bien ce qu'on veut – à savoir que $x+(y-x) = y$ – en écrivant que $x_n+(y-x_n) = y$ pour tout $n \geqslant 1$.

Il faut ensuite définir la somme, le produit et l'inverse pour des nombres réels de signe quelconque et démontrer les propriétés qu'on est en droit d'attendre (structure de corps commutatif, compatibilité des opérations avec l'ordre) ; ce qui se fait mais n'est pas très palpitant.

Une fois tout cela terminé, on montre sans difficulté que la définition de la convergence d'une suite de nombres réels qu'on a donnée plus haut est équivalente à celle que tout le monde connait (ε et δ).

Théorème des segments emboités. *Si $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante d'intervalles* fermés bornés *de $\mathbb{R}$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$. Si de plus $|I_n| \to 0$ quand $n\to\infty$, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est réduite à 1 point.*

Démonstration. Écrivons $I_n = [a_n, b_n]$. Comme les intervalles I_n forment une suite décroissante, on voit que la suite (a_n) est croissante et que la suite (b_n) est décroissante. De plus, (a_n) est majorée par b_0 et (b_n) est minorée par a_0. Donc les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes d'après le Théorème de la limite monotone, $a_n \to a$ et $b_n \to b$. On a $a_n \leqslant a \leqslant b \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; donc l'intervalle $[a, b]$ est contenu dans $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$, et en particulier $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \varnothing$. En fait $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [a, b]$, car si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $a_n \leqslant x \leqslant b$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $a \leqslant x \leqslant b$ par passage à la limite. Donc, si $|I_n| = b_n - a_n \to 0$ alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$ est réduite à 1 point, car $a = b$ dans ce cas. □

Propriété de la borne supérieure. *Tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ non-vide et majoré possède une borne supérieure dans $\mathbb{R}$. Tout ensemble non-vide et minoré possède une borne inférieure.*

Démonstration. Soit $A \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble non-vide et majoré. On veut montrer qu'il existe un *plus petit* nombre réel qui majore A. Pour cela, on va construire deux suites de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que

- les suites (a_n) et (b_n) sont *adjacentes* : (a_n) est croissante, (b_n) est décroissante, $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $b_n - a_n \to 0$ quand $n \to \infty$;
- $a_n \in A$ et b_n est un majorant de A, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On commence par choisir $a_0 \in A$ et un nombre $b_0 \in \mathbb{R}$ majorant A. On a donc $a_0 \leqslant b_0$. Soit m le milieu de $[a_0, b_0]$. Si m est encore un majorant de A, on pose $b_1 := m$ et $a_1 := a_0$; et si m n'est pas un majorant de A, on choisit $a_1 \in A$ tel que $a_1 > m$ et on pose $b_1 := b_0$. Dans un cas comme dans l'autre, on a $a_0 \leqslant a_1 \leqslant b_1 \leqslant b_0$ et $b_1 - a_1 \leqslant \frac{1}{2}(b_0 - a_0)$. On répète ce raisonnement en remplaçant a_0 par a_1 et b_0 par b_1, et on continue : on construit ainsi une suite croissante (a_n) d'éléments de A et une suite décroissante (b_n) de majorants de A telles que $b_n - a_n \leqslant 2^{-n}(b_0 - a_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

D'après le Théorème de la limite monotone, les deux suites adjacentes (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite, que l'on note M. Comme les b_n sont des majorants de A et que $b_n \to M$, le nombre M est un majorant de A (exo). Si $x \in \mathbb{R}$ vérifie $x < M$, alors on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $x < a_n < M$ puisque $a_n \to M$; et donc x n'est pas un majorant de A. Ainsi, M est bien le plus petit majorant de A. □

Critère de Cauchy. *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. La suite (u_k) converge dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $|u_q - u_p| \to 0$ quand $p, q \to \infty$.*

Démonstration. Si (u_k) converge, $u_k \to a \in \mathbb{R}$, alors $|u_q - u_p| \to 0$ quand $p, q \to \infty$ car $|u_q - u_p| \leqslant |u_q - a| + |a - u_p|$.

Inversement, supposons que $|u_q - u_p| \to 0$ quand $p, q \to \infty$. Alors la suite (u_k) est *bornée* (exo). Donc, pour $n \in \mathbb{N}$, on peut poser

$$a_n := \inf\{u_k;\ k \geqslant n\} \qquad \text{et} \qquad b_n := \sup\{u_k;\ k \geqslant n\}.$$

Par définition, la suite (a_n) est croissante, la suite (b_n) est décroissante, et $a_n \leqslant b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. De plus, comme $|u_q - u_p| \to 0$ quand $p, q \to \infty$, on voit que $b_n - a_n \to 0$ quand $n \to \infty$, car $b_n - a_n = \sup\{u_q - u_p;\ p, q \geqslant n\}$ (exo). Donc les suites (a_n) et (b_n) convergent et ont la même limite, que l'on notera u. Montrons que $u_k \to u$. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $b_N - a_N \leqslant \varepsilon$. Comme $a_N \leqslant u_k \leqslant b_N$ pour tout $k \geqslant N$ et comme $a_N \leqslant u \leqslant b_N$ également, on a donc $|u_k - u| \leqslant b_N - a_N \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant N$. □

Théorème de Bolzano-Weierstrass. *Toute suite* bornée *de nombres réels possède une sous-suite convergente.*

Démonstration. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ une suite bornée, et choisissons un intervalle fermé borné $I_0 = [a, b]$ tel que $u_k \in I_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Notons m le milieu de $[a, b]$. Comme il y a une infinité d'entiers k, l'un des intervalles $[a, m]$ ou $[m, b]$ contient une infinité de termes de la suite (u_k). On peut ainsi trouver un intervalle fermé borné $I_1 \subseteq I_0$ tel que $|I_1| = \frac{1}{2}|I_0|$ et $u_k \in I_1$ pour une infinité d'entiers k. En répétant ce raisonnement, on construit une suite décroissante $(I_n)_{n\geqslant 0}$ d'intervalles fermés bornés telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intervalle I_n contient une infinité de termes de la suite (u_k) et $|I_n| = 2^{-n}|I_0|$. On peut ensuite trouver une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $u_{k_n} \in I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: on commence par choisir k_0 tel que $u_{k_0} \in I_0$, puis $k_1 > k_0$ tel que $u_{k_1} \in I_1$, ce qui est possible puisqu'il y a une infinité d'entiers k tels que $u_k \in I_1$; et ainsi de suite.

Par le Théorème des segments emboîtés, il existe un et un seul point $a \in \mathbb{R}$ appartenant à tous les intervalles I_n. On a alors $|u_{k_n} - a| \leqslant |I_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ car a et u_{k_n} sont tous les deux dans I_n ; donc la sous-suite $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers a puisque $|I_n| \to 0$. $\square$

Exercice 1. Calculer $0,666\cdots + 0,444\cdots$

Exercice 2. Utiliser le Théorème des segments emboîtés pour montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Exercice 3. Soit I une partie de $\mathbb{R}$. Montrer que I est un intervalle si et seulement si la chose suivante a lieu : quels que soient $u, v \in I$ tels que $u < v$, on a $]u, v[\subseteq I$.

Exercice 4. Démontrer le critère de Cauchy en utilisant le Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 5. Montrer que tout intervalle non trivial $I \subseteq \mathbb{R}$ contient un point rationnel et un point irrationnel. (Pour montrer que I contient un rationnel, choisir $a, b \in I$ tels que $a < b$ et un entier $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{q} < b - a$, puis considérer le plus grand entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $\frac{p}{q} < b$.)

Chapitre 2

Espaces métriques et espaces vectoriels normés

1. Distances et normes

1.1. Distances, espaces métriques. Étant donné deux objets mathématiques u et v de même nature (deux nombres, deux matrices, deux fonctions, ...), il est très naturel de se demander si u et v sont "proches" ou "éloignés" l'un de l'autre en un certain sens, et de vouloir mesurer leur degré de proximité par un nombre $d(u,v)$ qu'on appellerait la "distance entre u et v". Cela conduit à la définition très générale suivante.

DÉFINITION 1.1. *Soit E un ensemble non-vide. Une* ***distance*** *sur E est une fonction $d : E \times E \to \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :*

(o) $d(u,v) \geqslant 0$ *pour tous* $u, v \in E$, *et* $d(u,u) = 0$ *;*

(i) $d(u,v) = 0$ seulement *pour* $u = v$ (***séparation des points***) *;*

(ii) $d(u,v) = d(v,u)$ *pour tous* $u, v \in E$ (***symétrie***) *;*

(iii) $d(u,w) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$ *pour tous* $u, v, w \in E$ (***inégalité triangulaire***).

EXEMPLE 1. On définit une distance sur $\mathbb{R}$ en posant $d(u,v) := |v - u|$. Cette distance s'appelle la *distance usuelle* sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. La propriété (o) est évidente. La séparation des points (i) vient du fait que $|x| = 0$ seulement pour $x = 0$. La symétrie vient du fait que $|x| = |-x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $d(v,u) = |u - v| = |-(v-u)| = |v - u| = d(u,v)$. Et l'inégalité triangulaire vient du fait que $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $d(u,w) = |w - u| = |(w - v) + (v - u)| \leqslant |v - u| + |v - u| = d(u,v) + d(v,w)$. □

Exercice. Soit E un ensemble quelconque, et soit $\phi : E \to \mathbb{R}$. À quelle condition sur ϕ définit-on une distance sur E en posant $d(u,v) := |\phi(v) - \phi(u)|$?

EXEMPLE 2. Soit E un *plan euclidien*, par exemple $E := \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. On définit une distance sur E en notant $d(u,v)$ la longueur du segment $[u,v]$. L'inégalité triangulaire pour cette distance signifie que "le plus court chemin entre deux points est la ligne droite".

EXEMPLE 2′. On définit une distance sur $\mathbb{C}$ en posant $d(u,v) := |v - u|$, où $|z|$ est le module du nombre complexe z. Cette distance s'appelle la *distance usuelle* sur $\mathbb{C}$.

Démonstration. En identifiant $\mathbb{C}$ à $\mathbb{R}^2$, c'est la distance de l'Exemple 2. □

EXEMPLE 3. Soit $E := \mathbb{T} =: \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. On définit une distance sur $\mathbb{T}$ en notant $d(u,v)$ la longueur du plus petit arc de cercle joignant u et v.

Démonstration. Exo. □

Exemple 4. Soit E un ensemble quelconque (non-vide). On définit une distance sur E en posant

$$d(u,v) := \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ 1 & \text{si } u = v \end{cases}$$

On dit que d est la **distance discrète** sur E.

Démonstration. Seule l'inégalité triangulaire demande une preuve ; soient donc $u,v,w \in E$. Si $u = w$, alors $d(u,w) = 0 \leqslant d(u,v) + d(v,w)$. Si $u \neq w$, alors ou bien $u \neq v$ et donc $d(u,v) = 1$, ou bien $v \neq w$ et donc $d(v,w) = 1$. Dans les 2 cas, $d(u,w) = 1 \leqslant \max\big(d(u,v), d(v,w)\big) \leqslant d(u,v) + d(v,w)$. □

Remarque 1. La distance discrète est importante car elle fournit souvent un contre-exemple facile lorsqu'on se demande si une propriété générale est vraie pour n'importe quelle distance.

Remarque 2. La démonstration précédente a montré que distance discrète vérifie une forme "renforcée" de l'inégalité triangulaire : pour tous $u,v,w \in E$, on a

$$d(u,w) \leqslant \max\big(d(u,v), d(v,w)\big).$$

De façon générale, une distance d vérifiant cette propriété est dite **ultramétrique**

Exercice 1.2. Soit $\mathbf{C} := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble de toutes les suites de 0 et de 1. Montrer qu'on définit une distance ultramétrique sur $\mathbf{C}$ en posant $\mathbf{d}(u,u) := 0$ et, pour $u = (u_i)_{i\geqslant 0}$ et $v = (v_i)_{i\geqslant 0}$ différents, $\mathbf{d}(u,v) := 2^{-\mathbf{i}(u,v)}$, où $\mathbf{i}(u,v)$ est le plus petit indice i tel que $u_i \neq v_i$.

Exemple 5. Soit E l'ensemble des stations de métro d'une grande ville non spécifiée. On définit une distance sur E en notant $d(u,v)$ la longueur du plus court trajet en métro pour aller de u à v (longueur mesurée en "nombre d'arrêts").

Démonstration. C'est un exo facile. □

La remarque suivante est très souvent utile.

Remarque 1.3. Si d est une distance sur un ensemble E, alors on a pour tous $u,v,w \in E$:

$$d(u,v) \geqslant \big|d(u,w) - d(w,v)\big|.$$

Cette inégalité est parfois appelée l'**inégalité triangulaire réarrangée**.

Démonstration. On a $d(u,w) - d(w,v) = d(u,w) - d(v,w) \leqslant d(u,v)$ d'après l'inégalité triangulaire ; et échangeant les rôles de u et v, on obtient $d(v,w) - d(w,u) \leqslant d(v,u) = d(u,v)$. D'où le résultat. □

Définition 1.4. *Un* ***espace métrique*** *est un ensemble non-vide E muni d'une distance d.*

Convention. "Par défaut", toutes les distances s'appelleront d, même quand on considérera plusieurs espaces métriques $E, F, G, \dots$ en même temps. S'il y a vraiment lieu de distinguer les distances sur des espaces métriques différents, on écrira par exemple $d_E, d_F, d_G, \dots$

1.2. Normes, espaces vectoriels normés.

DÉFINITION 1.5. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Une **norme** sur E est une fonction de E dans $\mathbb{R}$, notée en général $u \mapsto \|u\|$, vérifiant les propriétés suivantes.*

(o) $\|u\| \geqslant 0$ *pour tout* $u \in E$, *et* $\|0\| = 0$ *;*

(i) $\|u\| = 0$ seulement *pour* $u = 0$ *;*

(ii) $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$ *pour tout* $u \in E$ *et tout* $\lambda \in \mathbb{K}$ *(**homogénéité**) ;*

(iii) $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ *pour tous* $u, v \in E$ *(**inégalité triangulaire**).*

Il y a une similarité évidente entre la définition d'une norme et celle d'une distance. Le lien entre les deux notions est donné par le fait suivant.

FAIT 1.6. *Si $\|\cdot\|$ est une norme sur un espace vectoriel E, on définit une distance sur E en posant $d(u, v) := \|v - u\|$. On dit que d est la **distance associée à la norme** $\|\cdot\|$.*

Démonstration. C'est exactement la même que celle donnée pour la distance usuelle $d(u, v) = |v - u|$ sur $\mathbb{R}$. (Pour la symétrie de d, on n'a pas besoin de toute la force de la propriété d'homogénéité (ii) : il suffit de savoir que $\|-u\| = \|u\|$ pour tout $u \in E$.) ☐

EXERCICE. Soit d une distance sur un espace vectoriel E. Montrer que d est associée à une norme si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $d(u + h, v + h) = d(u, v)$ pour tous $u, v, h \in E$ (*invariance par translations*) ;
- $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|\, d(u, v)$ pour tous $u, v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homogénéité*).

EXEMPLE 1. La valeur absolue est une norme sur $\mathbb{R}$, et le module est une norme sur $\mathbb{C}$. Les distances associées sont les distances usuelles.

EXEMPLE 2. Si E est un espace vectoriel muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, on définit une norme sur E en posant $\|u\| := \sqrt{\langle u, u\rangle}$. Outre la définition, la norme et le produit scalaire sont liés par l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** :

$$|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\| \qquad \text{pour tous } u, v \in E.$$

Démonstration. Les propriétés (o), (i) et (ii) sont à peu près évidentes.

L'inégalité triangulaire découle de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : si $u, v \in E$, alors

$$\begin{aligned} \|u + v\|^2 &= \|u\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,\big(\langle u, v\rangle\big) + \|v\|^2 \\ &\leqslant \|u\|^2 + 2\,\big|\langle u, v\rangle\big| + \|v\|^2 \\ &\leqslant \|u\|^2 + 2\,\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \qquad \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &= \big(\|u\| + \|v\|\big)^2; \end{aligned}$$

donc $\|u + v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$.

Démontrons maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soient $u, v \in E$. Si $v = 0$, l'inégalité est évidente ; on suppose donc que $v \neq 0$. Si on pose

$$p := \left\langle u, \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \frac{v}{\|v\|} = \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\, v,$$

on voit (exo) que $\langle p, v\rangle = \langle u, v\rangle$. Donc $\langle u - p, v\rangle = 0$, *i.e.* $u - p$ est orthogonal à v. (Le vecteur p est le *projeté orthogonal* de u sur l'espace vectoriel engendré par v). Comme p est colinéaire à v, on a donc $\langle u - p, p\rangle = 0$. En développant $\|u\|^2 = \|(u - p) + p\|^2 =$

$\langle (u-p)+p, (u-p)+p\rangle$, on en déduit que $\|u\|^2 = \|u-p\|^2 + \|p\|^2$ (c'est le **Théorème de Pythagore**...). En particulier $\|u\| \geqslant \|p\|$, autrement dit

$$\left\| \frac{\langle u, v\rangle}{\|v\|^2}\, v \right\| \leqslant \|u\|.$$

Par homogénéité, cela s'écrit encore $\frac{|\langle u,v\rangle|}{\|v\|^2}\,\|v\| \leqslant \|u\|$; d'où $|\langle u, v\rangle| \leqslant \|u\|\,\|v\|$. □

Exemple 2′. La norme sur $\mathbb{R}^N$ associée au produit scalaire usuel s'appelle la **norme euclidienne** sur $\mathbb{R}^N$, et se note $\|\cdot\|_2$. Si $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$, alors

$$\|u\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{N} u_j^2 \right)^{1/2}.$$

Si $N = 2$, la norme euclidienne définit la distance usuelle sur le plan euclidien $\mathbb{R}^2$.

Exemple 3. On définit des normes sur $\mathbb{K}^N$ en posant, pour $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{K}^N$:

$$\|u\|_1 := \sum_{j=1}^{N} |u_j| \qquad \text{et} \qquad \|u\|_\infty := \max\big(|u_1|, \dots, |u_N|\big).$$

Démonstration. C'est un exo à savoir faire instantanément. □

Exemple 4. Soit I un ensemble quelconque. On note $\ell^\infty(I, \mathbb{K})$, ou simplement $\ell^\infty(I)$, l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions *bornées* $u : I \to \mathbb{K}$. On définit une norme sur $\ell^\infty(I)$ en posant

$$\|u\|_\infty := \sup\big\{|u(t)|;\ t \in I\big\}.$$

Démonstration. C'est à nouveau un exo à savoir faire les yeux fermés. (Être un peu soigneux pour l'inégalité triangulaire.) □

Remarque. Les cas particuliers suivants sont importants :

- si $I = [\![1, N]\!]$, alors $\ell^\infty(I)$ s'identifie à $\mathbb{K}^N$ (une fonction $u : [\![1, N]\!] \to \mathbb{K}$ s'identifie au vecteur $(u(1), \dots, u(N)) \in \mathbb{K}^N$), et $\|u\|_\infty = \max\big(|u_1|, \dots, |u_N|\big)$ pour $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{K}^N$;
- si $I = \mathbb{N}$, alors $\ell^\infty(I)$ est l'ensemble de toutes les *suites* bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathbb{K}$; et pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ on a $\|u\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Exemple 5. Si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, la distance discrète sur E n'est *pas* associée à une norme.

Démonstration. Notons d la distance discrète sur E. Soit e un vecteur non nul de E. Alors $d(e, 0) = 1$, et aussi $d(2e, 0) = 1$ puisque $2e \neq 0$; mais si d était associée à une norme $\|\cdot\|$, on devrait avoir $d(2e, 0) = \|2e - 0\| = \|2e\| = 2\|e\| = 2d(e, 0) = 2$. □

Les deux inégalités suivantes sont importantes.

Remarque 1. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur un espace vectoriel E, alors on a pour tous $u, v \in E$:

$$\|u - v\| \leqslant \|u\| + \|v\| \qquad \text{et} \qquad \|v - u\| \geqslant \big|\|v\| - \|u\|\big|.$$

Démonstration. En notant d la distance associée à $\|\cdot\|$, la première inégalité est simplement l'inégalité triangulaire $d(v,u)=d(u,v)\leqslant d(u,0)+d(0,v)$; et la deuxième est l'inégalité triangulaire réarrangée $d(u,v)\geqslant \big|d(u,0)-d(0,v)\big|$. □

Il est également très important de retenir qu'on peut toujours "normaliser" un vecteur non nul de E :

Remarque 2. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E, on a pour tout $u\neq 0$ dans E :

$$\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\|=1.$$

Définition 1.7. *Un* ***espace vectoriel normé*** *est un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$. On écrira souvent "evn" au lieu de "espace vectoriel normé".*

Remarque. Un espace vectoriel normé sera toujours implicitement muni de la distance associée à sa norme. Un evn est donc en particulier un espace métrique !

Convention. "Par défaut", toutes les normes s'appelleront $\|\cdot\|$; et s'il y a lieu de différencier explicitement les normes sur des evn $E,F,G,\dots$, on écrira par exemple $\|\cdot\|_E$, $\|\cdot\|_F$, $\|\cdot\|_G$, ...

1.3. Sous-espaces et produits. Les remarques qui suivent sont à peu près évidentes, mais cependant très importantes.

Remarque 1. Si (E,d) est un espace métrique et si $A\subseteq E$, alors la restriction de d à $A\times A$ est une distance sur A, qu'on appelle la distance **induite** par d sur A. Donc, A est lui même un espace métrique pour son propre compte.

Remarque 1′. De même, si E est un espace vectoriel normé, alors tout sous-espace vectoriel $F\subseteq E$ devient un espace vectoriel normé lorsqu'on le munit de la norme induite par celle de E

Exemple. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a<b$. Notons $\mathcal{C}([a,b])$ l'ensemble des fonctions *continues* $u:[a,b]\to\mathbb{K}$. Comme toute fonction continue sur $[a,b]$ est *bornée*, $\mathcal{C}([a,b])$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty([a,b])$, et donc un espace vectoriel normé quand on le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque 2. Soient $(E_1,\|\cdot\|_{E_1}),\dots,(E_N,\|\cdot\|_{E_N})$ des espaces vectoriels normés, et soit $E:=E_1\times\cdots\times E_N$. On définit une norme sur E en posant, pour $u=\big(u(1),\dots,u(N)\big)\in E=E_1\times\cdots\times E_N$:

$$\|u\|:=\max\big(\|u(1)\|_{E_1},\dots,\|u(N)\|_{E_n}\big).$$

On dit que cette norme est la **norme produit** associée aux normes $\|\cdot\|_{E_1},\dots,\|\cdot\|_{E_N}$.

Exemple. La norme produit sur $\mathbb{R}^N=\mathbb{R}\times\cdots\times\mathbb{R}$ est la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Remarque 2′. De même, si $(E_1,d_1),\dots,(E_N,d_N)$ sont des espaces métriques, on définit une distance sur $E:=E_1\times\cdots\times E_N$ en posant pour $u=(u(1),\dots,u(N))$ et $v=(v(1),\dots,v(N))$ dans E :

$$d(u,v):=\max\big(d_1(u(1),v(1)),\dots,d_N(u(N),v(N))\big).$$

Cette distance est la **distance produit** associée aux distances $d_1,\dots,d_N$. Si les E_i sont des espaces vectoriels et si les distances d_i proviennent de normes, alors d provient de la norme produit associée.

Convention. Chaque fois qu'on manipulera un produit d'espaces métriques ou d'evn, on supposera implicitement qu'il est muni de la distance produit ou de la norme produit.

1.4. Vocabulaire géométrique. Dans ce qui suit, (E, d) est un espace métrique.

(1) Si $a \in E$ et $r \geqslant 0$, on pose

$$B(a, r) := \{u \in E;\ d(u, a) < r\} \qquad \text{et} \qquad \overline{B}(a, r) := \{u \in E;\ d(u, a) \leqslant r\}.$$

On dit que $B(a, r)$ est la **boule ouverte** de centre a et de rayon r, et que $\overline{B}(a, r)$ est la **boule fermée** de centre a et de rayon r.

Remarque. Le cas $r = 0$ est un peu particulier : on a $B(a, 0) = \emptyset$ et $\overline{B}(a, 0) = \{a\}$.

Exemple 1. Si $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, alors $B(a, r)$ est l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$, et $\overline{B}(a, r)$ est l'intervalle fermé $[a - r, a + r]$.

Exemple 2. Si $E = \mathbb{C}$ muni de la distance usuelle, alors $B(a, r)$ et $\overline{B}(a, r)$ sont des *disques* centrés en a et de rayon r. Plus précisément, $B(a, r)$ est le disque sans sa circonférence, et $\overline{B}(a, r)$ est le disque avec sa circonférence.

Exercice. Dessiner la boule $B(0, r)$ dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Même question avec la norme $\|\cdot\|_1$.

(2) Si A est une partie non-vide de E, on pose pour tout $x \in E$:

$$\text{dist}(x, A) := \inf \{d(x, u);\ u \in A\}.$$

On dit que $\text{dist}(x, A)$ est la **distance de x à l'ensemble A**.

Remarque 1. Il est évident que si $x \in A$, alors $\text{dist}(x, A) = 0$ (prendre $u := x$) ; mais la réciproque est fausse en général.

Remarque 2. La distance de x n'est pas nécessairement "atteinte" : il n'y a aucune raison *a priori* pour qu'il existe un point $a \in A$ tel que $\text{dist}(x, A) = d(x, a)$.

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}$, on a $\text{dist}\big(2,]-1, 1[\big) = 1$ et $\text{dist}\big(1,]-1, 1[\big) = 0$. Dans les 2 cas, la distance n'est pas atteinte.

(3) Pour toute partie non-vide A de E, on pose

$$\text{diam}(A) := \sup \big\{d(u, v);\ u, v \in A\big\}.$$

On dit que $\text{diam}(A)$ est le **diamètre** de l'ensemble A. La borne supérieure est ici prise dans $[0, \infty]$: on peut très bien avoir $\text{diam}(A) = \infty$. Moralement, $\text{diam}(A)$ est "la plus grande distance possible entre deux points de A" ; mais cette plus grande distance peut très bien ne pas exister.

Exemple 1. Prenons pour E un plan euclidien. Si A est un disque de rayon r, alors $\text{diam}(A) = 2r$. Si $A \subseteq E$ est un carré de côté a, alors $\text{diam}(A) = \sqrt{2}\, a$.

Exemple 2. Dans $E = \mathbb{R}$, on a $\text{diam}\big(]-2, 3[\big) = 5$ et $\text{diam}\big(]0, \infty[\big) = \infty$.

Exercice. Montrer que pour tout ensemble non-vide $A \subseteq \mathbb{R}$, on a

$$\text{diam}(A) = \sup A - \inf A.$$

(Avec les conventions évidentes lorsque $\sup A = \infty$ ou $\inf A = -\infty$.)

(4) Supposons que E soit un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble $A \subseteq E$ est **borné** s'il existe une constante $M < \infty$ telle que $\forall u \in A \ : \ \|u\| \leqslant M$.

Exercice 1. Montrer les équivalences suivantes :

$$A \text{ borné} \iff \operatorname{diam}(A) < \infty \iff A \text{ est contenu dans une boule.}$$

Remarque. L'intérêt du résultat de cet exercice est qu'il permet de définir les ensembles bornés dans un espace métrique (E, d) quelconque : un ensemble $A \subseteq E$ peut être déclaré *borné* si $\operatorname{diam}(A) < \infty$. Cependant, on ne parlera jamais d'ensembles bornés dans un espace métrique qui n'est pas un evn.

Exercice 2. Une application $u : I \to F$ d'un ensemble I dans un evn F est dite **bornée** si l'ensemble $u(I)$ est borné dans F ; autrement dit s'il existe une constante M telle que $\forall t \in I \ : \ \|u(t)\| \leqslant M$. L'ensemble de toutes les applications bornées $u : I \to F$ se note $\ell^\infty(I, F)$. Montrer que $\ell^\infty(I, F)$ est un espace vectoriel, et qu'on définit une norme sur $\ell^\infty(I, F)$ en posant $\|u\|_\infty := \sup\{\|u(t)\|;\ t \in I\}$.

1.5. Isométries.

DÉFINITION 1.8. *Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to E'$ est une **isométrie** si elle préserve les distances :*

$$d'\big(f(u), f(v)\big) = d(u, v) \qquad \textit{pour tous } u, v \in E.$$

Exemple 1. Dans un plan euclidien, les translations, les rotations et les symétries orthogonales sont des isométries.

Exemple 2. L'injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une isométrie (pour les distances usuelles).

Exemple 3. L'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (x, 0)$ est une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

EXERCICE. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $T : E \to F$ une application *linéaire*. Montrer que T est une isométrie si et seulement si $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Remarque 1. Une isométrie est toujours *injective* (mais elle n'a pas de raison d'être surjective).

Démonstration. C'est évident : si $f(u) = f(v)$, alors $d(u, v) = d'(f(u), f(v)) = 0$ et donc $u = v$. $\square$

Remarque 2. Si $f : E \to E'$ est une isométrie *bijective*, alors $f^{-1} : E' \to E$ est aussi une isométrie.

Démonstration. C'est un exo très facile. $\square$

DÉFINITION 1.9. *On dit que deux espaces métriques E et E' sont **isométriques** s'il existe une isométrie bijective entre E et E' ; autrement dit, si E et E' sont "indistinguables" en tant qu'espaces métriques.*

Exemple 1. $\mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne est isométrique à $\mathbb{C}$ muni de la distance usuelle, *via* l'application $(x, y) \mapsto x + iy$.

Exemple 2. $\mathbb{R}$ muni de la distance usuelle est isométrique à $\{(x,0);\ x\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$ muni de la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$, *via* l'application $x\mapsto(x,0)$.

Exemple 3. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie N sur $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors E est linéairement isométrique à $\mathbb{K}^N$ muni d'une certaine norme.

Démonstration. Soit $J:E\to\mathbb{K}^N$ un isomorphisme linéaire. Alors la formule $\|x\|_J:=\|J^{-1}(x)\|$ définit une norme sur $\mathbb{K}^N$ (exo) ; et par définition, J est une isométrie (linéaire !) de E sur $(\mathbb{K}^N,\|\cdot\|_J)$. □

Le résultat suivant est *a priori* surprenant ; et il est "philosophiquement" très intéressant car il signifie que les espaces vectoriels normés ne sont d'une certaine façon pas moins généraux que les espaces métriques généraux.

THÉORÈME 1.10. *Tout espace métrique est isométrique à une partie d'un espace vectoriel normé ; plus précisément, à une partie d'un espace* $\ell^\infty(I)$.

Démonstration. Soit (E,d) un espace métrique quelconque. On va montrer que (E,d) est isométrique à une partie de $\ell^\infty(E)$.

Fixons un point $a\in E$. Pour $u\in E$, on notera $\Phi_u:E\to\mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\Phi_u(x):=d(u,x)-d(x,a).$$

FAIT 1. Toutes les fonctions Φ_u sont *bornées.*

Preuve du Fait 1. Fixons $u\in E$. D'après l'inégalité triangulaire réarrangée, on a $|\Phi_u(x)|=|d(u,x)-d(x,a)|\leqslant d(a,u)$ pour tout $x\in E$; donc Φ_u est bornée avec $\|\Phi_u\|_\infty\leqslant d(a,u)$. □

Par le Fait 1, on peut définir une application $f:E\to\ell^\infty(E)$ par

$$f(u):=\Phi_u.$$

FAIT 2. L'application f est une isométrie de (E,d) dans $\ell^\infty(E)$.

Preuve du Fait 2. Il s'agit de montrer que pour tous $u,v\in E$, on a

$$\|\Phi_v-\Phi_u\|_\infty=d(u,v).$$

Si $x\in E$, alors

$$\begin{aligned}\big|\Phi_v(x)-\Phi_u(x)\big| &= \Big|\big(d(v,x)-d(x,a)\big)-\big(d(u,x)-d(x,a)\big)\Big|\\ &= \big|d(v,x)-d(x,u)\big|\\ &\leqslant d(u,v)\,.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout $x\in E$, on en déduit $\|\Phi_v-\Phi_u\|_\infty\leqslant d(u,v)$.

Inversement, on a $\|\Phi_v-\Phi_u\|_\infty\geqslant\Phi_v(u)-\Phi_u(u)=d(v,u)-d(u,u)=d(u,v)$. D'où finalement $\|\Phi_v-\Phi_u\|_\infty=d(u,v)$. □

Par le Fait 2, la preuve du théorème est maintenant terminée : si on pose $\widetilde{E}:=f(E)=\{\Phi_u;\ u\in E\}\subseteq\ell^\infty(E)$, alors E est isométrique à $\widetilde{E}$. □

2. Normes équivalentes ; distances Lipschitz-équivalentes

DÉFINITION 2.1. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On dit que deux normes $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|$ sur E sont* ***équivalentes*** *s'il existe deux constantes $C, C' < \infty$ telles que $\|x\| \leqslant C\, \|x\|'$ et $\|x\|' \leqslant C'\, \|x\|$ pour tout $x \in E$.*

Remarque. Comme le nom le suggère fortement, la relation "être équivalentes" est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E. (La preuve est laissée en exo.)

Exemple 1. Sur $\mathbb{R}^N$, les normes $\| \cdot \|_1$, $\| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont équivalentes.

Démonstration. Soit $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$. On a

$$|u_j| = (u_j^2)^{1/2} \leqslant (u_1^2 + \cdots + u_N^2)^{1/2} = \|u\|_2$$

pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, donc $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_2$. De plus,

$$\|u\|_1^2 = \left(\sum_{j=1}^N |u_j| \right)^2 = \sum_{j=1}^N u_j^2 + \sum_{\{(k,k');\, k \neq k'\}} |u_k|\, |u_{k'}| \geqslant \sum_{j=1}^N u_j^2 = \|u\|_2^2 ;$$

donc $\|u\|_1 \geqslant \|u\|_2$. Enfin, $\|u\|_1 = \sum_{j=1}^N |u_j| \leqslant N\, \|u\|_\infty$.

Ainsi, on a obtenu $\|u\|_\infty \leqslant \|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \leqslant N\|u\|_\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}^N$; d'où l'équivalence des trois normes. □

Exemple 2. Soit $\| \cdot \|_1$ la norme sur $E := \mathcal{C}([a, b])$ définie par $\|u\|_1 := \int_a^b |u(t)|\, dt$. (Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.) On a $\| \cdot \|_1 \leqslant (b - a)\, \| \cdot \|_\infty$, mais les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Démonstration. L'inégalité $\| \cdot \|_1 \leqslant (b - a)\, \| \cdot \|_\infty$ est laissée en exo (très facile).

Notons m le milieu de l'intervalle $[a, b]$. Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, soit $u_k \in \mathcal{C}([a, b])$ la fonction définie comme suit : u_k est nulle en dehors de $[m - \frac{1}{k}, m + \frac{1}{k}]$, $u_k(m) = k$ et u_k est affine sur les intervalles $[m - \frac{1}{k}, m]$ et $[m, m + \frac{1}{k}]$. (Dessiner le graphe de u_k.) On a $\|u_k\|_\infty = k$, et $\|u_k\|_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{k} \times k = 1$. Ainsi, on a trouvé une suite de fonctions (u_k) telle que $\|u_k\|_1 = 1$ pour tout k et $\|u_k\|_\infty \to \infty$; ce qui montre qu'il ne peut pas exister de constante C telle que $\| \cdot \|_\infty \leqslant C\, \| \cdot \|_1$. □

Exercice. Soit E un espace vectoriel, et soient $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ deux normes sur E. Montrer que si $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ ne sont pas équivalentes, alors ou bien il existe une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $\|u_k\| \to 0$ et $\|u_k\|' \to \infty$, ou bien il existe une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $\|u_k\| \to \infty$ et $\|u_k\|' \to 0$.

Le résultat suivant est très important et très facile à utiliser. La preuve, en revanche, est un peu délicate.

THÉORÈME 2.2. *Si E est un espace vectoriel* de dimension finie, *alors toutes les normes sur E sont équivalentes.*

Démonstration. Dans ce qui suit, on supposera que $E \neq \{0\}$ (il n'y a rien à démontrer si $E = \{0\}$). On commence par se simplifier un peu la vie :

FAIT 0. Il suffit de montrer que toutes les normes sur $\mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$ sont équivalentes.

Preuve du Fait 0. En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, E est isomorphe à $\mathbb{R}^N$ pour un certain entier $N \geqslant 1$. Si on fixe un isomorphisme $\mathbb{R}$-linéaire $J : E \to \mathbb{R}^N$, alors à toute norme $\| \cdot \|$ sur E correspond une norme $\| \cdot \|_J$ sur $\mathbb{R}^N$, donnée par la formule $\|u\|_J := \|J^{-1}(u)\|$. On a ainsi $\|x\| = \|J(x)\|_J$; donc il est clair que si $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sont deux normes sur E et si les normes $\| \cdot \|_J$ et $\| \cdot \|'_J$ sont équivalentes, alors $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sont équivalentes. Ceci démontre le Fait. □

On va maintenant montrer que toutes les normes sur $\mathbb{R}^N$ sont équivalentes à la norme $\| \cdot \|_\infty$.

FAIT 1. Si $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$, il existe une constante $C < \infty$ telle que $\| \cdot \| \leqslant C \| \cdot \|_\infty$.

Preuve du Fait 1. Si $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ et si on note $(e_1, \dots, e_N)$ la base canonique de $\mathbb{R}^N$, alors

$$\begin{aligned} \|u\| &= \left\| \sum_{j=1}^N u_j\, e_j \right\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^N \|u_j\, e_j\| \\ &= \sum_{j=1}^N |u_j|\, \|e_j\| \leqslant \|u\|_\infty \times \sum_{j=1}^N \|e_j\|\,, \end{aligned}$$

puisque $|u_j| \leqslant \|u\|_\infty$ pour tout j. On obtient donc le résultat souhaité avec $C := \sum_{j=1}^N \|e_j\|$ (qui est bien une constante indépendante de $u \in \mathbb{R}^N$). □

FAIT 2. Si $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$, il existe une constante $c > 0$ telle que $\| \cdot \| \geqslant c \| \cdot \|_\infty$.

Preuve du Fait 2. C'est la partie "difficile". On va procéder *par récurrence* sur la dimension N.

Pour $N = 1$, ce n'est pas compliqué : si $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, alors $\|u\| = \|u \times 1\| = |u| \times \|1\| = c\,\|u\|_\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}^1$, où $c := \|1\|$ est bien *strictement* positif car $1 \neq 0$.

Supposons le résultat vrai pour un certain $N \geqslant 1$, et démontrons le pour $N+1$. Soit donc $\| \cdot \|$ une norme sur $\mathbb{R}^{N+1}$. On va raisonner par l'absurde en supposant qu'il *n'existe pas* de constante $c > 0$ telle que $\| \cdot \| \geqslant c \| \cdot \|_\infty$. Il s'agit d'obtenir une contradiction. Dans ce qui suit, on écrira les vecteurs de $\mathbb{R}^{N+1}$ sous la forme $u = \big(u(1), \dots, u(N+1)\big)$.

ÉTAPE 1. On peut trouver une suite $(v_k) \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ et un indice $j_0 \in [\![1, N+1]\!]$ tels que $v_k(j_0) = 1$ pour tout k et $\|v_k\| \to 0$ quand $k \to \infty$.

Démonstration. Par hypothèse, on peut pour tout $c > 0$ trouver un vecteur $u^c \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $\|u^c\| < c\,\|u^c\|_\infty$. On a $\|u^c\|_\infty \neq 0$ (d'après l'inégalité stricte), donc on peut définir $v^c := \frac{u^c}{\|u^c\|_\infty} \cdot$ Alors $\|v^c\|_\infty = 1$ et

$$\|v^c\| = \frac{1}{\|u^c\|_\infty} \times \|u^c\| < c.$$

En prenant $c := 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en posant $v_k := v^{1/k}$, on obtient ainsi une suite $(v_k) \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ telle que $\|v_k\|_\infty = 1$ pour tout k et $\|v_k\| \to 0$.

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, on peut choisir pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ un indice $i_k \in [\![1, N+1]\!]$ tel que $|v_k(i_k)| = \|v_k\|_\infty = 1$. Comme il y a une infinité d'entiers k et un nombre fini d'indices $i \in [\![1, N+1]\!]$, il existe au moins un $j_0 \in [\![1, N+1]\!]$ tel que $i_k = j_0$ pour une infinité de k. Il existe donc une sous-suite (v'_k) de (v_k) telle que $|v'_k(j_0)| = 1$ pour tout k, autrement dit $v'_k(j_0) = \pm 1$. De même, il y a une infinité de k tels que $v'_k(j_0) = 1$, ou bien une infinité de k tels que $v'_k(j_0) = -1$. Quitte à changer v'_k en $-v_k$, on peut supposer qu'on est dans le premier cas. On obtient donc une sous-suite (v''_k) de (v'_k) (et donc une sous-suite de (v_k)) telle que $v''_k(j_0) = 1$ pour tout k. On change alors le nom de v''_k, qu'on appelle à nouveau v_k. □

Étape 2. Il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $v \neq 0$ et $\|v_k - v\|_\infty \to 0$.

Démonstration. Le point clé est le suivant : si $p, q \in \mathbb{N}$, alors $(v_q - v_p)(j_0) = 0$. *Donc*, on peut considérer les $v_q - v_p$ comme des vecteur de $\mathbb{R}^N$ en identifiant $\mathbb{R}^N$ au sous-espace

$$E_{j_0} := \left\{ u \in \mathbb{R}^{N+1};\ u(j_0) = 0 \right\} \subseteq \mathbb{R}^{N+1},$$

qui est de dimension N. Par hypothèse de récurrence, il existe une constante $c' > 0$ telle que $\|u\| \geqslant c' \,\|u\|_\infty$ pour tout $u \in E_{j_0}$. En prenant $u := v_q - v_p$, on en déduit qu'on a

$$|v_q(j) - v_p(j)| \leqslant (1/c')\,\|v_q - v_p\| \leqslant (1/c')\,\big(\|v_q\| + \|v_p\|\big)$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \neq j_0$. Comme $\|v_p\| + \|v_q\| \to 0$ quand $p, q \to \infty$, on voit ainsi que pour tout $j \neq j_0$, la suite de nombres réels $(v_k(j))_{k\in\mathbb{N}}$ vérifie le *critère de Cauchy*, et donc est convergente. Pour chaque $j \neq j_0$, il existe ainsi un nombre réel $v(j)$ tel que $v_k(j) \to v(j)$ quand $k \to \infty$.

Si maintenant on pose $v = \big(v(1), \dots, 1, \dots v(N+1)\big) \in \mathbb{R}^{N+1}$, où le "1" est à la place j_0, alors $v_k(j) \to v(j)$ *pour tout* $j \in [\![1, N+1]\!]$ puisque $v_k(j_0) \equiv 1$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, cela entraine que $\|v_k - v\|_\infty \to 0$ (exo) ; et on a $v \neq 0$ puisque $v(j_0) = 1$. □

On peut maintenant obtenir la contradiction cherchée. Comme $\|\cdot\| \leqslant C\,\|\cdot\|_\infty$ pour une certaine constante C (d'après l'étape 1) et comme $\|v_k - v\|_\infty \to 0$, on voit que $\|v_k - v\| \to 0$. Comme de plus $\|v\| \leqslant \|v - v_k\| + \|v_k\|$ et que $\|v_k\| \to 0$, on en déduit $\|v\| \leqslant 0$ en faisant tendre k vers l'infini ; donc $\|v\| = 0$. Mais ceci est absurde puisque $\|\cdot\|$ est une norme et $v \neq 0$. Ainsi, on a bien montré le Fait 2 par récurrence. □

Par les Faits 1 et 2, la preuve du théorème est maintenant terminée. □

Remarque. Le Théorème 2.2 *caractérise* les espaces de dimension finie : si E est un espace vectoriel de dimension infinie, alors il existe des normes non équivalentes sur E.

Démonstration. Soit $(e_i)_{i\in I}$ une base de l'espace vectoriel E (on admet que tout espace vectoriel possède une base...). Comme $\dim E = \infty$, l'ensemble I est infini. Pour $u = \sum_{i\in I} u_i e_i$, posons

$$\|u\|_1 := \sum_{i\in I} |u_i| \qquad \text{et} \qquad \|u\|_\infty := \sup_{i\in I} |u_i|.$$

Ces expressions ont ont un sens car tous les u_i sont nuls sauf un nombre fini ; et on vérifie sans difficulté qu'on définit ainsi deux normes sur E (exo). Montrons que ces normes ne sont pas équivalentes.

Comme I est un ensemble infini, on peut choisir pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ un ensemble $I^k \subseteq I$ de cardinalité k. Si on pose $u^k := \sum_{i \in I^k} e_i$, alors $\|u^k\|_\infty = 1$ et $\|u^k\|_1 = k$. Comme k peut être arbitrairement grand, on voit ainsi qu'il n'existe pas de constante C telle que $\|\cdot\|_1 \leqslant C \|\cdot\|_\infty$. □

Dans le cadre des espaces métriques, la notion d'équivalence pour les normes se généralise comme suit :

DÉFINITION 2.3. *On dit que deux distances d et d' sur un ensemble non-vide E sont* ***Lipschitz-équivalentes*** *s'il existe deux constantes $C, C' < \infty$ telles que $d(u,v) \leqslant C\, d'(u,v)$ et $d'(u,v) \leqslant C'\, d(u,v)$ pour tous $u, v \in E$.*

Exercice. Montrer que deux normes sur un espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si les distances associées sont Lipschitz-équivalentes.

3. Convergence, continuité

3.1. Suites convergentes.

DÉFINITION 3.1. *Soit (E,d) un espace métrique, soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et soit $a \in E$. On dit que la suite (u_k)* ***converge vers*** *a* ***pour la distance*** *d si $d(u_k, a) \to 0$ quand $k \to \infty$. On écrit alors $u_k \to a$. Avec des quantificateurs, cela s'écrit ainsi :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K\ \ \forall k \geqslant K\ :\ d(u_k, a) < \varepsilon.$$

Formellement, il s'agit donc exactement de la même définition que pour la convergence d'une suite de nombres réels, en écrivant $d(u_k, a)$ au lieu de $|u_k - a|$.

Voici d'abord quelques remarques "idiotes", et donc importantes :

- dans la définition, on peut remplacer "$< \varepsilon$" par "$\leqslant \varepsilon$" (jouer avec des $\varepsilon/2$) ;
- au lieu de "$d(u_k, a) < \varepsilon$", on peut écrire "$u_k \in B(a, \varepsilon)$" ;
- la définition *dépend de la distance d.* (Par exemple, la suite $u_k := 2^{-k}$ converge vers 0 dans $\mathbb{R}$ pour la distance usuelle, mais pas pour la distance discrète.)

Passons maintenant à des remarques un peu moins "idiotes".

REMARQUE 1. On a *unicité de la limite* : une suite (u_k) ne peut pas converger vers deux points différents. Par conséquent, si $u_k \to a$, on peut parfaitement dire que a est *la* limite de la suite (u_k) et écrire $a = \lim\limits_{k\to\infty} u_k$, ou simplement $a = \lim u_k$.

Démonstration. Si $u_k \to a$ et $u_k \to b$ alors, comme $0 \leqslant d(a,b) \leqslant d(a,u_k) + d(u_k, b)$ qui tend vers 0 quand $k \to \infty$, on a $d(a,b) = 0$ et donc $a = b$. □

REMARQUE 2. Si d et d' sont deux distances Lipschitz-équivalentes sur un ensemble E, alors la convergence pour d est équivalente à la convergence pour d'.

Démonstration. C'est un exo très facile. □

CONSÉQUENCE. Si E est un *espace vectoriel de dimension finie*, on peut parler de "suites convergentes" dans E sans faire explicitement référence à une norme : par définition, une suite $(u_k) \subseteq E$ converge vers $a \in E$ si elle converge vers a pour n'importe quelle norme.

Exercice. Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E. On suppose que toute suite $(u_k) \subseteq E$ convergeant pour d converge également pour d'. Montrer que toute suite (u_k) convergeant pour d converge nécessairement *vers la même limite* pour d'.

Remarque 3. Dans un espace vectoriel normé, toute suite convergente (u_k) est **bornée** : il existe une constante M telle que $\forall k \ : \ \|u_k\| \leqslant M$.

Démonstration. Si $u_k \to a$, on peut trouver un entier K tel que $\|u_k - a\| \leqslant 6$ pour tout $k \geqslant K$. Alors $\|u_k\| \leqslant 6 + \|a\|$ si $k \geqslant K$ d'après l'inégalité triangulaire ; et donc $\|u_k\| \leqslant M := \max(6 + \|a\|, \|u_0\|, \dots, \|u_{K-1}\|)$ pour *tout* $k \in \mathbb{N}$. □

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}$ ou dans $\mathbb{C}$, une suite converge (pour la distance usuelle) si et seulement si elle converge au sens usuel.

Exemple 2. Dans $\mathbb{R}^N$, une suite converge (pour n'importe quelle norme) si et seulement si elle converge "cordonnée par coordonnée" : $u_k = \big(u_k(1), \dots, u_k(N)\big)$ tend vers $a = \big(a(1), \dots, a(N)\big)$ si et seulement si $u_k(j) \to a(j)$ pour $j = 1, \dots, N$.

Démonstration. Par équivalence des normes, on peut considérer uniquement la convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Si $\|u_k - a\|_\infty \to 0$, alors $u_k(j) \to a(j)$ pour tout j car $|u_k(j) - a(j)| \leqslant \|u_k - a\|_\infty$.

Inversement, supposons que u_k tende vers a coordonnée par coordonnée. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $j = 1, \dots, N$, on peut trouver un entier K_j tel que $\forall k \geqslant K_j \ : \ |u_k(j) - a(j)| \leqslant \varepsilon$. Si on pose $K := \max(K_1, \dots, K_N)$ on a alors $\|u_k - a\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant K$, par définition de $\|\cdot\|_\infty$. □

Exemple 2′. Si $E_1, \dots, E_N$ sont des espaces métriques et si $E = E_1 \times \cdots \times E_N$, alors la convergence dans E (pour la distance produit) est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée.

Démonstration. C'est exactement la même que pour l'Exemple 2. □

Exemple 3. Prenons $E := \ell^\infty(I)$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Dans $\ell^\infty(I)$, une suite de fonctions converge si et seulement si elle converge *uniformément sur I*. Pour cette raison, la norme $\|\cdot\|_\infty$ s'appelle la **norme de la convergence uniforme**.

Démonstration. C'est évident par définition de $\|\cdot\|_\infty$. □

Exercice. Soit I un ensemble infini, et soit (t_k) une suite d'éléments de I deux à deux distincts. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(t) = 0$ si $t \neq t_k$ et $f_k(t_k) = 1$. Montrer que pour toute suite de scalaires (λ_k), la suite $(\lambda_k f_k)$ converge simplement vers 0 ; et en déduire qu'il n'existe pas de norme sur $\ell^\infty(I)$ telle que la convergence pour cette norme soit équivalente à la convergence simple.

La proposition suivante est d'usage constant.

Proposition 3.2. *Soient E un espace vectoriel normé, et soient $(u_k), (v_k), u, v$ dans E et $(\lambda_k), \lambda$ dans $\mathbb{K}$.*

(1) *Si $u_k \to u$ et $v_k \to v$, alors $u_k + v_k \to u + v$.*

(2) *Si $u_k \to u$ et $\lambda_k \to \lambda$, alors $\lambda_k u_k \to \lambda u$.*

Démonstration. (1) est très facile : par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|(u_k + v_k) - (u + v)\| = \|(u_k - u) + (v_k - v)\| \leqslant \|u_k - u\| + \|v_k - v\|,$$

qui tend vers 0 quand $k \to \infty$.

Pour (2), on écrit

$$\|\lambda_k u_k - \lambda u\| = \|\lambda_k(u_k - u) + (\lambda_k - \lambda)u\| \leqslant \underbrace{|\lambda_k|}_{\text{borné}} \underbrace{\|u_k - u\|}_{\to 0} + \underbrace{|\lambda_k - \lambda|}_{\to 0} \|u\|.$$

□

3.2. Applications continues.

Définition 3.3. *Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$.*

(1) *Étant donné $a \in E$, on dit que f est* ***continue au point*** *a, ou encore* ***continue en*** *a, si "$f(u)$ tend vers $f(a)$ quand u tend vers a ; ce qui s'écrit ainsi :*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tel que : } \forall u \in E \text{ vérifiant } d(u, a) < \delta, \text{ on a } d(f(u), f(a)) < \varepsilon.$$

(2) *On dit que f est* ***continue sur*** *E si elle est continue en tout point $a \in E$.*

Voici quelques remarques "idiotes".

- La continuité dépend des distances données sur E et F.
- Dans (1), le "δ de continuité" dépend évidemment de ε, mais *a priori* aussi du point a.
- Au lieu des inégalités strictes $<$, on peut mettre des inégalités larges $\leqslant$: cela ne change rien à la définition. (Jouer avec des $\varepsilon/2$ et des $\delta/2$.)
- On peut écrire (1) comme suit :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tel que : } \forall u \in B(a, \delta), \text{ on a } f(u) \in B(f(a), \varepsilon);$$

autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tel que } f\big(B(a, \delta)\big) \subseteq B(f(a), \varepsilon).$$

La proposition suivante est ce qu'on appelle parfois la "caractérisation séquentielle de la continuité". Aux notations près, sa preuve est exactement la même que dans le cas des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Proposition 3.4. *Soit $f : E \to F$ et soit $a \in E$, où E et F sont des espaces métriques. Alors f est continue au point a si et seulement si la propriété suivante a lieu :* pour toute suite $(u_k) \subseteq E$ tendant vers a, *la suite $(f(u_k))$ tend vers $f(a)$.*

Démonstration. Supposons f continue au point a. Soit (u_k) une suite quelconque tendant vers a. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un "δ de continuité" tel que $f(u) \in B(f(a), \varepsilon)$ pour tout $u \in B(a, \delta)$. Comme $u_k \to a$, on peut ensuite trouver un entier K tel que $\forall k \geqslant K\ :\ u_k \in B(a, \delta)$. Alors $f(u_k) \in B(f(a), \varepsilon)$ pour tout $k \geqslant K$; ce qui prouve que $f(u_k) \to f(a)$ puisqu'on est parti d'un $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Supposons maintenant que f ne soit *pas* continue au point a. Il existe alors un $\varepsilon_0 > 0$ tel que la propriété suivante ait lieu : pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $u \in E$ vérifiant $d(u, a) < \delta$ tel que $d(f(u), f(a)) \geqslant \varepsilon_0$. En prenant $\delta := 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient ainsi une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $d(u_k, a) < 2^{-k}$ et $d(f(u_k), f(a)) \geqslant \varepsilon_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, on a trouvé une suite (u_k) tendant vers a pour laquelle $f(u_k)$ ne tend pas vers $f(a)$. □

Corollaire 3.5. *Les applications continues restent les mêmes si on remplace les distances par des distances Lipschitz-équivalentes.*

Démonstration. Les suites convergentes restent les mêmes. □

Convention. Au vu de ce résultat et comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, on conviendra que pour une application $f : E \to F$ où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie, “continue” veut dire “continue pour n'importe quelles normes sur E et F”.

Corollaire 3.6. *Si E est un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, les applications $(u, v) \mapsto u + v$ et $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ sont continues de $E \times E$ dans E et de $\mathbb{K} \times E$ dans E respectivement.*

Démonstration. C'est une conséquence immédiate de la caractérisation séquentielle de la continuité et de la Proposition 3.2 □

Corollaire 3.7. *Soient $E, F_1, \dots, F_N$ des espaces métriques, et soit $f : E \to F_1 \times \cdots \times F_N$. On écrit $f(u) = \big(f_1(u), \dots, f_N(u)\big)$. Alors f est continue si et seulement si ses “composantes” $f_1, \dots, f_N$ le sont.*

Démonstration. C'est à nouveau évident par la caractérisation séquentielle de la continuité, car la convergence dans $F_1 \times \cdots \times F_N$ est la convergence coordonnée par coordonnée. □

Exercice. Montrer que si (E, d) est un espace métrique, alors l'application $(u, v) \mapsto d(u, v)$ est continue de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$.

Voici maintenant les propriétés habituelles de “stabilité”.

Proposition 3.8. *La composée de deux applications continues est continue : si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont continues, alors $g \circ f : E \to G$ est continue.*

Démonstration. La preuve est immédiate par la caractérisation séquentielle de la continuité (on peut aussi faire sans) : si $u_k \to a$, alors $f(u_k) \to f(a)$, donc $(g \circ f)(u_k) = g(f(u_k)) \to g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ et donc $g \circ f$ est continue. □

Corollaire 3.9. *La continuité est préservée par somme, produit et passage à l'inverse. De façon précise :*

(i) *La somme de deux applications continues à valeurs dans un evn est continue.*
(ii) *Le produit de deux fonctions continues à valeurs scalaires est une fonction continue.*
(iii) *L'inverse d'une fonction continue à valeurs scalaires ne s'annulant pas est une fonction continue.*

Démonstration. (i) Soient $f, g : E \to F$ deux applications continues, où F est un evn. En notant $S : F \times F \to F$ l'application “somme” et $\Phi : E \to F \times F$ l'application définie par $\Phi(u) := (f(u), g(u))$, on a $f + g = S \circ \Phi$. Comme S et Φ sont continues (par les Corollaires 3.6 et 3.7), on en déduit que $f + g$ est continue “par composition”.

On peut démontrer (ii) et (iii) en suivant le même schéma que pour (i), *i.e.* en écrivant le produit et l'inverse comme composées de deux applications continues. Les détails sont laissés en exo. □

Corollaire 3.10. *Toute fonction polynomiale à coefficients complexes est continue sur $\mathbb{C}$, et toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.*

Démonstration. Exo. □

Corollaire 3.11. *Toute fonction d'une ou plusieurs variables réelles définie par une "formule explicite" est continue sur son domaine de définition.*

Démonstration. L'énoncé n'étant pas précis mathématiquement, la preuve ne le sera pas non plus. On se contentera de dire que toute "formule explicite" est construite à partir de fonctions usuelles (dont on sait qu'elles sont continues) en prenant des sommes, des produits, des inverses et des compositions. (En étant un peu plus formel, cela constituerait une *définition par induction* de la notion de "formule explicite".) $\square$

Exemple. La formule $f(x,y) := \frac{\sqrt{x^2-y^3}}{\log(2xy-3)}$ définit une fonction continue. Sur quel domaine ?

3.3. Applications lipschitziennes.

Définition 3.12. *Soient (E,d) et (F,d) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to F$ est* ***lipschitzienne*** *s'il existe une constante $k < \infty$ telle que*

$$\forall u, v \in E \ : \ d\big(f(u), f(v)\big) \leqslant k\, d(u,v).$$

On dit alors que f est k ***- lipschitzienne****. Si E et F sont des* espaces vectoriels normés*, l'inégalité précédente s'écrit*

$$\forall u, v \in E \ : \ \|f(v) - f(u)\| \leqslant k\, \|v-u\|.$$

Remarque 0. Toute application lipschitzienne est continue.

Remarque 1. Si $f : E \to F$ est lipschitzienne, il existe une *plus petite* constante $k < \infty$ telle que f soit k - lipschitzienne. Cette constante s'appelle la **constante de Lipschitz** de f, et se note $\mathrm{Lip}(f)$.

Démonstration. Posons $\kappa := \inf\{k \in \mathbb{R}^+ ;\ f \text{ est } k\text{ - lipschitzienne}\}$. La définition a un sens car l'ensemble dont on prend la borne inférieure est non-vide et minoré par 0. Par définition de κ, on peut trouver une suite $(k_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ telle que f est k_n - lipschitzienne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k_n \to \kappa$. On a ainsi $\forall n\ \forall u, v \in E \ : \ d\big(f(u), f(v)\big) \leqslant k_n\, d(u,v)$. En faisant $n \to \infty$, on en déduit que f est κ - lipschitzienne ; et il est clair par définition que κ est la plus petite constante k telle que f soit k - lipschitzienne. $\square$

Exercice. Montrer que $\mathrm{Lip}(f) = \sup\left\{\dfrac{d(f(u), f(v))}{d(u,v)};\ u, v \in E\ ,\ u \neq v\right\}$.

Remarque 2. Les applications lipschitziennes restent les mêmes si on remplace les distances de E et de F par des distances Lipschitz-équivalentes (mais les constantes de Lipschitz peuvent changer).

Démonstration. Exo. $\square$

Exercice. Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E. Montrer que d et d' sont Lipschitz-équivalentes si et seulement si les applications $id : (E,d) \to (E,d')$ et $id : (E,d') \to (E,d)$ sont lipschitziennes.

Exemple 1. Soit (E,d) un espace métrique. Si $A \subseteq E$ est un ensemble non-vide (quelconque), alors l'application $u \mapsto \mathrm{dist}(u,A)$ est 1 - lipschitzienne.

Démonstration. Soient $u, v \in E$ quelconques. Par définition de $\mathrm{dist}(u,A)$, on a

$$\forall z \in A \ : \ \mathrm{dist}(u,A) \leqslant d(u,z) \leqslant d(u,v) + d(v,z).$$

En prenant "l'inf en $z \in A$", on en déduit $\mathrm{dist}(u, A) \leqslant d(u, v) + \mathrm{dist}(v, A)$, *i.e.* $\mathrm{dist}(u, A) - \mathrm{dist}(v, A) \leqslant d(u, v)$. D'où $|\mathrm{dist}(v, A) - \mathrm{dist}(u, A)| \leqslant d(u, v)$ en échangeant les rôles de u et v. □

Exemple 2. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en tout point, alors on a l'équivalence suivante : f est lispchitzienne si et seulement si f' est bornée sur I ; et dans ce cas, on a $\mathrm{Lip}(f) = \|f'\|_\infty$. En particulier, toute fonction f *de classe* $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle *fermé borné* $[a, b]$ est lipschitzienne.

Démonstration. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable.

Supposons d'abord que f soit lipschitzienne. Alors

$$\forall x \in I \ \forall y \neq x \ : \ \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leqslant \mathrm{Lip}(f).$$

En fixant x et en faisant $y \to x$, on en déduit $|f'(x)| \leqslant \mathrm{Lip}(f)$, pour tout $x \in I$. Donc f' est bornée et $\|f'\|_\infty \leqslant \mathrm{Lip}(f)$.

Supposons maintenant que f' soit bornée sur I, et posons $k := \|f'\|_\infty$. Si $x, y \in I$ alors, par le Théorème des accroissements finis, on peut trouver $c_{x,y}$ entre x et y tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$; donc $|f(y) - f(x)| = |f'(c_{x,y})|\,|y - x| \leqslant k\,|y - x|$, pour tous $x, y \in I$; et donc f est lipschitzienne avec $\mathrm{Lip}(f) \leqslant k = \|f'\|_\infty$.

Si f est $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors f' est continue sur $[a, b]$, donc bornée ; et donc f est lipschitzienne. □

Exercice. Soit E un espace métrique. Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur E à valeurs réelles est une fonction lipschitzienne, et que le produit de deux fonctions lipschitziennes bornées est une fonction lipschitzienne.

3.4. Continuité uniforme.

Définition 3.13. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to F$ est **uniformément continue** si f est continue en tout point et si, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut prendre le même "δ de continuité" pour tous les points de E. Avec des quantificateurs : f est uniformément continue si*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ : \ d\big(f(u), f(v)\big) \leqslant \varepsilon \quad \textit{pour tous } u, v \in E \textit{ vérifiant } d(u, v) \leqslant \delta.$$

Remarque 1. Pour montrer qu'une application $f : E \to F$ est uniformément continue, il suffit d'obtenir une majoration de la forme $d\big(f(u), f(v)\big) \leqslant \Phi\big(d(u, v)\big)$ pour tous $u, v \in E$, où $\Phi(\delta) \to 0$ quand $\delta \to 0^+$. On dit alors que la fonction Φ est un *témoin d'uniforme continuité* pour f.

Remarque 2. Une application $f : E \to F$ est uniformément continue si et seulement si la chose suivante a lieu : pour toutes suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de E telles que $d(u_k, v_k) \to 0$, on a que $d\big(f(u_k), f(v_k)\big) \to 0$.

Démonstration. C'est un bon exo de compréhension des définitions. □

Exemple 1. Toute application f *lipschitzienne* est uniformément continue.

Démonstration. C'est évident : si on pose $k := \mathrm{Lip}(f)$, alors f est uniformément continue avec témoin $\Phi(\delta) := k\delta$. □

Exemple 2. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$, mais elle n'est pas lipschitzienne.

Démonstration. Posons $f(t) := \sqrt{t}$.

La fonction f est dérivable sur $]0, \infty[$ avec $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}\cdot$ Comme f' n'est pas bornée sur $]0, \infty[$ (elle tend vers $+\infty$ en 0), on en déduit que f n'est pas lipschitzienne sur $]0, \infty[$, et donc pas lipschitzienne sur $\mathbb{R}^+$.

Cependant, si $s, t \geqslant 0$, alors $\sqrt{s+t} \leqslant \sqrt{s} + \sqrt{t}$, comme on le voit en mettant au carré. On en déduit que si $0 \leqslant u \leqslant v$, alors $f(v) \leqslant f(u) + f(v-u)$, *i.e.* $f(v) - f(u) \leqslant \sqrt{v-u}$; donc, par symétrie : $|f(v) - f(u)| \leqslant \sqrt{|v-u|}$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^+$. Donc f est uniformément continue avec témoin $\Phi(\delta) := \sqrt{\delta}$. □

Exemple 3. Si $[a, b]$ est un intervalle *fermé borné*, alors *toute* fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue : c'est le **Théorème de Heine**.

Démonstration. On le sait... et on redonnera la preuve au Chapitre 4, dans un cadre plus général. □

Exemple 4. La fonction $t \mapsto t^2$ n'est pas uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq\,]0, \infty[$ une suite tendant vers $+\infty$, soit $(\delta_k) \subseteq\,]0, \infty[$ une suite tendant vers 0, et posons $v_k := u_k + \delta_k$. Par définition, $d(u_k, v_k) = v_k - u_k \to 0$. Cependant, $d(u_k^2, v_k^2) = v_k^2 - u_k^2 = 2u_k\delta_k + \delta_k^2 \geqslant 2u_k\delta_k$. Donc, si on choisit $\delta_k := \frac{1}{u_k}$, on voit que $d(u_k^2, v_k^2) \not\to 0$; ce qui montre que la fonction $t \mapsto t^2$ n'est en effet pas uniformément continue. □

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(t) \to 0$ quand $t \to \pm\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha \leqslant 1$.

Exercice 3. Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors il existe deux constantes A et B telles que $\forall t \in \mathbb{R}^+ \;:\; |f(t)| \leqslant A + B\,t$.

3.5. Un "δ de continuité"... continu. Le lemme suivant n'est pas vraiment classique, mais il est suffisamment joli pour mériter de l'être. Il est naturellement à sa place dans ce chapitre, mais on a besoin pour le démontrer de savoir ce qu'est un ensemble fermé (*cf* le Chapitre 3).

Lemme 3.14. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques. Si $f : E \to F$ est une application continue, alors il existe une fonction continue $\delta : E \times\,]0, \infty[\, \to\,]0, \infty[$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $\delta(x, \varepsilon)$ est un "δ de continuité" pour f au point x, associé à ε.*

Démonstration. Par continuité de f, l'ensemble

$$C := \big\{(x, y, \varepsilon) \in E \times E \times\,]0, \infty[;\ d\big(f(x), f(y)\big) \geqslant \varepsilon\big\}$$

est un fermé de $E \times E \times\,]0, \infty[$ (exo) ; et on a $(x, x, \varepsilon) \notin C$ pour tout $(x, \varepsilon) \in E \times\,]0, \infty[$. En notant ρ la distance produit sur $E \times E \times\,]0, \infty[$,

$$\rho\big((x, y, \varepsilon), (x', y', \varepsilon')\big) = \max\big(d(x, x'), d(y, y'), d(\varepsilon, \varepsilon')\big),$$

on en déduit que si on pose

$$\delta(x, \varepsilon) := \mathrm{dist}_\rho\big((x, x, \varepsilon), C\big),$$

alors $\delta(x, \varepsilon) > 0$ pour tout $(x, \varepsilon) \in E \times\,]0, \infty[$. La fonction $\delta : E \times\,]0, \infty[\, \to\,]0, \infty[$ ainsi définie est continue, et elle convient par définition. En effet, si $y \in E$, alors $d(x, y) =$

$\rho\big((x,x,\varepsilon),(x,y,\varepsilon)\big)$. Par conséquent, si $d(x,y) < \delta(x,\varepsilon)$, alors $\rho\big((x,x,\varepsilon),(x,y,\varepsilon)\big) < \mathrm{dist}_\rho((x,x,\varepsilon),C)$ et donc $(x,y,\varepsilon) \notin C$; autrement dit $d(f(x),f(y)) < \varepsilon$. □

4. Application linéaires continues

4.1. Critère de continuité. Le théorème suivant est d'une très grand utilité, à la fois théorique et pratique. Il signifie en particulier que pour établir la continuité d'une application *linéaire* (entre deux espaces vectoriels normés), il n'y a pas lieu d'utiliser des ε et des δ.

Théorème 4.1. *Soient E et F deux evn sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Pour une application* linéaire $T : E \to F$, *les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *T est continue ;*

(2) *il existe une constante $C < \infty$ telle que $\forall u \in E\ :\ \|T(u)\| \leqslant C\,\|u\|$.*

De plus, si C est comme dans (2), *alors T est C-lipschitzienne.*

Démonstration. Supposons que (2) soit vérifiée avec une certaine constante C. Pour tous $u, v \in E$ on a alors

$$\|T(v) - T(u)\| = \|T(v-u)\| \leqslant C\,\|v-u\|.$$

Par conséquent T est C-lipschitzienne, et donc continue.

Inversement, supposons que T soit continue. Alors T est en particulier continue en 0. En prenant $\varepsilon := 6$ dans la définition de la continuité, on peut donc trouver $\delta > 0$ tel que

$$\|u\| \leqslant \delta \implies \|T(u)\| = \|T(u) - T(0)\| \leqslant 6.$$

Soit maintenant $u \in E$ quelconque, $u \neq 0$. Si on pose $\widetilde{u} := \delta\,\frac{u}{\|u\|}$, alors $\|\widetilde{u}\| = \delta$ car $\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| = 1$. Donc $\|T(\widetilde{u})\| \leqslant 6$; autrement dit

$$\left\|T\left(\delta\,\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| \leqslant 6.$$

Mais $T\left(\delta\,\frac{u}{\|u\|}\right) = \frac{\delta}{\|u\|}\,T(u)$ par linéarité ; donc $\left\|T\left(\delta\,\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| = \frac{\delta}{\|u\|}\,\|T(u)\|$. On obtient ainsi $\frac{\delta}{\|u\|}\,\|T(u)\| \leqslant 6$, autrement dit

$$\|T(u)\| \leqslant \frac{6}{\delta}\,\|u\| \qquad \text{pour tout } u \neq 0.$$

Cette inégalité est encore valable pour $u = 0$ puisque $T(0) = 0$; donc (2) est vérifiée avec $C := \frac{6}{\delta}$. □

Exercice. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si T est bornée sur une boule B non triviale (*i.e.* de rayon $r > 0$), alors T est continue. En déduire que si T est continue en au moins 1 point x_0, alors T est continue.

Corollaire 4.2. *Si* l'espace de départ *E est un evn* de dimension finie *et si F est un evn quelconque, alors toute application linéaire $T : E \to F$ est continue.*

Démonstration. Par équivalence des normes en dimension finie et comme E est linéairement isométrique à $\mathbb{K}^N$ muni d'une certaine norme (*cf* un exemple de la Section 1.5), on peut supposer que $E = (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$. Dans ce qui suit, on note $(e_1, \dots, e_N)$ la base canonique de $\mathbb{K}^N$.

Soit $T : \mathbb{K}^N \to F$ une application linéaire. Si $u = (u_1, \dots, u_N) \in E = \mathbb{K}^N$, alors

$$\begin{aligned} \|T(u)\| = \left\| T\left(\sum_{j=1}^N u_j e_j\right)\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^N u_j T(e_j)\right\| \\ &\leqslant \sum_{j=1}^N \|u_j T(e_j)\| \\ &= \sum_{j=1}^N |u_j|\, \|T(e_j)\| \\ &\leqslant \|u\|_\infty \times \sum_{j=1}^N \|T(e_j)\|\,. \end{aligned}$$

Donc le critère de continuité est vérifié avec $C := \sum_{j=1}^N \|T(e_j)\|$ (qui est bien une constante indépendante de $u \in E$). □

Exercice. Un calcul presque identique a déjà été fait dans ce chapitre. À quel moment ?

4.2. Norme d'une application linéaire continue. Si E et F sont des evn sur le même corps $\mathbb{K}$, on notera $\mathcal{L}(E,F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires continues de E dans F. Il est évident que $\mathcal{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Si $E = F$, on écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E,E)$.

Définition 4.3. *Soient E et F des evn. Pour $T \in \mathcal{L}(E,F)$, on pose*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} := \sup\left\{\frac{\|T(u)\|}{\|u\|};\ u \in E\,,\ u \neq 0\right\}.$$

Remarque 1. Par le critère de continuité, si $T \in \mathcal{L}(E,F)$ alors $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est un nombre réel bien défini. En fait, $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est la *plus petite* constante C telle que $\forall u \in E\ :\ \|T(u)\| \leqslant C\,\|u\|$. Donc, pour une application linéaire $T : E \to F$ et pour $C \in \mathbb{R}^+$, l'équivalence suivante a lieu :

$$T \text{ est continue et } \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant C \iff \forall u \in E\ :\ \|T(u)\| \leqslant C\,\|u\|\,. \tag{4.1}$$

Exercice. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E,F)$, alors $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est la constante de Lipschitz de T.

Remarque 2. On a aussi

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} = \sup\{\|T(u)\|;\ \|u\| \leqslant 1\} = \sup\{\|T(u)\|;\ \|u\| = 1\}.$$

Démonstration. Notons $C_\leqslant$ et $C_=$ les deux nouveaux "sup" considérés, $C_\leqslant := \sup\{\|T(u)\|;\ \|u\| \leqslant 1\}$ et $C_= := \sup\{\|T(u)\|;\ \|u\| = 1\}$. Par définition, on a évidemment $C_= \leqslant C_\leqslant$.

Si $u \in E$ vérifie $\|u\| \leqslant 1$, alors $\|T(u)\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}\,\|u\| \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. Ceci étant vrai pour tout u vérifiant $\|u\| \leqslant 1$, on en déduit $C_\leqslant \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ par définition de $C_\leqslant$.

Par ailleurs, pour $u \neq 0$ quelconque, on a $\left\|\frac{u}{\|u\|}\right\| = 1$, donc $\left\|T\left(\frac{u}{\|u\|}\right)\right\| \leqslant C_=$ par définion de $C_=$; autrement dit $\frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \leqslant C_=$. Ainsi, $\|T(u)\| \leqslant C_=\,\|u\|$ pour tout $u \neq 0$. Ceci est vrai aussi pour $u = 0$, donc $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant C_=$ par définition de $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Au total, on voit que $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leqslant C_= \leqslant C_\leqslant \leqslant \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, donc les trois constantes sont égales. $\square$

Remarque 3. Pour tout evn E, on a $\|Id_E\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Démonstration. C'est évident. $\square$

La proposition suivante dit que la notation $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ n'est pas délirante.

PROPOSITION 4.4. *Si E et F sont des evn, alors $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. Pour économiser de la place, on écrira $\|T\|$ au lieu de $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Il est évident que $\|T\| \geqslant 0$ pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et que $\|0\| = 0$.

Si $\|T\| = 0$, alors $\|T(u)\| = 0$ pour tout $u \neq 0$, *i.e.* $T(u) = 0$. Comme $T(0) = 0$ également, on a donc $T = 0$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\|\lambda T\| = \sup\{\|\lambda T(u)\|;\ \|u\| \leqslant 1\}$, et comme $\|\lambda T(u)\| = |\lambda|\,\|T(u)\|$, on en déduit immédiatement que $\|\lambda T\| = |\lambda|\,\|T\|$.

Si $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

$$\|(T+S)(u)\| \leqslant \|T(u)\| + \|S(u)\| \leqslant (\|T\| + \|S\|)\,\|u\| \quad \text{pour tout } u \in E,$$

et donc $\|T+S\| \leqslant \|T\| + \|S\|$ d'après (4.1). $\square$

Remarque 1. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ dépend des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ données sur E et F ; on dit que cette norme est **subordonnée** aux normes de E et F. Cependant, si on remplace les normes de E et de F par des normes équivalentes, on obtient une norme équivalente sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration. C'est un exo de compréhension des définitions. $\square$

Remarque 2. Lorsque $E = \mathbb{K}^N$, alors $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^N)$ s'identifie à $M_N(\mathbb{K})$. Donc, à toute norme $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{K}^N$ est associée une norme subordonnée sur $M_N(\mathbb{K})$. Si $A \in M_N(\mathbb{K})$, on a ainsi

$$\|A\|_{M_N(\mathbb{K})} = \sup\left\{\|Au\|;\ u \in \mathbb{K}^N\ ,\ \|u\| \leqslant 1\right\}.$$

CONVENTION. On écrira désormais $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

EXEMPLE 1. Soit $E := (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$, et soit $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_N(\mathbb{K})$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in M_N(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \|A\| &= \max_{1\leqslant j\leqslant N} \sum_{i=1}^N |a_{i,j}| \\ &= \max\left(\|Ae_1\|_1, \dots, \|Ae_N\|_1\right). \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $C := \max\limits_{1\leqslant j\leqslant N} \sum_{i=1}^N |a_{i,j}|$.

Si $u = \sum\limits_{i=1}^N u_j e_j \in \mathbb{K}^N$, alors

$$Au = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} u_j\right) e_i.$$

Donc

$$\begin{aligned}\|Au\|_1 = \sum_{i=1}^N \left|\sum_{j=1}^N a_{i,j}u_j\right| &\leqslant \sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^N |a_{i,j}|\,|u_j|\\ &= \sum_{j=1}^N |u_j| \sum_{i=1}^N |a_{i,j}| \leqslant C \times \sum_{j=1}^N |u_j| = C\,\|u\|_1;\end{aligned}$$

et donc $\|A\| \leqslant C$.

Inversement, pour $j = 1, \ldots, N$, on a $Ae_j = \sum\limits_{i=1}^N a_{ij}e_i$. Donc

$$\sum_{i=1}^N |a_{i,j}| = \|Ae_j\|_1 \leqslant \|A\|\,\|e_j\|_1 = \|A\| \qquad \text{pour tout } j \in [\![1, N]\!]\,;$$

et donc $\|Au\|_1 \geqslant C$.

□

Exercice 1. Trouver la norme sur $M_N(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2. Soit $E := (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$, et soit F un evn quelconque. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|T\| = \max\big(\|T(e_1)\|, \ldots, \|T(e_N)\|\big)$.

Exemple 2. Soit $E := (\mathbb{C}^N, \|\cdot\|_2)$, et soit $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_N(\mathbb{C})$. Pour toute matrice $A \in M_N(\mathbb{C})$, on a

$$\|A\| = \max\big\{\sqrt{\lambda};\ \lambda \text{ valeur propre de } A^*A\big\},$$

où A^* est la **matrice adjointe** de A (la "transconjuguée" : $A^* = (\overline{a_{j,i}})$ si $A = (a_{i,j})$), *i.e.* l'unique matrice telle que $\langle Au, v\rangle = \langle u, A^*v\rangle$ pour tous $u, v \in \mathbb{C}^N$, où $\langle\ \cdot\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{C}^N$.

Démonstration. La matrice $B := A^*A$ est **hermitienne** ($B^* = B$) et **positive** ($\langle Bu, u\rangle \geqslant 0$ pour tout $u \in \mathbb{C}^N$, exo) ; donc elle est *diagonalisable en base orthonormée*, et toutes ses valeurs propres sont réelles $\geqslant 0$. En particulier, l'énoncé a un sens.

Soit $\mathbf{f} = (f_1, \ldots, f_N)$ une base orthonormée diagonalisant $B = A^*A$, et notons $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ les valeurs propres associées. Comme il a été dit, les λ_j sont réelles $\geqslant 0$.

Posons $C := \max(\lambda_1, \ldots, \lambda_N) = \max\big\{\lambda;\ \lambda \text{ valeur propre de } B\big\}$. Il s'agit de montrer que $\|A\| = \sqrt{C}$.

Si $u = \sum_{j=1}^N u_jf_j \in \mathbb{C}^N$ alors, en écrivant $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_2$ pour alléger les notations, on a

$$\begin{aligned}\|Au\|^2 = \langle Au, Au\rangle &= \langle Bu, u\rangle\\ &= \left\langle \sum_{j=1}^N u_j\lambda_jf_j, \sum_{j=1}^N u_jf_j\right\rangle\\ &= \sum_{j=1}^N \lambda_j|u_j|^2 \qquad \text{car } \mathbf{f} \text{ est orthonormée}\\ &\leqslant C\sum_{j=1}^N |u_j|^2 = C\,\|u\|^2\,.\end{aligned}$$

Donc $\|Au\| \leqslant \sqrt{C}\,\|u\|$ pour tout $u \in \mathbb{C}^N$, et donc $\|A\| \leqslant \sqrt{C}$.

Inversement, en prenant $u := f_j$ dans le début des calculs précédents, on voit que $\|Af_j\|^2 = \lambda_j$. Comme $\|f_j\| = 1$, on en déduit $\|A\|^2 \geqslant \lambda_j$ pour $j = 1, \ldots, N$ et donc $\|A\| \geqslant \sqrt{C}$.

□

Exemple 3. Soit E un evn dont la norme provient d'un produit scalaire. Pour tout $a \in E$, notons $\Phi_a : E \to \mathbb{K}$ la forme linéaire définie par $\Phi_a(u) := \langle u, a\rangle$. Alors Φ_a est continue et $\|\Phi_a\| = \|a\|$.

Démonstration. Le résultat est évident si $a = 0$, donc on suppose $a \neq 0$. On a $|\Phi_a(u)| \leqslant \|a\|\,\|u\|$ pour tout $u \in E$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $\|\Phi_a\| \leqslant \|a\|$. Inversement, en prenant $u := \frac{a}{\|a\|}$ (qui est de norme 1), on a $\|\Phi_a\| \geqslant |\Phi_a(u)| = \frac{1}{\|a\|}\langle a, a\rangle = \|a\|$. □

Exercice. Pour $a = (a_1, \ldots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, soit $\Phi_a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\Phi_a(u) := \sum_{j=1}^{N} a_j u_j.$$

Déterminer $\|\Phi_a\|$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}^N$ de la norme $\|\cdot\|_1$; de la norme $\|\cdot\|_\infty$; de la norme $\|\cdot\|_2$.

Exemple 4. Soit $E := \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, soient $\alpha, \beta > 0$, et soit $\Phi : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\Phi(u) := \alpha \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \beta \int_{1/2}^{1} u(t)\,dt.$$

Alors Φ est continue et $\|\Phi\| = \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot$

Démonstration. Si $u \in \mathcal{C}([0,1])$, alors (comme α et β sont positifs)

$$\begin{aligned} |\Phi(u)| &\leqslant \alpha \int_0^{1/2} \underbrace{|u(t)|}_{\leqslant \|u\|_\infty} dt + \beta \int_{1/2}^{1} \underbrace{|u(t)|}_{\leqslant \|u\|_\infty} dt \\ &\leqslant \|u\|_\infty \times \left(\alpha \int_0^{1/2} dt + \beta \int_{1/2}^{1} dt\right) = \frac{\alpha+\beta}{2}\,\|u\|_\infty; \end{aligned}$$

donc $\|\Phi\| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot$

Inversement, soit (ε_k) une suite de nombres réels tendant vers 0 avec $0 < \varepsilon_k < \frac{1}{2}$, et notons $u_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit : $u_k(t) \equiv 1$ sur $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon_k]$, $u_k(t) \equiv -1$ sur $[\frac{1}{2} + \varepsilon_k, 1]$, et u_k est affine sur $[\frac{1}{2} - \varepsilon_k, \frac{1}{2} + \varepsilon_k]$. (Dessiner le graphe de u_k !) Alors $u_k \in \mathcal{C}([0,1])$ et $\|u_k\|_\infty = 1$. De plus, en dessinant le graphe de u_k on voit immédiatement que

$$\Phi(u_k) = \alpha \times \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_k\right) + \alpha \times \frac{\varepsilon_k}{2} + \beta \times \frac{\varepsilon_k}{2} + \beta \times \left(\frac{1}{2} - \varepsilon_k\right) = \frac{\alpha+\beta}{2}(1 - \varepsilon_k).$$

En particulier, $\Phi(u_k) \to \frac{\alpha+\beta}{2}$ quand $k \to \infty$; et comme $\|\Phi\| \geqslant |\Phi(u_k)|$ puisque $\|u_k\|_\infty = 1$, on en déduit $\|\Phi\| \geqslant \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot$ □

Exercice. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $u \in \mathcal{C}([0,1])$ telle que $\|u\|_\infty = 1$ et $|\Phi(u)| = \|\Phi\|$.

Des exemples précédents, il est bon de retenir les deux principes suivants.

• Montrer qu'une application linéaire $T : E \to F$ est continue et *majorer* $\|T\|$ est la plupart du temps "automatique" : on essaye de majorer $\|T(u)\|$ sans trop se poser de question, en faisant apparaître $\|u\|$; et si on aboutit à une majoration de la forme $\|T(u)\| \leqslant C\,\|u\|$ pour une certaine constante C indépendante de u, on peut conclure que T est continue avec $\|T\| \leqslant C$.

• Si on veut calculer précisément la norme d'une application linéaire $T : E \to F$, c'est la *minoration* de $\|T\|$ qui demande en général un peu plus d'initiative. Supposons qu'une certaine constante C soit un "candidat norme" pour T et qu'on ait déjà montré que $\|T\| \leqslant C$. Si on a de la chance, on identifie assez rapidement un vecteur $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\|T(u)\| = C$; et on peut conclure tout de suite que $\|T\| \geqslant C$ (puisque $\|T(u)\| \leqslant \|T\|\,\|u\|$) et donc finalement que $\|T\| = C$. Si on est moins chanceux (comme dans l'Exemple 4 ci-dessus), il faut trouver une suite (u_k) d'éléments de E telle que $\|u_k\| = 1$ et $\|T(u_k)\| \to C$. C'est souvent ce à quoi il faut s'attendre si on est en dimension infinie.

Exercice. Soit E un evn, et soit $\Phi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Montrer que pour tout $x_0 \in E \setminus \ker\Phi$, on a

$$\|\Phi\| = \frac{|\Phi(x_0)|}{\mathrm{dist}(x_0, \ker\Phi)}.$$

Dans la proposition suivante, on note AB au lieu de $A \circ B$ la *composée* de deux applications linéaires A et B. La proposition dit que les normes d'applications linéaires possèdent une (très importante) propriété de **sous-multiplicativité**.

Proposition 4.5. *Soient E, F, G des evn. Si $B \in \mathcal{L}(E,F)$ et $A \in \mathcal{L}(F,G)$, alors $\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$.*

Démonstration. On a $\|AB(u)\| = \|A(B(u))\| \leqslant \|A\|\,\|B(u)\| \leqslant \|A\|\,\|B\|\,\|u\|$ pour tout $u \in E$. □

Corollaire 4.6. *Soit E un evn. Si $T \in \mathcal{L}(E)$, on pose $T^0 := Id$ et $T^k := T \circ \cdots \circ T$ pour tout entier $k \geqslant 1$. Alors $\|T^k\| \leqslant \|T\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.*

Démonstration. C'est vrai pour $k = 0$ car $\|Id\| = 1$. Ensuite, on procède par récurrence en utilisant la proposition. □

Corollaire 4.7. *Si E est un evn, alors "le produit est continu sur $\mathcal{L}(E)$" ; autrement dit, l'application $(A,B) \mapsto AB$ est continue de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration. Soit (A_k, B_k) une suite tendant vers (A,B) dans $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \|A_kB_k - AB\| &= \|A_k(B_k - B) + (A_k - A)B\| \\ &\leqslant \|A_k(B_k - B)\| + \|(A_k - A)B\| \\ &\leqslant \|A_k\|\,\|B_k - B\| + \|A_k - A\|\,\|B\|; \end{aligned}$$

donc $A_kB_k \to AB$ car $\|A_k - A\|$ et $\|B_k - B\|$ tendent tous les deux vers 0 et $\|A_k\|$ reste borné. □

5. Les isométries sont souvent linéaires

Pour terminer ce chapitre, on va démontrer un très beau résultat concernant les isométries entre espaces vectoriels normés, qu'on appelle le **Théorème de Mazur-Ulam**.

Avant d'énoncer le résultat, rappelons qu'une isométrie est toujours injective, mais n'a pas de raisons d'être surjective. Par exemple, l'injection canonique de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est une isométrie non surjective.

Remarquons aussi qu'une isométrie $J : E \to F$ entre espaces vectoriels normés n'a pas de raisons d'être linéaire, même si elle vérifie $J(0) = 0$. Soit par exemple $E := \mathbb{R}$ et $F := (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction 1 - lipschitzienne telle que $f(0) = 0$, par exemple $f(x) := \sin x$, alors l'application $J : E \to F$ définie par $J(x) := (x, f(x))$ est une isométrie telle que $J(0) = 0$ (exo) ; mais elle n'est pas linéaire si f ne l'est pas.

Voici maintenant le Théorème de Mazur-Ulam.

Théorème 5.1. *Soient E et F des espaces vectoriels normés réels. Si $J : E \to F$ est une isométrie bijective telle que $J(0) = 0$, alors J est linéaire.*

Pour la preuve, on a besoin du lemme suivant. Dans la suite, on dira qu'une application $T : E \to F$ *conserve les milieux* si

$$\forall u, v \in E \ : \ T\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{T(u) + T(v)}{2}\cdot$$

Lemme 5.2. *Si $T : E \to F$ est une application continue qui conserve les milieux et vérifie $T(0) = 0$, alors T est linéaire.*

Démonstration. Comme $T(0) = 0$ et que T conserve les milieux, on a $T\big(\frac{u}{2}\big) = \frac{T(u)}{2}$ pour tout $u \in E$ (prendre $v := 0$). Comme T continue de conserver les milieux, on en déduit que T est additive : $T(x+y) = T(x) + T(y)$ pour tous $x, y \in E$ (prendre $u := 2x$ et $v := 2y$). Il reste à montrer qu'on a $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. Fixons $x \in E$.

Comme T est additive et $T(0) = 0$, on vérifie que $T(nx) = n\,T(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis que $T(nx) = n\,T(x)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et enfin que $T(rx) = r\,T(x)$ pour tout $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ en écrivant $q\,rx = px$ (exo). Si maintenant $\lambda \in \mathbb{R}$ est quelconque, on peut trouver une suite de rationnels r_k telle que $r_k \to \lambda$; et par continuité de T, on en déduit que $T(\lambda x) = \lim T(r_k x) = \lim r_k T(x) = \lambda T(x)$. □

Preuve du Théorème de Mazur-Ulam. Par le Lemme 5.2, il suffit de montrer que toute isométrie bijective $J : E \to F$ conserve les milieux.

On fixe donc $u, v \in E$, et on cherche à montrer que $J\left(\frac{u+v}{2}\right) = \frac{J(u)+J(v)}{2}$ pour toute isométrie bijective $J : E \to F$. Autrement dit, en notant $\mathrm{Isom}(E,F)$ l'ensemble des isométries bijectives de E sur F et en posant

$$\delta(J) := \left\| J\left(\frac{u+v}{2}\right) - \frac{J(u)+J(v)}{2} \right\|,$$

il s'agit de prouver que

$$\delta(J) = 0 \qquad \text{pour toute } J \in \mathrm{Isom}(E,F).$$

Fait 1. On a $\delta(J) \leqslant \dfrac{\|v-u\|}{2}$ pour toute $J \in \mathrm{Isom}(E,F)$.

Preuve du Fait 1. Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned}\left\| J\left(\frac{u+v}{2}\right) - \frac{J(u)+J(v)}{2}\right\| &\leqslant \frac{1}{2}\left(\left\|J\left(\frac{u+v}{2}\right) - J(u)\right\| + \left\|J\left(\frac{u+v}{2}\right) - J(v)\right\|\right)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{u+v}{2} - u\right\| + \left\|\frac{u+v}{2} - v\right\|\right)\\ &= \frac{\|v-u\|}{2}.\end{aligned}$$

(On a juste utilisé le fait que l'isométrie J est 1-lipschitzienne.) □

Fait 2. Si $J \in \mathrm{Isom}(E,F)$, on peut trouver une autre isométrie $J' \in \mathrm{Isom}(E,F)$ telle que $\delta(J') = 2\delta(J)$.

Preuve du Fait 2. Soit $J \in \mathrm{Isom}(E,F)$. Notons $m := \frac{J(u)+J(v)}{2}$ le milieu du segment $[J(u), J(v)]$, et soit $\sigma : F \to F$ la symétrie centrale de centre m. Comme σ est une isométrie bijective (exo), l'application $J' := J^{-1} \circ \sigma \circ J$ appartient à $\mathrm{Isom}(E,F)$.

Comme σ échange les points $J(u)$ et $J(v)$, on a $J'(u) = v$ et $J'(v) = u$. Donc

$$\begin{aligned}\delta(J') &= \left\| J'\left(\frac{u+v}{2}\right) - \frac{v+u}{2}\right\|\\ &= \left\|\sigma \circ J\left(\frac{u+v}{2}\right) - J\left(\frac{u+v}{2}\right)\right\| \qquad \text{car } J \text{ est une isométrie.}\end{aligned}$$

Mais par définition de σ, on a $\sigma(z) - z = 2(m-z)$ pour tout $z \in F$ (micro-exo). Comme $m = \frac{J(u)+J(v)}{2}$, on obtient donc

$$\delta(J') = 2\left\|\frac{J(u)+J(v)}{2} - J\left(\frac{u+v}{2}\right)\right\| = 2\delta(J).$$

□

Soit maintenant $J \in \mathrm{Isom}(E,F)$ quelconque. En appliquant le Fait 2 une infinité de fois, on construit par récurrence une suite d'isométries $(J_n)_{n\geqslant 1}$ telle que $\delta(J_n) = 2^n\delta(J)$ pour tout $n \geqslant 1$. Mais par le Fait 1, la suite $\big(\delta(J_n)\big)$ doit rester bornée. Donc la seule possibilité est que $\delta(J) = 0$. □

Exercice. On dit qu'un espace vectoriel normé F est **strictement convexe** si pour tous $x, y \in F$, les seuls point $z \in F$ pour lesquels $d(x,z) + d(z,y) = d(x,y)$ sont les points du segment $[x,y]$. Montrer que si F est strictement convexe et si E est un espace vectoriel normé quelconque, alors toute isométrie $J : E \to F$ telle que $J(0) = 0$ est linéaire.

Chapitre 3

Vocabulaire topologique

1. Ouverts et fermés

1.1. Ensembles ouverts ; voisinages d'un point.

Définition 1.1. *Soit* (E, d) *un espace métrique. On dit qu'un ensemble* $O \subseteq E$ *est un* ***ouvert de*** (E, d) *si, pour tout point* $a \in O$*, on peut trouver* $r = r_a > 0$ *tel que* $B(a, r) \subseteq O$*.*

Remarque 0. Au lieu de "ouvert de (E, d)", on peut aussi dire "ouvert pour d", ou simplement "ouvert de E" si la distance d est clairement spécifiée.

Remarque 1. On obtient une définition équivalente en remplaçant la boule ouverte $B(a, r)$ par la boule *fermée* $\overline{B}(a, r)$ (si $B(a, r) \subseteq O$, alors $\overline{B}(a, r/2) \subseteq O$...)

Remarque 2. Si d et d' sont deux distances Lipschitz-équivalentes sur un même ensemble E, alors elles définissent les mêmes ouverts.

Démonstration. Choisissons des constantes C et C' telles que $d(u, v) \leqslant C\, d'(u, v)$ et $d'(u, v) \leqslant C'\, d(u, v)$ pour tous $u, v \in E$. Dans ce qui suit, on note B_d les boules pour la distances d et $B_{d'}$ les boules pour d'.

Soit O un ouvert de (E, d). Pour $a \in O$ donné, on peut trouver $r > 0$ tel que $B_d(a, r) \subseteq O$. Si on pose $r' := r/C$, alors $B_{d'}(a, r') \subseteq B_d(a, r)$ car $d(u, a) \leqslant C\, d'(u, a)$ pour tout $u \in E$; donc $B_{d'}(a, r') \subseteq O$. Ceci étant vrai pour tout $a \in O$, on en déduit que O est un ouvert de (E, d'). On montre de même que tout ouvert pour d' est ouvert pour d. □

Convention. Si E est un espace vectoriel *de dimension finie*, on dira qu'un ensemble $O \subseteq E$ est un *ouvert de* E si c'est un ouvert pour n'importe quelle norme sur E. Ceci a un sens d'après la Remarque 2, puisque toutes les normes sur E sont équivalentes.

Exemple 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Alors I est un ouvert de $\mathbb{R}$ si et seulement si c'est un *intervalle ouvert*, *i.e.* de la forme $]\alpha, \beta[$ avec $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant \infty$.

Démonstration. Supposons que I soit de la forme $]\alpha, \beta[$, et soit $a \in I$ quelconque. Comme $\alpha < a < \beta$, on peut trouver $r > 0$ tel que $\alpha \leqslant a - r$ et $a + r \leqslant \beta$. Alors $]a - r, a + r[\, \subseteq\,]\alpha, \beta[\, = I$, autrement dit $B(a, r) \subseteq I$. Ceci étant vrai pour tout $a \in I$, on en déduit que I est un ouvert.

Inversement, supposons que I ne soit pas un intervalle ouvert. Alors I est par exemple de la forme $[\alpha, \beta[$. Le point $a := \alpha$ est dans I, mais pour tout $r > 0$, la boule $B(a, r) = \,]\alpha - r, \alpha + r[$ déborde de I (sur la gauche) ; donc I n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}$. □

Exemple 2. Si (E, d) est un espace métrique quelconque, alors toute *boule ouverte* $B(x_0, r)$ est un ouvert de E.

Démonstration. Soit $a \in B(x_0, r)$ quelconque. Comme $d(a, x_0) < r$, on peut choisir $r_a > 0$ tel que $r_a + d(a, x_0) \leqslant r$ (par exemple $r_a := r - d(a, x_0)$!). D'après l'inégalité triangulaire, on a alors $B(a, r_a) \subseteq B(x_0, r)$ (exo). Ainsi, pour tout $a \in B(x_0, r)$ on a trouvé $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subseteq B(x_0, r)$, donc $B(x_0, r)$ est un ouvert de E. □

Exemple 3. Si d est la distance discrète sur un ensemble E, alors tout ensemble $A \subseteq E$ est ouvert pour d.

Démonstration. Si $a \in A$, alors $B(a, 1) = \{a\} \subseteq A$. □

Remarque. Pour une raison qui apparaitra clairement dans quelques lignes, on dit qu'un espace métrique E est **topologiquement discret** si toutes les parties de E sont des ensembles ouverts.

Proposition 1.2. *Soit (E, d) un espace métrique, et notons $\mathfrak{T}_d$ la famille de tous les ouverts de (E, d). La famille $\mathfrak{T}_d$ possède les propriétés suivantes :*

- (T0) *$\mathfrak{T}_d$ contient $\varnothing$ et E (autrement dit : $\varnothing$ et E sont des ouverts) ;*
- (T1) *$\mathfrak{T}_d$ est **stable par réunions quelconques** (si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors $O = \bigcup_i O_i$ est encore un ouvert) ;*
- (T2) *$\mathfrak{T}_d$ est **stable par intersections finies** (si $O_1, \dots, O_N$ sont ouverts, alors $O = O_1 \cap \dots \cap O_N$ est encore ouvert).*

Démonstration. La propriété (T0) est évidente.

(T1) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E et soit $O := \bigcup_i O_i$. Si $a \in O$, on peut trouver un indice i tel que a appartienne à l'ouvert O_i, puis $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O_i$. Alors $B(a, r) \subseteq O$; et ceci étant vrai pour tout $a \in O$, on en déduit que O est un ouvert.

(T2) Soient $O_1, \dots, O_N$ des ouverts de E, et soit $O := O_1 \bigcap \dots \bigcap O_N$. Si $a \in O$, on peut, pour $i = 1, \dots, N$, trouver $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subseteq O_i$. Si on pose $r := \min(r_1, \dots, r_N)$, alors $B(a, r) \subseteq B(a, r_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, donc $B(a, r) \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_N = O$. Comme $a \in O$ est quelconque, cela montre que O est un ouvert de E. □

Corollaire 1.3. *Dans un espace métrique, un ensemble O est ouvert si et seulement si c'est une* réunion de boules ouvertes.

Démonstration. D'après la proposition, une réunion de boules ouvertes est un ouvert (car les boules ouvertes sont des ouverts). Inversement, si $O \subseteq E$ est ouvert, alors O est *par définition* la réunion de toutes les boules ouvertes de E contenues dans O. □

Exercice. Montrer qu'en général, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas un ouvert.

Remarque. Si E est un ensemble abstrait, une famille $\mathfrak{T}$ de parties de E vérifiant les propriétés (T0), (T1), (T2) ci-dessus s'appelle une **topologie sur** E. Si d est une distance sur E, la topologie $\mathfrak{T}_d$ s'appelle la *topologie définie par d*. Un **espace topologique** est un ensemble E muni d'une topologie. Ainsi, tout espace métrique est en particulier un espace topologique.

Exercice. Soit E un ensemble contenant au moins 2 points, et soit $\mathfrak{T} := \{\varnothing, E\}$. Montrer que $\mathfrak{T}$ est une topologie sur E, et que $\mathfrak{T}$ ne peut pas être définie par une distance.

Définition 1.4. *Soit E un espace métrique, et soit $a \in E$. On dit qu'un ensemble $V \subseteq E$ est un* ***voisinage de** a **dans** E *s'il existe un ouvert O tel que $a \in O$ et $O \subseteq V$.*

Remarque 1. Il revient au même de dire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq V$.

Démonstration. C'est un exo facile. □

Remarque 2. Par définition, si V est un voisinage de a, alors tout ensemble V' *contenant* V est encore un voisinage de a.

Remarque 3. Un voisinage de a n'a aucune raison d'être un ouvert. Par exemple, $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$ dans $\mathbb{R}$ (et en fait un voisinage de tout point $a \in]0, 1[$). De même, dans un espace métrique quelconque, toute boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est un voisinage de a (car la boule fermée contient la boule ouverte).

Remarque 4. Pour tout ensemble $W \subseteq E$, on a l'équivalence suivante :

$$(W \text{ est ouvert}) \iff (W \text{ est un voisinage de chacun de ses points}).$$

Démonstration. C'est évident d'après la Remarque 1. □

1.2. Ensembles fermés.

Définition 1.5. *Soit (E, d) un espace métrique, et soit $C \subseteq E$. On dit que C est un* ***fermé de** (E, d) *s'il "contient tous ses points limites" ; autrement dit si, à chaque fois qu'une suite de points de C converge vers un point de E, sa limite appartient encore à C. Avec plus de symboles mathématiques : C est fermé si, pour toute suite $(u_k) \subseteq C$ telle que $u_k \to a \in E$, on a que $a \in C$.*

Remarque. Deux distances Lipschitz-équivalentes définissent les mêmes fermés (c'est évident puisqu'elles définissent les mêmes suites convergentes). On conviendra donc que si E est un espace vectoriel de dimension finie, l'expression "fermé de E" signifiera "fermé pour la distance associée n'importe quelle norme".

Exemple 1. Dans $\mathbb{R}$, un intervalle est un ensemble fermé si et seulement $I = \mathbb{R}$ ou bien I est de la forme $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \infty[$ ou $]-\infty, \beta]$.

Démonstration. Montrons par exemple que tout intervalle de la forme $[\alpha, \infty[$ est fermé dans $\mathbb{R}$. Soit $(u_k) \subseteq [\alpha, \infty[$ convergeant vers $a \in \mathbb{R}$. On a $u_k \geqslant \alpha$ pour tout k, donc $a = \lim u_k \geqslant \alpha$ car les inégalités *larges* se conservent à la limite.

Inversement, soit $I = (\alpha, \beta)$ un intervalle qui est un fermé de $\mathbb{R}$. Il s'agit de voir que I contient α si $\alpha > -\infty$ et contient β si $\beta < \infty$. Supposons $\alpha > -\infty$. Choisissons une suite (u_k) telle que $u_k > \alpha$ pour tout k et $u_k \to \alpha$. Alors $u_k \in]\alpha, \beta[\subseteq I$ pour k assez grand ; et comme I est supposé être un fermé de $\mathbb{R}$, cela montre que $\alpha \in I$. La preuve que $\beta \in I$ si $b < \infty$ est la même. □

Exemple 2. Dans un espace métrique quelconque, toute *boule fermée* $\overline{B}(x_0, r)$ est un ensemble fermé. En particulier, tout *singleton* $\{a\}$ est un ensemble fermé (puisque $\{a\} = \overline{B}(a, 0)$).

Démonstration. Soit (u_k) une suite d'éléments de $\overline{B}(x_0, r)$ convergeant vers $a \in E$. Alors $d(u_k, x) \to d(a, x_0)$ car la fonction $u \mapsto d(u, x_0)$ est continue sur E. Comme $d(u_k, x_0) \leqslant r$ pour tout k, on obtient donc $d(a, x_0) \leqslant r$ en passant à la limite ; donc $a \in \overline{B}(x_0, r)$. □

Exemple 3. Si (E, d) est un espace métrique discret (*i.e.* d est la distance discrète), alors tout ensemble $A \subseteq E$ est fermé.

Démonstration. Soit $A \subseteq E$ quelconque, et soit (u_k) une suite de points de A convergeant vers un point $a \in E$. Comme $u_k \to a$, on peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_k, a) < 1$ pour tout $k \geqslant K$. Par définition de la distance discrète, on a donc $u_k = a$ pour tout $k \geqslant K$, et en particulier $a \in A$. $\square$

Exemple 4. Si $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle fermé borné, alors $\mathcal{C}\big([a, b]\big)$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\ell^\infty\big([a, b]\big)$.

Démonstration. On sait que toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée ; donc $\mathcal{C}\big([a, b]\big)$ est bien un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty\big([a, b]\big)$. Comme $\|\cdot\|_\infty$ est la norme de la convergence uniforme, le fait que $\mathcal{C}\big([a, b]\big)$ soit fermé dans $\ell^\infty\big([a, b]\big)$ est la traduction d'un théorème bien connu : *toute limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue.* $\square$

La (très importante) proposition suivante montrer que les notions d'ouvert et de fermé sont "duales" l'une de l'autre.

Proposition 1.6. *Dans un espace métrique E, un ensemble $C \subseteq E$ est fermé si et seulement si son complémentaire $E\backslash C$ est* ouvert.

Démonstration. (i) Supposons que C soit fermé. Soit $a \in O := E\backslash C$ quelconque. Par l'absurde, supposons qu'on ne puisse pas trouver $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O$. Cela signifie que pour tout $r > 0$, il existe un point $u^r \in E$ tel que $d(u^r, a) < r$ et $u^r \notin O$, *i.e.* $u^r \in C$. En prenant $r := \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et en posant $u_k := u^{1/k}$, on obtient une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $d(u_k, a) < \frac{1}{k}$ et $u_k \in C$ pour tout k. Alors $u_k \to a$; donc $a \in C$ puisque C est supposé fermé, ce qui est absurde puisque $a \in O = E\backslash C$. Ainsi, on a bien montré qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O$.

(ii) Supposons maintenant que $O = E\backslash C$ soit ouvert. Soit (u_k) une suite quelconque d'éléments de C convergeant vers un point $a \in E$. Par l'absurde, supposons que $a \notin C$, *i.e.* $a \in O$. Comme O est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O$; et comme $u_k \to a$, on peut trouver k tel que $u_k \in B(a, r)$. Alors $u_k \in O = E\backslash C$, ce qui est absurde. Ainsi $a \in C$, ce qui prouve que C est fermé. $\square$

Corollaire 1.7. *Si E est un espace métrique, la famille des fermés de E possède les propriétés suivantes : $\varnothing$ et E sont des fermés ; toute* intersection *de fermés est un fermé ; et toute* réunion finie *de fermés est un fermé.*

Démonstration. C'est évident d'après la proposition 1.6 et la Proposition 1.2, en "passant aux complémentaires". $\square$

Exercice. Donner un exemple d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ qui ne soit ni ouvert ni fermé.

1.3. Convergence et continuité (*bis*). Les deux remarques suivantes montrent que la convergence et la continuité peuvent se reformuler sans faire explicitement appel aux distances, mais uniquement en termes de voisinages (et donc uniquement en termes d'ouverts). Cela signifie que la convergence et la continuité sont des notions *topologiques* et pas réellement métriques.

Remarque 1.8. Soit E un espace métrique, (u_k) une suite de points de E et $a \in E$. Alors

$$(u_k \to a) \iff \big(\forall V \text{ voisinage de } a,\ \exists K \text{ tel que } \forall k \geqslant K \ :\ u_k \in V\big).$$

Démonstration. C'est "évident" ; ce qui signifie qu'il faut écrire les deux lignes de preuve pour s'en convaincre tout à fait. □

REMARQUE 1.9. Soient E, F des espaces métriques, $f : E \to F$ et $a \in E$. Alors

$$(f \text{ continue en } a) \iff \big(\forall W \text{ voisinage de } f(a),\ \exists V \text{ voisinage de } a \text{ tel que } f(V) \subseteq W\big).$$

Démonstration. C'est à nouveau "évident" (écrire les détails). □

La proposition qui suit est importante car elle ouvre la porte à une "autre façon de penser" ; et elle est aussi très utile en pratique. Rappelons que pour toute application $f : E \to F$, on note $f^{-1}(A)$ l'**image réciproque par** f d'un ensemble $A \subseteq F$:

$$f^{-1}(A) := \{u \in E;\ f(u) \in A\}.$$

Rappelons aussi que les images réciproques se comporte bien par rapport aux opérations ensemblistes :

$$f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c, \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} f^{-1}(A_i).$$

PROPOSITION 1.10. *Soient E et F deux espaces métriques. Pour une application $f : E \to F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) *f est continue ;*
(2) *pour tout ouvert $O \subseteq F$, $f^{-1}(O)$ est ouvert dans E ;*
(3) *pour tout fermé $C \subseteq F$, $f^{-1}(C)$ est fermé dans E.*

Démonstration. L'équivalence de (2) et (3) est claire par la Proposition 1.6 en "passant aux complémentaires", car $f^{-1}(A^c) = \big(f^{-1}(A)\big)^c$ pour tout ensemble $A \subseteq F$.

Supposons f continue, et montrons que (2) est vérifiée. Soit $O \subseteq F$ un ouvert quelconque, et soit $a \in f^{-1}(O)$. Alors $f(a)$ appartient à l'ouvert O, donc on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subseteq O$. Comme f est continue en a, on peut ensuite trouver $\delta > 0$ tel que $f\big(B(a,\delta)\big) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$. Alors $f\big(B(a,\delta)\big) \subseteq O$, autrement dit $B(a,\delta) \subseteq f^{-1}(O)$. Comme on est parti d'un point quelconque $a \in f^{-1}(O)$, cela montre que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E.

Supposons maintenant (2) vérifiée, et montrons que f est continue. Soit $a \in E$ quelconque, et soit $\varepsilon > 0$. Alors $B(f(a),\varepsilon)$ est un ouvert de F, donc $O := f^{-1}\big(B(f(a),\varepsilon)\big)$ est un ouvert de E. Comme $a \in O$ (puisque $f(a) = \cdots f(a)$), on peut donc trouver $\delta > 0$ tel que $B(a,\delta) \subseteq O$, autrement dit $f\big(B(a,\delta)\big) \subseteq B(f(a),\varepsilon)$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela montre que f est continue en tout point $a \in E$. □

Exercice 1. Soient E, F des espaces métriques, $f : E \to F$ et $a \in E$. Montrer que f est continue au point a si et seulement si la propriété suivante a lieu : pour tout voisinage W de $f(a)$ dans F, l'ensemble $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a.

Exercice 2. Donner un exemple d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et d'un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}$ tels que $f(O)$ ne soit pas ouvert.

Exemple 1. Soit E un espace métrique, soit $a \in E$ et soit $r \geqslant 0$. Si on note $f : E \to \mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto d(u,a)$, alors $B(a,r) = \{u;\ f(u) < r\} = f^{-1}\big(]-\infty, r[\big)$. Comme $]-\infty, r[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et comme f est continue, cela "explique pourquoi" $B(a,r)$ est un ouvert de E. De même, $\overline{B}(a,r) = f^{-1}\big(]-\infty, r]\big)$, donc $\overline{B}(a,r)$ est un fermé de E car $]-\infty, r]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

Exemple 2. Soit E un espace métrique, soit $a \in E$ et soit $r \geqslant 0$. Notons $S(a,r) := \{u \in E;\ d(u,a) = r\}$ la **sphère** de centre a et de rayon r. Alors $S(a,r)$ est un fermé de E.

Démonstration. On a $S(a,r) = f^{-1}(\{r\})$, où $f : E \to \mathbb{R}$ est la fonction continue $u \mapsto d(u,a)$; d'où le résultat car le singleton $\{r\}$ est un fermé de $\mathbb{R}$. □

Exemple 3. L'ensemble $V := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\ y > 0 \text{ et } y < 1/x\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$, et l'ensemble $C := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0,\ y^3 + 5z^2 \leqslant 6 \text{ et } x^5 - y^2 + z^4 = 1\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^3$.

Démonstration. On a $V = \{(x,y);\ x > 0\} \cap \{(x,y);\ y > 0\} \cap \{(x,y);\ xy < 1\}$. Autrement dit, $V = f^{-1}\big(]0,\infty[\big) \cap g^{-1}\big(]0,\infty[\big) \cap h^{-1}\big(]-\infty,1[\big)$, où $f,g,h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont les fonctions définies par $f(x,y) := x$, $g(x,y) := y$ et $h(x,y) := xy$. Comme $]0,\infty[$ et $]-\infty,1[$ sont des ouverts de $\mathbb{R}$ et comme les fonctions f,g,h sont continues, on voit ainsi que V apparait comme l'intersection de 3 ouverts de $\mathbb{R}^2$, et par conséquent V est ouvert. De même, on a $C = f^{-1}\big([0,\infty[\big) \cap g^{-1}\big(]-\infty,6]\big) \cap h^{-1}\big(\{1\}\big)$, où $f(x,y,z) := x$, $g(x,y,z) := y^3 + 5z^2$ et $h(x,y,z) := x^5 - y^2 + z^4$. Ainsi, C apparait comme l'intersection de 3 fermés de $\mathbb{R}^3$ (car $[0,\infty[$, $]-\infty,6]$ et $\{1\}$ sont des fermés de $\mathbb{R}$ et les fonctions f, g, h sont continues), et donc C est un fermé. □

Exemple 4. $GL_N(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_N(\mathbb{K})$.

Démonstration. On a $GL_N(\mathbb{K}) = \{M \in M_N(\mathbb{K});\ \det(M) \neq 0\} = \Phi^{-1}(\mathbb{K}\backslash\{0\})$, où Φ est l'application continue $M \mapsto \det(M)$. Comme $\mathbb{K}\backslash\{0\}$ est un ouvert de $\mathbb{K}$ (car $\{0\}$ est fermé), on en déduit le résultat souhaité. □

Remarque. Il y a un principe général à retenir des exemples précédents : *les inégalités strictes et les "non égalités" définissent des ouverts, tandis que les inégalités larges et les égalités définissent des fermés.*

Exercice 1. Montrer que l'ensemble $C := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\ y > 0 \text{ et } y = 1/x\}$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$. (Il est judicieux de commencer par ré-écrire C de façon un peu différente.)

Exercice 2. Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales et l'ensemble des matrices nilpotentes sont des fermé de $M_N(\mathbb{R})$.

1.4. Distances topologiquement équivalentes.

Définition 1.11. *Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E. On dit que d et d' sont **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même topologie ; autrement dit, si tout ouvert pour d est ouvert pour d' et vice versa.*

Cette définition peut se traduire en termes de suites :

Lemme 1.12. *Deux distances d et d' sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles possèdent les mêmes suites convergentes ; autrement dit, si toute suite convergeant pour d converge aussi pour d' (vers la même limite) et vice versa.*

Démonstration. Si d et d' possèdent les mêmes suites convergentes, alors elles définissent les mêmes *fermés* par définition d'un fermé ; donc elles définissent les mêmes ouverts (*i.e.* sont topologiquement équivalentes) d'après la Proposition 1.6. Inversement, si d et d' sont topologiquement équivalentes, alors elles possèdent les mêmes suites convergentes car la convergence des suites est une "notion topologique" (*cf* la Remarque 1.8). $\square$

Exemple. Deux distances Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes.

Exercice 1. Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E. On suppose que toute suite $(u_k) \subseteq E$ convergeant pour d converge également pour d'. Montrer que toute suite (u_k) convergeant pour d converge nécessairement *vers la même limite* pour d'. (Cet exercice a déjà été posé au Chapitre 2.)

Exercice 2. Soient E et F des espaces métriques. Montrer que les applications continues entre E et F restent les mêmes si on remplace les distances de E et F par des distances topologiquement équivalentes.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel. Montrer que deux normes sur E définissent des distances topologiquement équivalentes si et seulement elles sont équivalentes en tant que normes.

Le résultat suivant est souvent utile.

Proposition 1.13. *Soit E un ensemble non-vide. Si d est une distance sur E, alors il existe sur E une distance δ topologiquement équivalente à d et vérifiant de plus $\delta(u,v) \leqslant 1$ pour tous $u, v \in E$.*

Démonstration. On a besoin du fait suivant.

Fait. La fonction $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ définie par $\Phi(t) := \min(1,t)$ est croissante et vérifie $\Phi(s+t) \leqslant \Phi(s) + \Phi(t)$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}^+$. De plus, on a $\Phi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$.

Preuve du Fait. Il est clair que Φ est croissante, et que $\Phi(t) = 0$ si et seulement si $t = 0$. Si $s \leqslant 1$ et $t \leqslant 1$, alors $\Phi(s) = s$ et $\Phi(t) = t$, et donc $\Phi(s+t) \leqslant \Phi(s) + \Phi(t)$ puisque $\Phi(s+t) \leqslant s+t$. Si par exemple $s > 1$, alors $s + t > 1$ également, donc $\Phi(s+t) = 1 = \Phi(s)$ et donc $\Phi(s+t) \leqslant \Phi(s) + \Phi(t)$. $\square$

Définissons maintenant $\delta : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\delta(u,v) := \Phi(d(u,v)) = \min(1, d(u,v)).$$

En utilisant le Fait, on vérifie très facilement (exo) que δ est une distance sur E. Il reste à voir que d et δ sont topologiquement équivalentes, ce qu'on va faire en montrant qu'elles possèdent les mêmes suites convergentes.

Soit $(u_k) \subseteq E$ une suite convergeant vers un point $a \in E$ au sens de la distance d. Alors $d(u_k, a) \to 0$, donc $\delta(u_k, a) = \Phi(d(u_k,a)) \to \Phi(0) = 0$ car la fonction Φ est continue. Inversement, supposons que (u_k) converge vers a pour la distance δ. Alors $\delta(u_k, a) \to 0$, donc on peut trouver un entier K tel que $\delta(u_k, a) < 1$ pour tout $k \geqslant K$. Comme $\delta(u_k,a) = \min(1, d(u_k,a))$, on a donc $\delta(u_k,a) = d(u_k,a)$ pour tout $k \geqslant K$, et donc $d(u_k, a) \to 0$. $\square$

Corollaire 1.14. *Il existe sur $\mathbb{R}$ une distance topologiquement équivalente à la distance usuelle, mais pas Lipschitz-équivalente.*

Démonstration. C'est clair par la proposition, car une distance δ vérifiant $\delta(u,v) \leqslant 1$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}$ ne peut pas être Lispchitz-équivalente à la distance usuelle (qui est non bornée). $\square$

Exercice 1. Soit (E,d) un espace métrique. Montrer que la formule $\delta(u,v) := \frac{d(u,v)}{1+d(u,v)}$ définit une distance topologiquement équivalente à d.

Exercice 2. Soit E un evn, $E \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe sur E une distance topologiquement équivalente à la distance définie par la norme de E, mais qui ne peut pas être définie par une norme.

2. Intérieur, adhérence, frontière

2.1. Intérieur d'un ensemble.

DÉFINITION 2.1. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. On dit qu'un point $a \in E$ est **intérieur à** A s'il existe un ouvert V tel que $a \in V$ et $V \subseteq A$; autrement dit, si* A est un voisinage de a. *On note $\mathring{A}$ l'ensemble des points de E intérieurs à A.*

Remarque 0. La définition se reformule somme suit : a est intérieur à A si et seulement si on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a,r) \subseteq A$.

Remarque 1. On a évidemment $\mathring{A} \subseteq A$.

Remarque 2. L'opération de prise d'intérieur est *croissante* : si $A \subseteq B$, alors $\mathring{A} \subseteq \mathring{B}$.

EXEMPLE 1. Prenons $E = \mathbb{R}$. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle (a,b) de nature quelconque, alors $\mathring{A}$ est l'intervalle ouvert $]a,b[$.

Démonstration. Exo. $\square$

EXEMPLE 2. Dans $E = \mathbb{R}$, on a $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$ et $\overbrace{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}^{\circ} = \varnothing$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Tout ouvert V contenant a contient un intervalle ouvert non-vide, et donc contient des points de $\mathbb{Q}$ et des points de $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. Donc a ne peut être intérieur ni à $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, ni à $\mathbb{Q}$. $\square$

EXEMPLE 3. Soit E un *espace vectoriel normé.* Si $x_0 \in E$ et $r > 0$, alors l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(x_0,r)$ est la boule ouverte $B(x_0,r)$.

Démonstration. Si a est un point quelconque de $B(x_0,r)$, alors $\overline{B}(x_0,r)$ est un voisinage de a car $B(x_0,r)$ est un ouvert de E ; donc tout point de $B(x_0,r)$ est intérieur à $\overline{B}(x_0,r)$.

Inversement, soit a un point intérieur à $\overline{B}(x_0,r)$. Alors a appartient en particulier à $\overline{B}(x_0,r)$, *i.e.* $\|a - x_0\| \leqslant r$. Il s'agit de voir qu'en fait $\|a - x_0\| < r$.

Par l'absurde, supposons que $\|a - x_0\| = r$. Pour $\varepsilon > 0$, posons $u_\varepsilon := a + \varepsilon(a - x_0)$. On a $u_\varepsilon - x_0 = (1+\varepsilon)(a - x_0)$, donc $\|u_\varepsilon - x_0\| = (1+\varepsilon)\,\|a - x_0\| = (1+\varepsilon)r > r$. Ainsi, $u_\varepsilon \notin \overline{B}(x_0,r)$. (Faire un dessin pour se convaincre que cela est évident, même sans calcul.) Cependant, comme a est intérieur à $\overline{B}(x_0,r)$, on peut trouver $r_a > 0$ tel que $\overline{B}(a,r_a) \subseteq \overline{B}(x_0,r)$. Comme $u_\varepsilon \to a$ quand $\varepsilon \to 0$, on peut ensuite trouver $\varepsilon > 0$ tel que $u_\varepsilon \in B(a,r_a)$; et ainsi $u_\varepsilon \in \overline{B}(x_0,r)$, ce qui est la contradiction cherchée. $\square$

Exercice. Montrer que dans un espace métrique quelconque, une boule ouverte $B(a,r)$ est toujours *contenue* dans l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a,r)$, mais qu'on n'a pas forcément égalité.

PROPOSITION 2.2. *Soit E un espace métrique. Si $A \subseteq E$, alors $\mathring{A}$ est un ouvert de E, et c'est le* ***plus grand*** *ouvert de E contenu dans A.*

Démonstration. Par définition, $\mathring{A}$ est la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A. Donc $\mathring{A}$ est un ouvert par la Proposition 1.2, et c'est visiblement le plus grand ouvert contenu dans A. □

COROLLAIRE 2.3. *Si $A \subseteq E$, alors (A ouvert) $\iff$ $(\mathring{A} = A)$ $\iff$ $(A \subseteq \mathring{A})$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer d'une part que A est ouvert si et seulement si A est le plus grand ouvert de E contenu dans A (!), et d'autre part que $A = \mathring{A}$ si et seulement si $A \subseteq \mathring{A}$ car l'inclusion $\mathring{A} \subseteq A$ est toujours vraie. □

COROLLAIRE 2.4. *L'opération de prise d'intérieur est* idempotente *: pour tout $A \subseteq E$, on a $\mathring{\mathring{A}} = \mathring{A}$.*

Démonstration. C'est évident par le corollaire précédent puisque $\mathring{A}$ est un ouvert. □

COROLLAIRE 2.5. *Si $A, B \subseteq E$ alors $\overbrace{A \cap B}^{\circ} = \mathring{A} \cap \mathring{B}$.*

Démonstration. Comme $\mathring{A} \cap \mathring{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$, on a $\mathring{A} \cap \mathring{B} \subseteq \overbrace{A \cap B}^{\circ}$. Inversement, $\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subseteq \mathring{A}$ et $\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subseteq \mathring{B}$ par croissance de l'opération de prise d'intérieur, donc $\overbrace{A \cap B}^{\circ} \subseteq \mathring{A} \cap \mathring{B}$. □

Exercice. Quelle relation y a-t-il entre $\overbrace{A \cup B}^{\circ}$ et $\mathring{A} \cup \mathring{B}$? Plus généralement, si Si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille de parties de E, quelle relation y a-t-il entre l'intérieur de $\bigcup_{i\in I} A_i$ et $\bigcup_{i\in I} \mathring{A}_i$?

2.2. Adhérence d'un ensemble.

DÉFINITION 2.6. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. On dit qu'un point $u \in E$ est* ***adhérent à*** *A si tout voisinage V de u rencontre A (i.e. $V \cap A \neq \varnothing$ pour tout voisinage V de u). On note $\overline{A}$ l'ensemble des points de E adhérents à A.*

Remarque 0. La définition se reformule comme suit : u est adhérent à A si et seulement si $\forall \varepsilon > 0$ $\exists a \in A$ tel que $d(u, a) < \varepsilon$.

Remarque 1. On a évidemment $A \subseteq \overline{A}$.

Remarque 2. L'opération de prise d'adhérence est croissante : si $A \subseteq B$, alors $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

REMARQUE 3. Les notions d'intérieur et d'adhérence sont "duales" au sens suivant : pour tout $A \backslash E$, on a

$$\overline{A} = E \backslash \big(\overbrace{E \backslash A}^{\circ} \big), \qquad \text{autrement dit} \qquad E \backslash \overline{A} = \overbrace{E \backslash A}^{\circ}. \tag{2.1}$$

En remplaçant A par $E \backslash A$, on en déduit

$$\overline{E \backslash A} = E \backslash \mathring{A}. \tag{2.2}$$

Démonstration. C'est "évident par définition" : pour $u \in E$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} u \notin \overline{A} &\iff \exists V \text{ voisinage de } u \text{ tel que } V \cap A = \varnothing \\ &\iff \exists V \text{ voisinage de } u \text{ tel que } V \subseteq E\backslash A \\ &\iff E\backslash A \text{ est un voisinage de } u \\ &\iff u \in \overbrace{E\backslash A}^{\circ}. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 1. Prenons $E = \mathbb{R}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, alors $\overline{]a,b[} = [a,b]$.

Démonstration. Exo. □

EXEMPLE 2. Dans $\mathbb{R}$, on a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}$.

Démonstration. C'est clair d'après (2.1) ou (2.2) puisque $\overbrace{\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}}^{\circ} = \varnothing = \mathring{\mathbb{Q}}$. □

EXEMPLE 3. Si A est une partie (non-vide) majorée de $\mathbb{R}$, alors $\sup A \in \overline{A}$; si A est minorée, alors $\inf A \in \overline{A}$.

Démonstration. Supposons A majorée, et soit $\beta := \sup A$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $a \in A$ tel que $\beta - \varepsilon < a \leqslant \beta$, et donc $|\beta - a| < \varepsilon$. Donc $\beta \in \overline{A}$ par définition de $\overline{A}$. □

EXEMPLE 4. Dans un *espace vectoriel normé*, l'adhérence d'une boule ouverte non triviale est la boule fermée correspondante.

Démonstration. Soit $B = B(x_0, r)$ une boule ouverte de E, avec $r > 0$.

Si $u \in \overline{B}$, on peut pour tout $\varepsilon > 0$ trouver un point $a \in B$ tel que $\|u - a\| < \varepsilon$, ce qui entraine $\|u - x_0\| \leqslant \|u - a\| + \|a - x_0\| < \varepsilon + r$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $\|u - x_0\| \leqslant r$ pour tout $u \in \overline{B}$, *i.e.* $\overline{B} \subseteq \overline{B}(x_0, r)$.

Inversement, soit $u \in \overline{B}(x_0, r)$. Pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, le point $a_\varepsilon := u - \varepsilon(u - x_0) = \varepsilon x_0 + (1-\varepsilon)u$ vérifie $\|a_\varepsilon - x_0\| = (1-\varepsilon)\|u - x_0\| < r$ (donc $a_\varepsilon \in B$), et $\|a_\varepsilon - u\| = \varepsilon\|u - x_0\|$. Comme ε est arbitraire, on voit ainsi qu'on peut trouver des points de $B(x_0, r)$ arbitrairement proches de u, autrement dit que u est adhérent à $B(x_0, r)$. Ainsi, $\overline{B}(x_0, r) \subseteq \overline{B}$. □

PROPOSITION 2.7. *Soit E un espace métrique. Si $A \subseteq E$, alors $\overline{A}$ est un fermé de E, et c'est le* ***plus petit*** *fermé de E contenant A.*

Démonstration. Comme $E\backslash\overline{A} = \overbrace{E\backslash A}^{\circ}$ est ouvert, $\overline{A}$ est un fermé de E. Si C est un fermé contenant A, alors $V := E\backslash C$ est un ouvert contenu dans $E\backslash A$, donc $E\backslash C \subseteq \overbrace{E\backslash A}^{\circ} = E\backslash\overline{A}$ et donc $C \supseteq \overline{A}$. Ainsi, $\overline{A}$ est bien le plus petit fermé de E contenant A. □

COROLLAIRE 2.8. *Si $A \subseteq E$, alors (A fermé) $\iff$ ($\overline{A} = A$) $\iff$ ($\overline{A} \subseteq A$).*

Démonstration. Exo. □

COROLLAIRE 2.9. *l'opération de prise d'adhérence est idempotente : pour tout $A \subseteq E$, on a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*

Démonstration. C'est clair puisque $\overline{A}$ est fermé. □

Corollaire 2.10. *Si* $A, B \subseteq E$*, alors* $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Démonstration. Comme $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé et contient $A \cup B$, on a $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Inversement, $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ par croissance de l'opération de prise d'adhérence, donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. □

Exercice. quel lien y a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$?

Corollaire 2.11. *Si* E *est un espace métrique quelconque, alors l'adhérence d'une boule ouverte* $B(x_0, r)$ *est toujours* contenue *dans la boule fermée* $\overline{B}(x_0, r)$*.*

Démonstration. On a $B(x_0, r) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$, et on sait que $\overline{B}(x_0, r)$ est un fermé de E. □

La proposition suivante montre que l'adhérence d'un ensemble A est exactement l'ensemble de ses “points limites”.

Proposition 2.12. *Soit* E *un espace métrique, et soit* $A \subseteq E$*. Pour un point* $u \in E$*, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(1) $u \in \overline{A}$;

(2) *il existe une suite* (a_k) *de points de* A *telle que* $a_k \to u$;

(3) $\mathrm{dist}(u, A) = 0$.

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2). Si $u \in \overline{A}$, alors $B(u, \varepsilon) \cap A \neq \varnothing$ pour tout $\varepsilon > 0$, autrement dit on peut trouver $a = a^\varepsilon \in A$ tel que $d(a, u) < \varepsilon$. En prenant $\varepsilon := 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient une suite $(a_k) \subseteq A$ telle que $d(a_k, u) < 1/k$ pour tout k, ce qui prouve (2).

(2) $\Longrightarrow$ (3). Si $a_k \to u$ avec $a_k \in A$, alors $0 \leqslant \mathrm{dist}(u, A) \leqslant d(u, a_k)$ pour tout k et donc $\mathrm{dist}(u, A) = 0$ en faisant tendre k vers l'infini.

(3) $\Longrightarrow$ (1). Si $\mathrm{dist}(u, A) = 0$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $a = a_\varepsilon \in A$ tel que $d(u, a) < \varepsilon$; donc $u \in \overline{A}$. □

Corollaire 2.13. *Si* C *est un fermé de* E *et si* $u \in E \backslash C$*, alors* $\mathrm{dist}(u, C) > 0$.

Démonstration. Exo. □

Exercice 1. Soient $A, B \subseteq E$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ en utilisant la “caractérisation séquentielle de l'adhérence”.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $M \subseteq E$ un sous-espace vectoriel *fermé*. Pour tout $x \in E$, on note $[x]$ la classe de x dans l'*espace vectoriel quotient* E/M. Montrer qu'on définit une norme sur E/M en posant

$$\|[x]\|_{E/M} := \mathrm{dist}(x, M) \qquad \text{pour tout } x \in E.$$

On dit que cette norme est la **norme quotient** sur E/M.

Voici pour finir un dernier résultat utile.

Proposition 2.14. *Soient* E, F *deux espaces métriques, et soit* $f : E \to F$*. Alors* f *est continue si et seulement si* $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ *pour tout ensemble* $A \subseteq E$*.*

Démonstration. Supposons f continue. Soit $A \subseteq E$, et soit $u \in \overline{A}$. Par la Proposition 2.12, on peut trouver une suite $(a_k) \subseteq A$ telle que $a_k \to u$. Alors $f(a_k) \to f(u)$, et donc $f(u) \in \overline{f(A)}$ puisque les $f(u_k)$ appartiennent à $f(A)$. Ceci étant vrai pour tout $u \in \overline{A}$, on a donc $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Inversement, supposons qu'on ait $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ pour tout ensemble $A \subseteq E$. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque par f de tout fermé $C \subseteq F$ est un fermé de E. Soit donc C un fermé quelconque de F, et soit $A := f^{-1}(C)$. Par hypothèse, on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Comme $f(A) \subseteq C$ et C est fermé, on en déduit $f(\overline{A}) \subseteq \overline{C} = C$, *i.e.* $\overline{A} \subseteq f^{-1}(C) = A$. Ainsi, $A = f^{-1}(C)$ est fermé dans E pour tout fermé $C \subseteq F$, ce qui prouve que f est continue. □

2.3. Frontière d'un ensemble.

Définition 2.15. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. On dit qu'un point $u \in E$ est un* ***point frontière*** *de A si u appartient à la fois à $\overline{A}$ et à $\overline{E \backslash A}$. On note ∂A l'ensemble des points frontières de A, qu'on appelle la* ***frontière de*** *A* ***dans*** *E :*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \backslash A}.$$

Remarque 1. Dans la définition A et $E \backslash A$ jouent des rôles symétriques. Donc

$$\partial A = \partial(E \backslash A).$$

Remarque 2. Comme $\overline{E \backslash A} = E \backslash \mathring{A}$, on a aussi

$$\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A}.$$

Remarque 3. Par définition, ∂A est toujours un ensemble *fermé.*

Exemple 1. Prenons $E := \mathbb{R}$. Si $I = (a, b)$ est un intervalle borné, alors $\partial I = \{a, b\}$. Si $I = (a, \infty[$ avec $a > -\infty$, alors $\partial I = \{a\}$. Si $I =]-\infty, b)$ avec $b < \infty$, alors $\partial I = \{b\}$.

Démonstration. Si par exemple $I = (a, b)$ est borné, alors $\overline{I} = [a, b]$ et $\mathring{I} =]a, b[$; donc $\partial I = [a, b] \backslash]a, b[= \{a, b\}$. □

Exemple 2. Dans $\mathbb{R}$, on a $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} = \partial(\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q})$.

Démonstration. On a vu que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\mathring{\mathbb{Q}} = \varnothing$; donc $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \backslash \varnothing = \mathbb{R}$. □

Exemple 3. Dans un *espace vectoriel normé*, la frontière d'une boule ouverte non-vide est la sphère correspondante : $\partial B(a, r) = S(a, r) = \{u \in E;\ \|u - a\| = r\}$.

Démonstration. On a vu que l'adhérence de la boule ouverte $B = B(a, r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$. Comme de plus B est un ouvert de E, on a donc $\partial B = \overline{B} \backslash \mathring{B} = \overline{B}(a, r) \backslash B(a, r) = S(a, r)$. □

Exemple 4. Si E est un espace métrique topologiquement discret, alors $\partial A = \varnothing$ pour tout $A \subseteq E$.

Démonstration. C'est évident puisque tout ensemble $A \subseteq E$ est à la fois ouvert et fermé : $\partial A = \overline{A} \backslash \mathring{A} = A \backslash A = \varnothing$. □

Exemple 5. Soit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0, y > 0 \text{ et } y \leqslant 1/x\}$. La frontière de A dans $\mathbb{R}^2$ est la réunion de la branche d'hyperbole $\Gamma := \{(x, y);\ x > 0, y > 0 \text{ et } xy = 1\}$ et des deux demi-droites $\{(x, 0);\ x \geqslant 0\}$ et $\{(0, y);\ y \geqslant 0\}$.

Démonstration. Exo. □

3. Sous-espaces et produits

3.1. Ouverts et fermés d'un sous-espace. Dans cette section, E est un espace métrique et M est une partie de E.

L'ensemble M est lui même un espace métrique quand on le munit de la distance induite. Cependant, il faut être très prudent : les ouverts de M n'ont *a priori* aucune raison d'être ouverts dans E : par exemple, M est toujours ouvert dans M, mais pas forcément dans E. Plus généralement, les notions d'adhérence, d'intérieur, de frontière ont un sens *dans* M qui n'est en général pas du tout le même que *dans* E ; et ceci peut parfois être source de regrettables confusions.

La proposition suivante dit précisément ce que sont les ouverts *de* M.

Proposition 3.1. *Un ensemble $A \subseteq M$ est ouvert* dans M *si et seulement si il est de la forme $A = O \cap M$, où O est un ouvert* de E.

Démonstration. Pour $a \in M$ et $r > 0$, notons $B_M(a,r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r *dans* M : par définition,

$$B_M(a,r) = \{u \in M;\ d(u,a) < r\} = B(a,r) \cap M.$$

Supposons que A soit ouvert dans M. Alors A est réunion de boules ouvertes de M :

$$A = \bigcup_{i\in I} B_M(a_i, r_i) = \bigcup_{i\in I} B(a_i, r_i) \cap M.$$

Si on pose $O := \bigcup_{i\in I} B(a_i, r_i)$, alors O est un ouvert *de* E (réunion de boules ouvertes), et $A = O \cap M$.

Inversement, supposons que $A = O \cap M$ pour un certain ouvert $O \subseteq E$. Pour tout point $a \in A \subseteq O$, on peut trouver $r = r_a > 0$ tel que $B(a,r) \subseteq O$; et on a alors $B_M(a,r) = B(a,r) \cap M \subseteq O \cap M = A$. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on voit ainsi que A est un ouvert de M. □

Remarque. On voit en particulier que la topologie de M ne dépend que de la topologie du "gros" espace métrique E le contenant. Pour cette raison, il est légitime de dire que la topologie de M est la **topologie induite sur M par celle de E**.

Corollaire 3.2. *Si $A \subseteq M$ est ouvert* dans E, *alors A est ouvert* dans M.

Démonstration. C'est évident par la proposition puisque $A = A \cap M$. □

Corollaire 3.3. *Si M* est ouvert dans E *et si $A \subseteq M$, alors*

$$(A \text{ ouvert dans } M) \iff (A \text{ ouvert dans } E).$$

Démonstration. C'est à nouveau évident : pour tout ouvert $O \subseteq E$, $O \cap M$ est ouvert dans E (intersection de deux ouverts), donc tout ouvert de M est ouvert dans sE ; et l'autre implication vient du corollaire précédent. □

Corollaire 3.4. *Pour $A \subseteq M$, notons $\mathring{A}^M$ l'intérieur de A dans M. Alors $\mathring{A}^M$* contient $\mathring{A}$.

Démonstration. $\mathring{A}$ est ouvert dans E et $\mathring{A} \subseteq M$, donc $\mathring{A}$ est un ouvert de M ; et $\mathring{A} \subseteq A$, donc $\mathring{A} \subseteq \mathring{A}^M$ puisque $\mathring{A}^M$ est le plus grand ouvert de M contenu dans A. □

Les fermés du sous-espace M se décrivent de la même façon que les ouverts :

Proposition 3.5. *Un ensemble $A \subseteq M$ est fermé* dans M *si et seulement si il est de la forme $A = C \cap M$, où C est un fermé* de E.

Démonstration. C'est "automatique par dualité" maintenant qu'on sait décrire les ouverts de M :

$$\begin{aligned}
A \text{ fermé dans } M &\iff M\backslash A \text{ ouvert dans } M\\
&\iff M\backslash A = O \cap M \quad \text{avec } O \text{ ouvert de } E\\
&\iff A = M\backslash(O \cap M) \quad \text{avec } O \text{ ouvert de } E\\
&\iff A = M \cap (E\backslash O) \quad \text{avec } O \text{ ouvert de } E\\
&\iff A = C \cap M \quad \text{avec } C \text{ fermé de } E.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.6. *Si $A \subseteq M$, alors (A fermé* dans E) $\implies$ (A *fermé* dans M). *La réciproque est vraie si M est fermé dans E.*

Démonstration. Exo. □

Corollaire 3.7. *Pour $A \subseteq M$, notons $\overline{A}^M$ l'adhérence de A dans M. Alors*

$$\overline{A}^M = \overline{A} \cap M$$

Démonstration. Par la proposition, $\overline{A} \cap M$ est un fermé de M, qui contient A puisque $A \subseteq M$; donc $\overline{A} \cap M \supseteq \overline{A}^M$. Inversement, $\overline{A}^M$ est fermé dans M, donc de la forme $\overline{A}^M = C \cap M$ où C est un fermé de E. Alors C contient A puisque $A \subseteq \overline{A}^M$, donc C contient $\overline{A}$ puisque C est fermé dans E, et donc $\overline{A}^M = C \cap M \supseteq \overline{A} \cap M$. □

Exercice. Démontrer *directement* que $\overline{A}^M = \overline{A} \cap M$, en utilisant la "caractérisation séquentielle de l'adhérence".

Voici maintenant ce qu'on peut dire sur la frontière relative à un sous-espace.

Proposition 3.8. *Pour $A \subseteq M$, notons $\partial_M A$ la frontière de A* dans M. *Alors $\partial_M A \subseteq \partial A$.*

Démonstration. On a $\partial_M A = \overline{A}^M \backslash \overset{\circ}{A}{}^M$, donc $\partial_M A \subseteq \overline{A} \backslash \overset{\circ}{A} = \partial A$ puisque $\overline{A}^M \subseteq \overline{A}$ et $\overset{\circ}{A}{}^M \supseteq \overset{\circ}{A}$. □

3.2. Topologie produit. Dans cette section, $(E_1, d_1), \dots, (E_N, d_N)$ sont des espaces métriques et $E = E_1 \times \cdots \times E_N$. On munit E de la distance produit. On va décrire précisément les ouverts de l'espace produit E.

Fait 3.9. *Si $O_1, \dots, O_N$ sont des ouverts de $E_1, \dots, E_N$ respectivement, alors $O := O_1 \times \cdots \times O_N$ est un ouvert de $E = E_1 \times \cdots \times E_N$.*

Démonstration. Pour $j = 1, \dots, N$, notons $\pi_j : E \to E_j$ la j-ième "application coordonnée", $\pi_j(u_1, \dots, u_N) := u_j$. Comme la convergence dans E entraine la convergence coordonnée par coordonnée, on voit que les π_j sont continues (exo). De plus, on a par définition

$$\begin{aligned}
O &= \{u = (u_1, \dots, u_N) \in E;\ u_j \in O_j \text{ pour } j = 1, \dots, N\}\\
&= \bigcap_{j=1}^{N} \pi_j^{-1}(O_j)\,.
\end{aligned}$$

Donc O est ouvert dans E (intersection finie d'ouverts). □

DÉFINITION 3.10. *On appellera **ouvert élémentaire** de $E = E_1 \times \cdots \times E_N$, tout ouvert $O \subseteq E$ de la forme $O = O_1 \times \cdots \times O_N = \{u \in E;\ u_1 \in O_1, \dots, u_N \in O_N\}$, où $O_1, \dots, O_N$ sont des ouverts de $E_1, \dots, E_N$ respectivement.*

Remarque. Un O_j a éventuellement le droit d'être égal à E_j, et dans ce cas il ne “sert à rien”. En d'autre termes, pour tout $J \subseteq \{1, \dots, N\}$, si on se donne un ouvert $O_j \subseteq E_j$ pour $j \in J$, alors l'ensemble $O := \{u \in E;\ u_j \in O_j \text{ pour } j \in J\}$ est un ouvert élémentaire.

PROPOSITION 3.11. *Un ensemble $A \subseteq E = E_1 \times \cdots \times E_N$ est ouvert dans E si et seulement si il est* réunion d'ouverts élémentaires*.*

Démonstration. Comme la famille des ouverts est stable par réunions, toute réunion d'ouverts élémentaires est un ouvert de E.

Pour la réciproque, comme tout ouvert de E est réunion de boules ouvertes, il suffit de montrer que toute boule ouverte de E (pour la distance produit) est en fait un ouvert élémentaire.

Notons d la distance produit sur E. Par définition, on a pour $u = (u_1, \dots, u_N)$ et $v = (v_1, \dots, v_N)$ dans E :

$$d(u, v) = \max\big(d_1(u_1, v_1), \dots d_N(u_N, v_N)\big).$$

Soit $B = B(a, r)$ un boule ouverte de E, et écrivons $a = (a_1, \dots, a_N)$. Si $u = (u_1, \dots, u_N) \in E$, alors

$$\begin{aligned} u \in E \quad &\iff \quad \max\big(d(u_1, a_1), \dots, d_N(u_N, a_N)\big) < r \\ &\iff \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}\ :\ d_j(u_j, a_j) < r \\ &\iff \quad \forall j \in \{1, \dots, N\}\ :\ u_j \in B(a_j, r)\,. \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que $B(a, r) = B(a_1, r) \times \cdots \times B(a_N, r)$; donc $B(a, r)$ est en effet un ouvert élémentaire. □

REMARQUE. La proposition montre que la topologie de $E = E_1 \times \cdots \times E_N$ ne dépend que des topologies de $E_1, \dots, E_N$, et pas spécifiquement des distances choisies sur $E_1, \dots, E_N$. On dit que la topologie de E est la **topologie produit** des topologies de $E_1, \dots, E_N$.

4. Propriétés de “séparation”

Cette section contient un certain nombre de petites remarques souvent utiles, classées par “ordre croissant de généralité”.

FAIT 4.1. *Soit E un espace métrique. Si $a, b \in E$ et $a \neq b$, alors on peut **séparer** a **et** b **par des ouverts** : il existe des ouverts U, V tels que $a \in U$, $b \in V$ et $U \cap V = \varnothing$, et même $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.*

Démonstration. Posons $\delta := d(a, b)$. Alors $\delta > 0$ car $a \neq b$. Montrons que $U := B(a, \delta/3)$ et $V := B(b, \delta/3)$ conviennent.

Supposons que $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \varnothing$, et choisissons un point $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$. Alors $x \in \overline{B}(a, \delta/3) \cap \overline{B}(b, \delta/3)$ d'après le Corollaire 2.11 ; donc $d(a, b) \leqslant d(a, x) + d(x, b) \leqslant \delta/3 + \delta/3 = 2\delta/3 < \delta$, ce qui est absurde. □

REMARQUE. Un espace *topologique* E dans lequel le Fait 4.1 est vrai est dit **séparé**.

Exercice. Montrer que dans un espace topologique séparé, on a *unicité de la limite* : une suite ne peut pas converger vers 2 points différents.

Fait 4.2. *Soit E un espace métrique, et soit $a \in E$. Pour tout ouvert O contenant a, on peut trouver un ouvert U tel que $a \in U$ et $\overline{U} \subseteq O$.*

Démonstration. Comme O est ouvert et $a \in O$, on peut trouver $r > 0$ tel que $\overline{B}(a,r) \subseteq O$. Donc $U := B(a,r)$ convient (on a bien $\overline{U} \subseteq O$ car $\overline{U} \subseteq \overline{B}(a,r)$ d'après le Corollaire 2.11). $\square$

Fait 4.3. *Soit E un espace métrique. Si $a \in E$ et si $C \subseteq E$ est un* fermé *tel que $a \notin C$, alors on peut séparer a et C par des ouverts : il existe des ouverts U et V tels que $a \in U$, $C \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$.*

Démonstration. Si on applique le Fait 4.2 avec a et $O := E \backslash C$, on obtient un ouvert U_1 tel que $a \in U_1$ et $\overline{U_1} \subseteq E \backslash C$. On peut ensuite, en appliquant à nouveau le Fait 4.2, trouver un ouvert U tel que $a \in U$ et $\overline{U} \subseteq U_1$. Alors $V := E \backslash \overline{U_1}$ est ouvert, et $V \cap U = \varnothing$ car en fait $V \cap \overline{U} = \varnothing$. De plus, V contient C car $\overline{U_1} \subseteq E \backslash C$. Donc U et V conviennent. (Il est vivement conseillé de faire un dessin pour comprendre cette démonstration.) $\square$

Exercice. Montrer que si U et V sont des ouverts de E, alors les équivalences suivantes ont lieu : $U \cap V = \varnothing \iff \overline{U} \cap V = \varnothing \iff U \cap \overline{V} = \varnothing$.

Proposition 4.4. *Soit E un espace métrique. Si A, B sont des* fermés *de E tels que $A \cap B = \varnothing$, alors on peut trouver une fonction continue $f : E \to [0,1]$ telle que $f \equiv 0$ sur A et $f \equiv 1$ sur B.*

Démonstration. Le point clé est l'observation suivante : pour tout $u \in E$, on a $\mathrm{dist}(u,A) > 0$ ou $\mathrm{dist}(u,B) > 0$. En effet, comme $A \cap B = \varnothing$, on a $u \notin A$ ou $u \notin B$, d'où le résultat car A et B sont des *fermés* de E.

Comme $\mathrm{dist}(u,A)$ et $\mathrm{dist}(u,B)$ sont par ailleurs toujours $\geqslant 0$, on en déduit que $\mathrm{dist}(u,A) + \mathrm{dist}(u,B) > 0$ pour tout $u \in E$. On peut donc définir $f : E \to \mathbb{R}$ par la formule
$$f(u) := \frac{\mathrm{dist}(u,A)}{\mathrm{dist}(u,A) + \mathrm{dist}(u,B)}.$$
La fonction f est continue en tant que quotient de fonctions continues (avec un dénominateur ne s'annulant pas) ; et il est évident qu'on a $0 \leqslant f(u) \leqslant 1$ pour tout $u \in E$. Enfin, si $u \in A$ alors $\mathrm{dist}(u,A) = 0$ et donc $f(u) = 0$; et si $u \in B$, alors $\mathrm{dist}(u,B) = 0$ et donc $f(u) = \frac{\mathrm{dist}(u,A)}{\mathrm{dist}(u,A)} = 1$. $\square$

Corollaire 4.5. *Si A et B sont des* fermés *de E tels que $A \cap B = \varnothing$, alors on peut séparer A et B par des ouverts : il existe des ouverts U et V tels que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$, et même $\overline{U} \cap \overline{V} = \varnothing$.*

Démonstration. Si $f : E \to [0,1]$ est comme dans la proposition, il suffit de poser $U := \{u \in E;\ f(u) < 1/3\}$ et $V := \{u \in E;\ f(u) > 2/3\}$. Les détails sont laissés en exo. $\square$

4.1. Digression : Théorème de prolongement de Tietze. La Proposition 4.4 peut se formuler comme un résultat de *prolongement*. En effet, soit $C := A \cup B$, et soit $\theta : C \to \mathbb{R}$ la fonction valant 0 sur A et 1 sur B. Comme A et B sont fermés et $A \cap B = \varnothing$, on vérifie (exo) que la fonction θ est continue sur C ; et la Proposition 4.4 dit que cette fonction continue particulière peut se prolonger en une fonction continue définie sur E tout entier et à valeurs dans $[0,1]$. Le résultat suivant est considérablement plus général.

Théorème 4.6. *Soit E un espace métrique. Si C est un fermé quelconque de E et si $[m, M]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$, alors toute fonction continue $f : C \to [m, M]$ peut se prolonger en une fonction continue $\widetilde{f} : E \to [m, M]$.*

Démonstration. Quitte à translater l'intervalle $[m, M]$, on peut supposer que $m = 1$. Soit donc $f : C \to [1, M]$ continue.

Fait. Pour $x \in E$, posons $\Phi(x) := \inf\{f(z)\, d(x, z);\ z \in C\}$. Alors la fonction Φ est continue sur E. De plus, on a $\operatorname{dist}(x, C) \leqslant \Phi(x) \leqslant M \operatorname{dist}(x, C)$ pour tout $x \in E$. En particulier, $\Phi(x) > 0$ pour tout $x \in E \backslash C$.

Preuve du Fait. Comme f est positive sur C, l'ensemble $\{f(z)\, d(x, z);\ z \in C\}$ est minoré par 0, et donc $\Phi(x)$ est bien défini pour tout $x \in E$. De plus, comme $1 \leqslant f(z) \leqslant M$ pour tout $z \in C$, on voit que $\operatorname{dist}(x, C) \leqslant \Phi(x) \leqslant M \operatorname{dist}(x, C)$ (micro-exo). Comme C est un fermé de E, on a donc en particulier $\Phi(x) > 0$ pour tout $x \in E \backslash C$, puisque $\operatorname{dist}(x, C) > 0$.

Pour la continuité, on observe que pour tout $z \in C$, la fonction Φ_z définie par $\Phi_z(x) := f(z)\, d(x, z)$ est M-lipschitzienne sur E, car la fonction $x \mapsto d(x, z)$ est 1-lipschitzienne et $0 \leqslant f(z) \leqslant M$. Donc $\Phi = \inf_{z \in C} \Phi_z$ est M-lipschitzienne (exo) ; et en particulier, Φ est continue. □

Soit maintenant $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\widetilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C, \\ \frac{\Phi(x)}{\operatorname{dist}(x, C)} & \text{si } x \in E \backslash C. \end{cases}$$

Cette définition a un sens car $\operatorname{dist}(x, C) > 0$ pour tout $x \in E \backslash C$ (puisque C est fermé). Par définition, la fonction $\widetilde{f}$ prolonge f. De plus, $\widetilde{f}$ est à valeurs dans $[1, M]$, car f est à valeurs dans $[1, M]$ et $\operatorname{dist}(x, C) \leqslant \Phi(x) \leqslant M \operatorname{dist}(x, C)$ pour tout $x \in E \backslash C$. Il reste à voir que la fonction $\widetilde{f}$ est continue sur E.

Comme $E \backslash C$ est un ouvert de E et comme la fonction Φ est continue, on voit que $\widetilde{f}$ est continue en tout point de $E \backslash C$ (exo). Il suffit donc de vérifier la continuité en un point $a \in C$. Et comme la restriction de $\widetilde{f}$ à C est continue, il suffit en fait de démontrer la choses suivante : si (x_k) est une suite de points de $E \backslash C$ telle que $x_k \to a \in C$ alors $\widetilde{f}(x_k) \to \widetilde{f}(a)$.

Par définition de $\Phi(x_k)$ et de $\operatorname{dist}(x_k, C)$ et comme $\Phi(x_k)$ et $\operatorname{dist}(x_k, C)$ sont *strictement* positifs, on peut trouver, pour tout $k \in \mathbb{N}$, des points $z_k, z'_k \in C$ tels que

$$f(z_k)\, d(x_k, z_k) \leqslant (1 + 2^{-k})\, \Phi(x_k) \qquad \text{et} \qquad d(x_k, z'_k) \leqslant (1 + 2^{-k}) \operatorname{dist}(x_k, C).$$

On a alors

$$(1 + 2^{-k})^{-1}\, f(z_k)\, \frac{d(x_k, z_k)}{\operatorname{dist}(x_k, C)} \leqslant \widetilde{f}(x_k) \leqslant (1 + 2^{-k})\, \frac{\Phi(x_k)}{d(x_k, z'_k)};$$

et donc

$$(1 + 2^{-k})^{-1}\, f(z_k) \leqslant \widetilde{f}(x_k) \leqslant (1 + 2^{-k})\, f(z'_k).$$

De plus, les suites (z_k) et (z'_k) tendent toutes les deux vers a. En effet : comme $f(z_k) \geqslant 1$, on a $d(x_k, z_k) \leqslant (1+2^{-k})\Phi(x_k) \leqslant (1+2^{-k}) f(a) d(x_k, a)$, donc $d(x_k, z_k) \to 0$, et donc $z_k \to a$ puisque $x_k \to a$; et de même, $d(x_k, z'_k) \leqslant (1 + 2^{-k}) d(x_k, a) \to 0$, donc $z'_k \to a$.

Comme la fonction f est continue sur C, on en déduit que $\widetilde{f}(x_k) \to f(a) = \widetilde{f}(a)$; ce qui termine la preuve du théorème. □

5. Parties denses

Définition 5.1. *Soit E un espace métrique, et soit $Z \subseteq E$. On dit que Z est* ***dense dans*** *E si on a $\overline{Z} = E$.*

Reformulations. Les choses suivantes sont équivalentes.

(1) A est dense dans E.

(2) Tout point $x \in E$ est limite d'une suite d'éléments de Z.

(3) $\forall x \in E\ \forall \varepsilon > 0\ \exists z \in Z\ :\ d(z, x) < \varepsilon$.

(4) $Z \cap V \neq \varnothing$ pour tout ouvert non-vide $V \subseteq E$.

(5) $E \backslash Z$ est d'intérieur vide dans E.

Démonstration. Il est clair que (1) $\iff$ (2) $\iff$ (3).

Supposons (2) vérifiée, et montrons (4). Soit V un ouvert non-vide de E, et choisissons un point $x \in V$. Par (2), on peut trouver une suite (z_k) de points de Z telle que $z_k \to x$. Comme V est un ouvert de E, c'est un voisinage de x, donc on peut trouver un indice k tel que $z_k \in V$. Alors $z_k \in V \cap Z$, et donc $V \cap Z \neq \varnothing$.

En y réfléchissant calmement, il est évident que (4) $\iff$ (5) (exo). Enfin, (1) $\iff$ (5) car l'intérieur de $E \backslash Z$ est égal à $E \backslash \overline{Z}$. □

Remarque 1. Dans (4), on peut remplacer "pour tout ouvert non-vide $V \subseteq E$" par "pour tout $V \in \mathcal{B} \backslash \{\varnothing\}$", où $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de E. (Voir plus bas pour la définition d'une base.)

Démonstration. Exo. □

Remarque 2. Soit E un espace métrique, soit $M \subseteq E$, et soit $Z \subseteq M$. Alors Z est dense *dans* M si et seulement si $\overline{Z} \supseteq M$.

Démonstration. Par définition, Z est dense dans M si et seulement $\overline{Z}^M = M$, où $\overline{Z}^M$ est l'adhérence de Z dans M. Comme $\overline{Z}^M = \overline{Z} \cap M$, on a donc bien l'équivalence souhaitée (micro-exo). □

Exemple 1. $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ sont tous les deux denses dans $\mathbb{R}$.

Démonstration. On a déjà démontré ce résultat en utiisant le fait que tout intervalle non trivial de $\mathbb{R}$ contient des points de $\mathbb{Q}$ et des points de $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Voici une preuve "avec des suites".

Si $x = \pm \xi_0, \xi_1 \xi_2 \xi_3 \cdots \in \mathbb{R}$ et si on pose $r_k := \pm \xi_0, \xi_1 \cdots \xi_k$ pour tout $k \geqslant 1$, alors les r_k sont des nombres rationnels (car décimaux), et la suite (r_k) tend vers x. Comme $x \in \mathbb{R}$ est quelconque, cela prouve que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Montrons maintenant que $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$: on cherche une suite d'irrationnels (z_k) telle que $z_k \to x$. Si $x \notin \mathbb{Q}$, il suffit de poser $z_k := x$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; et si $x \in \mathbb{Q}$, on peut prendre par exemple $z_k := x + 2^{-k}\sqrt{2}$. □

Exemple 2. Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné. Les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}([a, b])$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$: c'est la traduction du **Théorème de Weierstrass**, d'après lequel toute fonction continue sur $[a, b]$ est limite uniforme de fonctions polynomiales.

Exemple 3. $GL_N(\mathbb{K})$ est dense dans $M_N(\mathbb{K})$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Démonstration. Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$ quelconque : il s'agit de trouver une suite $(A_k) \subseteq GL_N(\mathbb{K})$ telle que $A_k \to A$. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A. Le polynôme χ_A n'a qu'un nombre fini de racines, donc on peut certainement trouver une suite $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ telle que $\lambda_k \to 0$ et $\chi_A(\lambda_k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si on pose $A_k := A - \lambda_k I$, alors $\det(A_k) = \chi_A(\lambda_k) \neq 0$, donc $A_k \in GL_N(\mathbb{K})$; et $A_k \to A$. □

Exemple 4. Les matrices diagonalisables à valeurs propres simples sont denses dans $M_N(\mathbb{C})$.

Démonstration. Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$ quelconque : on cherche une suite (A_k) de matrices diagonalisables à valeurs propres simples telle que $A_k \to A$.

Comme on est sur $\mathbb{C}$, on peut trigonaliser A : il existe une matrice $P \in GL_N(\mathbb{C})$ et $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$ tels que A soit de la forme

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_N \end{pmatrix} P.$$

On peut trouver (exo) des suites $(\lambda_{1,k})_{k\in\mathbb{N}}, \dots (\lambda_{N,k})_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\lambda_{j,k} \xrightarrow{k\to\infty} \lambda_j$ pour $j = 1, \dots, N$ et telles que de plus, $\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{N,k}$ soient tous différents, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si on pose

$$A_k = P^{-1}\begin{pmatrix} \lambda_{1,k} & & \\ 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & \lambda_{N,k} \end{pmatrix} P,$$

alors $A_k \to A$; et A_k possède N valeurs propres distinctes (à savoir $\lambda_{1,k}, \dots, \lambda_{N,k}$), donc A_k est diagonalisable et à valeurs propres simples. □

Voici un dernier exemple, important pour la “culture générale”.

Proposition 5.2. (sous-groupes de $\mathbb{R}$)
Si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, alors G est ou bien dense dans $\mathbb{R}$, ou bien de la forme $G = a\mathbb{Z}$ pour un certain $a \geqslant 0$.

Démonstration. On supposera que $G \neq \{0\}$. Alors G contient au moins un élément strictement positif (car si $x \in G$, alors $-x \in G$). On peut donc poser

$$a := \inf\,\{x \in G;\ x > 0\}.$$

On va montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans $\mathbb{R}$, et que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.

Supposons que $a = 0$. Soit $V \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert non-vide : on veut montrer que $G \cap V \neq \varnothing$. On a certainement $V \cap]0, \infty[\neq \varnothing$ ou $V \cap]-\infty, 0[\neq \varnothing$; et comme $G = -G$, on peut supposer que $V \cap]0, \infty[\neq \varnothing$ (si on sait montrer que $G \cap V \neq \varnothing$ dans ce cas là, on saura aussi le montrer dans l'autre cas en appliquant cela à l'ouvert $-V$). Soit $v_0 \in V$ tel que $v_0 > 0$. Comme V est ouvert, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $[v_0, v_0 + \varepsilon] \subseteq V$. Ensuite, comme $a = 0$, on peut trouver $x \in G$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Soit n le plus petit entier tel que $nx > v_0$. Alors $n \geqslant 1$, et $nx = x + \cdots + x \in G$ car G est stable par addition. De plus, on a $(n-1)x \leqslant v_0$ par définition de n, donc $nx = (n-1)x + x \leqslant v_0 + x \leqslant v_0 + \varepsilon$. Ainsi $nx \in]v_0, v_0 + \varepsilon]$, et donc $nx \in V$. On a donc bien montré que $G \cap V \neq \varnothing$.

Supposons maintenant que $a > 0$. Alors $a \in G$. En effet, par définition de a et comme $2a > a$, on peut trouver $x \in G$ tel que $a \leqslant x < 2a$. Si on avait $x > a$, on pourrait trouver $x' \in G$ tel que $a \leqslant x' < a + (x - a) = x$. On aurait alors $x - x' \in G$ et $0 < x - x' < 2a - a = a$, ce qui contredirait la définition de a. Ainsi on a bien $a \in G$, et donc $a\mathbb{Z} \subseteq G$ puisque G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$. Pour montrer qu'inversement $G \subseteq a\mathbb{Z}$, il suffit de montrer que $G \cap]0, \infty[\subseteq a\mathbb{Z}$ car $G = -G$. Soit $x \in G \cap]0, \infty[$ quelconque, et soit n le plus grand entier tel que $na \leqslant x$. Alors $na \leqslant x < (n+1)a = na + a$, donc on peut écrire $x = na + r$ avec $0 \leqslant r < a$. Comme $r = x - na$ appartient à G (car $x \in G$ et $a \in G$), on a nécessairement $r = 0$ par définition de a. Ainsi $x = na$, et donc $x \in a\mathbb{Z}$. □

Corollaire 5.3. *Si $\theta \in \mathbb{R} \backslash 2\pi\mathbb{Q}$, alors l'ensemble $\{e^{in\theta};\ n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans le cercle unité $\mathbb{T}$.*

Démonstration. Soit $G := 2\pi\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \{2\pi m + n\theta;\ m, n \in \mathbb{Z}\}$. Il est assez clair que G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ (exo). Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$, on voit que G n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$ (s'il existait $a > 0$ et $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $2\pi\, 1 = ap$ et $\theta = aq$, on obtiendrait $\theta = 2\pi\, \frac{p}{q}$). Donc G est dense dans $\mathbb{R}$.

Soit alors $f : \mathbb{R} \to \mathbb{T}$ définie par $f(t) := e^{it}$. L'application f est continue et surjective, donc $\mathbb{T} = f(\mathbb{R}) = f(\overline{G}) \subseteq \overline{f(G)}$. Ainsi, $f(G)$ est dense dans $\mathbb{T}$. Mais comme $e^{i2\pi m} = 1$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on voit que $f(G) = \{e^{in\theta};\ n \in \mathbb{Z}\}$; ce qui termine la preuve. □

Le résultat suivant est essentiellement évident ; mais très utile.

Proposition 5.4. (prolongement des identités)
Soient E et F deux espaces métriques, et soient $f, g : E \to F$ deux applications continues. S'il existe une partie dense $Z \subseteq E$ telle que $\forall z \in Z\ :\ f(z) = g(z)$, alors $f = g$.

Démonstration. Soit $x \in E$ quelconque. Comme Z est dense dans E, on peut trouver une suite (z_k) d'éléments de Z telle que $z_k \to x$. Alors $f(z_k) \to f(x)$ et $g(z_k) \to g(x)$ par continuité de f et g ; et donc $f(x) = g(x)$ puisque $f(z_k) = g(z_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

Exemple 1. Les seuls homomorphismes continus de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont les applications linéaires : si f est une application continue telle que $\forall u, v \in \mathbb{R}\ :\ f(u+v) = f(u) + f(v)$, alors f est de la forme $f(x) = ax$, pour une certaine constante a.

Démonstration. On observe d'abord que $f(0) = 0$ car $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$; et on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ f(-x) = -f(x)$, car $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$. Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f(nx) = f(x + \cdots + x) = f(x) + \cdots + f(x) = nf(x)$; et comme on vient de voir que f est impaire, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}\ \forall n \in \mathbb{Z}\ :\ f(nx) = nf(x)$. De là, on déduit que si $r \in \mathbb{Q}$, alors $\forall x \in \mathbb{R}\ :\ f(rx) = rf(x)$: en effet, si on écrit $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}$, alors $q\,rx = px$, donc $qf(rx) = f(q\,rx) = f(px) = pf(x)$.

Posons maintenant $a := f(1)$. Par ce qui précède, on a $\forall r \in \mathbb{Q}\ :\ f(r) = f(r\,1) = ar$. Comme f et la fonction $g(x) := ax$ sont continues, et comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$, on en déduit qu'on a $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ □

Exemple 2. (Théorème de Cayley-Hamilton)
Si $A \in M_N(\mathbb{C})$ et si on note χ_A le polynôme caractéristique de A, alors $\chi_A(A) = 0$.

Démonstration. Par définition, on a $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$. Si on écrit la formule pour le déterminant, on constate (exo) que $\chi_A(\lambda)$ est une fonction polynomiale en λ de degré $\leqslant N$, dont les coefficients sont des fonctions polyomiales en les coefficients de A. Autrement dit :

$$\forall A \in M_N(\mathbb{C}) \ : \ \chi_A(\lambda) = c_0(A) + c_1(A)\lambda + \cdots c_N(A)\lambda^N,$$

où $c_j : M_N(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$ est une fonction polynomiale en les coefficients de A pour $j = 1, \dots, N$. Donc

$$\chi_A(A) = c_0(A)\, I + c_1(A)\, A + \cdots c_N(A)\, A^N.$$

En particulier l'application $f : M_N(\mathbb{C}) \to M_N(\mathbb{C})$ définie par $f(A) := \chi_A(A)$ est *continue*.

On veut montrer que $f = 0$. Comme f est continue et comme on a vu que les matrices diagonalisables à valeurs propres simples sont denses dans $M_N(\mathbb{C})$, il suffit donc de montrer qu'on a $f(D) = 0$ pour toute matrice D diagonalisable et à valeurs propres simples.

Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ les valeurs propres de D. Alors $\chi_D(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_N)$, donc $f(D) = \chi_D(D) = (D - \lambda_1 I) \cdots (D - \lambda_N I)$. Mais comme D est diagonalisable, on a $\mathbb{C}^N = \ker(D - \lambda_1 I) \oplus \cdots \oplus \ker(D - \lambda_N I)$; et donc $(D - \lambda_1 I) \cdots (D - \lambda_N I) = 0$ (exo). □

6. Encore du vocabulaire

6.1. Points isolés, points d'accumulation.

DÉFINITION 6.1. *Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. On dit qu'un point $a \in M$ est un* ***point isolé de*** *M, ou encore que a est* ***isolé dans*** *M, s'il existe un voisinage ouvert V de a dans E tel que $V \cap M = \{a\}$; autrement dit, si $\{a\}$ est un* ouvert de M. *On note* $\mathrm{Isol}(M)$ *l'ensemble des points isolés de M.*

Exemple 1. Prenons $E := \mathbb{R}$ et $M := \{1\} \cup [2,3]$. Alors $\{1\}$ est un point isolé de M (prendre par exemple $V :=]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$), et M n'a pas d'autre points isolés (exo).

EXEMPLE 2. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle non trivial, alors I n'a pas de points isolés.

Démonstration. Si $a \in I$, tout voisinage V de a dans $\mathbb{R}$ contient un intervalle ouvert J centré en a ; donc $V \cap I$ contient $J \cap I$, qui est un intervalle *non trivial* (faire un dessin) ; et donc $V \cap I$ n'est pas réduit au point $\{a\}$. □

EXEMPLE 3. Si Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors Ω n'a pas de points isolés.

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ quelconque. Si V est un voisinage ouvert de a, alors $V \cap \Omega$ aussi car Ω est ouvert ; donc on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a,r) \subseteq V \cap \Omega$. Mais $B(a,r)$ est un disque de rayon non trivial, donc certainement un ensemble *infini* ; et en particulier, $V \cap \Omega$ n'est pas réduit au point $\{a\}$. Donc a n'est pas un point isolé de Ω. □

EXEMPLE 4. Soit E un espace métrique quelconque. Si $M \subseteq E$ est *topologiquement discret*, alors tous les points de M sont isolés dans M.

Démonstration. C'est évident par définition d'un espace topologiquement discret. □

DÉFINITION 6.2. *Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. On dit qu'un point $a \in E$* (n'appartenant pas forcément à M) *est un* ***point d'accumulation de*** *M si tout voisinage V de a dans E contient au moins* 1 *point de M* différent de a. *On note M' l'ensemble des points d'accumulation de M. (On dit parfois que M' est l'****ensemble dérivé*** *de M.)*

Remarque 1. Il est clair par définition que $M' \subseteq \overline{M}$; mais on n'a pas nécessairement $M' \subseteq M$.

Remarque 2. Il est également clair par définition que $\mathrm{Isol}(M) = M \backslash M'$.

Exemple 1. Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $M :=]a, b[$, alors $M' = [a, b]$.

Démonstration. Comme $M =]a, b[$ n'a pas de points isolés, on a $]a, b[\subseteq M'$; et de plus $M' \subseteq \overline{M} = [a, b]$. Ainsi, $]a, b[\subseteq M' \subseteq [a, b]$. Il reste à voir que a et b sont des points d'accumulation de $M =]a, b[$, ce qui est un exo facile. □

Exemple 2. Si $M := \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$, alors $M' = \{0\}$.

Démonstration. Comme $\frac{1}{n} \to 0$, tout voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ contient des points de la forme $\frac{1}{n}$, donc des points de M différents de 0 ; donc $0 \in M'$. De plus, il est facile de voir (exo) que les $\frac{1}{n}$ sont des points isolés de M ; donc 0 est le seul point de M' appartenant à M, autrement dit $M' \cap M = \{0\}$. Enfin, M est *fermé* dans $\mathbb{R}$ (exo) ; donc $M' \subseteq M$. Au total, on a bien $M' = \{0\}$. □

Exercice. Déterminer M' pour $M := \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$.

Proposition 6.3. *Soit E un espace métrique. Pour tout ensemble $M \subseteq E$, on a $\overline{M} \backslash M \subseteq M'$, et donc $\overline{M} = M' \cup M$.*

Démonstration. Soit $a \in \overline{M} \backslash M$. Comme $a \in \overline{M}$, tout voisinage V de a contient un point de M, qui est nécessairement différent de a puisque $a \notin M$; donc $a \in M'$. Ainsi, on a $\overline{M} \backslash M \subseteq M'$. Donc $\overline{M} \subseteq M \cup M'$; et comme on sait par ailleurs que $M \subseteq \overline{M}$ et $M' \subseteq \overline{M}$, on a égalité. □

Remarque. Il faut bien prendre garde au fait que la réunion $M \cup M'$ n'est pas *disjointe* : il peut tout à fait (c'est même très souvent le cas !) y avoir des points de M dans M'.

Proposition 6.4. *Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. Pour un point $a \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) $a \in M'$.

(2) *Il existe une suite $(u_k) \subseteq M$ formée de points* deux à deux distincts *telle que $u_k \to a$;*

(3) *Il existe une suite $(u_k) \subseteq M$ formée de points* deux à deux distincts et différents de a *telle que $u_k \to a$.*

Démonstration. L'implication (3) $\implies$ (2) étant évidente, il suffit de montrer que (2) entraine (1) et que (1) entraine (3).

(2) $\implies$ (1). Soit (u_k) donnée par (2). Si V est un voisinage quelconque de a, on peut trouver un entier K tel que $u_k \in V$ pour tout $k \geqslant K$. Comme les u_k sont deux à deux distincts, il existe certainement un $k \geqslant K$ tel que $u_k \neq a$; et ainsi, u_k est un point de $V \cap M$ différent de a. Donc $a \in M'$.

(1) $\implies$ (3). Supposons que $a \in M'$, et construisons une suite (u_k) vérifiant (3).

Pour $\varepsilon_0 := 2^{-0}$, on peut trouver un point $u_0 \in M \cap B(a, \varepsilon_0)$ avec $u_0 \neq a$. Ensuite, on pose $\varepsilon_1 := \min(2^{-1}, d(a, u_0))$ et on choisit un point $u_1 \in M \cap B(a, \varepsilon_1)$ avec $u_1 \neq a$; on a alors aussi $u_1 \neq u_0$ car $d(u_1, a) < \varepsilon_1 < d(u_0, a)$.

En répétant ce raisonnement, on construit par récurrence une suite $(u_k) \subseteq M$ telle que $u_k \neq a$ et $d(u_k, a) < \varepsilon_k := \min\big(2^{-k}, d(u_0, a), \dots, d(u_{k-1}, a)\big)$ pour tout $k \geqslant 1$. Alors

$u_k \to a$, les u_k sont différents de a, et ils sont deux à deux distincts car $d(u_k, a) < d(u_{k'}, a)$ pour tous k, k' tels que $k' < k$. Donc (3) est vérifiée.

□

6.2. Homéomorphismes.

Définition 6.5. *Soient E et E' deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to E'$ est un* ***homéomorphisme*** *de E sur E' si f est bijective et si f et f^{-1} sont continues.*

Remarque. Si $f : E \to E'$ est un homéomorphisme de E sur E', alors $f^{-1} : E' \to E$ est un homéomorphisme de E' sur E. Donc il revient au même de dire qu'il existe un homéomorphisme de E sur E' ou bien qu'il existe un homéomorphisme de E' sur E. Dans ce cas, on dit que E et E' sont **homéomorphes**. Cela signifie que E et E' sont indistiguables en tant qu'espaces topologiques.

Exemple 1. (intervalles de $\mathbb{R}$)

(1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si f elle est strictement monotone ; et dans ce cas f est un homéomorphisme de I sur l'intervalle $I' := f(I)$.

(2) Deux intervalles non triviaux de $\mathbb{R}$ sont homéomorphes si et seulement si ils sont de même nature (ouverts, semi-ouverts, ou fermés bornés).

Démonstration. (1) Comme f est continue, on sait que I' est un intervalle d'après le Théorème des valeurs intermédiaires.

Il est clair que si f est strictement monotone, alors elle est injective. Inversement, supposons que f soit injective, et montrons qu'elle est strictement monotone. Il suffit de montrer que la restriction de f à tout intervalle *fermé borné* $J \subseteq I$ est strictement monotone (exo) ; donc on peut supposer d'emblée que I est fermé borné (et non trivial), $I = [a, b]$ avec $a < b$. Comme f est injective, on a $f(b) \neq f(a)$; par exemple $f(a) < f(b)$. Montrons par l'absurde que f est strictement croissante. On peut se contenter de montrer que f est croissante, puisque f est injective. Si tel n'est pas le cas, alors on peut trouver $u, v \in [a, b]$ tels que $u < v$ et $f(u) > f(v)$. Comme $f(a) < f(b)$, on a alors nécessairement $f(u) > f(a)$ ou $f(v) < f(b)$. Si $f(u) > f(a)$ alors, d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, on peut trouver α, β tels que $a < \alpha < u < \beta < v$ et $f(\alpha) = f(\beta)$ (faire un dessin) ; ce qui contredit l'injectivité de f. Même type de raisonnement si $f(v) < f(b)$.

Montrons enfin que si f est injective (et donc une bijection de I sur I'), alors $f^{-1} : I' \to I$ est continue. Par ce qui précède, f est strictement monotone, par exemple strictement croissante. Soit $(x'_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de I' telle que $x'_k \to x' \in I'$. Écrivons $x'_k = f(x_k)$ et $x' = f(x)$: on veut montrer que $x_k \to x$. Comme I' est un intervalle et que $x'_k \to x'$, on peut trouver un intervalle *fermé borné* $[a', b']$ tel que $x'_k \in [a', b']$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $[a', b'] \subseteq I'$ (exo). Écrivons $a' = f(a)$ et $b' = f(b)$. Comme f est strictement croissante, on a $a \leqslant b$ et $x_k \in [a, b]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Supposons que x_k ne tende pas vers x. Alors, quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall k \in \mathbb{N} \;:\; |x_k - x| \geqslant \varepsilon$. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite (x_k) possède une sous-suite $(x_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $x_{k_n} \to \widetilde{x} \in [a, b]$. Alors $\widetilde{x} \in I$ car I est un intervalle et $a, b \in I$. Donc $x'_{k_n} = f(x_{k_n}) \to f(\widetilde{x})$ par continuité de f. Comme $x'_k \to x' = f(x)$, on a donc $f(\widetilde{x}) = f(x)$, et donc $\widetilde{x} = x$ par injectivité de f. Ainsi $x_{k_n} \to x$, ce qui est absurde puisque $|x_{k_n} - x| \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Soient I et I' deux intervalles non-triviaux de $\mathbb{R}$ homéomorphes : montrons que I et I' sont de même nature. Soit $f : I \to I'$ un homéomorphisme. Par (1), f est strictement monotone. Donc, I contient 0, 1 ou 2 de ses extrémités si et seulement si il en est de même pour I' (exo) ; et ceci revient à dire que I et I' sont de même nature.

Montrons maintenant la réciproque, *i.e.* que deux intervalles de même nature sont nécessairement homéomorphes. C'est clair pour deux intervalles *bornés*, en considérant des homéomorphismes *affines* : par exemple, si $I = [0,1]$ et $I' = [a,b]$ ou bien si $I = [0,1[$ et $I' = [a,b[$, alors la formule $f(t) := (b-a)t + a$ définit un homéomorphisme affine de I sur I' ; et de même, si $I = [0,1[$ et $I' =]a,b]$, on peut prendre $f(t) := (b-a)(1-t) + a = b - (b-a)t$. C'est clair également pour deux intervalles non bornés d'un côté : par exemple, si $I = [0,\infty[$ et $I' =]-\infty, b]$, on peut prendre $f(t) := b - t$. Il reste à voir ce qui se passe si l'un des intervalles est borné et l'autre non, ou bien si l'un des intervalles est ouvert et non borné d'un seul côté et l'autre est égal à $\mathbb{R}$. Il suffit de considérer les cas suivants : (i) $I =]0,1[$ et $I' =]1,\infty[$; (ii) $I =]0,1]$ et $I' = [1,\infty[$; (iii) $I =]-1,1[$ et $I' = \mathbb{R}$; (iv) $I =]0,\infty[$ et $I' = \mathbb{R}$. Pour (i) et (ii), on peut prendre comme homéomorphisme $f(t) := 1/t$. Pour (iii), on peut prendre $f(t) := \tan\big(\frac{\pi}{2}\,t\big)$. Et pour (iv), on peut prendre $f(t) := \log(t)$. □

Exemple 2. L'application $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{T}$ définie par $f(t) := e^{it}$ est une bijection continue, mais f n'est pas un homéomorphisme. En fait, $[0, 2\pi[$ et $\mathbb{T}$ ne sont pas homéomorphes.

Démonstration. Il est clair que f est continue et bijective ; mais f^{-1} n'est pas continue au point $z := 1 \in \mathbb{T}$: en effet, si on pose $z_k := e^{it_k} = f(t_k)$ où $t_k := 2\pi - \frac{1}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors la suite (z_k) tend vers $e^{i2\pi} = 1 = f(0)$, mais $f^{-1}(z_k) = t_k$ ne tend pas vers $f^{-1}(1) = 0$.

Montrons maintenant que $[0, 2\pi[$ et $\mathbb{T}$ ne sont pas homéomorphes, et même qu'il n'existe aucune *surjection* continue $g : \mathbb{T} \to [0, 2\pi[$. Supposons qu'une telle surjection g existe. Considérons la même suite $t_k = 2\pi - \frac{1}{k}$ que plus haut. Comme g est surjective, on peut choisir pour tout k un point $z_k \in \mathbb{T}$ tel que que $g(z_k) = t_k$. Écrivons $z_k = e^{i\theta_k}$ avec $\theta_k \in [0, 2\pi]$. Par le Théorème de Bolzano-Weierstrass, la suite (θ_k) possède une sous-suite $(\theta_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $\theta \in [0, 2\pi]$. Alors $z_{k_n} \to z := e^{i\theta}$, et donc $t_{k_n} = g(z_{k_n}) \to t := g(z) \in [0, 2\pi[$ par continuité de g. Mais t_{k_n} tend vers 2π, qui n'appartient pas à $[0, 2\pi[$! □

6.3. Bases et bases de voisinages.

Définition 6.6. *Soit E un espace métrique, et soit $\mathcal{B}$ une famille d'ouverts non-vides de E. On dit que $\mathcal{B}$ est une* ***base pour la topologie de*** *E si tout ouvert non-vide de E est réunion d'éléments de $\mathcal{B}$; autrement dit, si pour tout ouvert non-vide $O \subseteq E$ et pour tout point $x \in O$, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $x \in B$ et $B \subseteq O$.*

Exemple 1. Les boules ouvertes forment une base de la topologie de E

Démonstration. On sait depuis longtemps que les boules ouvertes sont des ouverts de E et que tout ouvert de E est réunion de boules ouvertes. □

Exemple 2. Si E est un espace produit, $E = E_1 \times \cdots \times E_N$, alors les ouverts élémentaires forment une base pour la topologie de E.

Démonstration. C'est la traduction de la Proposition 3.11. □

Exercice. Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. Montrer que si $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de E, alors $\mathcal{B}_M := \{B \cap M;\ B \in \mathcal{B}\}$ est une base pour la topologie de M.

Le lemme suivant sera utilisé un peu plus bas.

LEMME 6.7. *Si D est une partie dense de E, alors $\mathcal{B} := \left\{B(z, \frac{1}{n});\ z \in D\ ,\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une base pour la topologie de E.*

Démonstration. Soit O un ouvert non-vide de E et soit $x \in O$. Comme O est ouvert, on peut choisir $r > 0$ tel que $B(x, r) \subseteq O$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < \frac{r}{2}$, de sorte que $B(x, \frac{2}{n}) \subseteq O$. Comme D est dense dans E, on peut trouver $z \in D$ tel que $d(z, x) < \frac{1}{n}$. Alors $x \in B(z, \frac{1}{n})$; et d'après l'inégalité triangulaire, on a $B(z, \frac{1}{n}) \subseteq B(x, \frac{2}{n}) \subseteq O$. $\square$

Exercice. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$. Soit également $\mathcal{B}$ une base pour la topologie de E. Montrer que f est continue si et seulement si $f^{-1}(B)$ est ouvert dans E pour tout $B \in \mathcal{B}$.

DÉFINITION 6.8. *Soit E un espace métrique, et soit $a \in E$. On dit qu'une famille $\mathcal{W}$ de voisinages de a est une **base de voisinages pour** a si, pour tout voisinage V de a, on peut trouver $W \in \mathcal{W}$ tel que $a \in W$ et $W \subseteq V$.*

EXEMPLE. Pour tout $a \in E$, la famille $\left\{B(a, \frac{1}{n});\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ est une base de voisinages pour a. En particulier, tout point a de l'espace métrique E possède une base *dénombrable* de voisinages.

Exercice 1. Pour tout point $a \in E$, on se donne une base de voisinages $\mathcal{W}_a$ pour a constituée d'ensembles ouverts. Montrer que la famille $\mathcal{B} := \bigcup_{a \in E} \mathcal{W}_a$ est une base pour la topologie de E.

Exercice 2. Soit E un ensemble non dénombrable, et soit $a \in E$. Montrer qu'on définit une topologie $\mathfrak{T}$ sur E en décrétant qu'un ensemble $O \subseteq E$ est ouvert si : ou bien $O \subseteq E \backslash \{a\}$, ou bien $a \in O$ et $E \backslash O$ est dénombrable. Montrer ensuite que cette topologie est séparée, mais ne peut pas être définie par une distance.

7. Rôle de la dénombrabilité

7.1. Ensembles dénombrables. Un ensemble D est dit **dénombrable** si ou bien $D = \varnothing$, ou bien on peut énumérer les éléments de D comme les termes d'une suite, *i.e.* écrire $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\} = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Par exemple, $\mathbb{N}$ est évidemment dénombrable, et $\mathbb{Z}$ est dénombrable car $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \ldots\}$.

Remarque 1. Tout ensemble *fini* est dénombrable.

Démonstration. Si $D = \{a_1, \ldots, a_N\}$, on peut écrire $D = \{a_1, \ldots, a_N, a_N, a_N, \ldots\}$. $\square$

Remarque 2. Tout sous-ensemble d'un ensemble dénombrable est dénombrable.

Démonstration. Soit D' une partie d'un ensemble dénombrable D. Si $D' = \varnothing$, il n'y a rien à démontrer ; on suppose donc que $D' \neq \varnothing$ et on choisit un point $a \in D'$. Si $D = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$, on peut alors énumérer D' comme $D' = \{x'_0, x'_1, x'_2, \ldots\}$, où $x'_n = x_n$ si $x_n \in D'$ et $x'_n = a$ si $x_n \notin D'$. $\square$

Remarque 3. Tout ensemble qui peut être "énuméré par un ensemble dénombrable" est dénombrable. Autrement dit, si on peut écrire $D = \{x_i;\ i \in I\}$ avec un ensemble d'indices I dénombrable, alors D est dénombrable.

Démonstration. C'est évident : comme I est dénombrable, on peut écrire $I = \{i_0, i_1, i_2, \dots\}$, et donc $D = \{z_0, z_1, z_2, \dots\}$ où $z_n := x_{i_n}$. □

Le résultat suivant est très important, en particulier parce qu'il permet de fabriquer des ensembles dénombrables à partir de ceux qu'on connait déjà.

Proposition 7.1. *L'ensemble* $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *est dénombrable.*

Démonstration. On peut énumérer $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ en "serpentant" le long des anti-diagonales

$$\Delta_i := \{(m,n);\ m+n = i\}\ ,\ i \in \mathbb{N};$$

autrement dit, en écrivant

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (0,2), (1,1), (2,0), (3,0), (2,1), \dots\}$$

(Faire un dessin pour comprendre comment fonctionne l'énumération.) □

Corollaire 7.2. *Tout* produit fini *d'ensembles dénombrables est dénombrable : si $D_1, \dots, D_N$ sont dénombrables, alors $D_1 \times \cdots \times D_N$ aussi.*

Démonstration. Il suffit de traiter le cas $N = 2$ (on procède ensuite par récurrence) ; et ce cas découle immédiatement de la proposition puisque $D_1 \times D_2$ s'énumère par $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ si D_1 et D_2 sont dénombrables. □

Corollaire 7.3. $\mathbb{Q}$ *est dénombrable.*

Démonstration. $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q};\ (p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*\right\}$ s'énumère par $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$. □

Corollaire 7.4. *Toute* réunion dénombrable *d'ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable : si $(A_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles dénombrables indexée par un ensemble I lui même dénombrable, alors $A = \bigcup_{i\in I} A_i$ est dénombrable.*

Démonstration. Pour tout $i \in I$, on *choisit* une énumération de A_i par $\mathbb{N}$, disons $A_i = \{x_{i,n};\ n \in \mathbb{N}\}$. Alors $A = \{x_{i,n};\ (i,n) \in I \times \mathbb{N}\}$, donc A est dénombrable car $I \times \mathbb{N}$ l'est. □

Il est cependant essentiel d'être bien conscient du fait que tous les ensembles ne sont pas dénombrables :

Exemple 1. $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si $D \subseteq \mathbb{R}$ est un ensemble dénombrable quelconque, alors $D \neq \mathbb{R}$, *i.e.* de trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \notin D$. Écrivons $D = \{x_0, x_1, x_2, \dots\}$: on cherche un point $x \in \mathbb{R}$ qui soit différent de tous les x_n. Comme $\mathbb{R}$ n'est quand même pas réduit à 1 point, on peut trouver $u \in \mathbb{R}$ tel que $u \neq x_0$, puis un segment non trivial $I_0 = [a_0, b_0]$ autour de u tel que $x_0 \notin I_0$. Comme l'intervalle ouvert $]a_0, b_0[$ n'est pas réduit à 1 point, on peut ensuite trouver $u \in]a_0, b_0[$ tel que $u \neq x_1$, puis un segment non trivial $[a_1, b_1]$ autour de u tel que $[a_1, b_1] \subseteq [a_0, b_0]$ et $x_1 \notin [a_1, b_1]$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite décroissante de segments non triviaux $([a_n, b_n])_{n\geqslant 0}$ telle que $\forall n \geqslant 0\ :\ x_n \notin [a_n, b_n]$. De plus, on peut aussi imposer à chaque étape que l'intervalle $[a_n, b_n]$ soit de longueur $\leqslant 2^{-n}$. D'après le Théorème des segments emboîtés, l'intersection de tous les segments $[a_n, b_n]$ est non-vide, réduite à 1 point $\{x\}$. Alors $x \neq x_n$ pour tout $n \geqslant 0$, puisque $x \in [a_n, b_n]$ et $x_n \notin [a_n, b_n]$. □

Remarque. La même preuve montre que tout intervalle non trivial $I \subseteq \mathbb{R}$ est non dénombrable : il suffit de commencer avec un intervalle $[a_0, b_0]$ contenu dans I.

Exercice 1. Utiliser ce qui précède pour montrer que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble de tous les polynômes à coefficients rationnels est dénombrable ; et en déduire qu'il existe des nombres réels x qui ne sont racines d'aucune équation $P(x) = 0$, où P est un polynôme non nul à coefficients rationnels. (De tels nombres x sont dits **transcendants**.)

Voici un exemple peut-être encore plus important.

Exemple 2. L'ensemble $\mathbf{C} := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ de toutes les suites infinies de 0 et de 1 n'est pas dénombrable.

Démonstration. Soit $D = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable quelconque de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Il s'agit de montrer que $D \neq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, autrement dit de trouver $x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ qui soit différent de tous les x_n. Si on écrit chaque x_n sous la forme

$$x_n = (x_n(0), x_n(1), x_n(2), \dots),$$

il suffit de définir $x = (x(0), x(1), x(2), \dots)$ de sorte que x diffère de x_n sur la coordonnée d'indice n, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_n(n) = 0, \\ 0 & \text{si } x_n(n) = 1. \end{cases}$$

□

Exercice. Soit $\varphi : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(\alpha) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha_n}{3^n} \qquad \text{pour } \alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

Montrer que si $\alpha \neq \alpha'$, alors $|\varphi(\alpha) - \varphi(\alpha')| \geqslant \frac{1}{2\times 3^{n_0}}$, où n_0 est le premier entier tel que $\alpha_{n_0} \neq \alpha'_{n_0}$. Conclure que φ est injective, et en déduire une autre preuve du fait que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

7.2. Ensembles F_σ et ensembles G_δ.

Définition 7.5. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. On dit que A est un **ensemble** F_σ si A est* réunion dénombrable de fermés *; et on dit que A est un **ensemble** G_δ si A est* intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice. Montrer qu'un ensemble $M \subseteq E$ est F_σ si et seulement si $E\backslash M$ est G_δ.

Proposition 7.6. *Si E est un espace métrique, alors tout fermé de E est un G_δ, et tout ouvert de E est un F_σ.*

Démonstration. Il suffit de montrer que tout fermé de E est un G_δ (le cas des ouverts s'en déduira par "passage au complémentaire").

Soit C un fermé quelconque de E. Alors un point $x \in E$ appartient à C si et seulement si $\mathrm{dist}(x, C) = 0$; ce qui s'écrit encore $\forall k \in \mathbb{N}^*\ :\ \mathrm{dist}(x, C) < \frac{1}{k}\cdot$ On voit ainsi que

$$C = \bigcap_{k \in \mathbb{N}^*} O_k \qquad \text{où} \qquad O_k := \{x \in E;\ \mathrm{dist}(x, C) < 1/k\}.$$

Les ensembles O_k sont des ouverts de E par continuité de l'application $x \mapsto \mathrm{dist}(x, C)$; donc C est un G_δ. □

On ne dira rien de plus maintenant sur les ensembles F_σ et G_δ ; mais les G_δ reviendront au Chapitre 6.

7.3. Espaces métriques séparables.

Définition 7.7. *On dit qu'un espace métrique E est* ***séparable*** *s'il existe un ensemble $D \subseteq E$ à la fois* dénombrable *et* dense dans E.

Le mot "séparable" est certainement très mal choisi : on a du mal à voir quel en est le contenu intuitif ; et de plus, il est facile de confondre avec le mot "séparé", alors que les deux notions n'ont absolument rien en commun. Mais c'est la terminologie en vigueur depuis toujours.

Exemple 1. $\mathbb{R}$ est séparable car $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$. De même, $\mathbb{C}$ est séparable car $\mathbb{Q} + i\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exemple 2. Tout espace vectoriel normé *de dimension finie* est séparable.

Démonstration. Par équivalence des normes en dimension finie, il suffit de montrer que $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$ est séparable pour tout $N \geqslant 1$. Comme $\mathbb{K}$ est séparable d'après l'Exemple 1, on peut choisir un ensemble $D \subseteq \mathbb{K}$ dénombrable et dense dans $\mathbb{K}$. Alors $D^N = D \times \cdots \times D$ est dense dans $\mathbb{K}^N = \mathbb{K} \times \cdots \times \mathbb{K}$ (exo), ce qui prouve que $\mathbb{K}^N$ est séparable car D^N est dénombrable. □

Exemple 3. L'espace $\big(\mathcal{C}([0,1]), \|\cdot\|_\infty\big)$ est séparable.

Démonstration. On sait que les fonctions polynomiales sont denses dans $\mathcal{C}([0,1])$. On en déduit (exo) que si on note $\mathcal{D}$ l'ensemble des fonctions polynomiales à coefficients rationnels, alors $\mathcal{D}$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$. Donc $\mathcal{C}([0,1])$ est séparable car $\mathcal{D}$ est dénombrable (exo). □

Exercice 1. Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. Montrer que si M est séparable (pour la distance induite), alors $\overline{M}$ est séparable.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $M \subseteq E$. Montrer que si M est séparable (pour la distance induite par la norme de E), alors $\mathrm{vect}(M)$ est séparable.

Le théorème suivant donne une caractérisation très utile de la séparabilité.

Théorème 7.8. *Pour un espace métrique E, les choses suivantes sont équivalentes.*

1. *E est séparable.*
2. *E possède une base dénombrable d'ouverts.*

Démonstration. (1) $\implies$ (2). Supposons E séparable, et fixons un ensemble dénombrable dense $D \subseteq E$. Alors la famille $\mathcal{B} := \big\{B\big(z, \frac{1}{n}\big);\ z \in D\,,\ n \in \mathbb{N}^*\big\}$ est une base pour la topologie de E car D est dense dans E (c'est le Lemme 6.7) ; et $\mathcal{B}$ est dénombrable car elle est énumérée par l'ensemble dénombrable $D \times \mathbb{N}^*$.

(2) $\implies$ (1). Supposons que E possède une base dénombrable d'ouverts $\mathcal{B} = \{B_i;\ i \in \mathbb{N}\}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}$, *choisissons* un point $z_i \in B_i$. Alors $D := \{z_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ est bien entendu dénombrable. Montrons que D est dense dans E.

Soit $a \in E$ quelconque, et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de E, on peut trouver $i \in \mathbb{N}$ tel que $a \in B_i$ et $B_i \subseteq B(a, \varepsilon)$. Alors $z_i \in B(a, \varepsilon)$, *i.e.* $d(z_i, a) < \varepsilon$. Ainsi, pour tout $a \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un point $z_i \in D$ tel que $d(z_i, a) < \varepsilon$; et donc D est dense dans E. □

Corollaire 7.9. *Si E est un espace métrique séparable et si $M \subseteq E$, alors M est séparable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable pour la topologie de E. Alors la famille $\mathcal{B}_M := \{B \cap M;\ B \in \mathcal{B}\}$ est une base pour la topologie de M (exo, déjà posé), et $\mathcal{B}_M$ est dénombrable car elle est énumérée par $\mathcal{B}$. Donc M est séparable par le théorème. □

Corollaire 7.10. (propriété de Lindelöf)
Soit E un espace métrique séparable. Si $(O_i)_{i\in I}$ est une famille quelconque d'ouverts de E, alors on peut trouver un ensemble dénombrable *$J \subseteq I$ tel que $\bigcup_{i\in J} O_i = \bigcup_{i\in I} O_i$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{B}$ une base dénombrable pour la topologie de E, et soit $\mathcal{B}' := \{B \in \mathcal{B};\ \exists i \in I\ :\ B \subseteq O_i\}$. Pour tout $B \in \mathcal{B}'$, *choisissons* $i_B \in I$ tel que $B \subseteq O_{i_B}$, et posons $J := \{i_B;\ B \in \mathcal{B}'\}$. L'ensemble J est dénombrable car il est énuméré par $\mathcal{B}'$ (qui est dénombrable car c'est une partie de $\mathcal{B}$). Montrons que J convient.

Soit a un point quelconque de $\bigcup_{i\in I} O_i$, et soit $i_0 \in I$ tel que $a \in O_{i_0}$. Comme O_{i_0} est ouvert et comme $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de E, on peut trouver $B \in \mathcal{B}$ tel que $a \in B$ et $B \subseteq O_{i_0}$. Alors $B \in \mathcal{B}'$ par définition de $\mathcal{B}'$; et $a \in O_{i_B}$ car $a \in B$ et $B \subseteq O_{i_B}$. Ainsi, $a \in \bigcup_{i\in J} O_i$. □

Exercice 1. Soit E un espace métrique séparable, et soit Ω un ouvert de E. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ouvert Ω est réunion dénombrable de boules ouvertes de rayon inférieur à ε.

Exercice 2. Soit E un espace métrique. On suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, l'espace E est réunion dénombrable de boules ouvertes de rayon inférieur à ε. Montrer que E est séparable.

Proposition 7.11. *Si E est un espace séparable, alors toute famille $(\Omega_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E non-vides et* deux à deux disjoints *est nécessairement* dénombrable (*i.e. l'ensemble d'indices I est dénombrable*).

Démonstration. Soit $D = \{z_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans E. Comme chaque Ω_i est un ouvert non-vide et comme D est dense dans E, on a $D \cap \Omega_i \neq \emptyset$. On peut donc pour tout $i \in I$ choisir un entier $n(i) \in \mathbb{N}$ tel que $z_{n(i)} \in \Omega_i$. Alors $n(i) \neq n(j)$ si $i \neq j$ car $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset$. Autrement dit, l'application $i \mapsto n(i)$ est *injective*. Donc I est en bijection avec une partie de $\mathbb{N}$, à savoir l'ensemble $\{n(i);\ i \in I\}$, et donc I est dénombrable. □

Corollaire 7.12. *Soit (E, d) un espace métrique. On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ et une famille* non dénombrable *$(x_i)_{i\in I}$ de points de E qui est ε-**séparée**, i.e. $d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$ si $i \neq j$. Alors E n'est* pas *séparable.*

Démonstration. D'après l'inégalité triangulaire, les boules ouverts $\Omega_i := B(x_i, \varepsilon/2)$ sont deux à deux disjointes (exo, très facile) ; donc le résultat découle directement de la proposition. □

Exercice. Pour tout $A \subseteq \mathbb{N}$, on note $\mathbf{1}_A$ la fonction indicatrice de A, considérée comme élément de l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Calculer $\|\mathbf{1}_A - \mathbf{1}_B\|_\infty$ si $A \neq B$, et en déduire que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable.

Chapitre 4

Compacité

1. Sous-suites et valeurs d'adhérence

DÉFINITION 1.1. *Soit E un ensemble, et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. Une* ***sous-suite*** *de (u_k) est une suite $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la forme $u'_n = u_{k_n}$, où $(k_n)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers.*

Remarque 1. On écrit parfois une sous-suite sous la forme $u'_n = u_{\phi(n)}$, où $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque 2. Si (k_n) est une suite strictement croissante d'entiers, alors $k_n \geqslant n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (exo) ; mais ce n'est pas très important. Ce qui *est* très important est que $k_n \to \infty$ quand $n \to \infty$.

Remarque 3. Soit (P) une propriété relative aux points de E. Pour une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$, les choses suivantes sont équivalentes.

(i) Il existe une infinité d'entiers k tels que u_k possède la propriété (P)

(ii) Il existe une sous-suite (u'_n) de (u_k) telle que u'_n possède la propriété (P) *pour tout* $n \in \mathbb{N}$.

Démonstration. Exo. □

DÉFINITION 1.2. *Soit E un espace métrique et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit qu'un point $a \in E$ est une* ***valeur d'adhérence*** *de la suite (u_k) s'il existe une sous-suite (u'_n) de (u_k) telle que $u'_n \to a$. On note $\mathrm{vad}\big((u_k)\big)$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (u_k).*

Exemple. Si $E := \mathbb{R}$ et $u_k := (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathrm{vad}\big((u_k)\big) = \{-1, 1\}$.

REMARQUE 1. Si la suite (u_k) converge, $u_k \to a \in E$, alors $\mathrm{vad}\big((u_k)\big) = \{a\}$.

Remarque 2. Une suite peut très bien posséder exactement une valeur d'adhérence sans pour autant converger vers cette valeur d'adhérence. Par exemple, si $E := \mathbb{R}$ et

$$u_k := \begin{cases} k & \text{si } k \text{ est pair,} \\ 0 & \text{si } k \text{ est impair,} \end{cases}$$

alors $\mathrm{vad}\big((u_k)\big) = \{0\}$ mais u_k ne tend pas vers 0.

Remarque 3. Une suite peut très bien ne posséder *aucune* valeur d'adhérence. Par exemple, $E := \mathbb{R}$ et $u_k := k$.

Remarque 4. Une suite peut très bien posséder une infinité de valeurs d'adhérence. Par exemple, si $E := \mathbb{R}$ et si on définit

$$u_k := \begin{cases} 2 & \text{si } k \text{ est une puissance de } 2, \\ 3 & \text{si } k \text{ est une puissance de } 3, \\ 5 & \text{si } k \text{ est une puissance de } 5, \\ \vdots & \\ 0 & \text{si } k \text{ n'est pas une puissance d'un nombre premier,} \end{cases}$$

alors $\mathrm{vad}\big((u_k)\big)$ contient 0 et tous les nombres premiers. (Exo : montrer qu'il n'y a pas d'autre valeur d'adhérence.)

Exercice. Soit (u_k) une suite de nombres réels. On suppose que $u_{k+1} - u_k \to 0$ quand $k \to \infty$. Montrer que $\mathrm{vad}\big((u_k)\big)$ est un intervalle (éventuellement vide) ; autrement dit, que si a et b sont deux valeurs d'adhérence de (u_k), alors tout nombre $c \in [a, b]$ est valeur d'adhérence de (u_k).

PROPOSITION 1.3. *Soit (E, d) un espace métrique, soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E, et soit $a \in E$. Les choses suivantes sont équivalentes.*

(i) *a est une valeur d'adhérence de (u_k).*

(ii) *Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers k tels que $d(u_k, a) < \varepsilon$.*

Démonstration. Supposons (i) vérifiée. Soit $(u'_n) = (u_{k_n})$ une sous-suite de (u_k) telle que $u'_n \to a$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geqslant n_0 \ : \ d(u'_n, a) < \varepsilon$. Alors $I := \{k_n;\ n \geqslant n_0\}$ est infini et $\forall k \in I \ : \ d(u_k, a) < \varepsilon$; donc (ii) est vérifiée.

Inversement, supposons (ii) vérifiée. Pour $\varepsilon_0 := 2^{-0}$, on peut (grâce à (ii)) trouver $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_{k_0}, a) < \varepsilon_0$. Puis, pour $\varepsilon_1 := 2^{-1}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N};\ d(u_k, a) < \varepsilon_1\}$ est infini par (ii), donc on peut trouver $k_1 > k_0$ tel que $d(u_{k_1}, a) < \varepsilon_1$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ d(u_{k_n}, a) < 2^{-n}$. Alors $u_{k_n} \to a$, donc (i) est vérifiée. $\square$

COROLLAIRE 1.4. *Si E est un espace métrique alors, pour toute suite (u_k) de points de E, on a*

$$\mathrm{vad}\big((u_k)\big) = \bigcap_{N\in\mathbb{N}} \overline{\{u_k;\ k \geqslant N\}}.$$

En particulier, $\mathrm{vad}\big((u_k)\big)$ *est toujours un* fermé *de E.*

Démonstration. Si on écrit (ii) avec des quantificateurs, on obtient les équivalences suivantes pour un point $a \in E$:

$$\begin{aligned} a \in \mathrm{vad}\big((u_k)\big) &\iff \forall \varepsilon > 0 \ : \ \text{il y a une infinité de } k \text{ tels que } d(u_k, a) < \varepsilon \\ &\iff \forall \varepsilon > 0\ \forall N \in \mathbb{N}\ \exists k \geqslant N \ : \ d(u_k, a) < \varepsilon \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N} \left[\forall \varepsilon > 0\ \exists k \geqslant N \ : \ d(u_k, a) < \varepsilon\right] \\ &\iff \forall N \in \mathbb{N} \ : \ a \in \overline{\{u_k;\ k \geqslant N\}}. \end{aligned}$$

$\square$

Le lemme suivant est souvent utile.

LEMME 1.5. *Soit E un espace métrique, soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E, et soit $a \in E$. Si toute sous-suite de (u_k) possède une sous-suite qui tend vers a, alors $u_k \to a$.*

Démonstration. Supposons que (u_k) ne tende pas vers a. Alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\forall K \in \mathbb{N}\ \exists k \geqslant K\ :\ d(u_k, a) \geqslant \varepsilon$; autrement dit $d(u_k, a) \geqslant \varepsilon$ pour une infinité d'entiers k. Donc il existe une sous-suite (u'_n) de (u_k) telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ d(u'_n, a) \geqslant \varepsilon$. Cette sous-suite (u'_n) n'admet aucune sous-suite qui tende vers a (micro-exo) ; donc on a prouvé le lemme "par contraposée". □

Le théorème suivant est une généralisation du Théorème de Bolzano-Weierstrass sur les suites bornées de nombres réels. Comme on s'en doute, c'est un résultat *très* important.

THÉORÈME 1.6. (Bolzano-Weierstrass)
Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie*, alors toute suite* bornée $(u_k) \subseteq E$ *possède une sous-suite convergente.*

Démonstration. En tant que $\mathbb{R}$-espace vectoriel, E est isomorphe à $\mathbb{R}^N$ pour un certain entier N. Si on choisit un isomorphisme $J : E \to \mathbb{R}^N$ et si on pose $|||x||| := \|J(x)\|$ pour $x \in \mathbb{R}^N$, alors $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathbb{R}^N$ et E est isométrique à $(\mathbb{R}^N, |||\cdot|||)$ (exo). De plus, par équivalence des normes sur $\mathbb{R}^N$, la norme $|||\cdot|||$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$. On voit donc qu'on peut se ramener au cas où $E = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. On écrit $u_k = (u_k(1), \dots, u_k(N))$. La suite $(u_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$; donc elle possède une sous-suite convergente par le Théorème de Bolzano-Weierstrass classique. On a donc une sous-suite (u'_n) de (u_k) et un nombre réel $a(1)$ tels que $u'_n(1) \xrightarrow{k\to\infty} a(1)$. Maintenant, la suite $(u'_n(2))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathbb{R}$, donc on a une sous-suite (u''_n) de (u'_n) telle que $u''_n(2) \to a(2) \in \mathbb{R}$. Alors (u''_n) est une sous-suite de (u_k) telle que $u''_n(1) \to a(1)$ et $u''_n(2) \to a(2)$. En répétant N fois ce raisonnement, on obtient une sous-suite $(v_n) = \left(u_n^{(N)}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de (u_k) et des nombres réels $a(1), a(2), \dots, a(N)$ tels que $v_n(j) \to a(j)$ quand $n \to \infty$ pour $j = 1, 2, \dots, N$. Si on pose $a := (a(1), \dots, a(N)) \in \mathbb{R}^N$, alors $v_n \to a$ coordonnée par coordonnée, donc pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. □

Exercice 1. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $u_k := \mathbf{1}_{\{k\}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$. Montrer que la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ne possède aucune sous-suite convergente.

Exercice 2. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degré $\leqslant 347$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}$: $\int_0^1 |P_k(t)|\, dt \leqslant 74$. Montrer que (P_k) possède une sous-suite qui converge uniformément sur $[-1000, 9000]$.

1.1. Digression : le "Théorème de Riesz". Le résultat suivant montre que le Théorème de Bolzano-Weierstrass est en fait une *caractérisation* des evn de dimension finie.

THÉORÈME 1.7. *Si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ telle que $\|u_k\| = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\|u_k - u_{k'}\| \geqslant 1/2$ pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq k'$. En particulier : dans tout evn de dimension infinie, il existe des suites bornées qui ne possèdent aucune sous-suite convergente.*

Démonstration. La preuve repose sur les deux faits suivants.

Fait 1. Si $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie, alors F est fermé dans E.

Preuve du Fait 1. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de F telle que $u_k \to u \in E$: on veut montrer que $u \in F$. Comme la suite (u_k) converge dans E, elle est bornée. D'après le Théorème de Bolzano Weierstrass appliqué à F, la suite (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $u' \in F$. Mais $u'_n \to u$ puisque $u_k \to u$; donc $u' = u$ par unicité de la limite, et donc $u \in F$. □

Fait 2. Si $F \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel fermé tel que $F \neq E$, alors on peut trouver $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\operatorname{dist}(u, F) \geqslant 1/2$.

Preuve du Fait 2. Soit $x \in E$ tel que $x \in F$. Comme F est fermé dans E, on a $\operatorname{dist}(x, F) > 0$, et donc $\operatorname{dist}(x, F) < 2\operatorname{dist}(x, F)$. Par définition de $\operatorname{dist}(x, F)$, on peut donc trouver $f \in F$ tel que $\|x - f\| \leqslant 2\operatorname{dist}(x, F)$. Si on pose $u := \frac{x-f}{\|x-f\|}$, ce qui est possible car $x \neq f$, alors $\|u\| = 1$ et, comme F est un espace vectoriel et $f \in F$,

$$\operatorname{dist}(u, F) = \frac{1}{\|x - f\|}\operatorname{dist}(x - f, F) = \frac{1}{\|x - f\|}\operatorname{dist}(x, F) \geqslant \frac{1}{2}\cdot$$

□

On peut maintenant démontrer le théorème. Soit $u_0 \in E$ tel que $\|u_0\| = 1$. Par le Fait 1, $F_0 := \operatorname{vect}(u_0)$ est un sous-espace fermé de E, et $F_0 \neq E$ puisque $\dim(E) = \infty$. Par le Fait 2, on peut donc trouver $u_1 \in E$ tel que $\|u_1\|$ et $\operatorname{dist}(u_1, F_0) \geqslant 1/2$; en particulier, $\|u_1 - u_0\| \geqslant 1/2$. En répétant ce raisonnement avec $F_1 := \operatorname{vect}(u_0, u_2)$, on peut maintenant trouver $u_2 \in E$ tel que $\|u_2\| = 1$ et $\operatorname{dist}(u_2, F_1) \geqslant 1/2$; en particulier, $\|u_2 - u_0\| \geqslant 1/2$ et $\|u_2 - u_1\| \geqslant 1/2$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ telle que $\|u_k\| = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\forall k \geqslant 1 \; : \; \|u_k - u_i\| \geqslant 1/2$ pour $i = 0, \dots, k-1$. On a alors $\|u_k - u_{k'}\| \geqslant 1/2$ pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq k'$; donc la suite (u_k) ne possède aucune sous-suite convergente (micro-exo). □

2. Espaces métriques compacts

2.1. Définition et exemples "immédiats".

Définition 2.1. *Soit (K, d) un espace métrique. On dit que K est **compact** si toute suite de points de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K. Autrement dit, K est compact si toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq K$ possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a \in K$.*

Remarque 1. La compacité est une "propriété topologique" : si (K, d) est compact, alors (K, d') est compact pour toute distance d' topologiquement équivalente à d.

Remarque 2. Soit K un espace métrique compact, et soit (u_k) une suite de points de K. Alors (u_k) est convergente si et seulement si elle possède exactement une valeur d'adhérence.

Démonstration. Une implication est évidente. Inversement, supposons que (u_k) possède exactement une valeur d'adhérence, et notons a cette valeur d'adhérence. Comme K est compact, toute sous-suite (u'_n) de (u_k) possède une sous-suite convergente (u''_n), et on a nécessairement $\lim u''_n = a$ puisque a est la seule valeur d'adhérence de (u_k). Donc $u_k \to a$ d'après le Lemme 1.5. □

Remarque 3. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $K \subseteq E$. On dit que K est un **compact de** E si K est compact pour la distance induite, *i.e.* si l'espace métrique $(K, d_{|K\times K})$ est compact.

EXEMPLE 1. Tout intervalle fermé borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ est compact.

Démonstration. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $[a, b]$. Comme (u_k) est bornée, elle possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $x \in \mathbb{R}$, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass ; et comme les u'_n sont dans $[a, b]$ et que $[a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$, on a $x \in [a, b]$. Ainsi, toute suite $(u_k) \subseteq [a, b]$ possède une valeur d'adhérence dans $[a, b]$; autrement dit $[a, b]$ est compact. □

EXEMPLE 2. $\mathbb{R}$ n'est pas compact.

Démonstration. la suite $u_k := k$ ne possède aucun valeur d'adhérence dans $\mathbb{R}$ car $u_k \to \infty$. □

EXEMPLE 3. Tout espace métrique *fini* est compact.

Démonstration. Soit K un espace métrique fini. Si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de K alors, comme K est fini et que $\mathbb{N}$ est infini, il existe un point $a \in K$ tel que $u_k = a$ pour une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$. On a ainsi une sous-suite (u'_n) de (u_k) telle que $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; u'_n = a$, et il est difficile de faire plus convergente que cette sous-suite (u'_n). □

EXEMPLE 4. Soit E un espace métrique. Si $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E qui converge vers un point $x_\infty \in E$, alors $K := \{x_\infty\} \cup \{x_l;\; l \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E.

Démonstration. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de K. On veut montrer que (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a \in K$; et pour cela, on va distinguer 2 cas.

Supposons d'abord qu'il existe un entier L tel que $u_k = x_L$ pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$. Alors, (u_k) possède une sous-suite (u'_n) constamment égale à x_L, qui converge assurément vers $a := x_L \in K$.

Supposons maintenant que pour tout $l \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N};\; u_k = x_l\}$ soit fini. On va construire par récurrence une sous-suite $(u'_n) = (u_{k_n})$ qui convient. Pour commencer, on choisit un entier k_0 tel que $u_{k_0} \neq x_0$. Ensuite, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N};\; u_k = x_0 \text{ ou } x_1\}$ est fini, donc l'ensemble $\{k \in \mathbb{N};\; u_k \neq x_0 \text{ et } u_k \neq x_1\}$ est infini, et donc on peut trouver un entier $k_1 > k_0$ tel que $u_{k_1} \neq x_0$ et $u_{k_1} \neq x_1$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; u_{k_n} \neq x_0, \dots, x_n$. Comme les u_{k_n} sont dans K, on voit donc que pour tout $n \in \mathbb{N}$: ou bien $u_{k_n} = x_\infty$, ou bien $u_{k_n} = x_{l_n}$ pour un certain entier $l_n > n$. Comme $x_l \to x_\infty$ quand $l \to \infty$, on en déduit que la sous-suite (u_{k_n}) tend vers $a := x_\infty \in K$. □

La remarque suivants montre qu'il faut lire attentivement la définition d'un compact ; et accessoirement, il est bon de connaitre la définition à laquelle cette remarque donne lieu.

REMARQUE 2.2. Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. Les choses suivantes sont équivalentes.

(1) Toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq A$ possède une sous-suite qui converge *dans* E.

(2) $\overline{A}$ est un compact de E.

Dans ce cas, on dit que A est **relativement compact** dans E.

Démonstration. L'implication $(2) \implies (1)$ est claire (micro-exo). Inversement, supposons (1) vérifiée et montrons que $\overline{A}$ est compact.

Soit (u_k) une suite de points de $\overline{A}$. Par définition de $\overline{A}$, on peut, pour tout $k \in \mathbb{N}$, choisir un point $\widetilde{u}_k \in A$ tel que $d(\widetilde{u}_k, u_k) < 2^{-k}$. On obtient ainsi une suite $(\widetilde{u}_k)$ de points de A. Par (1), cette suite possède une sous-suite $(\widetilde{u}_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in E$. Comme les $\widetilde{u}_{k_n}$ sont dans A, le point a appartient à $\overline{A}$. Et comme $d(u_{k_n}, a) \leqslant d(u_{k_n}, \widetilde{u}_{k_n}) + d(\widetilde{u}_{k_n}, a) \leqslant 2^{-k_n} + d(\widetilde{u}_{k_n}, a)$, on voit que $u_{k_n} \to a$. Ainsi, toute suite $(u_k) \subseteq \overline{A}$ possède une sous-suite $(u'_n) = (u_{k_n})$ qui converge vers un point de $\overline{A}$. □

2.2. Compacts et fermés.

PROPOSITION 2.3. *Soit E un espace métrique.*

(1) *Tout compact de E est* fermé *dans E.*

(2) *Si E est un espace vectoriel normé, alors tout compact de E est à la fois fermé et* borné.

Démonstration. (1) Soit K un compact de E. On veut montrer que si (u_k) est une suite de points de K qui converge vers un point $a \in E$, alors $a \in K$. Comme K est compact, la suite (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a' \in K$. Mais $u'_n \to a$ puisque (u'_n) est une sous-suite de (u_k). Donc $a' = a$ par unicité de la limite ; et donc $a \in K$.

(2) Soit K un compact de l'evn E. On sait déjà que K est fermé. Si K n'était pas borné, on pourrait trouver, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un point $u_k \in K$ tel que $\|u_k\| > k$. La suite (u_k) ainsi construite ne possède aucune sous-suite convergente puisque $\|u_k\| \to \infty$; ce qui contredit la compacité de K. □

COROLLAIRE 2.4. *Tout compact $K \subseteq \mathbb{R}$ possède un plus petit et un plus grand élément.*

Démonstration. Comme K est borné, $m := \inf(K)$ et $M := \sup(K)$ sont des nombres réels bien définis ; et comme K est fermé, m et M appartiennent à K (puisque la borne supérieure et la borne inférieure de tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ appartiennent à $\overline{A}$). □

PROPOSITION 2.5. *Si E est un espace métrique* compact*, alors tout fermé de E est compact.*

Démonstration. Soit C un fermé de E, et soit (u_k) une suite quelconque de points de C. Comme E est compact, la suite (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a \in E$; et comme C est fermé dans E, le point a appartient en fait à C. Ainsi, toute suite $(u_k) \subseteq C$ possède une sous-suite qui converge dans C ; donc C est compact. □

2.3. Compacts en dimension finie.

Le théorème suivant (particulièrement facile à appliquer) donne une caractérisation constamment utilisée des compacts dans un evn de dimension finie.

THÉORÈME 2.6. *Si E est un espace vectoriel normé* de dimension finie*, alors les compacts de E sont exactement les ensembles fermés bornés.*

Démonstration. On a déjà vu que tout compact de E est fermé borné. Inversement, soit $K \subseteq E$ un ensemble fermé borné, et soit (u_k) une suite quelconque de points de E. Comme K est bornée, la suite (u_k) est bornée. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass (applicable car $\dim(E) < \infty$), la suite (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a \in E$; et le point a appartient à K car K est fermé dans E. Donc K est compact. □

REMARQUE. D'après le Théorème 1.7, ce résultat n'est valable qu'en dimension finie : si E est un evn de dimension infinie, alors $B_E := \{u \in E;\ \|u\| \leqslant 1\}$ est un ensemble fermé borné qui n'est pas compact.

COROLLAIRE 2.7. *Soit E un evn* de dimension finie. *Pour tout ensemble $A \subseteq E$, on a l'équivalence suivante : A est relativement compact dans $E \iff A$ est borné.*

Démonstration. Si $\overline{A}$ est compact, alors $\overline{A}$ est borné, donc A aussi puisque $A \subseteq \overline{A}$. Inversement, si A est borné, alors $\overline{A}$ aussi (exo), donc $\overline{A}$ est compact car fermé borné en dimension finie. □

EXEMPLE. L'intervalle $[0, 2\pi[$ et le cercle $\mathbb{T}$ ne sont pas homéomorphes.

Démonstration. Le cercle $\mathbb{T}$ est compact car fermé borné dans $E := \mathbb{C}$, et l'intervalle $[0, 2\pi[$ n'est pas compact car il n'est pas fermé dans $\mathbb{R}$. □

Exercice 1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$\Sigma_N := \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N;\ x_j \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{N} x_j = 1 \right\}$$

est un compact de $\mathbb{R}^N$. Dessiner Σ_2 et Σ_3.

Exercice 2. Montrer que l'ensemble des matrices orthogonales est un compact de $M_N(\mathbb{R})$.

2.4. Produits finis. Le résultat suivant, facile à démontrer, est un cas très particulier du **Théorème de Tikhonov**.

PROPOSITION 2.8. *Si $E_1, \dots, E_N$ sont des espaces métriques compacts, alors $E := E_1 \times \cdots \times E_N$ est compact.*

Démonstration. Aux notations près, la preuve est identique à celle du Théorème de Bolzano-Weierstrass dans un espace vectoriel normé de dimension finie. On la laisse donc en exo. □

2.5. Unions, intersection. la proposition suivante *doit* faire penser aux propriétés de stabilité de la famille des fermés d'un espace métrique.

PROPOSITION 2.9. *Soit E un espace métrique.*

(1) *Si $K_1, \dots, K_N$ sont des compacts de E, alors $K := K_1 \cup \cdots \cup K_N$ est compact.*
(2) *Si $(K_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de compacts de E, alors $K := \bigcap_{i \in I} K_i$ est compact.*

Démonstration. (1) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $K = K_1 \cup \cdots \cup K_N$. Comme il y a une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ et un nombre fini de K_j, il existe au moins un $j_0 \in [\![1, N]\!]$ tel que K_{j_0} contient u_k pour une infinité d'entiers k. Donc (u_k) possède une sous-suite (u'_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; u'_n \in K_{j_0}$. Comme K_{j_0} est compact, la suite (u'_n) possède une sous-suite (u''_n) qui converge vers un point $a \in K_{j_0}$. Alors (u''_n) est une sous-suite de (u_k) qui converge vers un point de K.

(2) Fixons un $i_0 \in I$. On peut écrire $K = \bigcap_{i\in I} C_i$, où $C_i := K_i \cap K_{i_0}$. Chaque C_i est un fermé de K_{i_0}, car le compact K_i est fermé dans E. Donc $K = \bigcap_{i\in I} C_i$ est un fermé de K_{i_0} ; et donc K est compact puisque K_{i_0} est compact. □

3. Compacts emboîtés

Le résultat suivant est très utile ; on s'en servira plusieurs fois.

Lemme 3.1. (Théorème des compacts emboîtés)
Soit E un espace métrique. Si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante *de* compacts non-vides *de E, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. De manière équivalente : si (K_n) est une suite décroissante de compacts de E telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \emptyset$, alors il existe un n_0 tel que $K_{n_0} = \emptyset$.*

Démonstration. Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts *non-vides* de E. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_m \in K_m$. Comme la suite (K_m) est décroissante, tous les x_m appartiennent à K_0, qui est compact. Donc la suite (x_m) possède une sous-suite $(x_{\phi(l)})_{l\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in K_0$. Si on fixe $n \in \mathbb{N}$, alors $\phi(l) \geqslant n$ pour tout l assez grand (en fait, pour tout $l \geqslant n$). Donc $x_{\phi(l)} \in K_n$ pour tout l assez grand ; et donc $a = \lim x_{\phi(l)} \in K_n$ car K_n, étant compact, est un fermé de E. Ainsi, le point a appartient à K_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. □

Corollaire 3.2. *Soit E un espace métrique* compact*. Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non-vides de E, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.*

Remarque 3.3. Le Corollaire 3.2 est une *caractérisation* de la compacité : si E est un espace métrique ayant la propriété que toute suite décroissante de fermés non-vides de E a une intersection non-vide, alors E est compact.

Démonstration. Soit E un espace métrique possédant cette propriété, et soit (u_k) une suite quelconque de points de E. On a vu que

$$\mathrm{vad}\big((u_k)\big) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n\,, \quad \text{où } C_n := \overline{\{u_k;\ k \geqslant n\}}.$$

Par définition, les C_n sont des fermés non-vides de E ; et la suite (C_n) est visiblement décroissante. Donc $\mathrm{vad}\big((u_k)\big) \neq \emptyset$, pour toute suite $(u_k) \subseteq E$. □

3.1. Illustration : le "Théorème de Dini". Comme application du Théorème des compacts emboîtés, on va démontrer le résultat suivant.

Proposition 3.4. *Soit K un espace métrique compact, et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues, $f_n : K \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) est* monotone*, et qu'elle converge* simplement *vers une fonction $f : K \to \mathbb{R}$* continue*. Alors $f_n \to f$* uniformément*.*

Démonstration. Supposons par exemple que la suite (f_n) soit décroissante. Si on pose $g_n(t) := f_n(t) - f(t)$, alors les g_n sont continues car f et les f_n le sont, la suite (g_n) est décroissante, et $g_n(t) \to 0$ pour tout $t \in K$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque : on cherche un entier N tel $|f_n(t) - f(t)| < \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$ et pour tout $t \in K$. Autrement dit, comme $|f_n(t) - f(t)| = g_n(t)$ et que la suite (g_n) est décroissante, on cherche un entier N tel que

$$\forall t \in K \ : \ g_N(t) < \varepsilon.$$

Introduisons alors les ensembles suivants : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$C_n := \{t \in K;\ g_n(t) \geqslant \varepsilon\}.$$

Comme les g_n sont continues, les C_n sont des fermés de K ; et comme la suite (g_n) est décroissante, la suite (C_n) est décroissante. De plus, comme $g_n(t) \to 0$ pour tout $t \in K$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \varnothing$ (micro-exo). Par le Théorème des compacts emboîtés (K est compact...), il existe donc un entier N tel que $C_N = \varnothing$; ce qui est exactement la conclusion souhaitée. □

4. Compacité et continuité

4.1. Image continue d'un compact. Le théorème suivant est très général, très important, et ... très facile à démontrer.

THÉORÈME 4.1. *Soient E et F deux espaces métriques. Si $f : E \to F$ est une application continue alors, pour tout compact $K \subseteq E$, l'ensemble $f(K)$ est un compact de F. Autrement dit :* l'image continue d'un compact est un compact.

Démonstration. Soit (u_k) une suite de points de $f(K)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_k \in K$ tel que $u_k = f(x_k)$. Comme K est compact ; la suite (x_k) possède une sous-suite (x'_n) qui converge vers un point $x \in K$. Alors $u'_n := f(x'_n) \to f(x) := a$ par continuité de f. Ainsi, toute suite $(u_k) \subseteq f(K)$ possède une sous-suite qui converge vers un point $a \in f(K)$. □

COROLLAIRE 4.2. *Soient E et F deux espaces métriques, avec E* compact. *Si $f : E \to F$ est une bijection continue, alors f est un homéomorphisme, i.e. $f^{-1} : F \to E$ est continue.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $\left(f^{-1}\right)^{-1}(C)$ est fermé dans F pour tout fermé $C \subseteq E$, *i.e* que $f(C)$ est fermé dans F. Mais ceci est clair : comme E est compact, le fermé C est compact, donc $f(C)$ est compact car f est continue, et donc $f(C)$ est fermé dans F. □

COROLLAIRE 4.3. *Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$. On note G_f le graphe de f,*

$$G_f := \{(x, y) \in E \times F;\ y = f(x)\}.$$

(i) *Si G_f est un compact de $E \times F$, alors f est continue.*

(ii) *Plus généralement, si f est à valeurs dans un compact $L \subseteq F$ et si G_f est un fermé de $E \times F$, alors f est continue.*

Remarque 1. (i) s'appelle le **Lemme du graphe compact**.

Remarque 2. Le graphe d'une application continue $f : E \to F$ est *toujours* un fermé de $E \times F$ (exo). La réciproque est fausse : par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) := 0$ et $f(x) := 1/x$ pour $x \neq 0$ n'est pas continue, mais son graphe est fermé dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (exo). Cependant, (ii) montre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction *bornée* dont le graphe est fermé, alors f est nécessairement continue.

Preuve du Corollaire 4.3. (i) Il suffit de montrer que $f^{-1}(C)$ est fermé dans E pour tout fermé $C \subseteq F$. Pour utiliser ce qu'on sait, il faut arriver à exprimer $f^{-1}(C)$ à l'aide de G_f. En notant $\pi_E : E \times F \to E$ et $\pi_F : E \times F \to F$ les applications coordonnées, on a

$$\begin{aligned} f^{-1}(C) &= \big\{x \in E;\ \pi_F(x, f(x)) \in C\big\} \\ &= \big\{x \in E;\ (x, f(x)) \in \pi_F^{-1}(C)\big\} \\ &= \pi_E\Big(G_f \cap \pi_F^{-1}(C)\Big). \end{aligned}$$

Comme $\pi_F^{-1}(C)$ est un fermé de $E \times F$ par continuité de l'application π_F, l'ensemble $\Lambda := G_f \cap \pi_F^{-1}(C)$ est un fermé de G_f, donc un compact de $E \times F$ car G_f est compact. Donc $f^{-1}(C) = \pi_E(\Lambda)$ est compact par continuité de π_E, et donc c'est un fermé de F.

(ii) On commence par démontrer le fait général suivant.

Fait. Pour montrer que $f : E \to F$ est continue, il suffit de prouver que la restriction de f à tout compact $K \subseteq E$ est continue.

Preuve du Fait. Supposons que $f_{|K}$ soit continue pour tout compact $K \subseteq E$. Soit (u_k) une suite de points de E convergeant vers $u \in E$. Comme $u_k \to u$, l'ensemble $K := \{u\} \cup \{u_k;\ k \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E ; donc $f_{|K}$ est continue, et donc $f(u_k) \to f(u)$. Par conséquent, f est continue. □

Supposons maintenant que $f : E \to F$ soit à valeurs dans un compact $L \subseteq F$. On peut ainsi considérer f comme une application de E dans L. Si K est un compact quelconque de E, le graphe de $f_{|K}$ est égal à $G_f \cap (K \times L)$. Comme G_f est fermé dans $E \times F$ et que $K \times L$ est compact, le graphe de $f_{|K}$ est donc compact (en tant que fermé d'un compact). Donc $f_{|K}$ est continue d'après (i) ; et donc f est continue d'après le Fait, puisque K est un compact quelconque de E. □

Exercice. Démontrer le Corollaire 4.3 "directement", *i.e.* en utilisant uniquement la définition de la compacité.

Voici une petite illustration des résultats précédents.

Exemple. Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné non trivial. Si $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une application continue telle que $\gamma_{|[a,b[}$ est injective et $\gamma(b) = \gamma(a)$, alors $\Gamma := \gamma([a, b])$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{T}$.

Démonstration. Comme $[a, b]$ est homéomorphe à $[0, 2\pi]$, on peut supposer que $[a, b] = [0, 2\pi]$. Soit $\widetilde{\gamma} = \mathbb{T} \to \Gamma$ l'application définie comme suit :

$$\forall t \in [0, 2\pi[\ :\ \widetilde{\gamma}(e^{it}) = \gamma(t).$$

Comme $\gamma_{|[0,2\pi[}$ est injective, il est assez apparent que $\widetilde{\gamma}$ est une bijection de $\mathbb{T}$ sur Γ (micro-exo). Pour conclure, il suffit de montrer que $\widetilde{\gamma}$ est également *continue* : en effet, comme $\mathbb{T}$ est compact, on en déduira que $\widetilde{\gamma}$ est un homéomorphisme par le Corollaire 4.2, et donc que Γ et $\mathbb{T}$ sont homéomorphes.

Comme $\gamma(2\pi) = \gamma(0)$, on voit qu'on a $\widetilde{\gamma}(e^{it}) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$ et pas seulement pour $t \in [0, 2\pi[$. Donc, si on note $G \subseteq \mathbb{T} \times \Gamma$ le graphe de $\widetilde{\gamma}$, alors on peut écrire

$$G = \{(z, w) \in \mathbb{T} \times \Gamma;\ \exists t \in [0, 2\pi]\ :\ z = e^{it} \text{ et } w = \gamma(t)\}.$$

Par conséquent, on a $G = f([0, 2\pi])$, où $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{T} \times \Gamma$ est l'application définie par $f(t) := (e^{it}, \gamma(t))$. Comme l'application f est continue (puisque γ est continue) et que $[0, 2\pi]$ est compact, on en déduit que G est compact. Donc $\widetilde{\gamma}$ est continue d'après le Lemme du graphe compact. (Exo : démontrer la continuité de $\widetilde{\gamma}$ *sans utiliser* le Lemme du graphe compact.) $\square$

4.2. Optimisation. Du Théorème 4.1, on déduit très facilement le résultat suivant.

THÉORÈME 4.4. *Soit E un espace métrique, et soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Si K est un compact de E, alors $f_{|K}$ possède un maximum et un minimum.*

Démonstration. Par le Théorème 4.1, $f(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$, donc possède un plus petit et un plus grand élément. $\square$

Voici une conséquence immédiate, qui formalise la très importante idée suivante : *la compacité donne de l'uniformité.*

COROLLAIRE 4.5. *Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $c \in \mathbb{R}$. On suppose qu'on a $f(x) < c$ pour tout $x \in E$. Alors, pour tout compact $K \subseteq E$, il existe une constante $\alpha_K < c$ telle que $\forall x \in K\ :\ f(x) \leqslant \alpha_K$. (Résultat analogue si $f(x) > c$ pour tout $x \in E$.)*

Démonstration. C'est évident : la restriction de f à K possède un maximum, atteint en un point $x_0 \in K$; donc $\forall x \in K\ :\ f(x) \leqslant \alpha_K := f(x_0) < c$. $\square$

COROLLAIRE 4.6. *Soit E un espace vectoriel normé* de dimension finie, *et soit C un fermé non-vide de E. Si $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to \infty$, alors f possède un minimum.*

Démonstration. La “difficulté” est que C n'est pas compact ; mais l'hypothèse faite sur f permet de la contourner en se ramenant à un compact.

Fixons $a \in C$, et posons $K := \{x \in C;\ f(x) \leqslant f(a)\}$. L'ensemble K est un fermé de E car C est fermé et f est continue. De plus, K est également *borné* : en effet, s'il ne l'était pas, on pourrait trouver une suite $(x_n) \subseteq K$ telle que $\|x_n\| \to \infty$, donc telle que $f(x_n) \to +\infty$, ce qui est absurde puisque $f(x_n) \leqslant f(a)$ pour tout n. Comme $\dim(E) < \infty$, on en déduit que K est compact ; et $K \neq \varnothing$ puisque $a \in K$. Par continuité, la restriction de f à K possède un minimum, atteint en un point $x_0 \in K$. On a ainsi $f(x_0) \leqslant f(x)$ pour tout $x \in K$; et on a également $f(x_0) < f(x)$ pour tout $x \in C \backslash K$ puisqu'un tel x vérifie $f(x) > f(a) \geqslant f(x_0)$. Donc $f(x_0)$ est bien la valeur minimale prise par f *sur tout l'ensemble C*. $\square$

Autre preuve. On va utiliser le Théorème des compacts emboîtés. Posons

$$m := \inf\{f(x);\ x \in C\},$$

qui est un élément bien défini de $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ car $C \neq \varnothing$. Il suffit de montrer qu'il existe un point $x \in C$ tel que $f(x) = m$, ce qui prouvera en même temps que $m > -\infty$ et que f possède un minimum.

Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de nombres réels telle que $\alpha_n \to m$ et $\alpha_n > m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$K_n := \{x \in C;\ f(x) \leqslant \alpha_n\}.$$

Comme f est continue, les K_n sont des fermés de C, donc des fermés de E puisque C est fermé dans E ; et comme $f(x) \to +\infty$ quand $\|x\| \to \infty$, on voit que les K_n sont également *bornés* (exo). Donc les K_n sont des compacts de E puisque $\dim(E) < \infty$. De plus, la suite (K_n) est décroissante car (α_n) est décroissante. Enfin, les K_n sont tous *non-vides* par définition de m, puisque $\alpha_n > m$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'après le Théorème des compacts emboîtés, on a donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. Soit $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$: on a $f(x) \leqslant \alpha_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $f(x) \leqslant m$ puisque $\alpha_n \to m$, et donc $f(x) = m$ par définition de m. □

Exercice. Soit E un espace métrique, et soit $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $M \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E;\ f(x) \leqslant M\}$ est compact. Montrer que f possède un minimum.

On va maintenant donner quelques exemples d'illustration du Théorème 4.4 et de ses corollaires.

Exemple 1. Soient $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$ et $U := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Si K est un compact de $\mathbb{D}$, alors il existe une constante $\alpha < 1$ telle que $\forall z \in K\ :\ |z| \leqslant \alpha$. Si K est un compact de U, alors il existe une constante $\alpha > 0$ telle que $\forall z \in U\ :\ \mathrm{Re}(z) \geqslant \alpha$.

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{D}$. La fonction $f : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) := |z|$ est continue, et on a $f(z) < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$; d'où l'existence de la constante α par le Corollaire 4.5. Même preuve pour un compact $K \subseteq U$ (exo). □

Exemple 2. Soit O un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Si K est un compact de O, alors on peut trouver un ouvert W tel que $K \subseteq W$, $\overline{W}$ est compact et $\overline{W} \subseteq O$.

Démonstration. Fixons une norme sur $\mathbb{R}^N$ et notons d la distance associée. La fonction $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ définie par $f(u) := \mathrm{dist}\big(u, \mathbb{R}^N \backslash O\big)$ est continue ; et comme $\mathbb{R}^N \backslash O$ est un fermé de $\mathbb{R}^N$, on a $f(u) > 0$ pour tout $u \in O$. Comme K est un compact de O, il existe donc une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u \in K\ :\ \mathrm{dist}\big(u, \mathbb{R}^N \backslash O\big) \geqslant \alpha.$$

Posons alors

$$W := \big\{u \in \mathbb{R}^N;\ \mathrm{dist}\big(u, K\big) < \alpha/2\big\}.$$

L'ensemble W est ouvert par continuité de la fonction $u \mapsto \mathrm{dist}\big(u, \mathbb{R}^N \backslash O\big)$. Il est aussi *borné* car le compact K est borné (exo) ; donc $\overline{W}$ est compact car on est en dimension finie. De plus, il est clair que $K \subseteq W$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\overline{W} \subseteq O$. Si $u \in \overline{W}$, alors $\mathrm{dist}\big(u, K\big) \leqslant \alpha/2$ (exo), donc on peut trouver $x \in K$ tel que $d(u, x) < 2\alpha/3$; et comme $\mathrm{dist}(x, \mathbb{R}^N \backslash 0) \geqslant \alpha$, on en déduit que $u \notin \mathbb{R}^N \backslash O$, *i.e.* $u \in O$. □

Exemple 3. Soient X un espace vectoriel normé, et soit C un fermé non-vide de X. On suppose que C est contenu dans un sous-espace vectoriel E *de dimension finie.* Alors, pour tout $a \in X$, il existe au moins 1 point $u \in C$ tel que $\|a - u\| = \mathrm{dist}(a, C)$.

Démonstration. Soit $f : C \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(u) := \|a - u\|$. La fonction f est continue, et comme $f(u) \geqslant \|u\| - \|a\|$, on voit que $f(u) \to +\infty$ quand $\|u\| \to \infty$. Donc f possède un minimum ; ce qui est la conclusion souhaitée. □

EXEMPLE 4. (“Théorème fondamental de l'algèbre”)
Si P est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors P possède au moins une racine complexe.

Démonstration. Comme toute fonction polynomiale est continue, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue sur $\mathbb{C}$ par composition. De plus, $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$ car P est non constant (exo). Donc $|P(z)|$ possède un minimum sur $\mathbb{C}$ par le Corollaire 4.6 : il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}\ :\ |P(z_0)| \leqslant |P(z)|$. Quitte à remplacer P par le polynôme $P(z+z_0)$, on peut également supposer que $z_0 = 0$. On a ainsi

$$\forall z \in \mathbb{C}\ :\ |P(0)| \leqslant |P(z)|;$$

et il s'agit de montrer que $P(0) = 0$. Supposons que $P(0) \neq 0$, et essayons d'obtenir une contradiction. Quitte à remplacer P par $\frac{1}{P(0)}P$, on peut supposer que $P(0) = 1$.

Comme P est non constant et $P(0) = 1$, on peut écrire

$$P(z) = 1 + c_m z^m + z^{m+1} Q(z),$$

où $m \geqslant 1$, $c_m \neq 0$ et Q est un polynôme (éventuellement nul). Autrement dit,

$$P(z) = 1 + c_m z^m (1 + \varepsilon(z)),$$

où $\varepsilon(z) := \frac{1}{c_m} z Q(z)$. Comme la fonction polynomiale $Q(z)$ est continue, on voit que

$$\varepsilon(z) \to 0 \qquad \text{quand } z \to 0.$$

L'inégalité $1 = |P(0)| \leqslant |P(z)|$ s'écrit maintenant comme suit :

$$\forall z \in \mathbb{C}\ :\ |1 + c_m z^m (1 + \varepsilon(z))| \geqslant 1.$$

Voici maintenant le point clé : comme $m \geqslant 1$, tout nombre complexe de module 1 possède des racines m-ièmes ; donc on peut choisir $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{im\theta} = -\frac{|c_m|}{c_m}$, *i.e.* $c_m e^{im\theta} = -|c_m|$. En prenant $z = re^{i\theta}$ dans l'inégalité précédente, on obtient ainsi

$$(*) \qquad \forall r > 0\ :\ \left|1 - |c_m| r^m \big(1 + \varepsilon(re^{i\theta})\big)\right| \geqslant 1.$$

Choisissons alors $r > 0$ tel que $|c_m| r^m \leqslant 1$ et $|\varepsilon(re^{i\theta})| \leqslant 1/2$, ce qui est possible puisque $\varepsilon(z) \to 0$ quand $z \to 0$. Par $(*)$, on a

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \big|1 - |c_m| r^m\big| + \Big| |c_m| r^m \varepsilon(re^{i\theta}) \Big| \\ &\leqslant \big|1 - |c_m| r^m\big| + \frac{1}{2} |c_m| r^m \\ &= 1 - |c_m| r^m + \frac{1}{2}|c_m| r^m \\ &= 1 - \frac{1}{2}|c_m| r^m < 1. \end{aligned}$$

On a donc obtenu la contradiction cherchée. □

EXEMPLE 5. Si $A \in M_N(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique, alors A possède au moins une valeur propre réelle.

Démonstration. Comme on le sait, ce résultat est le point clé dans la preuve du **Théorème spectral**, selon lequel toute matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée : une fois ce point acquis, on obtient le Théorème spectral par un argument standard d'algèbre linéaire (récurrence sur la dimension).

Dans ce qui suit, on note $\|\cdot\|$ la norme *euclidienne* sur $\mathbb{R}^N$, et $\langle\ ,\ \rangle$ le produit scalaire canonique.

Soit S la sphère unité de $\mathbb{R}^N$,

$$S := \{u \in \mathbb{R}^N;\ \|u\| = 1\}.$$

Par définition, S est un fermé borné de $\mathbb{R}^N$, donc un ensemble compact. De plus, la fonction $u \mapsto \langle Au, u\rangle$ est visiblement continue sur S. Donc il existe un point $u_0 \in S$ tel que

$$\langle Au_0, u_0\rangle = \sup\{\langle Au, u\rangle;\ u \in S\} := \lambda.$$

Soit maintenant $B : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$B(x, y) := \lambda\,\langle x, y\rangle - \langle Ax, y\rangle.$$

Comme A est symétrique, B et une forme bilinéaire symétrique. De plus, B est *positive* par définition de λ : on a bien sûr $B(0,0) = 0$; et si $x \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} B(x,x) &= \lambda\,\|x\|^2 - \langle Ax, x\rangle \\ &= \|x\|^2\left(\lambda - \left\langle A\,\frac{x}{\|x\|}, \frac{x}{\|x\|}\right\rangle\right) \\ &\geqslant 0 \qquad \text{car } u := \frac{x}{\|x\|} \in S. \end{aligned}$$

Par définition de u_0, on a $B(u_0, u_0) = \lambda\,\|u_0\|^2 - \langle Au_0, u_0\rangle = \lambda - \lambda = 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée à la forme bilinéaire positive B, on en déduit que

$$\forall y \in \mathbb{R}^N\ :\ |B(u_0, y)| \leqslant B(u_0, u_0)^{1/2}\, B(y,y)^{1/2} = 0.$$

Donc $B(x_0, y) = 0$, autrement dit

$$\langle \lambda\, u_0 - Au_0, y\rangle = 0 \qquad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^N.$$

Par conséquent $\lambda\, u_0 - Au_0 = 0$; et donc λ est valeur propre de A puisque $u_0 \neq 0$. □

Voici pour finir un dernier exemple : une version pour enfants du **Théorème des fonctions implicites**. On suppose connues les notions de base de calcul différentiel.

EXEMPLE 6. Soit Λ un espace métrique, Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$ et $F : \Lambda \times \Omega \to \mathbb{R}^N$. On suppose que F est continue sur $\Lambda \times \Omega$, que $F(\lambda, y)$ est différentiable par rapport à $y \in \Omega$, et que l'application $(\lambda, y) \mapsto D_yF(\lambda, y)$ est continue de $\Lambda \times \Omega$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$. Si $(\lambda_0, y_0) \in \Lambda \times \Omega$ est tel que $F(\lambda_0, y_0) = 0$ et si l'application linéaire $D_yF(\lambda_0, y_0)$ est inversible, alors il existe un voisinage ouvert V de λ_0 et une application continue $\mathbf{y} : V \to \Omega$ tels que $\forall \lambda \in V\ :\ F(\lambda, \mathbf{y}(\lambda)) = 0$.

Démonstration. Dans ce qui suit, on utilisera la norme *euclidienne* sur $\mathbb{R}^N$.

FAIT 1. Il existe un voisinage V_0 de λ_0, une boule ouvert $B = B(y_0, r)$ avec $\overline{B} \subseteq \Omega$ et une constante $c > 0$ tels que : $D_yF(\lambda, y)$ est inversible pour tout $(\lambda, y) \in V_0 \times \overline{B}$ et $\|F(\lambda, y') - F(\lambda, y)\| \geqslant c\,\|y' - y\|$ pour tout $\lambda \in V_0$ et pour tous $y, y' \in \overline{B}$.

Preuve du Fait 1. Supposons d'abord que $DF_y(\lambda_0, y_0) = Id$. Par continuité de l'application $(\lambda, y) \mapsto D_y(\lambda, y)$, on peut alors trouver un voisinage ouvert V_0 de λ_0 et une boule $B = B(y_0, r)$ tels que $\overline{B} \subseteq \Omega$ et $\|D_yF(\lambda, y) - Id\| \leqslant 1/2$ pour tout $(\lambda, y) \in V_0 \times \overline{B}$. Cela entraine en particulier que $D_yF(\lambda, y)$ est inversible pour tout $(\lambda, y) \in V_0 \times \overline{B}$. (Voir le Corollaire 3.3 du Chapitre 6. Plus simplement, observer que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ vérifie $\|T - Id\| < 1$, alors T est injectif – exo – et donc inversible car on est en dimension finie.)

En observant que $\|F(\lambda,y')-F(\lambda,y)\| \geqslant \|y'-y\| - \big\|(F(\lambda,y')-y') - (F(\lambda,y)-y)\big\|$ et en utilisant l'inégalité des accroissements finis, on montre ensuite (exo) qu'on a $\|F(\lambda,y')-F(\lambda,y)\| \geqslant (1/2)\,\|y'-y\|$ pour tout $\lambda\in V_0$ et pour tous $y,y'\in\overline{B}$.

Dans le cas général, on applique ce qui précède à $\widetilde{F} := L^{-1}\circ F$ où $L := D_yF(\lambda_0,y_0)$, et on obtient la conclusion souhaitée avec $c := 1/2\|L^{-1}\|$ (exo). $\square$

Remarque. La minoration $\|F(\lambda,y')-F(\lambda,y)\| \geqslant c\,\|y'-y\|$ entraine en particulier que pour tout $\lambda\in V_0$, l'application $y\mapsto F(\lambda,y)$ est injective sur $\overline{B}$.

Comme $F(\lambda_0,y_0)=0$ et que l'application $\lambda\mapsto F(\lambda,y_0)$ est continue, on peut trouver un voisinage V_0' de λ_0 tel que $\|F(\lambda,y_0)\|\leqslant cr/3$ pour tout $\lambda\in V_0'$. On pose alors $V := V_0\cap V_0'$.

FAIT 2. Si $\lambda\in V$, alors $\|F(\lambda,y)\| > \|F(\lambda,y_0)\|$ pour tout $y\in\partial B$.

Preuve du Fait 2. Si $y\in\partial B$, alors $\|y-y_0\|=r$; donc $\|F(\lambda,y)-F(\lambda,y_0)\|\geqslant cr$, et donc $\|F(\lambda,y)\|\geqslant cr-\|F(\lambda_0,y)\|\geqslant cr-cr/3=2cr/3>\|F(\lambda,y_0)\|$. $\square$

FAIT 3. Pour tout $\lambda\in V$, il existe un unique $y\in\overline{B}$ tel que $F(\lambda,y)=0$.

Preuve du Fait 3. Fixons $\lambda\in V$, et considérons la fonction $\Phi:\overline{B}\to\mathbb{R}$ définie par $\Phi(y):=\|F(\lambda,y)\|^2$. Cette fonction est continue sur $\overline{B}$, et différentiable sur la boule ouverte B avec $D\Phi(y)\cdot h = 2\langle D_yF(\lambda,y)\cdot h, F(\lambda,y)\rangle$ pour tout $h\in\mathbb{R}^N$ (exo classique).

Comme $\overline{B}$ est un compact de $\mathbb{R}^N$, la fonction Φ possède un minimum sur $\overline{B}$, atteint en un certain point y_λ. Par le Fait 2, le point y_λ ne peut pas appartenir à ∂B. Donc y_λ appartient à la boule ouverte B, *et donc* $D\Phi(y_\lambda)=0$. Vu l'expression pour $D\Phi$ et comme $D_yF(\lambda,y_\lambda)$ est inversible, on en déduit qu'on a $\langle z, F(\lambda,y_\lambda)\rangle=0$ pour tout $z\in\mathbb{R}^N$; et donc $F(\lambda,y_\lambda)=0$. Enfin, y_λ est le *seul* point de $\overline{B}$ tel que $F(\lambda,y)=0$, par injectivité de l'application $y\mapsto F(\lambda,y)$ sur $\overline{B}$. $\square$

Pour tout $\lambda\in V$, notons $\mathbf{y}(\lambda)$ l'unique point $y\in\overline{B}$ tel que $F(\lambda,y)=0$. On définit ainsi une application $\mathbf{y}:V\to\overline{B}$. Notons $G_{\mathbf{y}}$ le graphe de $\mathbf{y}$. Par *unicité* du point y tel que $F(\lambda,y)=0$, on a

$$G_{\mathbf{y}} = \big\{(\lambda,y)\in V\times\overline{B}\ :\ F(\lambda,y)=0\big\}.$$

Donc $G_{\mathbf{y}}$ est un fermé de $V\times\overline{B}$ car F est continue. Comme $\overline{B}$ est compact, on en déduit que l'application $\mathbf{y}$ est continue, d'après le Corollaire 4.3. $\square$

4.3. Projection d'un fermé. Le lemme suivant, assez proche du Théorème 4.1 dans l'esprit, est souvent bien utile pour montrer que certains ensembles sont fermés.

LEMME 4.7. *Soient E et K deux espaces métriques, avec K* compact. *Soit aussi $C\subseteq E\times K$. On pose*

$$\exists^K C := \{x\in E;\ \exists y\in K\ :\ (x,y)\in C\}.$$

Si C est fermé dans $E\times F$, alors $\exists^K C$ est un fermé de E. Autrement dit : la projection d'un fermé le long d'un facteur compact est un fermé.

Preuve directe. Soit $(x_k)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\exists^K C$ convergeant vers un point $x\in E$: on veut montrer que $x\in\exists^K C$. Pour tout $k\in\mathbb{N}$, choisissons un point $y_k\in K$ tel que $(x_k,y_k)\in C$. Comme K est compact, la suite (y_k) possède une sous-suite $(y_n')=(y_{k_n})$ qui converge vers un point $y\in K$. Si on pose $x_n':=x_{k_n}$, alors $(x_n',y_n')\to(x,y)$;

et donc $(x,y) \in C$ puisque les (x'_n, y'_n) sont dans C et que C est fermé dans $E \times K$. Donc $x \in \exists^K C$ avec "témoin" y. $\square$

Preuve alambiquée. On va utiliser le Théorème 4.1. Notons $\pi_E : K \times E \to E$ la 1ère application coordonnée. Par définition, on a $\exists^K C = \pi_E(C)$. Si C était compact, on aurait fini ; mais C n'est pas compact...

L'application π_E est continue, et elle possède de plus la propriété suivante : pour tout compact $\Gamma \subseteq F$, l'ensemble $\pi_F^{-1}(\Gamma)$ est un compact de $E \times K$. En effet, on a $\pi_E^{-1}(\Gamma) = \Gamma \times K$, et on on a vu qu'un produit de deux compacts est compact. Soit maintenant $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de points de $\exists^K C = \pi_E(C)$ convergeant vers un point $x \in E$. Alors $\Gamma := \{x\} \cup \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E, donc $\pi_E^{-1}(\Gamma)$ est un compact de $E \times K$ d'après ce qu'on vient de voir, et donc $\widetilde{C} = C \cap \pi_E^{-1}(\Gamma)$ également puisque C est fermé dans $E \times K$. Par continuité de π_E, on en déduit que $\pi_E(\widetilde{C})$ est un compact de E, et est donc fermé dans E. Comme $x_n \in \pi_E(\widetilde{C})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ par définition de Γ, on a donc $x = \lim x_n \in \pi_E(\widetilde{C})$, et donc $x \in \pi_E(C) = \exists^K C$. Cela prouve que $\exists^K C$ est un fermé de E. $\square$

4.4. Continuité uniforme. Le résultat suivant est bien connu pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$. C'est une autre manifestation du "principe" selon lequel la compacité donne de l'uniformité. Pour faire bonne mesure, on va en donner 4 démonstrations.

THÉORÈME 4.8. (Théorème de Heine)
Si K est un espace métrique compact, *alors toute application continue $f : K \to F$ (où F est un espace métrique quelconque) est* uniformément *continue.*

1ère preuve. Il s'agit de montrer que si (u_k) et (v_k) sont deux suites d'éléments de K telles que $f(u_k, v_k) \to 0$, alors $d\big(f(u_k), f(v_k)\big) \to 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite de la suite des $d\big(f(u_k), f(v_k)\big)$, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ :\ d\big(f(u_k), f(v_k)\big) \geqslant \varepsilon$. Comme K est compact, la suite (u_k) possède une sous-suite (u_{k_n}) qui converge vers un point $a \in K$. Alors v_{k_n} tend vers a également, car $d(v_{k_n}, a) \leqslant d(v_{k_n}, u_{k_n}) + d(u_{k_n}, a)$ et $d(v_{k_n}, u_{k_n}) \to 0$. Comme f est continue au point a, on en déduit que $f(u_{k_n}) \to f(a)$ et $f(v_{k_n}) \to f(a)$. Donc $d\big(f(u_{k_n}), f(v_{k_n})\big) \to d\big(f(a), f(a)\big) = 0$, ce qui est absurde puisque $d\big(f(u_{k_n}), f(v_{k_n})\big) \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. $\square$

2ème preuve. Fixons $\varepsilon > 0$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons

$$K_n := \left\{x \in K;\ \exists y \in F\ :\ d(x,y) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon\right\}.$$

Par définition, K_n est la projection sur le 1er facteur de l'ensemble

$$\mathcal{F}_n = \left\{(x,y) \in K \times K;\ d(x,y) \leqslant \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad d(f(x), f(y)) \geqslant \varepsilon\right\} \subseteq K \times K,$$

qui est un fermé de $K \times K$ par continuité de f, et donc un compact puisque $K \times K$ est compact. Donc chaque K_n est compact (image continue d'un compact). De plus, la suite (K_n) est décroissante, et on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}^*} K_n = \varnothing$ car f est continue (exo). Par conséquent, il existe un entier N tel que $K_N = \varnothing$; ce qui signifie exactement que la définition de l'uniforme continuité est satisfaite avec $\delta := \frac{1}{N}$. $\square$

3ème preuve. Fixons $\varepsilon > 0$, et introduisons l'ensemble

$$\Lambda := \big\{(u,v) \in K \times K;\ d\big(f(u), f(v)\big) \geqslant \varepsilon\big\}.$$

Comme f est continue, on voit que Λ est un fermé de $K \times K$, et donc un ensemble compact car $K \times K$ est compact. De plus, on a $d_K(u,v) > 0$ pour tout $(u,v) \in \Lambda$, car nécessairement $u \neq v$ si $(u,v) \in \Lambda$. Donc la distance $d = d_K$, qui est continue sur $K \times K$, est minorée par une constante $\delta > 0$ sur Λ. Ainsi, on a $\forall (u,v) \in \Lambda\ :\ d(u,v) \geqslant \delta$; ce qui, par contraposée, signifie que

$$\forall u,v \in K\ :\ d(u,v) < \delta \implies d\big(f(u), f(v)\big) < \varepsilon.$$

□

4ème preuve. D'après le Lemme 3.14 du Chapitre 2, il existe une application continue $\delta : K \times]0,\infty[\to]0,\infty[$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $x \in E$ et pour tout $\varepsilon > 0$, le nombre $\delta(x,\varepsilon)$ est un "δ de continuité" pour f au point x, associé à ε. Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, la fonction $x \mapsto \delta(x,\varepsilon)$ est continue sur le compact K et strictement positive en tout point, donc elle possède un minimum et ce minimum est strictement positif. Ainsi, $\delta(x,\varepsilon)$ est minorée par une constante $\delta(\varepsilon) > 0$, ce qui prouve que f est uniformément continue. □

Exemple. Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle fermé borné, et soit F un espace vectoriel normé. Si $f = [a,b] \to F$ est une application continue, alors f est limite uniforme d'un suite de fonctions en escalier.

Démonstration. Il suffit (exo) de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction en escalier $\varphi : [a,b] \to F$ telle que $\forall t \in [a,b]\ :\ \|\varphi(t) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$. On fixe donc $\varepsilon > 0$.

Comme f est continue sur le compact $[a,b]$, elle est *uniformément* continue ; donc on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\|f(s) - f(t)\| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tous } s,t \in [a,b] \text{ vérifiant } |s-t| < \delta.$$

Soit alors $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision de $[a,b]$ telle que $|s_{k+1} - s_k| < \delta$ pour $k = 0, \dots, N-1$, et soit $\varphi : [a,b] \to F$ la fonction définie par

$$\varphi(t) := \begin{cases} f(s_k) & \text{si } t \in [s_k, s_{k+1}[\text{ pour un certain } k \in [\![0, N-1]\!], \\ f(s_N) & \text{si } t = s_N = b. \end{cases}$$

Par définition, φ est en escalier ; et on a tout fait pour assurer que $\forall t \in [a,b]\ :\ \|\varphi(t) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$. □

5. Produits dénombrables ; procédé diagonal

On a vu que tout produit fini d'espaces compacts est compact ; autrement dit, si $K_1, \dots, K_N$ sont des espaces métriques compacts et si on pose $K := K_1 \times \cdots \times K_N$, alors toute suite $(u_k) \subseteq K$ possède une sous-suite qui converge "coordonnée par coordonnée". Avec un peu plus d'efforts, on peut démontrer la même chose pour un produit infini dénombrable de compacts. Ce résultat pourrait s'appeler le *Théorème de Tikhonov dénombrable.*

Théorème 5.1. *Soit $(K_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'espace métriques compacts, et soit $K := \prod_{i \in I} K_i$. (Les éléments de K sont donc de la forme $u = \big(u(i)\big)_{i \in I}$, où $u(i) \in K_i$ pour tout $i \in I$.) Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K, alors (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge coordonnée par coordonnée : $\forall i \in I\ :\ u'_n(i) \xrightarrow{n\to\infty} a_i \in K_i$.*

Démonstration. On sait déjà que le résultat est vrai pour un ensemble d'indices I fini ; donc on peut supposer que $I = \mathbb{N}$.

La suite $(u_k(0))_{k\in\mathbb{N}}$ vit dans le compact K_0, donc elle possède une sous-suite convergente. Il existe ainsi un ensemble infini $\Lambda_0 \subseteq \mathbb{N}$ et un point $a_0 \in K_0$ tels que $u_k(0) \to a_0$ quand $k \to \infty$ et $k \in \Lambda_0$.

De même, la suite $(u_k(1))_{k\in\mathbb{N}}$ vit dans le compact K_1, donc on peut trouver un ensemble infini $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_0$ et un point $a_1 \in K_1$ tels que $u_k(1) \to a_1$ quand $k \to \infty$ et $k \in \Lambda_1$.

On voit maintenant qu'on peut construire par récurrence une suite décroissante $(\Lambda_i)_{i\geqslant 0}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ et des points $a_0 \in K_0, a_1 \in K_2, a_2 \in K_2, \dots$ tels que

$$\forall i \in \mathbb{N} \;:\; u_k(i) \xrightarrow[k\in\Lambda_i]{k\to\infty} a_i.$$

Définissons alors

$$\begin{cases} k_0 := \min \Lambda_0, \\ k_1 := \min \{k \in \Lambda_1;\; k > k_0\}, \\ \vdots \\ k_n := \min \{k \in \Lambda_n;\; k > k_{n-1}\} \quad \text{pour tout } n \geqslant 1. \end{cases}$$

Par définition, la suite $(k_n)_{k\geqslant 0}$ est strictement croissante ; et pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{k_n}(i))_{n\geqslant i}$ est extraite de la suite $(u_k(i))_{k\in\Lambda_i}$. Donc $u_{k_n} \xrightarrow{n\to\infty} a_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a bien trouvé une sous-suite (u_{k_n}) de (u_k) qui converge coordonnée par coordonnée. □

Remarque. La méthode utilisée dans la preuve qu'on vient de faire porte le nom de **procédé diagonal**. Le principe général est le suivant : si $(\Lambda_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties infinies de $\mathbb{N}$, alors il existe un ensemble infini Λ qui est “presque contenu” dans chacun des Λ_i, au sens où $\Lambda\backslash\Lambda_i$ est fini pour tout $i \in \mathbb{N}$. On dit qu'un tel ensemble Λ “diagonalise” la suite (Λ_i).

Corollaire 5.2. *Soit I un ensemble non-vide, F un espace vectoriel normé* de dimension finie *et $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications de I dans F. On suppose que la suite (f_k) est* ***simplement bornée*** *: pour tout $t \in I$ fixé, la suite $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ est bornée dans F. Enfin, soit $D \subseteq I$ un ensemble dénombrable. Alors la suite (f_k) possède une sous-suite (f_{k_n}) qui converge simplement sur D, i.e. $\forall z \in D \;:\; f_{k_n}(z) \to \xi_z \in F$.*

Démonstration. Par hypothèse, on a pour tout $z \in D$ une constante $M_z < \infty$ telle que $\forall k \in \mathbb{N} \quad \|f_k(z)\| \leqslant M_z$. Donc, pour tout $z \in D$, la suite $(f_k(z))_{k\in\mathbb{N}}$ vit dans l'ensemble $K_z := \overline{B}(0, M_z)$, qui est un *compact* de F car $\dim(F) < \infty$. Donc, si on pose $u_k := (f_k(z))_{z\in D}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, on obtient une suite (u_k) d'éléments de $K := \prod_{z\in D} K_z$. Par le théorème, la suite (u_k) possède une sous-suite (u_{k_n}) qui converge coordonnée par coordonnée ; ce qui est exactement la conclusion annoncée. □

Comme illustration du théorème précédent, on va démontrer un cas particulier du **Théorème d'Ascoli**.

Exemple. Soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues, $f_k : [a, b] \to \mathbb{C}$. On suppose que la suite (f_k) est simplement bornée, et qu'il existe une constante C telle que toutes les f_k soient C - lipschitziennes. Alors la suite (f_k) possède une sous-suite (f_{k_n}) qui converge uniformément sur $[a, b]$.

Démonstration. Soit D un ensemble dénombrable dense dans $[a,b]$, par exemple $D := \mathbb{Q} \cap [a,b]$. Par le Corollaire 5.2 appliqué avec $F := \mathbb{C}$, la suite (f_k) posède une sous-suite (f_{k_n}) qui converge simplement sur D, $f_{k_n}(z) \to \xi_z$ pour tout $z \in D$. On va montrer que cette sous-suite (f_{k_n}) converge uniformément sur $[a,b]$. Dans la suite, on posera $g_n := f_{k_n}$.

Montrons d'abord que la suite (g_n) converge *simplement* sur $[a,b]$. Pour cela, il suffit de montrer que pour tout $t \in [a,b]$, la suite numérique $(g_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie le critère de Cauchy. Soit $\varepsilon > 0$. Comme D est dense dans $[a,b]$, on peut trouver $z \in D$ tel que $|z-t| \leqslant \varepsilon$. Alors $|g_n(t)-g_n(z)| \leqslant C\,\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque g_n est C - lipschitzienne. Ensuite, on peut choisir un entier N tel que $\forall n \geqslant N \;:\; |g_n(z) - \xi_z| \leqslant \varepsilon$. Alors $|g_n(t) - \xi_z| \leqslant (1 + C)\varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$, et donc $|g_q(t) - g_p(t)| \leqslant 2(C + 1)\varepsilon$ pour tous $p, q \geqslant N$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire et que C ne dépend pas de ε, le critère de Cauchy est donc bien vérifiée. Dans la suite, on posera $g(t) := \lim g_n(t)$ pour tout $t \in [a,b]$.

Montrons maintenant que la suite (g_n) converge *uniformément* vers g sur $[a,b]$. Soit $\varepsilon > 0$. Choissons une subdivision $S = (s_0,\dots,s_K)$ de $[a,b]$ de “pas” inférieur à ε. Comme il n'y a qu'un nombre fini de points s_i, on peut trouver $N \in \mathbb{N}$ tel que $|g_n(s_k) - g(s_k)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$ et pour $k = 0,\dots,K$. Soit maintenant $t \in [a,b]$ quelconque, et choisissons $k \in [\![0,K]\!]$ tel que $|t-s_k| \leqslant \varepsilon$, ce qui est possible par définition de la subdivision S. Comme les g_n sont C - lipschitziennes, on a $|g_n(t) - g_n(s_k)| \leqslant C\varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $|g(t) - g(s_k)| \leqslant C\varepsilon$ en faisant $n \to \infty$. On en déduit que

$$\begin{aligned}\forall n \geqslant N \;:\; |g_n(t) - g(t)| &\leqslant |g_n(t) - g_n(s_k)| + |g_n(s_k) - g(s_k)| + |g(s_k) - g(t)|\\ &\leqslant C\varepsilon + \varepsilon + C\varepsilon = (2C + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Comme l'entier N ne dépend pas de $t \in [a,b]$, cela montre que la convergence de $g_n(t)$ vers $g(t)$ est bien uniforme sur $[a,b]$. □

6. Propriété de Borel-Lebesgue

Définition 6.1. *Soit E un espace métrique. Un* ***recouvrement ouvert de*** *E est une famille $(O_i)_{i\in I}$ d'ouverts de E telle que $\bigcup_{i\in I} O_i = E$.*

Exemple. Pour tout $x \in E$, choisissons un nombre $r_x > 0$ et posons $B_x := B(x, r_x)$. Alors la famille $(B_x)_{x\in E}$ est un recouvrement ouvert de E.

Théorème 6.2. *Pour un espace métrique K, les choses suivantes sont équivalentes.*

(1) *K est compact.*

(2) *Tout recouvrement ouvert de K possède un* ***sous-recouvrement fini*** *; autrement dit : pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i\in I}$ de K, on peut trouver $i_1,\dots,i_N \in I$ tels que $O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_N} = K$.*

Remarque. La propriété (2) s'appelle la **propriété de Borel-Lebesgue**. C'est elle qui est utilisé pour *définir* la compacité dans le cadre des espaces topologiques généraux : un espace topologique E est dit compact s'il est séparé et s'il possède la propriété de Borel-Lebesgue.

Corollaire 6.3. *Soit E un espace métrique. Pour un ensemble $K \subseteq E$, les choses suivantes sont équivalentes.*

(a) *K est compact.*

(b) *Pour toute famille* $(V_i)_{i\in I}$ *d'ouverts* de E *telle que* $\bigcup_{i\in I} V_i \supseteq K$, *on peut trouver* $i_1, \dots, i_N \in I$ *tels que* $V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_N} \supseteq K$.

Démonstration. C'est clair par le théorème, puisque les ouverts *de* K sont exactement les ensembles de la forme $O = V \cap K$ où V est un ouvert *de* E. □

Comme en s'en doute, la preuve du Théorème 6.2 consiste à démontrer deux implications ; dont l'une se trouve être plus simple que l'autre.

Preuve de l'implication (2) $\implies$ (1). C'est la partie "facile" du théorème. Supposons (2) vérifiée. D'après la Remarque 3.3, pour montrer que K est compact il suffit de montrer que si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non-vides de K, alors $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$; ou de manière équivalente : que si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés de K telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \varnothing$, alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $C_N = \varnothing$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $O_n := K \backslash C_n$. Les O_n sont des ouverts de K ; et comme $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n = \varnothing$, on a $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n = K$. Ainsi, la famille $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de K. Par (2), on peut donc trouver $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tels que $K = O_{n_1} \cup \dots \cup O_{n_r}$. Mais la suite (O_n) est croissante car la suite (C_n) est décroissante. Donc, si on pose $N := \max(n_1, \dots, n_r)$, alors $O_{n_1} \cup \dots \cup O_{n_r} = O_N$. Ainsi, on a $O_N = E$; autrement dit $C_N = \varnothing$. □

La preuve de l'implication (1) $\implies$ (2) est plus délicate. On va utiliser les deux lemmes suivants.

Lemme 6.4. *Soit* K *un espace métrique compact. Pour tout* $\varepsilon > 0$, *on peut trouver* $a_N, \dots, a_N \in K$ *tels que* $\bigcup_{j=1}^N B(a_j, \varepsilon) = K$.

Démonstration. Supposons que la conclusion annoncée soit fausse pour un certain $\varepsilon > 0$. Soit $u_0 \in K$ quelconque. On a $K \neq B(u_0, \varepsilon)$ par hypothèse, donc on peut trouver $u_1 \in K$ tel que $u_1 \notin B(u_0, \varepsilon)$, *i.e.* $d(u_1, u_0) \geqslant \varepsilon$. De même, on a $B(u_0, \varepsilon) \cup B(u_1, \varepsilon) \neq K$, donc on peut trouver $u_2 \in K$ tel que $u_2 \notin B(u_0, \varepsilon) \cup B(u_1, \varepsilon)$, *i.e* $d(u_2, u_0) \geqslant \varepsilon$ et $d(u_2, u_1) \geqslant \varepsilon$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de points de K telle que $\forall k\ \forall j < k\ :\ d(u_k, u_j) \geqslant \varepsilon$. On a ainsi $d(u_k, u_{k'}) \geqslant \varepsilon$ pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq k'$. Donc la suite (u_k) ne possède aucun sous-suite convergente (micro-exo), ce qui contredit la compacité de K. □

Lemme 6.5. (Lemme de Lebesgue)
Soit K *un espace métrique compact. Si* $(O_i)_{i\in I}$ *est un recouvrement ouvert de* K, *alors on peut trouver* $\varepsilon > 0$ *vérifiant la propriété suivante : tout ensemble* $A \subseteq K$ *tel que* $\operatorname{diam}(A) \leqslant \varepsilon$ *est entièrement contenu dans un des ouverts* O_i. *On dit que* ε *est un* ***nombre de Lebesgue*** *pour le recouvrement ouvert* $(O_i)_{i\in I}$.

Démonstration. Supposons que la conclusion annoncée soit fausse. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble $A_\varepsilon \subseteq K$ tel que $\operatorname{diam}(A_\varepsilon) \leqslant \varepsilon$ mais A_ε n'est contenu dans aucun des ouvert O_i. En prenant $\varepsilon := 1/k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et en posant $B_k := A_{1/k}$, on obtient ainsi une suite (B_k) de parties de K telle que B_k n'est contenu dans aucun O_i et $\operatorname{diam}(B_k) \to 0$ quand $k \to \infty$.

Les B_k sont en particulier non-vides, donc on peut choisir un point $u_k \in B_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme K est compact la suite (u_k) possède une sous-suite (u_{k_n}) qui converge vers un point $a \in K$. Comme $\bigcup_{i\in I} O_i = K$, on peut trouver $i_0 \in I$ tel que $a \in O_{i_0}$; et comme O_{i_0} est ouvert, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq O_{i_0}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_{k_n}, a) < \varepsilon/2$ et $\mathrm{diam}(B_{k_n}) < \varepsilon/2$. Alors $B_{k_n} \subseteq B(a, \varepsilon)$ d'après l'inégalité triangulaire (si $u \in B_{k_n}$, alors $d(u, a) \leqslant d(u, u_{k_n}) + d(u_{k_n}, a) \leqslant \mathrm{diam}(B_{k_n}) + d(u_{k_n}, a) < \varepsilon$). Donc $B_{k_n} \subseteq O_{i_0}$, ce qui pose problème puisque B_{k_n} est censé n'être contenu dans aucun O_i. □

On peut maintenant terminer la preuve du Théorème 6.2.

Preuve de l'implication (1) $\implies$ (2). Supposons que l'espace métrique K soit compact, et montrons qu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K. Par le Lemme 6.5, on peut choisir un nombre de Lebesgue $\varepsilon > 0$ pour le recouvrement (O_i). Par le Lemme 6.4, on peut ensuite trouver $a_1, \ldots, a_N \in K$ tels que $K = B(a_1, \varepsilon/2) \cup \cdots \cup B(a_N, \varepsilon/2)$. Alors les boules $B_k := B(a_k, \varepsilon/2)$ vérifient $\mathrm{diam}(B_k) \leqslant 2\varepsilon/2 = \varepsilon$; donc, par définition de ε, on peut trouver $i_1, \ldots, i_N$ tels que $B_k \subseteq O_{i_k}$ pour $k = 1, \ldots, N$. On a alors $K = O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_N}$, ce qui termine la preuve. □

Exemple 1. Compacité de $[a, b]$.

Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$; montrons que $[a, b]$ possède la propriété de Borel-Lebesgue. Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de $[a, b]$: on veut montrer que $[a, b]$ peut être “recouvert” par un nombre fini de O_i. Notons E l'ensemble des points $x \in [a, b]$ tel que l'intervalle $[a, x]$ peut être recouvert par un nombre fini de O_i. L'ensemble E est non-vide car il contient évidemment a (micro-exo), et E est majoré par b. Donc on peut poser $c := \sup E$. On va montrer que $c \in E$, puis que $c = b$; ce qui prouvera ce qu'on veut.

Observons d'abord que $c > a$: en effet, si on choisit $i_a \in I$ tel que $a \in O_{i_a}$ alors, comme O_{i_a} est un ouvert de $[a, b]$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $[a, a + \delta] \subseteq O_{i_a}$; on a ainsi $a + \delta \in E$, et donc $c \geqslant a + \delta$. Soit $i_c \in I$ tel que $c \in O_{i_c}$. Comme $c > a$ et comme O_{i_c} est un ouvert de $[a, b]$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $[c - \varepsilon, c] \subseteq O_{i_c}$. Par définition de c, on peut ensuite trouver c' tel que $c - \varepsilon < c' \leqslant c$ et $c' \in E$. Alors $[a, c']$ peut être recouvert par un nombre fini de O_i, et $[c', c]$ aussi puisque $[c', c] \subseteq [c - \varepsilon, c] \subseteq O_{i_c}$; donc $[a, c]$ peut être recouvert par un nombre fini de O_i, *i.e.* $c \in E$. Si on avait $c < b$, alors, comme O_{i_c} est un ouvert de $[a, b]$, on pourrait trouver $c'' > c$ tel que $[c, c''] \subseteq O_{i_c}$; et comme on sait maintenant que $c \in E$, on en déduirait comme plus haut que $c'' \in E$, en contradiction avec la définition de c.

Exemple 2. Image continue d'un compact.

Soit $f : E \to F$ une application continue entre deux espaces métriques E et F, et soit K un compact de E. Montrons que $f(K)$ est compact en utilisant la propri'eté de Borel-Lebesgue. Soit $(V_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts de F telle que $\bigcup_{i \in I} V_i \supseteq f(K)$: on veut montrer qu'il existe $i_1, \ldots, i_N \in I$ tels que $f(K) \subseteq V_{i_1} \cup \cdots V_{i_N}$. Si on pose $O_i := f^{-1}(V_i)$, alors les O_i sont des ouverts de E car f est continue, et $\bigcup_{i \in I} O_i \supseteq K$ (micro-exo). Comme K est compact, on peut donc trouver $i_1, \ldots, i_N \in I$ tels que $K \subseteq O_{i_1} \cup \cdots \cup O_{i_N}$. Alors $f(K) \subseteq f(O_{i_1}) \cup \cdots \cup f(O_{i_N}) \subseteq V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_N}$.

Exemple 3. Soit F un espace vectoriel normé, et soit $[a, b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Si $f : [a, b] \to F$ est une fonction possédant une limite à gauche et une limite à droite et une limite à gauche en tout point $t \in [a, b]$, alors f est limite uniforme de fonctions en escalier.

Démonstration. Il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $\varphi : [a,b] \to F$ en escalier telle que $\|\varphi(t) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [a,b]$. On fixe donc $\varepsilon > 0$. Dans ce qui suit, on notera $f(t^+)$ et $f(t^-)$ les limites à droite et à gauche de f en un point $t \in [a,b]$ (donc $f(a^-) = f(a)$ et $f(b^+) = f(b)$).

Par hypothèse sur f on peut, pour tout $x \in [a,b]$, choisir un intervalle ouvert $I_x \ni x$ tel que

$$\forall t \in I_x \cap [a,b] \ : \ \begin{cases} \|f(t) - f(x^-)\| \leqslant \varepsilon/2 & \text{si } t < x, \\ \|f(t) - f(x^+)\| \leqslant \varepsilon/2 & \text{si } t > x. \end{cases}$$

Comme $[a,b]$ est compact, on peut trouver un nombre fini de points $x_1, \dots, x_N$ tels que $[a,b] \subseteq I_{x_1} \cup \cdots \cup I_{x_N}$. Soit alors $S = (s_0, \dots, s_K)$ la subdivision de $[a,b]$ obtenue en prenant les points a et b, les points $x_1, \dots, x_N$, et les extrémités des intervalles $I_{x_1}, \dots, I_{x_N}$ qui appartiennent à $[a,b]$. Cette subdivision possède la propriété suivante : pour tout $k \in [\![0, K-1]\!]$, il existe un $l \in [\![1, N]\!]$ tel que $]a_k, a_{k+1}[$ est contenu dans I_{x_l} et entièrement à gauche ou entièrement à droite de x_l. (Le point a_k appartient à I_{x_l} pour un certain l ; donc a_k est inférieur à l'extrémité droite de I_{x_l} ; donc a_{k+1} ne peut pas être plus grand que cette extrémité droite par le choix de la subdivision S et donc $]a_k, a_{k+1}[\subseteq I_{x_l}$. Si $a_k < x_l$, alors $a_{k+1} \leqslant x_l$ par le choix de la subdivision S et donc $]a_k, a_{k+1}[$ est entièrement à gauche de x_l ; et si $a_k \geqslant x_l$, alors $]a_k, a_{k+1}[$ est entièrement à droite de x_l.) Par définition des intervalles I_x, on en déduit que si $k \in [\![0, K-1]\!]$, alors

$$\forall s, t \in [a_k, a_{k+1}] \ : \ \|f(s) - f(t)\| \leqslant \varepsilon.$$

Choisissons alors un point $s_k \in]a_k, a_{k+1}[$ pour $k = 0, \dots, K-1$, et soit $\varphi : [a,b] \to F$ la fonction définie comme suit :

$$\varphi(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si } t = a_k \text{ pour un certain } k, \\ f(s_k) & \text{si } t \in]a_k, a_{k+1}[\text{ pour un certain } k. \end{cases}$$

Par définition, φ est en escalier ; et on a tout fait pour assurer que $\|\varphi(t) - f(t)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [a,b]$ □

Exemple 4. Soit E un espace topologique séparé. Si K et L sont deux compacts de E, tels que $K \cap L = \varnothing$, alors on peut séparer K et L par des ouverts : il existe des ouverts U, V tels que $K \subseteq U$, $L \subseteq V$ et $U \cap V = \varnothing$.

Démonstration. Fixons $x \in K$. Comme E est séparé et $x \notin L$, on peut, pour tout $y \in L$, trouver un voisinage ouvert $U_{x,y}$ de x et un voisinage ouvert $V_{y,x}$ de y tels que $U_{x,y} \cap V_{y,x} = \varnothing$. Alors $L \subseteq \bigcup_{y \in L} V_{y,x}$, donc, par compacité, on peut trouver $y_1, \dots, y_N$ tels que $L \subseteq V_{y_1,x} \cup \cdots \cup V_{y_N,x}$. Si on pose maintenant $U_x := U_{x,y_1} \cap \cdots \cap U_{x,y_N}$ et $V_x = V_{y_1,x} \cup \cdots \cup V_{y_N,x}$, alors U_x est un voisinage ouvert de x, V_x est un ouvert contenant L, et $U_x \cap V_x = \varnothing$ (vérifier soigneusement).

Maintenant, on fait varier x dans K : comme $\bigcup_{x \in K} U_x \supseteq K$, on peut trouver $x_1, \dots, x_M$ tels que $U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_M} \supseteq K$. Alors $U := U_{x_1} \cup \cdots \cup U_{x_M}$ et $V := V_{x_1} \cap \cdots V_{x_M}$ sont ouverts et ont les propriétés requises. □

Exercice 1. Soit E un espace métrique. Montrer en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue que tout compact de E est fermé dans E ; et que si l'espace E est compact, alors tout fermé de E est compact.

Exercice 2. Soit E un espace métrique. Montrer en utilisant la propriété de Borel-Lebesgue que toute réunion finie de compacts de E est un compact.

Exercice 3. Montrer en utilisant le Lemme de Lebesgue que toute fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue.

Exercice 4. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Montrer que si $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles ouverts telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \supseteq I$, alors $|I| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |I_k|$.

6.1. Précompacité. Le lemme 6.4 a mis en évidence une propriété intéressante des espaces métriques compacts.

Définition 6.6. *Soit (E,d) un espace métrique. On dit que E est **précompact** (on dit aussi : **totalement borné**) si, pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut recouvrir E par un nombre fini de boules ouvertes de rayon ε, i.e. on peut trouver $a_1, \dots, a_N \in E$ tels que $E = B(a_1,\varepsilon) \cup \cdots \cup B(a_N,\varepsilon)$.*

Remarque. Il revient au même de dire que : pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut recouvrir E par un nombre fini d'*ensembles* de diamètres $\leqslant \varepsilon$, *i.e.* on peut trouver des ensembles $Z_1, \dots, Z_N \subseteq E$ tels que $\mathrm{diam}(Z_i) \leqslant \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, N$ et $E = Z_1 \cup \cdots \cup Z_N$.

Démonstration. Il suffit d'observer qu'un ensemble de diamètre $< \varepsilon$ est contenu dans une boule ouverte de rayon ε, et qu'une boule ouverte de rayon ε est de diamètre $\leqslant 2\varepsilon$. □

Exemple 1. Tout espace métrique compact est précompact.

Exemple 2. Tout intervalle borné $I \subseteq \mathbb{R}$ est précompact.

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$, on peut subdiviser I en un nombre fini d'intervalles de longueur $\leqslant \varepsilon$. □

Fait 6.7. *Soit E un espace métrique.*

1. *Si E est précompact, alors tout ensemble $A \subseteq E$ est précompact.*
2. *Tout ensemble* relativement compact *$A \subseteq E$ est précompact.*
3. *Si E est un espace vectoriel normé, alors tout ensemble précompact $A \subseteq E$ est borné.*
4. *Si E est un evn* de dimension finie, *alors les parties précompactes de E sont exactement les ensembles bornés.*

Démonstration. (1) est laissé en exo (utiliser des ensembles de diamètre $\leqslant \varepsilon$ plutôt que des boules).

(2) découle de (1) : si $\overline{A}$ est compact, alors $\overline{A}$ est précompact, et donc A est précompact puisque $A \subseteq \overline{A}$.

(3) est évident ; et (4) découle de (2), de (3), et du fait que les ensembles bornés sont relativement compacts quand on est en dimension finie. □

Fait 6.8. *Pour un espace métrique E, les choses suivantes sont équivalentes.*

(i) E n'est pas *précompact ;*

(ii) *il existe $\varepsilon > 0$ et une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ tels que $d(u_k, u_{k'}) \geqslant \varepsilon$ pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq k'$. (On dit qu'une telle suite (u_k) est ε-**séparée**.)*

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Supposons que E ne soit pas précompact. Il existe alors un $\varepsilon > 0$ tel que E ne puisse pas être recouvert par une nombre fini de boules ouvertes de rayon ε. Soit $u_0 \in E$ quelconque. Comme $E \neq B(u_0, \varepsilon)$, on peut trouver $u_1 \in E$ tel que $u_1 \notin B(u_0, \varepsilon)$, *i.e.* $d(u_1, u_0) \geqslant \varepsilon$. Ensuite, comme $E \neq B(u_0, \varepsilon) \cup B(u_1, \varepsilon)$, on peut trouver $u_2 \in E$ tel que $d(u_2, u_0) \geqslant \varepsilon$ et $d(u_2, u_1) \geqslant \varepsilon$. En continuant ainsi, on construit par récurrence une suite $(u_k)_{k\geqslant 0} \subseteq E$ telle que $\forall k \geqslant 1\ \forall i < k\ :\ d(u_k, u_i) \geqslant \varepsilon$. Cette suite (u_k) montre que (ii) est vérifiée.

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons (ii) vérifiée avec témoins $\varepsilon > 0$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Alors, par l'inégalité triangulaire, deux u_k d'indices différents ne peuvent pas être contenus dans une même boule ouverte de rayon $\varepsilon/2$. Comme il y a une infinité d'indices $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que E ne peut pas être recouvert par une nombre fini de boules ouvertes de rayon $\varepsilon/2$ (micro-exo) ; donc E n'est pas précompact. □

Conséquence. Si E est un espace vectoriel normé de dimension infinie, alors la boule unité de E n'est pas précompacte.

Démonstration. C'est ce que dit le Théorème de Riesz (Théorème 1.7). □

Définition 6.9. *Soit (E, d) un espace métrique. Étant donné $\varepsilon > 0$, on dit qu'un ensemble $\Lambda \subseteq E$ est un ε*-***réseau*** *de E si tout point de E peut être "approché à ε près" par un point de Λ ; autrement dit : $\forall u \in E\ \exists z \in \Lambda\ :\ d(z, u) < \varepsilon$.*

Remarque. Un espace métrique est précompact si et seulement si, pour tout $\varepsilon > 0$, il possède un ε-réseau fini.

Exemple 1. Soit $E := \mathbb{R}^2$ muni de la distance euclidienne. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\Lambda := \varepsilon\mathbb{Z}^2 = \{(\varepsilon n, \varepsilon m);\ (n; m) \in \mathbb{Z}^2\}$ est un ε-réseau pour E.

Démonstration. En faisant un dessin on voit que pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, on peut trouver $z \in \Lambda$ tel que $d(z, u) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}\,\varepsilon < \varepsilon$. □

Exemple 2. Soit (E, d) un espace métrique. Si $D \subseteq E$ est *dense* dans E, alors D est un ε-réseau de E pour tout $\varepsilon > 0$.

Proposition 6.10. *Pour un espace métrique (E, d), les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(a) *E est séparable.*

(b) *Pour tout $\varepsilon > 0$, E possède un ε-réseau dénombrable.*

Démonstration. L'implication (a) $\Longrightarrow$ (b) est évidente d'après l'Exemple 2 ci-dessus (on peut même prendre le *même* ε-réseau dénombrable pour tous les $\varepsilon > 0$, à savoir n'importe quel ensemble dénombrable dense $D \subseteq E$). Inversement, supposons (b) vérifiée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, choisissons un 2^{-n}-réseau dénombrable $\Lambda_n \subseteq E$. Alors $D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Lambda_n$ est dénombrable, et on vérifie sans difficulté que D est dense dans E (exo). Donc E est séparable. □

Corollaire 6.11. *Tout espace métrique précompact est séparable.*

Chapitre 5

Connexité

1. Espaces métriques connexes

DÉFINITION 1.1. *Un espace métrique E est dit* ***connexe*** *si les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées dans E sont $\varnothing$ et E.*

Remarque 1. Cette définition a un sens pour tout espace topologique E.

Remarque 2. On dit qu'une partie non-vide M d'un espace métrique E est une **partie connexe de** E si M est connexe pour la topologie induite ; autrement dit, si les seules parties de M à la fois ouvertes et fermées *dans M* sont $\varnothing$ et M. On convient également que $\varnothing$ est un ensemble connexe.

Le fait suivant donne plusieurs reformulations de la notion de connexité ; en particulier, (iii) et (iii') signifient intuitivement qu'un espace métrique est connexe si et seulement si il est "d'un seul tenant". Petit point vocabulaire : dans tout ce chapitre, on appellera **partition** d'un ensemble E toute famille $(A_i)_{i\in I}$ de parties de E deux à deux disjointes telle que $\bigcup_{i\in I} A_i = E$. (On n'exige pas que les A_i soient *non-vides*.)

FAIT 1.2. *Pour un espace métrique E, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) *E est connexe.*
- (ii) *Pour tout $A \subseteq E$ tel que $A \neq \varnothing$ et $A \neq E$, on a $\partial A \neq \varnothing$.*
- (iii) *Il n'est* pas possible *de partitionner E en deux ouverts non-vides.*
- (iii') *Il n'est pas possible de partitionner E en deux fermés non-vides.*
- (iv) *Il n'est pas possible de partitionner E en un nombre fini $N \geqslant 2$ d'ouverts non-vides.*
- (iv') *Il n'est pas possible de partitionner E en un nombre fini $N \geqslant 2$ de fermés non-vides.*

Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) vient du fait que si $A \subseteq E$, alors

$$A \text{ est ouvert et fermé} \iff \partial A = \varnothing.$$

(En effet, comme $\partial A = \overline{A}\setminus\mathring{A}$ et $\mathring{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$, on a $\partial A = \varnothing$ si et seulement $\overline{A} = A = \mathring{A}$, ce qui signifie exactement que A est ouvert et fermé.) On voit ainsi que (ii) est simplement la *contraposée* de (i).

L'équivalence de (i) et (iii) est claire également : E est non connexe si et seulement si il existe un ensemble $A \subseteq E$ tel que A et $E\setminus A$ sont tous les deux ouverts et non-vides, ce qui signifie qu'il existe une partition (O_1, O_2) de E en deux ouverts non-vides.

L'équivalence de (iii) et (iii') est elle aussi immédiate : si (A, B) est une partition de E, alors $A = E\setminus B$; donc A et B sont tous les deux ouverts si et seulement si ils sont tous les deux fermés.

Il est évident que (iv) entraine (ii). Inversement, si E se partitionne en ouverts non-vides $O_1, O_2, \dots, O_N$, alors O_1 et $O_2' := O_2 \cup \dots \cup O_N$ forment une partition de E en 2 ouverts non-vides. Ainsi, (ii) et (iv) sont équivalentes.

Enfin, l'équivalence de (iv) et (iv') est laissée en exo. $\square$

Exercice. Montrer que E est connexe si et seulement si la propriété suivante a lieu : si $A, B \subseteq E$ sont non-vides et vérifient $A \cup B = E$, alors $\overline{A} \cap B \neq \varnothing$ ou $A \cap \overline{B} \neq \varnothing$.

Exemple 1. Si E est un espace métrique, alors tout singleton $\{a\} \subseteq E$ est connexe.

Démonstration. Exo. $\square$

Exemple 2. Si E est un espace métrique *topologiquement discret*, alors les seules parties connexes de E sont $\varnothing$ et les singletons ; et donc E n'est pas connexe s'il contient au moins 2 points. En particulier, un espace métrique *fini* contenant au moins 2 points n'est pas connexe.

Démonstration. Si $M \subseteq E$ est non-vide et si on choisit $a \in M$, alors $\{a\}$ et $M \backslash \{a\}$ forment une partition de M, ils sont tous les deux *ouverts* dans M car M est topologiquement discret. Si de plus M contient au moins deux points, alors $\{a\}$ et $M \backslash \{a\}$ sont tous les deux non-vides, donc M n'est pas connexe. $\square$

Exemple 3. $M :=]0,1] \cup [3,\infty[$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}$.

Démonstration. Si on pose $O_1 :=]0,1]$ et $O_2 :=]3,\infty[$, alors O_1 et O_2 sont des *ouverts de* M (car par exemple $O_1 = M \cap]-\infty, 2[$ et O_2 est même ouvert dans $\mathbb{R}$), qui sont non-vides et forment une partition de M. $\square$

Exemple 4. $M := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy \neq 1\}$ n'est pas une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration. Si on pose $O_1 := \{(x,y);\ xy > 1\}$ et $O_2 := \{(x,y);\ xy < 1\}$, alors O_1 et O_2 sont des ouverts de $\mathbb{R}^2$, donc de M, ils sont non-vides (micro-exo) et forment une partition de M. On peut également (c'est même bien plus convaincant) faire un dessin et constater que M se partitionne naturellement en 3 ouverts non-vides. $\square$

Exercice. Dessiner M et les ensembles O_1 et O_2 introduits dans la preuve.

Exemple 5. $GL_N(\mathbb{R})$ n'est pas une partie connexe de $M_N(\mathbb{R})$.

Démonstration. Si on pose $O^+ = \{M;\ \det(M) > 0\}$ et $O^- := \{M;\ \det(M) < 0\}$, alors O^+ et O^- sont des ouverts de $M_N(\mathbb{R})$ par continuité du déterminant, ils sont non-vides (micro-exo), et ils forment une partition de $GL_N(\mathbb{R})$. $\square$

L'exemple suivant particulièrement important.

Théorème 1.3. *Les parties connexes de* $\mathbb{R}$ *sont les* intervalles.

Démonstration. On aura besoin de la caractérisation suivante des intervalles.

Fait. Un ensemble $M \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$\forall x, y \in M \text{ tels que } x < y, \text{ on a }]x,y[\subseteq M\,. \tag{1.1}$$

Preuve du Fait. Tout intervalle satisfait évidemment (1.1).

Inversement, supposons que (1.1) soit vérifiée. Posons $a := \inf M$ (qui existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) et $b := \sup M$ (qui existe dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Il suffit de montrer que l'intervalle $]a,b[$ est contenu dans M. En effet, comme $M \subseteq [a,b]$ par définition de a et b, cela entrainera que M est égal à $]a,b[$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $[a,b]$ et donc que M est un intervalle.

Soit $z \in]a, b[$ quelconque. Par définition de a et b, on peut trouver $x, y \in M$ tels que $a < x < z$ et $z < y < b$. Alors $z \in]x, y[$, et donc $z \in M$ par (1.1). □

On peut maintenant passer à la preuve du théorème proprement dite.

(i) Montrons qu'une partie connexe de $\mathbb{R}$ est nécessairement un intervalle. Soit $M \subseteq \mathbb{R}$, et supposons que M *ne soit pas* un intervalle. Par le fait, on peut alors trouver $x, y \in A$ avec $x < y$ tel que $]x, y[$ n'est pas contenu dans A ; autrement dit, il existe $z \notin A$ tel que $x < z < y$. On a alors $A \subseteq]-\infty, z[\cup]z, \infty[$, donc les ensembles $O_1 := A \cap]-\infty, z[$ et $O_2 := A \cap]z, \infty[$ forment une partition de A. De plus, O_1 et O_2 sont des ouverts de A, et ils sont non-vides car $x \in O_1$ et $y \in O_2$. Donc A n'est pas connexe.

(ii) Montrons maintenant que tout intervalle est connexe. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, que l'on peut supposer non-vide et non réduit à un point. Par l'absurde, on suppose que I n'est pas connexe ; soit donc A une partie de I à la fois ouverte et fermée dans I, avec $A \neq \emptyset$ et $I \backslash A \neq \emptyset$.

Choisissons un point $a \in A$ et un point $b \in I \backslash A$, en supposant par exemple que $a < b$. Alors $[a, b] \subseteq I$ car I est un intervalle.

Posons $\alpha := \sup\big(A \cap [a, b]\big)$. Alors $\alpha \in \overline{A \cap [a, b]}$. Mais $A \cap [a, b]$ est un fermé de $[a, b]$ car A est un fermé de I et $[a, b] \subseteq I$; donc $A \cap [a, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$ car $[a, b]$ est fermé dans $\mathbb{R}$, et donc $\alpha \in A \cap [a, b]$. Comme $b \notin A$, on en déduit que $\alpha < b$.

Posons maintenant $\beta := \inf\big((I \backslash A) \cap [\alpha, b]\big)$. Alors, comme précédemment, $\beta \in (I \backslash A) \cap [\alpha, b]$ car $(I \backslash A) \cap [\alpha, b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$. En particulier, $\beta > \alpha$ puisque $\alpha \in A$.

Par définition de α, aucun point de $A \cap [a, b]$ ne peut être strictement supérieur à α ; et par définition de β, aucun point de $(I \backslash A) \cap [\alpha, b]$ ne peut être strictement inférieur à β. Donc, si on choisit z vérifiant $\alpha < z < \beta$, alors z ne peut appartenir ni à A, ni à $I \backslash A$; ce qui est absurde puisque $z \in [a, b]$ et donc en particulier $z \in I$. On a ainsi obtenu la contradiction souhaitée. □

Pour conclure cette section, voici un résultat parfois utile, qui permet d'éviter de se torturer l'esprit avec des questions de topologie induite.

PROPOSITION 1.4. *Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. Les propriétés suivantes ont équivalentes.*

(1) *M n'est pas connexe.*

(2) *On peut trouver V_1 et V_2 ouverts* dans E *tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $M \subseteq V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap M \neq \emptyset$, $V_2 \cap M \neq \emptyset$.*

Démonstration. Supposons (2) vérifiée. Alors $O_1 := V_1 \cap M$ et $O_2 := V_2 \cap M$ sont des ouverts non-vides de M formant une partition de M ; donc M n'est pas connexe.

Inversement, supposons que M ne soit pas connexe. On peut donc partitionner M en deux fermés non-vides C_1, C_2. Posons alors $V_1 := \{x \in E;\ \mathrm{dist}(x, C_1) < \mathrm{dist}(x, C_2)\}$ et $V_2 := \{x \in E;\ \mathrm{dist}(x, C_2) < \mathrm{dist}(x, C_1)\}$. Les ensembles V_1 et V_2 sont des ouverts de E, et il est évident que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

FAIT. On a $C_1 \subseteq V_1$ et $C_2 \subseteq V_2$.

Preuve du Fait. Soit $x \in C_1$ quelconque. On a évidemment $\mathrm{dist}(x, C_1) = 0$. De plus $x \notin C_2$ puisque $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, et donc $x \notin \overline{C_2}^M$ puisque C_2 est fermé dans M. Comme $\overline{C_2}^M = \overline{C_2} \cap M$ et $x \in M$, on en déduit que $x \notin \overline{C_2}$, et donc $\mathrm{dist}(x, C_2) > 0 = \mathrm{dist}(x, C_1)$. Ainsi, $x \in V_1$. On montre de même que $C_2 \subseteq V_2$. □

Par le Fait, on voit que $V_1 \cap M$ et $V_2 \cap M$ sont non-vides et que $M = C_1 \cup C_2 \subseteq V_1 \cup V_2$, ce qui termine la preuve de l'implication (1) $\implies$ (2). ☐

Remarque. La moitié de ce résultat est spécifique aux espaces métriques : l'implication (1) $\implies$ (2) est fausse pour un espace topologique E général. L'implication (2) $\implies$ (1) est en revanche vraie dans tout espace topologique.

Exercice. Montrer que la Proposition 1.4 est vraie si on suppose que E est un espace topologique séparé et que M est compact au sens de Borel-Lebesgue. (Utiliser un exemple d'utilisation de la propriété de Borel-Lebesgue donné au Chapitre 4.)

2. Connexité et applications continues

2.1. Une autre caractérisation de la connexité. Comme on le verra plus loin, la remarque suivante est très souvent utile.

LEMME 2.1. *Pour un espace métrique E, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *E est connexe.*

(2) *Toute application continue de E dans l'espace à 2 éléments $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète est constante.*

Démonstration. Pour tout ensemble $A \subseteq E$, on notera $\mathbf{1}_A$ la **fonction indicatrice** de A, qui est l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Toutes les applications de E dans $\{0, 1\}$ sont des fonctions indicatrices (une application $f : E \to \{0, 1\}$ est la fonction indicatrice de $A := \{x;\ f(x) = 1\}$). De plus, il est évident que $\mathbf{1}_A$ est constante si et seulement si $A = \varnothing$ ou E.

FAIT. $\mathbf{1}_A$ est continue si et seulement si A est ouvert et fermé dans E.

Preuve du Fait. On a $A = \mathbf{1}_A^{-1}(\{1\})$, et $\{1\}$ est ouvert et fermé dans $\{0, 1\}$. Donc, si $\mathbf{1}_A$ est continue, alors A est ouvert et fermé dans E. Inversement, supposons que A soit ouvert et fermé dans E. Comme les seules parties de $\{0, 1\}$ sont $\varnothing$, $\{1\}$, $\{0\}$ et $\{0, 1\}$, on voit que pour tout ensemble $V \subseteq \{0, 1\}$, on a $\mathbf{1}_A^{-1}(V) = \varnothing$, A, $E \backslash A$ ou E. Ces ensembles sont tous ouverts dans E puisque A est ouvert et fermé, donc $\mathbf{1}_A$ est continue. ☐

La preuve du lemme est maintenant immédiate : par le Fait, E est non connexe si et seulement si il existe un ensemble $A \subseteq E$ tel que $\mathbf{1}_A$ soit continue et non constante, ce qui revient à dire qu'il existe une application continue non constante f de E dans $\{0, 1\}$. ☐

2.2. Applications localement constantes.

DÉFINITION 2.2. *Soient E et Z deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \to Z$ est **localement constante** si, pour tout point $a \in E$, on peut trouver un voisinage V de a dans E tel que f soit constante sur V.*

Exemple 1. L'application $f : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) = 6$ si $t \in [0, 1]$ et $f(t) = 214$ si $t \in [2, 3]$ est localement constante.

Démonstration. Exo. ☐

Exemple 2. Si l'espace Z est *topologiquement discret* (par exemple, si Z est *fini*), alors toute application *continue* $f : E \to Z$ est localement constante.

Démonstration. Soit $a \in E$ quelconque, et soit $b := f(a)$. Comme Z est topologiquement discret, $\{b\}$ est un ouvert de Z. Donc, par continuité de f, l'ensemble $V := f^{-1}(\{b\})$ est un voisinage ouvert de a, sur lequel f est constante par définition. □

Exercice. Montrer que toute application localement constante est continue.

Au vu de l'Exemple 2 ci-dessus, le lemme suivant généralise le Lemme 2.1. La signification de ce résultat est que la connexité permet de "passer du local au global".

Lemme 2.3. *Si E est un espace métrique* connexe*, alors toute application localement constante $f : E \to Z$ est constante.*

Démonstration. Soit $f : E \to Z$ localement constante, et soit $a \in E$ fixé. Soit aussi $b := f(a)$.

Comme f est localement constante, elle est continue ; donc l'ensemble $A := f^{-1}(\{b\})$ est un *fermé* de E. Bien entendu, A est non-vide puisque $a \in A$.

Montrons que A est également *ouvert* dans E. Soit $x \in A$ quelconque. Comme f est localement constante, on peut trouver un voisinage ouvert V de x tel que f est constante sur V. La valeur constante de f sur V est nécessairement égale à b puisque $f(x) = b$; donc $V \subseteq f^{-1}(\{b\})$, *i.e.* $V \subseteq A$. Comme $x \in A$ est quelconque, cela montre que A est ouvert.

En conclusion : l'ensemble A est ouvert, fermé et non-vide. Donc $A = E$ par connexité de E ; autrement dit, f est constante égale à b. □

Corollaire 2.4. *Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^N$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une fonction différentiable telle que $Df(x) = 0$ pour tout $x \in U$, alors f est constante.*

Démonstration. Il suffit de montrer que f est localement constante. Choisissons n'importe quelle norme sur $\mathbb{R}^N$. Soit $a \in U$, et soit $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset U$. Pour tout $x \in B(a, r)$, le segment $[a, x]$ est contenu dans $B(a, r)$ puisque $B(a, r)$ est convexe, donc $[a, x] \subset U$. Comme $Df = 0$ sur U, on en déduit, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, qu'on a $\|f(x) - f(a)\| = 0$, *i.e.* $f(x) = f(a)$, pour tout $x \in B(a, r)$. Donc f est localement constante. □

Corollaire 2.5. *Si E est connexe, alors toute application continue f de E dans un espace topologiquement discret Z est constante. En particulier, toute application continue sur E et ne prenant qu'un nombre* fini *de valeurs est constante.*

Comme illustration, on va démontrer le résultat suivant. Rappelons d'abord que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors tout nombre complexe $z \neq 0$ possède des racines n-ièmes dans $\mathbb{C}$; en fait, exactement n racines n-ièmes.

Proposition 2.6. *Si n est un entier $\geqslant 2$, il n'existe pas de "fonction racine n-ième" continue sur le cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. Autrement dit, il n'existe pas d'application continue $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telle que $\phi(z)^n = z$ pour tout $z \in \mathbb{T}$.*

Démonstration. Supposons qu'une telle racine n-ieme continue $\phi : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ existe, et essayons d'obtenir une contradiction.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(t) := e^{-i\frac{t}{n}}\, \phi(e^{it}).$$

On a par définition

$$f(t)^n = e^{-ni\frac{t}{n}}\,\phi(e^{it})^n = e^{-it}e^{it} = 1$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc f prend ses valeurs dans l'ensemble *fini* $Z := \{z \in \mathbb{C};\ z^n = 1\}$. De plus, la fonction f est continue car ϕ l'est. Comme $\mathbb{R}$ est connexe, on en déduit que f est *constante*. En particulier, $f(0) = f(2\pi)$.

Cependant, $f(0) = \phi(1)$ et $f(2\pi) = e^{-i\frac{2\pi}{n}}\phi(e^{i2\pi}) = e^{-i\frac{2\pi}{n}}\phi(1)$. Comme $\phi(1) \neq 0$ (car $\phi(1)^n = 1$) et $e^{-i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ (car $n \geqslant 2$), on en déduit $f(0) \neq f(2\pi)$, ce qui est la contradiction souhaitée. □

2.3. Image continue d'un connexe. Bien que très facile à démontrer, le résultat suivant est absolument essentiel.

Théorème 2.7. *Soient E et F deux espaces métriques. Si $f : E \to F$ est une application continue, alors f change les connexes en connexes : pour tout ensemble connexe $C \subseteq E$, l'ensemble $f(C)$ est connexe.*

Démonstration. Quitte à remplacer E par C et F par $f(C)$, on peut supposer que E lui même est connexe et que f est *surjective.* Il s'agit alors de montrer que $F = f(E)$ est connexe.

Si A est une partie ouverte et fermée de F, alors $f^{-1}(A)$ est ouvert et fermé dans E car f est continue. Comme E est connexe, on a donc $f^{-1}(A) = \varnothing$ ou $f^{-1}(A) = E$. Mais $A = f(f^{-1}(A))$ car f est surjective. Donc, ou bien $A = f(\varnothing) = \varnothing$, ou bien $A = f(E) = F$. Cela prouve que F est connexe. □

Comme conséquence immédiate de ce résultat, on obtient le "Théorème des valeurs intermédiaires" :

Corollaire 2.8. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue et si $a, b \in I$ avec $a \leqslant b$, alors f prend dans l'intervalle $[a, b]$ toutes les valeurs entre $f(a)$ et $f(b)$.*

Démonstration. Comme l'intervalle $[a, b]$ est connexe, l'ensemble $f([a, b])$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, donc un intervalle ; et donc $f([a, b])$ contient tous les nombres compris entre $f(a)$ et $f(b)$. □

Voici une autre conséquence, un peu inattendue.

Corollaire 2.9. *Si (E, d) est un espace métrique connexe contenant au moins 2 points, alors E est* non dénombrable.

Démonstration. Choisissons $a, b \in E$ avec $a \neq b$, et soit $\delta := d(a, b)$. La fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := d(a, x)$ est continue ; donc $f(E)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ car E est supposé connexe. Comme $f(a) = 0$ et $f(b) = \delta$, on en déduit que $f(E)$ contient l'intervalle $[0, \delta]$. Donc $f(E)$ n'est pas dénombrable car $[0, \delta]$ ne l'est pas ; et donc E non plus puisque $f(E) = \{f(x);\ x \in E\}$ s'énumère à l'aide de E. □

Remarque. Ce résultat est spécifique aux espaces métriques. Bien que cela soit difficile à croire, il existe des espaces topologiques séparés, dénombrables (infinis) et cependant connexes. (Si on n'exige pas que l'espace soit séparé, c'est évident : prendre $E := \mathbb{N}$ avec la topologie "grossière" $\{\varnothing, E\}$.)

Corollaire 2.10. *Soient E et F deux espaces métriques, avec E connexe. Si $f : E \to F$ est une application continue telle que $f(E)$ est* dénombrable, *alors f est constante.*

Démonstration. C'est évident par le corollaire précédent : $f(E)$ est connexe, non-vide et dénombrable, donc réduit à un point. □

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ est connexe.

Exercice 2. Soit E un espace métrique connexe, et soient $f, g : E \to \mathbb{C}$ deux fonctions continues ne s'annulant pas. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que $f(x)^n = g(x)^n$, et que f et g prennent la même valeur en au moins 1 point $x_0 \in E$. Montrer que $f = g$.

Exercice 3. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. Montrer qu'il n'existe aucune fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(D) \subseteq \mathbb{R} \backslash D$ et $f(\mathbb{R} \backslash D) \subseteq D$. (Commencer par montrer qu'une telle f doit nécessairement être constante.)

3. Connexité par arcs

3.1. Chemins et courbes.

Définition 3.1. *Soit E un espace métrique. Un* ***chemin dans*** *E est une application continue $\gamma : [a, b] \to E$, où $[a, b]$ est un segment de $\mathbb{R}$. L'****image*** *de γ est l'ensemble $\gamma([a, b]) \subseteq E$. Une* ***courbe dans*** *E est un ensemble $\Gamma \subseteq E$ qui est l'image d'un chemin $\gamma : [a, b] \to E$.*

Remarque 1. Si $M \subseteq E$, un *chemin dans M* est donc un chemin $\gamma : [a, b] \to E$ tel que $\gamma([a, b]) \subseteq M$; et une *courbe dans M* est une courbe $\Gamma \subseteq E$ entièrement contenue dans M.

Remarque 2. Par définition, une courbe est un ensemble *compact* et *connexe.*

Remarque 3. Si $u, v \in E$, on dira qu'une courbe $\Gamma \subseteq E$ **relie u à v dans E** si Γ est l'image d'un chemin $\gamma : [a, b] \to E$ tel que $\gamma(a) = u$ et $\gamma(b) = v$.

Intuitivement (et si on fait un dessin dans le plan) une courbe reliant u à v est une "ligne continue" partant de u et aboutissant à v. La ligne a le droit d'être très biscornue, de se recouper très souvent... ; mais elle doit rester "continue" : il ne peut pas y avoir de "coupure". (Tout cela n'a évidemment pas grand sens.)

Exercice. Montrer que si $\Gamma \subseteq E$ est une courbe reliant u à v, alors Γ relie v à u.

Exemple 3.2. Soit E un espace vectoriel normé, et soient $u, v \in E$. On définit $\gamma : [0, 1] \to E$ par $\gamma(t) := (1 - t)u + tv$. Alors γ est un chemin affine dont l'image est le segment $[u, v] \subseteq E$. En particulier, $[u, v]$ est une courbe reliant u à v dans E.

Exercice. Montrer que si $\Gamma \subseteq E$ est une courbe reliant u à v, alors il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \to E$ (l'intervalle de définition est $[0, 1]$) d'image Γ tel que $\gamma(0) = u$ et $\gamma(1) = v$.

Le lemme suivant est très utile. Comme il est intuitivement évident, on l'utilisera sans y faire explicitement référence ; mais il demande quand même une preuve.

Lemme 3.3. *Soit E un espace métrique, et soit $u, v, w \in E$. Si $\Gamma_1 \subseteq E$ est une courbe reliant u à v dans E, et si $\Gamma_2 \subseteq E$ est une courbe reliant v à w, alors $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$* est une courbe*, qui relie u à w.*

Démonstration. D'après l'exercice posé quelques lignes plus haut, on peut trouver deux chemins $\gamma_{u,v}, \gamma_{v,w} : [0,1] \to E$ d'images respectives Γ_1, Γ_2 tels que $\gamma_{u,v}(0) = u$, $\gamma_{u,v}(1) = v = \gamma_{v,w}(0)$ et $\gamma_{v,w}(1) = w$. Alors l'application $\gamma : [0,1] \to E$ définie par $\gamma(t) := \gamma_{u,v}(2t)$ si $t \in [0,1/2]$ et $\gamma(t) := \gamma_{v,w}(2t-1)$ si $t \in [1/2,1]$ est bien définie et continue. Autrement dit γ est un chemin dans E, d'image $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec $\gamma(0) = \gamma_{u,v}(0) = u$ et $\gamma(1) = \gamma_{v,w}(1) = w$. Donc $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est bien une courbe reliant u à w dans E. $\square$

Exercice. Montrer qu'on définit une *relation d'équivalence* $\mathcal{R}$ sur E en déclarant que $u\mathcal{R}v$ si et seulement si il existe une courbe reliant u à v dans E.

Le résultat suivant porte parfois le nom de **Lemme du passage des douanes**.

PROPOSITION 3.4. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. Si $\gamma : [a,b] \to E$ est un chemin tel que $\gamma(a) \in A$ et $\gamma(b) \in E\backslash A$, alors il existe au moins un $t \in [a,b]$ tel que $\gamma(t) \in \partial A$. De manière équivalente, si $\Gamma \subseteq E$ est un courbe reliant un point de A à un point de $E\backslash A$, alors $\Gamma \cap \partial A \neq \varnothing$.*

Démonstration. Soit $\Gamma \subseteq E$ une courbe reliant un point $u \in A$ à un point $v \in E\backslash A$: il s'agit de voir que Γ contient au moins 1 point de ∂A.

Si $u \notin \mathring{A}$, on a déjà gagné car dans ce cas $u \in A\backslash\mathring{A} \subseteq \partial A$. De même, il n'y a rien à faire si $v \in \overline{A}$ car alors $v \in \overline{A}\backslash A \subseteq \partial A$. Dans la suite, on suppose donc que $u \in \mathring{A}$ et $v \in E\backslash\overline{A}$.

Supposons que $\Gamma \cap \partial A = \varnothing$. Alors, comme $E = \mathring{A} \cup \partial A \cup (E\backslash\overline{A})$, on a $\Gamma \subseteq \mathring{A} \cup (E\backslash\overline{A})$. Donc les ensembles $O_1 := \Gamma \cap \mathring{A}$ et $O_2 := \Gamma \cap (E\backslash\overline{A})$ forment une partition de Γ. De plus, O_1 et O_2 sont des ouverts de Γ car $\mathring{A}$ et $E\backslash\overline{A}$ sont des ouverts de E, et ils sont non-vides car $u \in O_1$ et $v \in O_2$. On en déduit que Γ n'est pas connexe, ce qui est une contradiction. $\square$

COROLLAIRE 3.5. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. S'il existe une courbe $\Gamma \subseteq E$ reliant un point de A à un point de $E\backslash A$, alors $\partial A \neq \varnothing$.*

Démonstration. C'est évident par la proposition. $\square$

3.2. Espaces connexes par arcs.

DÉFINITION 3.6. *Soit E un espace métrique. On dit que E est **connexe par arcs** si, étant donné deux points quelconques $u, v \in E$, il est toujours possible de trouver une courbe Γ reliant u à v dans E.*

Remarque. Comme toujours, une partie M de E est dite connexe par arcs si M est connexe par arcs pour la topologie induite ; autrement dit, si pour tous $u, v \in E$, on peut trouver une courbe $\Gamma \subseteq E$ reliant u à v et *entièrement contenue dans M*.

PROPOSITION 3.7. *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Supposons E connexe par arcs. Il s'agit de montrer que si $A \subseteq E$ est non-vide et différent de E, alors $\partial A \neq \varnothing$. Mais ceci est évident : en choisissant un point $u \in A$ et un point $v \in E\backslash A$, on peut trouver une courbe Γ joignant u à v dans E puisque E est connexe par arcs, et on en déduit que $\partial A \neq \varnothing$ par le Lemme du passage des douanes. $\square$

REMARQUE. On verra plus loin que la réciproque n'est pas vraie : il existe des espaces métriques connexes qui ne sont pas connexes par arcs.

Comme on va le voir, l'intérêt de la connexité par arcs est qu'en pratique, lorsqu'un espace est connexe par arcs il est facile de le vérifier, et *très* facile de s'en convaincre.

Exemple 1. Si E est un espace vectoriel normé, alors tout ensemble *convexe* $M \subseteq E$ est connexe par arcs (et donc connexe).

Démonstration. Si u, v sont deux points quelconques de M, on peut relier u a v par les segment $[u, v]$, qui est entièrement contenu dans M puisque M est convexe. $\square$

Exemple 2. L'ensemble $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ xy < 1\}$ est connexe par arcs (et donc connexe).

Démonstration. C'est clair en faisant un dessin. $\square$

Exemple 3. Si E est un espace vectoriel normé de dimension réelle $\geqslant 2$, alors $E \backslash \{0\}$ et $S_E := \{u \in E;\ \|u\| = 1\}$ sont connexes par arcs (et donc connexes).

Démonstration. (i) Soient $u, v \in E \backslash \{0\}$ quelconques. Si le segment $[u, v]$ ne passe pas par 0, alors $[u, v]$ est une courbe joignant u à v *dans* $E \backslash \{0\}$. Si $[u, v]$ passe par 0, alors u et v sont colinéaires. Comme $\dim(E) \geqslant 2$, on peut trouver $w \in E$ qui n'est colinéaire ni à u ni à v. Alors les segments $[u, w]$ et $[w, v]$ ne passent pas par 0, donc $\Gamma := [u, w] \cup [w, v]$ est une courbe reliant u à v dans $E \backslash \{0\}$.

(ii) Soient maintenant $u, v \in S$ quelconques. Par (i), on peut trouver une courbe Γ_0 reliant u à v dans $E \backslash \{0\}$. Alors $\Gamma := \left\{ \frac{x}{\|x\|};\ x \in \Gamma_0 \right\}$ est une courbe (exo), qui relie u à v *dans* S_E. $\square$

Exercice 1. Montrer que si $Z \subseteq \mathbb{C}$ est un ensemble fini, alors $\mathbb{C} \backslash Z$ est connexe par arcs.

Exercice 2. Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble *dénombrable.*

(i) Soient $u, v \in \mathbb{C} \backslash D$ fixés, et soit Δ la médiatrice de $[u, v]$. Pour tout $p \in \Delta$, on note C_p le cercle de centre p passant par u et v. Observer que si $z \in \mathbb{C} \backslash \{u, v\}$, alors z appartient à au plus 1 cercle C_p ; puis montrer que l'ensemble $\mathcal{D} := \{p \in \Delta;\ C_p \cap D \neq \varnothing\}$ est dénombrable.

(ii) Montrer que $\mathbb{C} \backslash D$ est connexe par arcs.

Exemple 4. $GL_N(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (et donc connexe).

Démonstration. Soient $A, B \in GL_N(\mathbb{C})$ quelconques. On cherche un chemin $\gamma : [a, b] \to GL_N(\mathbb{C})$ tel que $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $P(\lambda) := \det\big((1 - \lambda)A + \lambda B\big)$. Alors P est une fonction polynomiale (micro-exo), et $P \neq 0$ car $P(0) = \det(A) \neq 0$. Donc $Z := \{\lambda \in \mathbb{C};\ P(\lambda) = 0\}$ est un ensemble fini ; en particulier, $\mathbb{C} \backslash Z$ est connexe par arcs (c'est l'Exercice 1 ci-dessus). Comme 0 et 1 appartiennent à $\mathbb{C} \backslash Z$ (car $P(0) = \det(A)$ et $P(1) = \det(B)$), on peut donc trouver un chemin $\lambda : [a, b] \to \mathbb{C} \backslash Z$ tel que $\lambda(a) = 0$ et $\lambda(b) = 1$. Soit alors $\gamma : [a, b] \to M_N(\mathbb{C})$ le chemin défini par $\gamma(t) := (1 - \lambda(t))A + \lambda(t)B$. Comme $\lambda(t) \in \mathbb{C} \backslash Z$, on a $\det(\gamma(t)) = P(\lambda(t)) \neq 0$ pour tout t ; donc γ est un chemin *dans* $GL_N(\mathbb{C})$; et bien sûr $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. $\square$

On a dit plus haut (sans le démontrer) que la connexité n'entraine pas la connexité par arcs. La proposition suivante montre qu'il y a cependant une assez large classe d'espaces pour lesquels les deux notions coïncident.

Définition 3.8. *On dit qu'un espace métrique E est* ***localement connexe par arcs*** *si tout point $a \in E$ possède une* base de voisinages *formée d'ensembles connexes par arcs ; autrement dit, si pour tout voisinage U de a, on peut trouver un voisinage V de a tel que $V \subseteq U$ et V est connexe par arcs.*

Exemple 3.9. Tout espace vectoriel normé est localement connexe par arcs.

Démonstration. Si $a \in E$, alors les boules ouvertes $B(a,r)$, $r > 0$ forment une base de voisinages de a ; et ces boules sont des ensembles *convexes*, donc connexes par arcs. □

Exercice. Montrer que si E est localement connexe par arcs, alors tout ouvert de E est localement connexe par arcs.

Proposition 3.10. *Si E est un espace métrique localement connexe par arcs, alors tout ouvert connexe de E est connexe par arcs.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert connexe de E. On doit montrer que pour tous $u, v \in \Omega$, on peut trouver une courbe $\Gamma \subseteq E$ contenue dans Ω et reliant u à v. Pour cela, on *fixe* un point $u \in \Omega$, et on pose

$$A := \{v \in \Omega;\ \text{il existe une courbe reliant } u \text{ à } v \text{ dans } \Omega\}.$$

L'ensemble A est non-vide car $u \in A$ (le singleton $\{u\}$ est une courbe dans Ω !).

Montrons que A est un *ouvert* de Ω. Soit $v_0 \in A$ quelconque, et soit $\Gamma_{u,v_0} \subseteq \Omega$ une courbe joignant u à v_0. Comme E est localement connexe par arcs et comme Ω est un voisinage ouvert de v_0 dans E, on peut trouver un voisinage V de v_0 connexe par arcs tel que $V \subseteq \Omega$ et V est connexe par arcs. Pour tout point $v \in V$, on peut trouver une courbe $\Gamma_{v_0,v} \subseteq V$ reliant v_0 à v. Alors $\Gamma := \Gamma_{u,v_0} \cup \Gamma_{v_0,v}$ est une courbe contenue dans Ω qui relie u à v ; donc $v \in A$. Ainsi, on a trouvé un voisinage V de v_0 dans E entièrement contenu dans A, ce qui prouve que A est un ouvert de E, et donc de Ω.

Montrons maintenant que A est également un *fermé* de Ω. Soit $v \in \overline{A}^{\Omega} = \overline{A} \cap \Omega$. Comme $v \in \Omega$ et comme E est localement connexe par arcs, on peut trouver un voisinage V de v tel que $V \subseteq \Omega$ et V est connexe par arcs. Comme $v \in \overline{A}$ et que V est un voisinage de v, on peut trouver un point $v_0 \in A$ tel que $v_0 \in V$. Comme V est connexe par arcs, on peut ensuite trouver une courbe $\Gamma_{v_0,v} \subseteq V$ qui relie v_0 à v ; et comme $v_0 \in A$, on peut également trouver une courbe $\Gamma_{u,v_0} \subseteq \Omega$ qui relie u à v_0. Alors $\Gamma := \Gamma_{u,v_0} \cup \Gamma_{v_0,v}$ est une courbe dans Ω qui relie u à v, et donc $v \in A$. Ceci étant vrai pour tout $v \in \overline{A}^{\Omega}$, cela prouve que A est bien un fermé de Ω.

En conclusion, A est non-vide, ouvert et fermé dans Ω. Comme Ω est supposé connexe, on en déduit que $A = \Omega$. Autrement dit, on peut relier u à n'importe quel point $v \in \Omega$ par une courbe contenue dans Ω. Donc Ω est connexe par arcs. □

Corollaire 3.11. *Tout espace métrique connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.*

Démonstration. C'est évident par la proposition. □

Corollaire 3.12. *Tout ouvert connexe d'un* espace vectoriel normé *est connexe par arcs.*

Démonstration. Compte tenu de l'exemple 3.9, c'est à nouveau évident. □

Exercice 1. Soit E un evn. Si $u, v \in E$, appelons **ligne polygonale reliant** u **à** v tout ensemble $\Gamma \subseteq E$ de la forme $\Gamma = [u_0, u_1] \cup \cdots \cup [u_{N-1}, u_N]$, où $u_0 = u$ et $u_N = v$. Montrer que tout ouvert connexe $\Omega \subseteq E$ est "connexe par lignes polygonales" : deux points quelconques $u, v \in \Omega$ peuvent toujours être reliés par une ligne polygonale Γ entièrement contenue dans Ω.

Exercice 2. Soit E un espace métrique, et soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. Montrer que si toutes les classes d'équivalences pour E sont ouvertes, alors elles sont également toutes fermées. En déduire une "autre" preuve du fait que si E est connexe et localement connexe par arcs, alors il est connexe par arcs.

3.3. Un contre-exemple. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \sin(1/x)$, et soit G le graphe de f,

$$G = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0 \text{ et } y = \sin(1/x)\right\}.$$

Comme $\sin(1/x)$ prend toutes les valeurs entre -1 et 1 sur tout intervalle $]0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, il n'est pas difficile de voir (exo) que l'adhérence de G dans $\mathbb{R}^2$ est donnée par

$$\overline{G} = G \cup L \qquad \text{où} \qquad L = \{0\} \times [-1, 1].$$

On va montrer ici que $\overline{G}$ *est une partie connexe de* $\mathbb{R}^2$*, mais n'est pas connexe par arcs.*

De façon générale (voir la section suivante), l'adhérence d'un connexe est toujours un ensemble connexe. Comme G est connexe (c'est l'image de l'intervalle $]0, \infty[$ par l'application continue $x \mapsto (x, \sin(1/x))$, on en déduit que $\overline{G}$ est une partie connexe de $\mathbb{R}^2$.

Montrons maintenant que $\overline{G}$ n'est pas connexe par arcs, ce qui est un peu plus délicat.

On va en fait montrer qu'il n'existe pas de courbe dans $\overline{G}$ reliant $(0, 0)$ (qui appartient à $\overline{G}$) à un point de G. On aura pour cela besoin du fait suivant, où L est le segment $\{0\} \times [-1, 1] = \{(0, y);\ y \in [-1, 1]\}$.

FAIT. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un disque centré en un point $\alpha \in L$ et de rayon $r < 1$. Si C est une partie connexe de $\overline{G} \cap D$ contenant α, alors $C \subseteq L$.

Preuve du Fait. Si C n'est pas contenu dans L, alors $C \cap G \neq \emptyset$, *i.e.* C contient un point $(x_0, f(x_0))$ avec $x_0 > 0$. En notant $\pi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la projection sur l'axe des abscisses, on voit donc que $\pi(C)$ contient 0 (car $\alpha \in C$) et x_0. De plus, $\pi(C)$ est connexe car C est connexe ; donc $\pi(C)$ est un intervalle, et par conséquent $\pi(C)$ contient tout l'intervalle $[0, x_0]$. Comme $C \subseteq \overline{G} \cap D \subseteq L \cup (G \cap D)$ et $\pi(L) = \{0\}$, on en déduit que $\pi(G \cap D)$ contient l'intervalle $]0, x_0]$. Mais en faisant un dessin, on voit de suite que ceci est impossible car D est de rayon strictement inférieur à 1. $\square$

Soit maintenant $\gamma : [a, b] \to \overline{G}$ un chemin quelconque tel que $\gamma(a) = (0, 0)$: on veut montrer que $\gamma(b) \notin G$; et on va en fait prouver que $\gamma([a, b]) \subseteq L$.

Soit $A := \{t \in [a, b)];\ \gamma(t) \in L\}$. Par définition, A est un fermé de $[a, b]$ car L est un fermé de $\mathbb{R}^2$ et γ est continu ; et $A \neq \emptyset$ car $a \in A$. Comme $[a, b]$ est connexe, il suffit donc de vérifier que A est également un *ouvert* de $[a, b]$ pour conclure que $A = [a, b]$, ce qui est le résultat souhaité.

Soit $t_0 \in A$ quelconque. Par continuité de γ, on peut trouver $\delta > 0$ tel que, en posant $I :=]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap [a, b]$, on ait $\gamma(I) \subseteq D := D(\gamma(t_0), 1/2)$. Alors $C := \gamma(I)$ est connexe et contenu dans $\overline{G} \cap D$. Par le Fait (appliqué avec $\alpha := \gamma(t_0)$, qui appartient bien à L puisque $t_0 \in A$), on en déduit que $\gamma(I) \subseteq L$. Ainsi, on a trouvé un voisinage I de t_0 dans $[a,b]$ tel que $\gamma(t) \in L$ pour tout $t \in I$, autrement dit $I \subseteq A$, ce qui prouve que A est un ouvert de $[a,b]$.

En conclusion, on a montré qu'il n'existe aucun chemin $\gamma : [a,b] \to \overline{G}$ tel que $\gamma(a) = (0,0)$ et $\gamma(b) \in G$. Autrement dit, il n'existe aucune courbe dans $\overline{G}$ joignant $(0,0)$ à un point de G ; et donc $\overline{G}$ n'est pas connexe par arcs.

4. Petites propriétés de stabilité

4.1. Adhérence d'un connexe.

PROPOSITION 4.1. *Soit E un espace métrique. Si $A \subseteq E$ est connexe, alors tout ensemble B tel que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ est connexe. En particulier, si A est connexe alors $\overline{A}$ est également connexe.*

Démonstration. On montre que toute application continue $f : B \to \{0,1\}$ est constante. Comme A est connexe et $f_{|A}$ est une application continue de A dans $\{0,1\}$, l'application f est constante sur A. Mais A est *dense* dans B puisque $B \subseteq \overline{A}$; donc f est constante sur B par continuité. □

Exercice. Démontrer cette proposition en utilisant uniquement la définition de la connexité.

Comme illustration, on va démontrer un très joli résultat sur les fonctions dérivées, qu'on appelle habituellement le **Théorème de Darboux**.

THÉORÈME 4.2. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en tout point, alors la fonction f'* vérifie le théorème des valeurs intermédiaires *: pour tout intervalle $J \subseteq I$, $f'(J)$ est un intervalle.*

Remarque. La subtilité vient du fait que la fonction f' *n'est pas nécessairement continue.*

Exercice. Donner un exemple de fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ mais pas de classe $\mathcal{C}^1$.

Preuve du théorème de Darboux. Fixons un intervalle non trivial $J \subseteq I$. Posons

$$\Delta := \{(x,y) \in J \times J;\ x < y\},$$

et définissons $\Phi : \Delta \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(x,y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

L'ensemble Δ est visiblement convexe (c'est un “triangle ouvert”), donc connexe ; et la fonction Φ est continue car f est continue. Donc $\Phi(\Delta)$ est connexe.

FAIT. On a $\Phi(\Delta) \subseteq f'(J) \subseteq \overline{\Phi(\Delta)}$.

Preuve du Fait. Si $(x,y) \in \Delta$, alors $f(y) - f(x) = f'(c)(y-x)$ pour un certain point $c \in]x,y[$ d'après la formule des accroissements finis ; donc $\Phi(x,y) = f'(c) \in f'(J)$.

Inversement, si $t_0 \in J$ alors, en supposant par exemple que t_0 n'est pas la borne de droite de J, on peut trouver une suite $(y_n) \subseteq J$ tendant vers t_0 avec $y_n > t_0$. On a alors

$$f'(t_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(t_0)}{y_n - t_0} = \lim_{n\to\infty} \Phi(t_0, y_n),$$

et donc $f'(t_0) \in \overline{\Phi(\Delta)}$. Ainsi, $f'(J) \subseteq \overline{\Phi(\Delta)}$. Si t_0 est la borne de droite de J, on raisonne de même avec une suite $(x_n) \subseteq J$ telle que $x_n \to t_0$ et $x_n < t_0$ (on a $f'(t_0) = \lim \Phi(x_n, t_0)$ et $(x_n, t_0) \in \Delta$). $\square$

La preuve du théorème est maintenant terminée : par le Fait et la Proposition 4.1, $f'(J)$ est une partie connexe de $\mathbb{R}$, *i.e.* un intervalle. $\square$

Exercice 1. Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a, b]$ avec $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$, alors f atteint son maximum en un point c appartenant à $]a, b[$. En déduire une preuve "directe" du théorème de Darboux.

Exercice 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction *convexe* et dérivable en tout point, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$.

4.2. Réunions de connexes. Une réunion d'ensembles connexes n'a en général aucune raison d'être connexe : par exemple, $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$ n'est pas connexe. Cependant, si ces ensembles connexes sont "reliés les uns aux autres", alors la réunion est connexe :

Proposition 4.3. *Soit E un espace métrique, et soit $(C_i)_{i\in I}$ une famille de parties connexes de E. On suppose que pour tous $i, j \in I$, on peut trouver $i_1, \dots, i_N \in I$ avec $i_1 = i$ et $i_N = j$ tels que $C_{i_k} \cap C_{i_{k+1}} \neq \varnothing$ pour $k = 1, \dots, N-1$. Alors $C := \bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f : C \to \{0, 1\}$ une application continue. Comme les C_i sont connexes, l'application f est constante sur chaque C_i, disons $f(x) \equiv c_i$ sur C_i. Pour montrer que f est constante sur C, il suffit de vérifier que c_i ne dépend en fait pas de i, autrement dit que $c_i = c_j$ pour tous $i, j \in I$.

Soient $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que $i_1 = i$, $i_N = j$ et $C_{i_k} \cap C_{i_{k+1}} \neq \varnothing$ pour $k = 1, \dots, N-1$. Pour $k = 1, \dots, N-1$, l'application f est identiquement égale à c_{i_k} sur C_{i_k} et à $c_{i_{k+1}}$ sur $C_{i_{k+1}}$. Comme $C_{i_k} \cap C_{i_{k+1}} \neq \varnothing$, on a donc $c_{i_k} = c_{i_{k+1}}$ pour $k = 1, \dots, N-1$; d'où $c_i = c_{i_1} = c_{i_2} = \cdots = c_{N-1} = c_{i_N} = c_j$. $\square$

Corollaire 4.4. *Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de parties connexes de E telle que $C_i \cap C_j \neq \varnothing$ pour tous $i, j \in I$, alors $C = \bigcup_{i\in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. C'est évident par la proposition : pour $i, j \in I$ donnés, on peut prendre $N = 2$, $i_1 = i$ et $i_2 = j$. $\square$

Corollaire 4.5. *Si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de parties connexes de E contenant toutes un même ensemble $M \neq \varnothing$, alors $\bigcup_i C_i$ est connexe.*

4.3. Intersections. Une intersection de connexes n'est pas connexe en général (exo). On a cependant le résultat suivant.

Proposition 4.6. *Soit E un espace métrique. Si $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite* décroissante *de* compacts connexes *de E, alors $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est connexe.*

Démonstration. Supposons que K ne soit pas connexe. D'après la Proposition 1.4, on peut alors trouver deux ouverts V_1, V_2 de E tels que $V_1 \cap V_2 = \varnothing$, $K \subseteq V_1 \cup V_2$ et $V_i \cap K \neq \varnothing$ pour $i = 1, 2$. Comme K est contenu dans l'ouvert $V := V_1 \cup V_2$ et est l'intersection de la suite décroissante de compacts (K_n), l'un des K_n est déjà contenu dans V, d'après le théorème des compacts emboîtés. On a donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_N \subseteq V_1 \cup V_2$. Mais V_1 et V_2 sont toujours des ouverts disjoints, et $V_1 \cap K_N$ et $V_2 \cap K_N$ sont non-vides car ils contiennent respectivement $V_1 \cap K$ et $V_2 \cap K$. Par la Proposition 1.4, ceci est absurde car K_N est supposé connexe. $\square$

Exercice 1. Montrer que le résultat est faux si on suppose seulement que les K_n sont *fermés* dans E.

Exercice 2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que E est un espace topologique séparé et que que les K_n sont compacts au sens de Borel-Lebesgue.

4.4. Produits. Pour les produits, il n'y a aucune restriction :

PROPOSITION 4.7. *Si $E_1, \dots, E_N$ sont des espaces métriques connexes, alors $E := E_1 \times \cdots \times E_N$ est connexe.*

Démonstration. Par récurrence, il suffit de le montrer pour le produit de *deux* espaces métriques connexes E_1, E_2.

Soit $f : E_1 \times E_2 \to \{0, 1\}$ une application continue : on veut montrer que f est constante.

Si on fixe un point $u \in E_1$, alors l'application $f_u : E_2 \to \{0, 1\}$ définie par $f_u(v) := f(u, v)$ est continue, donc constante car E_2 est connexe. Donc $f(u, v)$ ne dépend pas de $v \in E_2$.

Mais de même, $f(u, v)$ ne dépend pas non plus de $u \in E_1$. Ainsi, $f(u, v)$ ne dépend ni de u, ni de v ; autrement dit, f est constante. □

Exercice. Montrer que si $E_1, \dots, E_N$ sont connexes par arcs, alors $E_1 \times \cdots \times E_N$ aussi.

5. Composantes connexes

Dans toute cette section, E est un espace métrique.

DÉFINITION 5.1. *Une* ***composante connexe de*** E *est une partie connexe C de E qui est* maximale pour l'inclusion (*il n'existe pas de partie connexe $M \subseteq E$ contenant strictement C*).

EXEMPLE 1. Si E est connexe, il a *exactement une* composante connexe, à savoir $C := E$.

EXEMPLE 2. Si E est *topologiquement discret*, les composantes connexes de E sont les singletons.

Démonstration. C'est clair puisque les parties connexes de E sont $\emptyset$ et les singletons. □

REMARQUE. Les composantes connexes de E sont toujours des parties non-vides et *fermées* de E.

Démonstration. Comme il y a des parties connexes non-vides dans E (tous les singletons), $\emptyset$ n'est pas une partie connexe maximale, *i.e.* pas une composante connexe de E. Si C est une composante connexe, alors $\overline{C}$ est connexe et contient C, donc $\overline{C} = C$ par maximalité de C ; autrement dit, C est un fermé de E. □

LEMME 5.2. *Soit C une composante connexe de E. Si $M \subseteq E$ est connexe et $M \cap C \neq \emptyset$, alors $M \subseteq C$.*

Démonstration. Comme $M \cap C \neq \emptyset$, l'ensemble $C \cup M$ et *connexe* par la Proposition 4.3, et il contient C ; donc $C \cup M = C$ par maximalité de C, *i.e.* $M \subseteq C$. □

LEMME 5.3. *Si $M \subseteq E$ est connexe et non-vide, alors il existe une et une seule composante connexe de E qui contient M. Cette composant connexe est la* plus grande *partie connexe de E contenant M.*

Démonstration. Notons C la réunion de toutes les parties connexes de E contenant M. Alors C contient M car il y a au moins une partie connexe de E qui contient M, à savoir M elle même. De plus, comme $M \neq \varnothing$, on voit que C est connexe d'après la Proposition 4.3. Ainsi, C est la *plus grande* partie connexe de E contenant M. En particulier, C est une partie connexe de E maximale pour l'inclusion, *i.e.* une composante connexe de E. □

REMARQUE 5.4. Pour tout point $a \in E$, on notera $C(a)$ l'unique composante connexe de E contenant a, qui est d'après le Lemme 5.3 la plus grande partie connexe de E contenant a. On dit que $C(a)$ est la **composante connexe de a dans E**.

PROPOSITION 5.5. *Les composantes connexes de E forment une* partition *de E.*

Démonstration. Si C et C' sont deux composantes connexes de E et si $C \cap C' \neq \varnothing$, alors $C' \subseteq C$ et $C \subseteq C'$ d'après le Lemme 5.2, donc $C = C'$; autrement dit, si $C \neq C'$ alors $C \cap C' = \varnothing$. Ainsi, les composantes connexes de E sont deux à deux disjointes. De plus, tout point $a \in E$ appartient à une composante connexe de E, d'après le Lemme 5.3 appliqué à $M := \{a\}$. □

La proposition suivante permet souvent de déterminer très facilement les composantes connexes.

PROPOSITION 5.6. *Soit $(\Omega_i)_{i\in I}$ une famille d'*ouverts connexes *de E. On suppose que les Ω_i sont non-vides et forment une partition de E. Alors les Ω_i sont les composantes connexes de E.*

Démonstration. Remarquons d'abord que les ouverts Ω_i sont également tous *fermés* dans E. Soit en effet $i_0 \in I$. Comme les Ω_i forment une partition de E, on a $E\backslash\Omega_{i_0} = \bigcup_{i\neq i_0} \Omega_i$, et donc $E\backslash\Omega_{i_0}$ est ouvert dans E.

Montrons que les Ω_i sont des composantes connexes de E. Soit $i \in I$ quelconque. Comme Ω_i est connexe, il est contenu dans une composante connexe C d'après le Lemme 5.3. D'après ce qui précède, Ω_i est alors ouvert et fermé *dans C* ; donc $\Omega_i = C$ car C est connexe et $\Omega_i \neq \varnothing$.

Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'autres composantes connexes que les Ω_i. Soit C une composante connexe de E. Comme $C \neq \varnothing$ et $\bigcup_{i\in I} \Omega_i = E$, on peut trouver un i tel que $C \cap \Omega_i \neq \varnothing$; et comme C et Ω_i sont des composantes connexes de E, cela entraine que $C = \Omega_i$ puisque deux composantes connexes distinctes sont nécessairement disjointes d'après la Proposition 5.5. □

La preuve de la Proposition 5.6 a implicitement établi le fait suivant :

FAIT 5.7. *Si $C \subseteq E$ est connexe et si $\Omega \subseteq E$ est ouvert et fermé dans E, alors ou bien $\Omega \cap C = \varnothing$, ou bien $C \subseteq \Omega$.*

Démonstration. C'est clair car $\Omega \cap C$ est ouvert et fermé dans C et C est connexe. □

Exemple 1. Les composantes connexes de $E := [0,1[\cup [2,3]$ sont $[0,1[$ et $[2,3]$. En effet, ces ensembles sont connexes non-vides, ils forment une partition de E, et ils sont également *ouverts* dans E car $[0,1[=]-\infty,1[\cap E$ et $[2,3] =]3/2,\infty[\cap E$.

Exemple 2. Les composantes connexes de $E := \mathbb{C}\backslash\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \neq 1\}$ sont $\Omega_1 := \{z;\ |z| < 1\}$ et $\Omega_2 := \{z;\ |z| > 1\}$. En effet, Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts non-vides de $\mathbb{C}$, donc de E, ils forment une partition de E, et ils sont connexes par arcs (c'est clair pour le disque Ω_1 qui est convexe, et facile à démontrer pour Ω_2).

Exercice. Déterminer les composantes connexes de $E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy \neq 1\}$.

Définition 5.8. *On dit que l'espace métrique E est* localement connexe *si tout point $a \in E$ possède une base de voisinages formée d'ensembles connexes ; autrement dit : pour tout $a \in E$ et pour tout voisinage U de a dans E, on peut trouver un voisinage V de a tel que V est connexe et $V \subseteq U$.*

Exemple. Tout espace localement connexe par arcs est localement connexe. En particulier, tout espace vectoriel normé est localement connexe.

Proposition 5.9. *Si E est localement connexe, alors les composantes connexes de tout ouvert $\Omega \subseteq E$ sont des* ouverts *de E.*

Démonstration. Soit C une composante connexe de Ω, et soit $a \in C$. Comme E est localement connexe et comme Ω est un voisinage ouvert de a dans E, on peut trouver un voisinage V de a tel que V est connexe et $V \subseteq \Omega$. Alors $V \subseteq C$ d'après le Lemme 5.2, car V est une partie connexe de Ω, C est une composante connexe de Ω et $V \cap C \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout point $a \in C$, on peut trouver un voisinage V de a dans E entièrement contenu dans C ; donc C est un ouvert de E. □

Corollaire 5.10. *Si E est localement connexe, alors les composantes connexes de E sont à la fois ouvertes et fermées dans E.*

Corollaire 5.11. *Si E est un* espace vectoriel normé, *alors les composantes connexes de tout ouvert de E sont des ouverts de E.*

Comme illustration de la notion de composante connexe (et de quelques autres faits établis précédemment), on peut maintenant démontrer très facilement le résultat suivant, qui décrit complètement tous les ouverts de $\mathbb{R}$.

Théorème 5.12. *Tout ouvert de $\mathbb{R}$ est réunion dénombrable (éventuellement finie) d'intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}$, et notons $(C_i)_{i\in I}$ la famille des composantes connexes de Ω. Les C_i sont des parties connexes de $\mathbb{R}$, donc des intervalles. De plus, les C_i sont des ouverts de $\mathbb{R}$ car $\mathbb{R}$ est localement connexe ; donc ce sont des *intervalles ouverts*. Enfin, l'ensemble d'indices I est nécessairement dénombrable car $\mathbb{R}$ est un espace métrique *séparable* (*cf* la Proposition 7.11 du Chapitre 3). □

Exercice 1. Soit E un espace métrique, et soit Ω un ouvert de E. Montrer que si C est une composante connexe de Ω, alors $\partial C \subseteq \partial\Omega$.

Exercice 2. Montrer que si $A \subseteq \mathbb{C}$ est borné, alors $\mathbb{C}\backslash A$ a exactement une composante connexe non bornée.

Exercice 3. Soient K et L deux fermés de $\mathbb{C}$. On suppose que $K \subseteq L$ et que $\partial L \subseteq \partial K$. Montrer que L est la réunion de K et des composantes connexes de $\mathbb{C}\backslash K$ qui intersectent L.

6. Espaces bien enchaînés

DÉFINITION 6.1. *Soit (E, d) un espace métrique.*

(1) *Étant donnés $u, v \in E$ et $\varepsilon > 0$, on appelle* **ε-chaîne reliant** *u* **à** *v* **dans** *E toute suite finie $(x_1, \dots, x_N)$ de points de E telle que $x_1 = u$, $x_N = v$ et $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ pour $i = 1, \dots, N-1$.*

(2) *On dit que E est* **bien enchaîné** *si, pour tout $\varepsilon > 0$, deux points quelconques $u, v \in E$ peuvent toujours être reliés par une ε-chaîne.*

Il est important de noter que la notion de ε-chaînes est relative à une distance donnée. Pour autant, elle a beaucoup à voir avec la notion purement topologique de connexité.

PROPOSITION 6.2. *Soit (E, d) un espace métrique, et soit $\varepsilon > 0$. Pour $u \in E$, posons*

$$C_\varepsilon(u) := \{v \in E;\ \textit{il existe une } \varepsilon\textit{-chaîne reliant } u \textit{ à } v\},$$

Alors $C_\varepsilon(u)$ est ouvert et fermé dans E.

Démonstration. (i) Montrons d'abord que $C_\varepsilon(u)$ est un ouvert de E. Soit $v \in C_\varepsilon(u)$ quelconque, et soit $(x_1, \dots, x_N)$ une ε-chaîne reliant u à v. Alors, pour tout $x \in B(v, \varepsilon) = B(x_N, \varepsilon)$, la suite $(x_1, \dots, x_N, x)$ est une ε-chaîne reliant u à x ; et donc $x \in C_\varepsilon(u)$. Ainsi $B(v, \varepsilon) \subseteq C_\varepsilon(u)$ pour tout $v \in C_\varepsilon(u)$, donc $C_\varepsilon(u)$ est un ouvert de E.

(ii) Montrons maintenant que $C_\varepsilon(u)$ est un fermé E. Soit $x \in \overline{C_\varepsilon(u)}$ quelconque. Alors $B(x, \varepsilon) \cap C_\varepsilon(u) \neq \varnothing$. Soit $v \in B(x, \varepsilon) \cap C_\varepsilon(u)$, et soit $(x_1, \dots, x_N)$ une ε-chaîne reliant uà v. Alors $(x_1, \dots, x_N, x)$ est une ε-chaîne reliant u à x puisque $d(x_N, x) = d(v, x) < \varepsilon$; donc $x \in C_\varepsilon(u)$. □

COROLLAIRE 6.3. *Tout espace métrique* connexe *est bien enchaîné.*

Démonstration. Soit $u \in E$ fixé. Pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $C_\varepsilon(u)$ est ouvert, fermé et *non-vide* car $u \in C_\varepsilon(u)$. Comme E est connexe, on a donc $C_\varepsilon(u) = E$; autrement dit, pour tout point $v \in E$, il existe une ε-chaîne reliant u à v. Comme $u \in E$ et $\varepsilon > 0$ sont quelconques, cela montre que E est bien enchaîné. □

La réciproque de la Proposition 6.3 est fausse : par exemple, $\mathbb{Q}$ est bien enchaîné (exo) mais n'est pas connexe. Cependant :

PROPOSITION 6.4. *Un espace métrique* compact *est connexe* si et seulement si *il est bien enchaîné.*

Démonstration. Soit (K, d) un espace métrique compact, et supposons que K ne soit pas connexe : il s'agit de voir que K n'est pas bien enchaîné.

Comme K est non connexe, on peut le partitionner en deux fermés non-vides C_1, C_2. Alors C_1 et C_2 sont *compacts* car K est compact.

Comme $C_1 \cap C_2 = \varnothing$, on a $d(x, x') > 0$ pour tout $x \in C_1$ et pour tout $x' \in C_2$. Comme $C_1 \times C_2$ est compact et comme la fonction $(x, x') \mapsto d(x, x')$ est continue sur $C_1 \times C_2$, on en déduit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\forall (x, x') \in C_1 \times C_2 \ :\ d(x, x') \geqslant \varepsilon\,. \tag{6.1}$$

Fixons maintenant $u \in C_1$ et $v \in C_2$, et supposons qu'il existe une ε-chaîne $(x_1, \dots, x_N)$ reliant u à v dans $K = C_1 \cup C_2$. Comme $x_1 = u \in C_1$, il existe un plus grand indice $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $x := x_i \in C_1$; et comme $x_N = v \notin C_1$, on a $i \leqslant N-1$. Alors $x' := x_{i+1} \notin C_1$ par définition de i, et donc $x' \in C_2$. De plus $d(x,x') = d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ puisque $(x_1, \dots, x_N)$ est une ε-chaîne. On a donc trouvé un point $x \in C_1$ et un point $x' \in C_2$ tels que $d(x,x') < \varepsilon$; ce qui contredit (6.1).

Ainsi, on a montré qu'il n'existe aucune ε-chaîne reliant u à v dans K ; donc K n'est pas bien enchaîné. □

Autre preuve. Soit (K,d) un espace métrique compact bien enchaîné. Pour montrer que K est connexe, il suffit de montrer que toute application continue $f : K \to \{0,1\}$ est constante.

Comme K est compact, l'application f est *uniformément* continue. On peut donc trouver $\delta > 0$ tel que $|f(x) - f(x')| < 1$ pour tous $x, x' \in K$ vérifiant $d(x,x') < \delta$. Comme f est à valeurs dans $\{0,1\}$, on voit ainsi que pour tous $x, x' \in K$,

$$d(x,x') < \delta \implies f(x) = f(x')\,. \tag{6.2}$$

Soient maintenant $u, v \in K$ quelconques. Comme K est bien enchaîné, on peut trouver une δ-chaîne $(x_1, \dots, x_N)$ reliant u à v ; et par (6.2), on en déduit que $f(u) = f(x_1) = f(x_2) = \dots = f(x_{N-1}) = f(x_N) = f(v)$. Ainsi $f(u) = f(v)$ pour tous $u, v \in K$, autrement dit f est constante. □

La Proposition 6.4 peut se généraliser, ce qui donne lieu à quelques conséquences intéressantes. Dans ce qui suit, on dira qu'un espace métrique (K,d) est **ε-enchaîné** (pour un certain $\varepsilon > 0$ *fixé*) si on peut relier deux points quelconques $u, v \in K$ par une ε-chaîne. Ainsi, K est bien enchaîné si et seulement si il est ε-enchaîné pour tout $\varepsilon > 0$.

Proposition 6.5. *Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts dans un espace métrique (E,d). On suppose qu'il existe une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que K_n est ε_n-enchaîné pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $K := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est connexe.*

Démonstration. Supposons que K ne soit pas connexe. Comme dans la preuve de la Proposition 6.4, on peut alors partitionner K en deux compacts non-vides C_1, C_2, puis trouver $\varepsilon > 0$ tel que $d(x,x') \geqslant \varepsilon$ pour tous $x \in C_1$ et $x' \in C_2$.

Si on pose $V_1 := \{x \in E;\ \mathrm{dist}(x, C_1) < \varepsilon/4\}$ et $V_2 := \{x \in E;\ \mathrm{dist}(x, C_2) < \varepsilon/4\}$, alors V_1 et V_2 sont des ouverts de E contenant respectivement C_1 et C_2, et on vérifie facilement (exo utilisant l'inégalité triangulaire) que

$$\forall (v,v') \in V_1 \times V_2 \ :\ d(v,v') \geqslant \varepsilon/2.$$

Comme dans la preuve de la Proposition 6.4, on en déduit qu'il n'existe aucune $(\varepsilon/2)$-chaîne dans $V_1 \cup V_2$ reliant un point $v \in V_1$ à un point $v' \in V_2$. Par conséquent, aucun ensemble $\widetilde{K} \subseteq V_1 \cup V_2$ tel que $\widetilde{K} \cap V_1 \neq \varnothing$ et $\widetilde{K} \cap V_2 \neq \varnothing$ ne peut être $(\varepsilon/2)$-enchaîné.

Cependant, comme $V_1 \cup V_2$ est un ouvert de E et comme $K = C_1 \cup C_2 \subseteq V_1 \cup V_2$, il existe un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_N \subseteq V_1 \cup V_2$, d'après le théorème des compacts emboîtés (exo). Alors $K_n \subseteq V_1 \cup V_2$ pour tout $n \geqslant N$, et $K_n \cap V_i \neq \varnothing$ pour $i = 1, 2$ puisque $K_n \supseteq K$. D'après ce qui précède, aucun K_n, $n \geqslant N$ ne peut être $(\varepsilon/2)$-enchaîné, ce qui est absurde puisque K_n est ε_n-enchaîné et $\varepsilon_n \to 0$. □

Corollaire 6.6. *L'intersection de toute suite décroissante (K_n) de compacts connexes de E est encore connexe.* (Résultat déjà démontré.)

Démonstration. Les K_n sont connexes, donc bien enchaînés ; et donc K_n est 2^{-n}-enchaîné pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où le résultat par la proposition. □

Corollaire 6.7. *Soit* (E,d) *un espace métrique* compact. *Si* (u_k) *est une suite de points de* E *telle que* $d(u_k,u_{k+1})\to 0$ *quand* $k\to\infty$*, alors l'ensemble des valeurs d'adhérence de* E *est connexe.*

Démonstration. Notons K l'ensemble des valeurs d'adhérences de (u_k). Alors
$$K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}K_n,\quad \text{où}\quad K_n=\overline{\{u_k;\ k\geqslant n\}}.$$

Les K_n sont fermés dans E, donc compacts, et la suite (K_n) est décroissante. Pour montrer que K est connexe, il suffit donc de trouver une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que K_n est ε_n - enchaîné pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Par hypothèse sur la suite (u_k), on peut trouver une suite (ε_n) tendant vers 0 telle que $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \varepsilon_n>\sup\{d(u_k,u_{k+1});\ k\geqslant n\}$ (il suffit par exemple de poser $\varepsilon_n:=2^{-n}+\sup\{d(u_k,u_{k+1});\ k\geqslant n\}$). Si $n\in\mathbb{N}$, alors l'ensemble $A_n:=\{u_k;\ k\geqslant n\}$ est ε_n - enchaîné puisque $\varepsilon_n>d(u_k,u_{k+1})$ pour tout $k\geqslant n$ (micro-exo). Comme $K_n=\overline{A_n}$, on en déduit que K_n est ε_n - enchaîné (autre exo, facile). □

Corollaire 6.8. *Soit* (E,d) *un espace métrique* compact. *Pour tout point* $a\in E$*, la composante connexe de* a *dans* E *est l'intersection de tous les ouverts fermés de* E *contenant* a*.*

Démonstration. Notons $C(a)$ la composante connexe de a dans E, et $K(a)$ l'intersection de tous les ouverts fermés de E contenant a.

Si Ω est un ouvert fermé de E contenant a, alors $C(a)\cap\Omega\neq\varnothing$ et donc $C(a)\subseteq\Omega$ car $C(a)$ est connexe, d'après le Fait 5.7. Par conséquent, $C(a)\subseteq K(a)$.

Pour l'inclusion inverse, on a besoin du fait suivant (*cf* la Proposition 6.2).

Fait. Pour tout $\varepsilon>0$, l'ensemble $C_\varepsilon(a)$ est ε - enchaîné.

Preuve du Fait. Si u,v sont deux points quelconques de $C_\varepsilon(a)$, on peut trouver une ε - chaîne $(x_1,\dots,x_N)$ joignant u à a et une ε - chaîne $(y_1,\dots,y_M)$ joignant a à v. Alors tous les points x_i,y_j appartiennent à $C_\varepsilon(a)$, donc $(x_1,\dots,x_N=a=y_1,\dots y_M)$ est une ε - chaîne reliant u à v dans $C_\varepsilon(a)$. □

D'après la Proposition 6.2 et par définition de $K(a)$, on a $K(a)\subseteq C_\varepsilon(a)$ pour tout $\varepsilon>0$. Donc, si on choisit une suite décroissante (ε_n) tendant vers 0, on a $K(a)\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_{\varepsilon_n}(a)$. Comme les $K_n:=C_{\varepsilon_n}(a)$ forment une suite décroissante de *compacts* (ils sont fermés dans E par la Proposition 6.2), et comme K_n est ε_n - enchaîné d'après le Fait, l'ensemble $K:=\bigcap_{n\in\mathbb{N}}K_n$ est donc connexe par la Proposition 6.5. Comme de plus K contient a, on en déduit que K est contenu dans $C(a)$ par définition de $C(a)$ (*cf* la Remarque 5.4), et donc $K(a)\subseteq C(a)$. □

Exercice. Soit E un espace métrique compact. Montrer que si $W\subseteq E$ est un ouvert fermé non-vide, alors W est réunion d'un nombre fini de composantes connexes de E. En déduire que la famille des ouverts fermés de E est dénombrable.

Chapitre 6

Espaces complets

1. Définitions et exemples

1.1. Suites de Cauchy, espaces complets.

DÉFINITION 1.1. *Soit (E, d) un espace métrique, et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit que (u_k) est une* ***suite de Cauchy*** *si $d(u_p, u_q) \to 0$ quand $p, q \to \infty$. Avec des quantificateurs : (u_k) est de Cauchy si et seulement si*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K \in \mathbb{N} \textit{ tel que } \forall p, q \geqslant K \ :\ d(u_p, u_q) \leqslant \varepsilon.$$

REMARQUE 1. Toute suite *convergente* est de Cauchy.

Démonstration. Si $u_k \to a$, alors $d(u_p, u_q) \leqslant d(u_p, a) + d(a, u_q) \xrightarrow{p,q\to\infty} 0$. □

REMARQUE 2. Dans un espace vectoriel normé, toute suite de Cauchy est *bornée.*

Démonstration. Soit (u_k) une suite de Cauchy dans un evn $(E, \|\cdot\|)$. Si on applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon := 6$, on obtient un entier K tel que

$$\forall p, q \geqslant K \ :\ \|u_q - u_p\| \leqslant 6.$$

On a alors $\forall k \geqslant K \ :\ \|u_k\| \leqslant \|u_k - u_K\| + \|u_K\| \leqslant 6 + \|u_K\|$. Donc, si on pose $M := \max(\|u_0\|, \dots, \|u_{K-1}\|, 6 + \|u_K\|)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N} \ :\ \|u_k\| \leqslant M.$$

□

Remarque 3. Les suites de Cauchy restent les mêmes si on remplace la distance d par une distance *Lipschitz-équivalente.* Donc, dans un espace vectoriel de dimension finie, l'expression "suite de Cauchy" a un sens intrinsèque : cela signifie "suite de Cauchy pour n'importe quelle norme".

Démonstration. Exo. □

Le lemme suivant est souvent utile.

LEMME 1.2. *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (E, d). Si (u_k) possède une sous-suite convergente, alors (u_k) est convergente.*

Démonstration. Supposons que (u_k) possède une sous-suite $(u_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in E$, et montrons que $u_k \to a$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_k) est de Cauchy, on peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k, k' \geqslant K \ :\ d(u_k, u_{k'}) \leqslant \varepsilon$. Soit ensuite $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_{n_0} \geqslant K$. On a $k_n \geqslant K$ pour tout $n \geqslant n_0$, donc $\forall k \geqslant K\ \forall n \geqslant n_0 \ :\ d(u_k, u_{k_n}) \leqslant \varepsilon$. Comme $u_{k_n} \to a$ quand $n \to \infty$, on en déduit que $d(u_k, a) \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant K$. □

DÉFINITION 1.3. *On dit qu'un espace métrique* (E, d) *est* ***complet*** *si toute suite de Cauchy de* (E, d) *est convergente dans* E. *Un* espace vectoriel normé *complet s'appelle un* ***espace de Banach***.

EXEMPLE 1. $\mathbb{R}$ est complet pour la distance usuelle : c'est ce que dit le *critère de Cauchy* pour les suites de nombres réels.

Exemple 2. $\mathbb{Q}$ n'est pas complet pour la distance usuelle.

Démonstration. Soit $(r_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers un nombre irrationnel a, par exemple $a := \sqrt{2}$. La suite (r_k) converge dans $\mathbb{R}$, donc elle est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ pour la distance usuelle. Mais (r_k) est une suite de rationnels, donc c'est une suite de Cauchy de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$; et comme $a \notin \mathbb{Q}$, elle ne converge pas *dans* $\mathbb{Q}$. Ainsi, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet. □

1.2. Quatre exemples *très* importants.

EXEMPLE 1. Tout espace métrique *compact* est complet.

Démonstration. Soit (E, d) un espace métrique compact. Si (u_k) est une suite de Cauchy dans (E, d), alors (u_k) possède une sous-suite convergente par compacité, et donc (u_k) est convergente d'après le Lemme 1.2. □

EXEMPLE 2. Tout espace vectoriel normé *de dimension finie* est complet.

Démonstration. Par équivalence des normes en dimension finie, il suffit de montrer que $E := (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ est complet (micro-exo). Soit donc $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. On écrit $u_k = (u_k(1), \dots, u_k(N))$.

Pour $j \in [\![1, N]\!]$ et $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_q(j) - u_p(j)| \leqslant \|u_q - u_p\|_\infty.$$

Donc, pour tout $j \in [\![1, N]\!]$, la suite $(u_k(j))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, qui est complet. Par conséquent, chaque suite $(u_k(j))_{k\in\mathbb{N}}$ converge, $u_k(j) \xrightarrow{k\to\infty} u(j) \in \mathbb{R}$. Si on pose $u := (u(1), \dots, u(N)) \in \mathbb{R}^N$, alors $u_k \to u$ "coordonnée par coordonnée", donc $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi, on a bien montré que toute suite de Cauchy (u_k) converge dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. □

Remarque. Cet exemple montre en particulier que $\mathbb{C}$ est complet pour la distance usuelle ; ce qu'on aurait pu voir directement.

EXEMPLE 3. Si I est un ensemble non-vide quelconque, alors l'espace $\ell^\infty(I)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$. On veut montrer que (f_k) converge dans $\ell^\infty(I)$; autrement dit, qu'il existe une $f \in \ell^\infty(I)$ telle que $\|f_k - f\|_\infty \to 0$. On va faire cela en 3 étapes, ce qui est essentiellement toujours le cas lorsqu'on veut montrer qu'un certain espace est complet.

ÉTAPE 1. Identification d'un "candidat limite".

Pour $t \in I$ fixé et pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_q(t) - f_p(t)| \leqslant \|f_q - f_p\|_\infty \xrightarrow{p,q\to\infty} 0.$$

Donc, pour tout $t \in I$, la suite $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, qui est complet. Par conséquent, pour tout $t \in I$, la suite $(f_k(t))_{k\in\mathbb{N}}$ converge, $f_k(t) \to l_t \in \mathbb{K}$. Si on pose $f(t) := l_t$, on obtient ainsi une fonction $f : I \to \mathbb{K}$ telle

$$\forall t \in I \ : \ f_k(t) \xrightarrow{k\to\infty} f(t).$$

Étape 2. Le candidat limite appartient au bon espace ; *i.e.* $f \in \ell^\infty(I)$.

Il s'agit de voir que la fonction f est bornée. Comme la suite (f_k) est de Cauchy dans $\ell^\infty(I)$, elle est *bornée* dans $\ell^\infty(I)$: on une constante M telle que $\|f_k\|_\infty \leqslant M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; autrement dit

$$\forall k\ \forall t \in I \ : \ |f_k(t)| \leqslant M.$$

En fixant $t \in I$ et en faisant $k \to \infty$, on obtient

$$\forall t \in I \ : \ |f(t)| \leqslant M;$$

donc f est en effet bornée, avec $\|f\|_\infty \leqslant M$.

Étape 3. $f_k \to f$ au sens de la distance considéré ; *i.e.* $\|f_k - f\|_\infty \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme la suite (f_k) est de Cauchy dans $\ell^\infty(I)$, on peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant K \ : \ \|f_q - f_p\|_\infty \leqslant \varepsilon$, *i.e.*

$$\forall p, q \geqslant K\ \forall t \in I \ : \ |f_q(t) - f_p(t)| \leqslant \varepsilon.$$

En fixant $t \in I$, en prenant $q := k \geqslant K$ et en faisant $p \to \infty$, on obtient

$$\forall k \geqslant K\ \forall t \in I \ : \ |f_k(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon;$$

autrement dit $\|f_k - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$ pour tout $k \geqslant K$. On a donc bien montré que $f_k \to f$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. □

Exemple 4. Soient E et F deux evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues $T : E \to F$, muni de sa norme naturelle. Si l'espace d'arrivée F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet. En particulier, pour tout evn E, l'espace $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est complet. (On dit que E^* est le **dual** de l'evn E.)

Démonstration. Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. On veut montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\|T_k - T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \to 0$. Dans la suite, on écrit simplement $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Étape 1. Identification d'un candidat limite.

Pour $u \in E$ fixé pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\|T_q(u) - T_p(u)\| = \|(T_q - T_p)(u)\| \leqslant \|T_q - T_p\|\, \|u\| \xrightarrow{p,q\to\infty} 0.$$

Donc, pour tout $u \in u$, la suite $(T_k(u))_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F, qui est supposé complet. Par conséquent, pour tout $u \in E$, la suite $(T_k(u))_{k\in\mathbb{N}}$ converge, $T_k(u) \to l_u \in F$. Si on pose $T(u) := l_u$, on obtient une application $T : E \to F$ telle

$$\forall u \in E \ : \ T_k(u) \xrightarrow{k\to\infty} T(u).$$

Étape 2. Le candidat limite appartient au bon espace ; *i.e.* $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Il s'agit de montrer que l'application $T : E \to F$ est linéaire et continue. Comme les T_k sont linéaires et que $T_k(u) \to T(u)$ pour tout $u \in E$, on vérifie sans difficulté que T est linéaire (exo). Comme la suite (T_k) est de Cauchy, elle est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$: on a une constante M telle que $\|T_k\| \leqslant M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; autrement dit

$$\forall k \; \forall u \in E \;:\; \|T_k(u)\| \leqslant M \, \|u\|.$$

En fixant $u \in E$ et en faisant $k \to \infty$, on en déduit

$$\forall u \in E \;:\; \|T(u)\| \leqslant M \, \|u\|.$$

Donc l'application linéaire T est continue, avec $\|T\| \leqslant M$.

Étape 3. $T_k \to T$ au sens de la distance considérée, *i.e.* $\|T_k - T\| \to 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (T_k) est de Cauchy, on peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geqslant K \;:\; \|T_q - T_p\| \leqslant \varepsilon$, *i.e.*

$$\forall p, q \geqslant K \; \forall u \in E \;:\; \|(T_q - T_p)(u)\| \leqslant \varepsilon \, \|u\|.$$

En prenant $q := k \geqslant K$ et en faisant $p \to \infty$, on en déduit

$$\forall k \geqslant K \; \forall u \in E \;:\; \|(T_k - T)(u)\| \leqslant \varepsilon \, \|u\|;$$

autrement dit $\forall k \geqslant K \;:\; \|T_k - T\| \leqslant \varepsilon$, par définition de $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{\mathcal{L}(E,F)}$. On a donc bien montré que $\|T_k - T\| \to 0$. □

1.3. Sous-espaces. Si (E, d) est un espace métrique et $M \subseteq E$, on dira que M *est complet pour* d si l'espace métrique $(M, d_{|M \times M})$ est complet.

Proposition 1.4. *Soit (E, d) un espace métrique et soit $M \subseteq E$. Si M est complet pour d, alors M est* fermé *dans E.*

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éments de M telle que $u_k \to u \in E$: il faut voir que $u \in M$. Comme la suite (u_k) converge dans E, c'est une suite de Cauchy, donc une suite de Cauchy dans $(M, d_{|M \times M})$ puisque les u_k appartiennent à M. Comme M est supposé complet pour d, la suite (u_k) converge dans M, *i.e.* $u_k \to u' \in M$. Par unicité de la limite, on a $u' = u$; donc $u \in M$. □

Exemples. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$, $]0, \infty[$, $]0, 1]$ ne sont pas complets pour la distance usuelle (induite par la valeur absolue), car ils ne sont pas fermés dans $\mathbb{R}$.

Corollaire 1.5. *Si E est un espace vectoriel normé quelconque, alors tout sous-espace vectoriel* de dimension finie *$M \subseteq E$ est fermé dans E.*

Démonstration. On a vu que tout evn de dimension finie est complet. □

Proposition 1.6. *Soit (E, d) un espace métrique* complet*, et soit $M \subseteq E$. Si M est fermé dans E, alors M est complet pour d.*

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(M, d_{|M \times M})$. Alors (u_k) est une suite de Cauchy dans (E, d), donc elle converge dans E puisque E est supposé complet : $u_k \to u \in E$. Comme M est fermé dans E, on a $u \in M$; et donc (u_k) converge *dans* M. □

Corollaire 1.7. *Si $[a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors l'espace $\mathcal{C}([a, b])$ est complet pour la norme $\| \cdot \|_\infty$.*

Démonstration. On sait que $\mathcal{C}([a,b])$ est un sous-espace *fermé* de $\ell^\infty([a,b])$, puisque toute limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue. Comme on a vu que $\ell^\infty([a,b])$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on peut donc conclure que $\mathcal{C}([a,b])$ est complet. □

1.4. Produits.

PROPOSITION 1.8. *Soient $(E_1,d_1),\dots,(E_N,d_N)$ des espaces métriques, et soit $E := E_1\times\cdots\times E_N$ muni de la distance produit. Si $E_1,\dots,E_N$ sont complets, alors E aussi.*

Démonstration. Aux notations près, la preuve est identique à celle de la complétude de $(\mathbb{R}^N,\|\cdot\|_\infty)$. On la laisse donc en exo. □

Exercice. Démontrer la réciproque : si $E = E_1\times\cdots\times E_N$ est complet, alors les E_i sont complets.

2. Fermés emboîtés

Le résultat suivant est à comparer au "Théorème des compacts emboîtés" (Lemme 3.1 du Chapitre 4).

LEMME 2.1. (Théorème des fermés emboîtés)
Soit (E,d) un espace métrique complet, et soit $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés non-vides *de E. On fait les hypothèses suivantes :*

(i) *la suite (C_n) est **décroissante** ($C_{n+1}\subseteq C_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$) ;*

(ii) $\mathrm{diam}(C_n)\to 0$ *quand $n\to\infty$.*

Alors on peut conclure que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n$ est non-vide*, et en fait réduite à un point $\{a\}$.*

Démonstration. Comme tous les C_k sont non-vides, on peut *choisir* pour tout $k\in\mathbb{N}$ un point $x_k\in C_k$.

Montrons que la suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy. Si $p,q\in\mathbb{N}$ avec par exemple $p\leqslant q$ alors $x_p\in C_p$, et $x_q\in C_q\subseteq C_p$ car la suite (C_n) est décroissante ; donc $d(x_p,x_q)\leqslant \mathrm{diam}(C_p)$. Ainsi :

$$\forall p,q\in\mathbb{N}\ :\ d(x_p,x_q)\leqslant \mathrm{diam}\big(C_{\min(p,q)}\big)\xrightarrow{p,q\to\infty} 0.$$

Comme E est supposé complet, la suite de Cauchy (x_k) converge, $x_k\to a\in E$. Si $n\in\mathbb{N}$, alors $\forall k\geqslant n\ :\ x_k\in C_k\subseteq C_n$. Comme C_n est supposé fermé dans E on en déduit que $a=\lim x_k\in C_n$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. Ainsi $a\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n$ et donc $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n\neq\varnothing$. Enfin, si $b\in\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n$, alors $d(a,b)\leqslant\mathrm{diam}(C_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ puisque a et b appartiennent à C_n, donc $d(a,b)=0$ puisque $\mathrm{diam}(C_n)\to 0$ quand $n\to\infty$, et donc $b=a$. Ainsi, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n$ est réduite au point $\{a\}$. □

Remarque. Dans le Théorème des fermés emboîtés, la condition sur les diamètres est indispensable pour assurer que l'intersection des C_n est non-vide. Par exemple, si on prend $E:=\mathbb{R}$ et $C_n:=[n,\infty[$, alors E est complet et (C_n) est une suite décroissante de fermés non-vides telle que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}C_n=\varnothing$.

EXEMPLE. Tout espace métrique complet sans points isolés est *non dénombrable.* En particulier, $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable.

Démonstration. La preuve est la même que celle donnée pour $\mathbb{R}$ au Chapitre 3. Soit (E,d) un espace métrique complet. Il s'agit de montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite quelconque de points de E, alors on peut trouver un point $a \in E$ qui est différent de tous les x_n.

Comme E n'a pas de points isolés, il n'est pas réduit à 1 point ; donc on peut trouver $z_0 \in E$ tel que $z_0 \neq x_0$, puis $\varepsilon_0 > 0$ tel que $x_0 \notin \overline{B}(z_0, \varepsilon_0)$; et on peut de plus supposer que $\varepsilon_0 \leqslant 2^{-0}$. Ensuite, comme E n'a toujours pas de points isolés, la boule ouverte $B(z_0, \varepsilon_0)$ n'est pas réduite à 1 point ; donc on peut trouver $z_1 \in B(z_0, \varepsilon_0)$ tel que $z_1 \neq x_1$, puis $\varepsilon_1 > 0$ tel que $x_1 \notin \overline{B}(z_1, \varepsilon_1)$ et $\overline{B}(z_1, \varepsilon_1) \subseteq B(z_0, \varepsilon_0)$, avec de plus $\varepsilon_1 \leqslant 2^{-1}$. Et on continue : par récurrence, on construit une suite décroissante de boules fermées $\overline{B}_n = \overline{B}(z_n, \varepsilon)$ avec $\varepsilon_n \leqslant 2^{-n}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; x_n \notin \overline{B}_n$. Par le Théorème des fermés emboîtés, l'intersection de toutes ces boules $\overline{B}_n$ est non-vide, réduite à un point $\{a\}$; et $a \neq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $a \in \overline{B}_n$ et $x_n \notin \overline{B}_n$. □

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si $B = \overline{B}(x, r)$ et $B' = \overline{B}(x', r')$ sont deux boules fermées de E telle que $B' \subseteq B$, alors $\|x' - x\| \leqslant \frac{1}{2}\, r$. En déduire que si E est complet, alors toute suite décroissante de boules fermées de E a une intersection non-vide.

Exercice 2. On munit $\mathbb{N}$ de la distance d définit comme suit : $d(n,n) := 0$, et $d(n,m) := \alpha_n$ si $n < m$, où $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante telle que $\alpha_k \to \alpha > 0$. Vérifier que d est effectivement une distance, et montrer que $(\mathbb{N}, d)$ est complet ; puis montrer qu'il existe dans $(\mathbb{N}, d)$ une suite décroissante de boules fermées dont l'intersection est vide.

2.1. Projection sur un convexe complet. Pour illustrer Théorème des fermés emboîtés avec un exemple un peu élaboré, on va démontrer le résultat suivant, qui est à la base de toute la théorie des "espaces de Hilbert" (dont on ne parlera pas...).

Théorème 2.2. (Théorème de projection)
*Soit H un espace vectoriel normé **pré-hilbertien**, i.e. dont la norme $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire. Soit également $C \subseteq H$ une partie* convexe*, non-vide et* complète *pour $\|\cdot\|$. Pour tout point $a \in H$, il existe un et un seul point $u \in C$ tel que $\|a - u\| =$* dist(a, C)*. Ce point u s'appelle le **projeté** de a sur le convexe C, et se note en général $p_C(a)$.*

Démonstration. Quitte à remplacer C par $C_a := C - a = \{u - a;\ u \in C\}$ – qui est tout autant convexe et complet que C – on se ramène au cas où $a = 0$. Comme $\mathrm{dist}(0, C) = \inf\{\|u\|;\ u \in C\}$, il s'agit alors de montrer que C possède un et un seul point *de norme minimale.*

Posons $d := \inf\{\|u\|;\ u \in C\}$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$C_n := \left\{u \in C;\ \|u\| \leqslant d + \frac{1}{n}\right\}.$$

Par définition de d, les C_n sont tous non-vides. Ils sont également fermés dans H (exo), et la suite (C_n) est visiblement décroissante. De plus, on a

$$\bigcap_{n\geqslant 1} C_n = \{u \in C;\ \|u\| \leqslant d\} = \{u \in C;\ \|u\| = d\} \quad \text{par définition de } d.$$

Il s'agit donc de montrer que $\bigcap_{n\geqslant 1} C_n$ contient exactement 1 point ; et par le Théorème des fermés emboîtés, il suffit pour cela de vérifier que $\mathrm{diam}(C_n) \to 0$ quand $n \to \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Si $u, v \in C_n$, alors $\frac{u+v}{2} \in C_n$ car C_n est un ensemble *convexe* (exo), et donc $\left\|\frac{u+v}{2}\right\| \geqslant d$. De plus, $\|u\| \leqslant d + \frac{1}{n}$ et $\|v\| \leqslant d + \frac{1}{n}$ par définition de C_n. Enfin, d'après l'*identité du parallèlogramme*, on a

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\|u-v\|^2 &= 2\left(\|u\|^2 + \|v\|^2\right) - \|u+v\|^2 \\ &\leqslant 2\left[\left(d+\frac{1}{n}\right)^2 + \left(d+\frac{1}{n}\right)^2\right] - 4d^2 \\ &= \frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}.\end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tous $u, v \in C_n$, on en déduit

$$\operatorname{diam}(C_n) \leqslant \sqrt{\frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

REMARQUE. Si C est un *sous-espace vectoriel* de H, alors $p_C(a)$ est caractérisé par les propriétés suivantes :

$$p_C(a) \in C \qquad \text{et} \qquad (a - p_C(a)) \perp C.$$

Pour cette raison, on dit que $p_C(a)$ est le **projeté orthogonal** de a sur E.

Démonstration. Comme C est un espace vectoriel, $p_C(a) + tv$ appartient à C pour tout $v \in C$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc, si on fixe $v \in C$, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) := \|p_C(a) + tv - a\|^2$ possède un minimum en $t := 0$ par définition de $p_C(a)$. En développant le produit scalaire, et en supposant par commodité que l'espace H est *réel*, on voit que $f(t) = \|v\|^2\, t^2 + 2\langle p_C(a) - a, v\rangle t + \|p_C(a) - a\|^2$. En particulier, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(0) = 2\langle p_C(a) - a, v\rangle$. On a donc $\langle p_C(a) - a, v\rangle = 0$, pour tout $v \in C$.

Soit u un point de C vérifiant $(u-a) \perp C$: montrons que nécessairement $u = p_C(a)$. Comme C est un espace vectoriel, on a $v - u \in C$ pour tout $v \in C$, et donc $(a-u) \perp (v-u)$. D'après le Théorème de Pythagore, on a donc $\|a - v\| \geqslant \|a - u\|$, pour tout $v \in C$ (faire un dessin) ; et donc $u = p_C(a)$ par "unicité du projeté". □

Dans les trois exercices qui suivent, on garde les notations et les hypothèses du Théorème de projection ; et on suppose que le corps de base est $\mathbb{R}$ par commodité.

Exercice 1. Montrer que si $a \in H$, alors

$$\forall v \in C \ :\ \langle a - p_C(a), v - p_C(a)\rangle \leqslant 0.$$

(Commencer par vérifier que $\gamma(t) := p_C(a) + t(v - p_C(a)) \in C$ pour tout $t \in [0,1]$. En déduire que $f(t) := \|\gamma(t) - a\|^2$ atteint son minimum sur $[0,1]$ au point $t := 0$, et conclure.)

Exercice 2. Montrer que l'application $p_C : H \to C$ est 1 - lipschitzienne. (Étant donné $x, y \in H$, appliquer l'Exercice 1 avec $a := x$, $v := p_C(y)$ et $a := y$, $v := p_C(x)$; puis ajouter les inégalités.)

Exercice 3. Montrer que si C est un sous-espace vectoriel de H, alors l'application p_C est linéaire.

3. Séries normalement convergentes

Définition 3.1. *Soit E un espace vectoriel normé, et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de points de E. On dit que **la série $\sum u_k$ est normalement convergente** si la série à termes positifs $\sum \|u_k\|$ est convergente.*

Exemples. Si $E = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, une série "normalement convergente" d'éléments de E est simplement une série absolument convergente. Si $E = (\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$, une série normalement convergente d'éléments de E est une série de fonctions qui "converge normalement" au sens habituel.

Théorème 3.2. *Dans un espace vectoriel normé E* complet, *toute série normalement convergente est convergente. Autrement dit : si (u_k) est une suite d'éléments de E telle que $\sum_{k=0}^\infty \|u_k\| < \infty$, alors la série $\sum u_k$ converge dans E, i.e. la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{k=0}^n u_k$ converge dans E.*

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème affirmant que toute séries absolument convergente de nombres réels ou complexes est convergente.

Comme E est supposé complet, il suffit de montrer que la suite (S_n) est de Cauchy ; ce qui est facile : si $p, q \in \mathbb{N}$ et $p < q$, alors

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^{q} u_k \right\| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} \|u_k\| \xrightarrow{p,q\to\infty} 0,$$

puisque la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. □

Exercice. Soit (E, d) un espace métrique complet. Montrer que si (x_k) est une suite de points de E telle que la série $\sum d(x_k, x_{k+1})$ est convergente, alors la suite (x_k) converge dans E.

Corollaire 3.3. *Soit E un espace de Banach. Si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1$, alors $Id - H$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, avec*

$$(Id - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k,$$

où la série converge dans $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. La série $\sum H^k$ est normalement convergente, car $\|H^k\| \leqslant \|H\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\|H\| < 1$. Donc la série $\sum H^k$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ car $\mathcal{L}(E)$ est complet, et on peut poser $T := \sum_{k=0}^\infty H^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(Id - H)\sum_{k=0}^n H^k = Id - H^{n+1}$ (micro-exo). Comme $H^{n+1} \to 0$ et comme l'application $X \mapsto (Id - H)X$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$, on en déduit que $(Id - H)T = Id$ en faisant $n \to \infty$. On montre de même que $T(Id - H) = Id$. Donc $Id - H$ est inversible, d'inverse T. □

Exercice. Soit $\mathrm{GL}(E) := \{T \in \mathcal{L}(E);\ T \text{ inversible}\}$. Montrer que $\mathrm{GL}(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

Corollaire 3.4. *Si $A \in M_N(\mathbb{C})$, alors la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge dans $M_N(\mathbb{C})$. La matrice*

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

*s'appelle comme il se doit l'**exponentielle** de la matrice A.*

Démonstration. On a le choix de la norme sur $M_N(\mathbb{C})$ puisqu'on est en dimension finie. On choisit une norme $\|\cdot\|$ subordonnée à une norme quelconque sur $\mathbb{C}^N$. Alors $\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \leqslant \frac{\|A\|^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est normalement convergente car la série $\sum \frac{a^k}{k!}$ converge pour tout $a \in \mathbb{R}$; et donc la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge dans $M_N(\mathbb{C})$ puisque $M_N(\mathbb{C})$ est complet. ☐

EXERCICE. Montrer que si $A, B \in M_N(\mathbb{C})$ vérifient $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

La proposition suivante est une réciproque du Théorème 3.2.

PROPOSITION 3.5. *Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que toute série normalement convergente à termes dans E est convergente. Alors on peut conclure que E est complet.*

Démonstration. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E. Si on applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon := 2^{-n}$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un entier K_n tel que

$$\forall p, q \geqslant K_n \ : \ \|u_q - u_p\| \leqslant 2^{-n}.$$

De plus, on peut supposer que la suite (K_n) est strictement croissante. Si on pose $v_n := u_{K_n}$, on obtient donc une sous-suite (v_n) de (u_k) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \|v_{n+1} - v_n\| = \|u_{K_{n+1}} - u_{K_n}\| \leqslant 2^{-n}.$$

La série $\sum \|v_{n+1} - v_n\|$ est donc convergente ; et donc, par hypothèse sur E, la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge dans E. Comme $v_n = v_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (v_{i+1} - v_i)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la *suite* (v_n) est convergente. Ainsi, on a montré que (u_k) possède une sous-suite convergente. Comme (u_k) est toujours une suite de Cauchy, on peut donc conclure que (u_k) est convergente, d'après le Lemme 1.2 ☐

EXERCICE. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $M \subseteq E$ un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que si E est complet, alors l'espace vectoriel quotient E/M est complet pour la norme quotient. (On rappelle que la norme quotient est définie comme suit : $\|[x]\|_{E/M} = \mathrm{dist}(x, M)$ pour tout $x \in E$.)

3.1. Applications linéaires surjectives. Comme illustration du Théorème 3.2, on va démontrer un résultat donnant un critère de surjectivité pour les applications linéaires continues. Ce critère est très utile ; en particulier, il permet de retrouver le *Théorème de prolongement de Tietze*, qu'on a démontré au Chapitre 3 (Théorème 4.6).

PROPOSITION 3.6. *Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé, et $T : X \to Y$ une application linéaire continue. On suppose qu'il existe deux constantes M et c avec $c < 1$ telles que la chose suivante ait lieu : pour tout $y \in Y$ tel que $\|y\| \leqslant 1$, on peut trouver $x \in X$ tel que $\|x\| \leqslant M$ et $\|T(x) - y\| \leqslant c$. Alors on peut conclure que l'application linéaire T est surjective ; et plus précisément, que pour tout $y \in Y$, on peut trouver $x \in X$ tel que $\|x\| \leqslant \frac{M}{1-c} \|y\|$ et $T(x) = y$.*

Démonstration. Par homogénéité, il suffit de montrer que pour tout $y \in Y$ vérifiant $\|y\| \leqslant 1$, on peut trouver $x \in X$ tel que $\|x\| \leqslant \frac{M}{1-c}$ et $T(x) = y$.

Comme $\|y\| \leqslant 1$, on peut trouver $x_0 \in X$ tel que $\|x_0\| \leqslant M$ et $\|y - T(x_0)\| \leqslant c$. Alors $y_1 := \frac{1}{c}\left(y - T(x_0)\right)$ vérifie $\|y_1\| \leqslant 1$, donc on peut trouver $x_1 \in X$ tel que $\|x_1\| \leqslant M$ et $\|y_1 - T(x_1)\| \leqslant c$; autrement dit, par linéarité de T :

$$\|y - T(x_0 + c\, x_1)\| \leqslant c^2.$$

En continuant ainsi, on construit par récurrence une suite $(x_k)_{k\geqslant 0}\subseteq X$ telle que $\|x_k\|\leqslant M$ pour tout $k\geqslant 0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \|y-T(x_0+c\,x_1+\cdots+c^nx_n)\|\leqslant c^{n+1}.$$

La série $\sum c^kx_k$ est normalement convergente car $\|c^kx_k\|\leqslant M\,c^k$ et $c<1$. Comme X est un espace de Banach, on peut donc poser

$$x:=\sum_{k=0}^{\infty}c^kx_k.$$

On a $\|x\|\leqslant\sum_{k=0}^{\infty}\|c^kx_k\|\leqslant M\sum_{k=0}^{\infty}c^k=\frac{M}{1-c}$; et $T(x)=y$ car T est continue et $c^{n+1}\to 0$. $\square$

Corollaire 3.7. (Théorème de prolongement de Tietze)
Soit E un espace métrique, et soit C un fermé de E. Pour toute fonction continue bornée $f:C\to\mathbb{R}$, on peut trouver une fonction continue bornée $\widetilde{f}:C\to\mathbb{R}$ telle que $\widetilde{f}_{|C}=f$ et $\|\widetilde{f}\|_\infty=\|f\|_\infty$.

Démonstration. Notons $\mathcal{C}_b(E)$ l'espace des fonctions continues bornées sur E, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et considérons l'application linéaire (continue) $T:\mathcal{C}_b(E)\to\mathcal{C}_b(C)$ définie par $T(u):=u_{|C}$. Avec ces notations, il s'agit de voir que pour toute $f\in\mathcal{C}_b(C)$, on peut trouver $\widetilde{f}\in\mathcal{C}_b(E)$ telle que $T(\widetilde{f})=f$ et $\|\widetilde{f}\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$. (On a toujours $\|u\|_\infty\geqslant\|T(u)\|_\infty$.)

Comme $\mathcal{C}_b(E)$ est un espace de Banach (c'est un sous-espace fermé de $l^\infty(E)$), il suffit de montrer la chose suivante : si $f\in\mathcal{C}_b(C)$ vérifie $\|f\|_\infty\leqslant 1$, alors on peut trouver $u\in\mathcal{C}_b(E)$ telle que $\|u\|_\infty\leqslant 1/3$ et $\|T(u)-f\|_\infty\leqslant 2/3$. En effet, si cela est acquis, on pourra appliquer la proposition avec $M:=1/3$ et $c:=2/3$ (noter que $\frac{1/3}{1-2/3}=1$).

Soit donc $f\in\mathcal{C}_b(C)$ vérifiant $\|f\|_\infty\leqslant 1$, *i.e.* $-1\leqslant f(z)\leqslant 1$ pour tout $z\in C$. Posons $A:=\{x\in C;\ f(z)\geqslant 1/3\}$ et $B:=\{z\in C;\ f(z)\leqslant -1/3\}$. Comme f est continue, A et B sont des fermés de C, donc des fermés de E puisque C est fermé ; et $A\cap B=\varnothing$. Par la Proposition 4.4 du Chapitre 3, on peut donc séparer A et B par une fonction continue : il existe une fonction continue $\theta:E\to[0,1]$ valant 1 sur A et 0 sur B. Si on pose $u(x):=\frac{2}{3}\theta(x)-\frac{1}{3}$, alors la fonction u est continue, elle est égale à $1/3$ sur A et à $-1/3$ sur B, et on a $-1/3\leqslant u(x)\leqslant 1/3$ pour tout $x\in E$. Comme $1/3\leqslant f(z)\leqslant 1$ sur A, $-1\leqslant f(z)\leqslant -1/3$ sur B et $-1/3<f(z)<1/3$ sur $C\backslash(A\cup B)$, on voit qu'on a $|u(z)-f(z)|\leqslant 2/3$ pour tout $z\in C$ (exo), *i.e.* $\|T(u)-f\|_\infty\leqslant 2/3$. Donc la fonction u convient. $\square$

4. Prolongement des applications uniformément continues

Théorème 4.1. *Soient E et F deux espaces métriques, avec F complet. Soit également $D\subseteq E$ une partie dense de E, et soit $f:D\to F$. On suppose que f est* uniformément continue. *Alors f se prolonge de manière unique en une application continue $\widetilde{f}:E\to F$; et l'application $\widetilde{f}$ est uniformément continue.*

Démonstration. (i) Comme D est dense dans E, l'unicité d'un éventuel prolongement continu de f découle du théorème de "prolongement des identités" (Proposition 5.4 du Chapitre 3).

(ii) Montrons l'existence d'une application uniformément continue $\widetilde{f}:E\to F$ qui prolonge f.

Fait 1. Une application uniformément continue change les suites de Cauchy en suites de Cauchy.

Preuve du Fait 1. C'est un exo de compréhension des définitions, qu'il est important de faire soi même. □

Fait 2. Soit $x \in E$ quelconque. Si $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D telle que $z_k \to x$, alors la suite $\big(f(z_k)\big)$ converge dans F. De plus, $\lim f(z_k)$ ne dépend pas de la suite (z_k) telle que $z_k \to x$.

Preuve du Fait 2. Par le Fait 1, la suite $\big(f(z_k)\big)$ est de Cauchy dans F car la suite (z_k) – qui converge dans E – est de Cauchy dans D et f est uniforméent continue; donc $\big(f(z_k)\big)$ converge dans F puisque F est supposé complet.

Si (z_k) et (z'_k) sont deux suites d'éléments de D telle que $z_k \to x$ et $z'_k \to x$, alors la "suite mélangée" $(z_0, z'_0, z_1, z'_1, \dots)$ converge également vers x; donc la suite $\big(f(z_0), f(z'_0), f(z_1), f(z'_1), \dots\big)$ converge, ce qui entraîne que $d\big(f(z_k), f(z'_k)\big) \to 0$. On a donc $\lim f(z_k) = \lim f(z'_k)$. □

Par le Fait 2, et comme D est dense dans E, on peut poser, pour tout $x \in E$:

$$\widetilde{f}(x) := \lim_{k\to\infty} f(z_k),$$

où (z_k) est *n'importe quelle* suite d'éléments de D telle que $z_k \to x$. On a $\widetilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in D$ car pour un tel x on peut prendre $z_k := x$. Montrons que l'application $\widetilde{f} : E \to F$ est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche un $\delta > 0$ tel que

$$d(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x')) \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tous } x, x' \in D \text{ vérifiant } d(x, x') < \delta.$$

Comme on sait que l'application $f : D \to F$ est uniformément continue, on *peut* trouver $\delta > 0$ tel que

$$d(f(z), f(z')) \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tous } z, z' \in D \text{ vérifiant } d(z, z') < \delta.$$

Montrons que ce δ convient. Soient $x, x' \in E$ vérifiant $d(x, x') < \delta$. Choisisons des suites (z_k) et (z'_k) d'éléments de D telles que $z_k \to x$ et $z'_k \to x'$. Alors $d(z_k, z'_k) \to d(x, x') < \delta$; donc on peut trouver un entier k_0 tel que $\forall k \geqslant k_0 \ : \ d(z_k, z'_k) < \delta$. On a alors

$$\forall k \geqslant k_0 \ : \ d(f(z_k), f(z'_k)) \leqslant \varepsilon;$$

et comme $f(z_k) \to \widetilde{f}(x)$ et $f(z'_k) \to \widetilde{f}(x')$ par définition de l'application $\widetilde{f}$, on en déduit $d(\widetilde{f}(x), \widetilde{f}(x')) = \lim d(f(z_k), f(z'_k)) \leqslant \varepsilon$. □

Corollaire 4.2. *Soit* $]a, b)$ *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *"ouvert à gauche". Si* $f :]a, b) \to \mathbb{R}$ *est uniformément continue, alors* f *se prolonge par continuité au point* a. (*Résultat analogue pour un intervalle* $(a, b[$ *"ouvert à droite".*)

Démonstration. On applique le théorème avec $E := [a, b)$ et $D :=]a, b)$, qui est certainement dense dans E. □

Corollaire 4.3. *Soient* E *et* F *deux espaces vectoriels normés, avec* F *complet, et soit* $M \subseteq E$ *un* sous-espace vectoriel *dense dans* E. *Si* $T : M \to F$ *est une application linéaire continue, alors* T *se prolonge de manière unique en une application linéaire continue* $\widetilde{T} : E \to F$.

Démonstration. L'application linéaire continue $T : M \to F$ est *lipschitzienne*, donc uniformément continue. Donc, par le théorème, il existe une unique application continue $\widetilde{T} : E \to F$ qui prolonge T. Il reste à voir que $\widetilde{T}$ est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Les applications $(u, v) \mapsto \widetilde{T}(\lambda u + \mu v)$ et $(u, v) \mapsto \lambda\widetilde{T}(u) + \mu\widetilde{T}(v)$ sont continues sur $E \times E$ car $\widetilde{T}$ est continue, et elles coïncident sur $M \times M$ car $\widetilde{T}_{|M} = T$ et T est linéaire. Comme $M \times M$ est dense dans $E \times E$, ces deux applications coïncident donc sur $E \times E$ par "prolongement des identités" (Proposition 5.4 du Chapitre 3) ; ce qui prouve la linéarité de $\widetilde{T}$. □

4.1. Intégrale vectorielle. Comme illustration – sans doute un peu artificielle – du Théorème de prolongement des applications linéaires continues (Corollaire 4.3), on va expliquer brièvement comment donner un sens à l'intégrale d'une fonction "raisonnable" définie sur un intervalle compact $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ et *à valeurs dans un espace de Banach F*.

On commence par définir l'intégrale d'une fonction $\varphi : [a, b] \to F$ *en escalier*. C'est formellement très facile : si $S = (s_0, \dots, s_N)$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ, et si on note $z_k \in F$ la valeur constante de φ sur l'intervalle $]s_k, s_{k+1}[$ pour $k = 0, \dots, N-1$, alors

$$\int_a^b \varphi(t)\, dt = \sum_{k=0}^{N-1} (s_{k+1} - s_k) z_k.$$

Il y a cependant une peau de banane : il faut vérifier que cela ne dépend pas de la subdivision S adaptée à φ. Ce n'est pas très difficile, mais cela demande quand même un peu de soin : on laisse cela en exo. En notant $\mathcal{E}([a, b], F)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions en escaliers $\varphi : [a, b] \to F$, il est alors tfacile de vérifier que l'application $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(t)\, dt$ est une application linéaire de $\mathcal{E}([a, b], F)$ dans F (exo).

Il est clair que toute fonction en escalier $\varphi : [a, b] \to F$ est bornée ; autrement dit $\mathcal{E}([a, b], F) \subseteq \ell^\infty([a, b], F)$. On peut donc munir $\mathcal{E}([a, b], F)$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Introduisons maintenant la classe des fonctions "raisonnables" : on dit qu'une fonction $f : [a, b] \to F$ est **réglée** si elle possède une limite à gauche et une limite à droite en tout point $t \in [a, b]$; et on note $\mathcal{R}([a, b], F)$ l'ensemble de toutes les fonctions réglées de $[a, b]$ dans F. Il est assez clair que $\mathcal{R}([a, b], F)$ est un espace vectoriel, qui contient toutes les fonctions *continues*. Il est également clair que toute fonction en escalier est réglée ; donc $\mathcal{E}([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{R}([a, b], F)$. De plus, on a vu au Chapitre 4 que toute fonction réglée $f : [a, b] \to F$ est limite uniforme de fonctions en escaliers (c'était un exemple d'utilisation de la propriété de Borel-Lebesgue). On en déduit que toute fonction réglée est bornée (ce qui n'est *pas* évident) ; et qu'en fait, *$\mathcal{R}([a, b], F)$ est l'adhérence de $\mathcal{E}([a, b], F)$ dans $\ell^\infty([a, b], F)$.*

LEMME 4.4. *Il existe une unique application linéaire continue $I_a^b : \mathcal{R}([a, b], F) \to F$ telle que $I_a^b(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\, dt$ pour toute fonction φ en escalier.*

Démonstration. On vient de voir que $\mathcal{E}([a, b], F)$ est un sous-espace vectoriel dense de $\mathcal{R}([a, b], F)$. Par le Théorème de prolongement des applications linéaires continues, il suffit donc de vérifier que l'application linéaire $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi(t)\, dt$ est continue de $\mathcal{E}([a, b], F)$ dans F ; autrement dit, qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{E}([a, b], F)\ :\ \left\| \int_a^b \varphi(t)\, dt \right\| \leqslant C\, \|\varphi\|_\infty.$$

Mais ceci n'est pas difficile : si $S = (s_0, \dots, s_N)$ est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à la fonction $\varphi \in \mathcal{E}([a, b], F)$ et si on note $z_k \in F$ la valeur constante de φ sur l'intervalle $]s_k, s_{k+1}[$, alors

$$\begin{aligned}\left\| \int_a^b \varphi(t)\, dt \right\| &= \left\| \sum_{k=0}^{N-1} (s_{k+1} - s_k) z_k \right\| \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} (s_{k+1} - s_k)\, \|z_k\| \\ &\leqslant \|\varphi\|_\infty \sum_{k=0}^{N-1} (s_{k+1} - s_k) = (b - a)\, \|\varphi\|_\infty .\end{aligned}$$

□

Évidemment la notation I_a^b est ridicule, et on écrira désormais $\int_a^b f(t)\, dt$ au lieu de $I_a^b(f)$. Ainsi, on a donné un sens raisonnable à l'intégrale $\int_a^b f(t)\, dt$ pour toute fonction réglée $f : [a, b] \to F$, et donc pour toute fonction f continue.

La définition est un peu bizarre car elle ne dit pas explicitement comment calculer $\int_a^b f(t)\, dt$ pour une fonction $f \in \mathcal{R}([a, b], F)$ donnée. Cependant, il y a bien une procédure “effective” : on a

$$\int_a^b f(t)\, dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n(t)\, dt,$$

où (φ_n) est n'importe quelle suite de fonctions en escalier convergeant uniformément vers f.

Exercice 1. Montrer que si $f \in \mathcal{R}([a, b], F)$, alors

$$\left\| \int_a^b f(t)\, dt \right\| \leqslant \int_a^b \|f(t)\|\, dt.$$

Exercice 2. Soit F' un autre espace de Banach, et soit $L : F \to F'$ une application lináire continue. Montrer que si $f \in \mathcal{R}([a, b], F)$, alors $L \circ f \in \mathcal{R}([a, b], F')$ et

$$L\left(\int_a^b f(t)\, dt \right) = \int_a^b L\big(f(t)\big)\, dt.$$

5. Complété d'un espace métrique

Le théorème suivant montre en particulier que toute suite de Cauchy dans un espace métrique (E, d) quelconque est en fait convergente ; mais dans un espace plus gros.

Théorème 5.1. *Soit (E, d) un espace métrique quelconque. Il existe un espace métrique $(\widehat{E}, \widehat{d})$ possédant les propriétés suivantes :*

- *“$E \subseteq \widehat{E}$”, i.e. E se plonge isométriquement dans $\widehat{E}$;*
- *E est dense dans $\widehat{E}$;*
- *$(\widehat{E}, \widehat{d})$ est complet.*

*De plus, l'espace métrique $(\widehat{E}, \widehat{d})$ est unique à isométrie près. On dit que $(\widehat{E}, \widehat{d})$ est le **complété** de l'espace métrique (E, d).*

Exemple. Le complété de $\mathbb{Q}$ muni de la distance usuelle est $\mathbb{R}$, puisque $\mathbb{R}$ est complet et que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Preuve du théorème. (i) *Existence.* On sait que, comme tout espace métrique, E se plonge isométriquement dans $(\ell^\infty(I), \| \cdot \|_\infty)$ pour un certain ensemble I. On sait aussi que $(\ell^\infty(I), \| \cdot \|_\infty)$ est complet. Donc, si on note $\widehat{E}$ l'adhérence de E dans $\ell^\infty(I)$ et $\widehat{d}$ la distance sur $\widehat{E}$ induite par $\| \cdot \|_\infty$, alors $(\widehat{E}, \widehat{d})$ possède les propriétés requises.

(ii) *Unicité.* On va utiliser le théorème de prolongement des applications uniformément continues. Soient (M_1, d_1) et (M_2, d_2) deux "complétés" de (E, d) : on veut montrer que (M_1, d_1) et (M_2, d_2) sont isométriques. Par hypothèse, (M_1, d_1) et (M_2, d_2) sont complets avec "$E \subseteq M_1$" et "$E \subseteq M_2$", et E est dense dans M_1 et dans M_2. Soient $i_1 : E \to M_1$ et $i_2 : E \to M_2$ les injections canoniques. Comme $E \subseteq M_1$ est dense dans M_1 et comme $i_2 : E \to M_2$ est une isométrie, donc une application uniformément continue (!), il existe une unique application continue $J : M_1 \to M_2$ telle que $J(x) = i_2(x) = x$ pour tout $x \in E \subseteq M_1$. De plus, comme i_2 est une isométrie, on vérifie (exo) que J est une isométrie. De même, il existe une isométrie $J' : M_2 \to M_1$ telle que $J'(x) = x$ pour tout $x \in E \subseteq M_2$. On a alors $J' \circ J(x) = x$ pour tout $x \in E \subseteq M_1$, et $J \circ J'(x) = x$ pour tout $x \in E \subseteq M_2$. Ainsi, l'application $J' \circ J : M_1 \to M_1$ coïncide avec id_{M_1} sur E, et $J \circ J' = M_2 \to M_2$ coïncide avec id_{M_2} sur E. Comme E est dense dans M_1 et M_2 et comme $J' \circ J$ et $J \circ J'$ sont continues (ce sont des isométries), on en déduit qu'on a $J' \circ J = id_{M_1}$ et $J \circ J' = id_{M_2}$. Donc J et J' sont des isométries *bijectives* et $J' = J^{-1}$; et ainsi, M_1 et M_2 sont isométriques. ☐

Exercice. Montrer que si E est un espace vectoriel normé, alors son complété $\widehat{E}$ peut être muni d'une structure d'espace vectoriel normé. Autrement dit : *le complété d'un evn est un espace de Banach.*

6. Complétude et compacité

On a vu plus haut que tout espace métrique compact est complet. De plus, on sait également (*cf* le Chapitre 4) que tout espace métrique E compact est *précompact*, *i.e.* que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini d'ensembles de diamètres $\leqslant \varepsilon$. Le théorème suivant montre que la chose qui manque à un espace métrique précompact pour être compact est précisément d'être complet.

Théorème 6.1. *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Le preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant.

Lemme 6.2. *Pour un espace métrique (E, d), les choses suivantes sont équivalentes.*

(i) *E est précompact.*

(ii) *Toute suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ possède une sous-suite* de Cauchy.

Preuve du Lemme 6.2. (i) $\implies$ (ii). Supposons E précompact. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite quelconque de points de E : on cherche à construire une sous-suite (u_{k_n}) qui soit de Cauchy. Comme E est précompact, on peut trouver des ensembles $Z_1, \dots, Z_N \subseteq E$ de diamètre $\leqslant \varepsilon_0 := 2^{-0}$ tels que $E = Z_1 \cup \cdots \cup Z_N$. Il y a une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ et un nombre fini de Z_i, donc on peut trouver $i_0 \in [\![1, N]\!]$ et un ensemble infini $\Lambda_0 \subseteq \mathbb{N}$ tels que $\forall k \in \Lambda_0 \ : \ u_k \in Z_{i_0}$. On a alors

$$\forall k, k' \in \Lambda_0 \ : \ d(u_k, u_{k'}) \leqslant \mathrm{diam}(Z_{i_0}) \leqslant 2^{-0}.$$

En répétant ce raisonnement avec $\varepsilon_1 := 2^{-1}$ au lieu de ε_0 et Λ_0 au lieu de $\mathbb{N}$, on obtient un ensemble infini $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_0$ tel que $\forall k, k' \in \Lambda_1 \; : \; d(u_k, u_{k'}) \leqslant 2^{-1}$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite décroissante $(\Lambda_n)_{n \geqslant 0}$ de parties infinies de $\mathbb{N}$ telle que

$$\forall n \geqslant 0 \; \forall k, k' \in \Lambda_n \; : \; d(u_k, u_{k'}) \leqslant 2^{-n}.$$

Posons alors $k_0 := \min \Lambda_0$ et $k_n := \min \{k \in \Lambda_n ; \; k > k_{n-1}\}$ pour tout $n \geqslant 1$ (procédé diagonal). On obtient de la sorte une sous-suite (u_{k_n}) de (u_k). Si $p, q \in \mathbb{N}$, alors $k_p \in \Lambda_p$ et $k_q \in \Lambda_q$; donc k_p et k_q appartiennent tous les deux à $\Lambda_{\min(p,q)}$ car la suite (Λ_n) est décroissante. Par conséquent :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} \; : \; d(u_{k_p}, u_{k_q}) \leqslant 2^{-\min(p,q)} \xrightarrow{p,q \to \infty} 0;$$

et donc la sous-suite (u_{k_n}) est de Cauchy.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Supposons (ii) vérifiée. Soit $(\widehat{E}, \widehat{d})$ le complété de (E, d). Par (ii), toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ possède une sous-suite qui *converge* dans $\widehat{E}$. Donc E est relativement compact dans $\widehat{E}$; et donc E est précompact. $\square$

Preuve du Théorème 6.1. Par le Lemme 6.2, c'est à présent un micro-exo : il sufit d'écrire les définitions. $\square$

Corollaire 6.3. *Soit (M, d) un espace métrique* complet. *Pour un ensemble $A \subseteq M$, on a l'équivalence suivante A est précompact $\iff$ $\overline{A}$ est compact.*

Démonstration. Si $\overline{A}$ est compact, alors $\overline{A}$ est précompact et donc A aussi. Inversement, si A est précompact, alors $\overline{A}$ aussi (exo) ; donc $\overline{A}$ est compact car $\overline{A}$ est complet en tant que fermé de l'espace complet M. $\square$

Corollaire 6.4. *Un espace métrique E est précompact si et seulement si son complété $\widehat{E}$ est compact.*

Démonstration. C'est évident d'après le corollaire précédent appliqué à $M := \widehat{E}$ et $A := E$. $\square$

6.1. Enveloppe convexe fermée d'un compact. Dans cette section, on donne une illustration intéressante du Théorème 6.1.

Définition 6.5. *Soit E un espace vectoriel normé. Si A est une partie de E, l'**enveloppe convexe** de A est l'intersection de toutes les parties convexes de E contenant A ; autrement dit, le plus petit ensemble convexe $C \subseteq E$ contenant A. On notera cet ensemble* $\operatorname{conv}(A)$. *L'**enveloppe convexe fermée** de A est l'ensemble $\overline{\operatorname{conv}(A)}$; c'est le plus petit convexe fermé $C \subseteq E$ contenant A.*

Remarque. De manière équivalente, $\operatorname{conv}(A)$ est l'ensemble de toutes les **combinaisons convexes** d'éléments de A, *i.e.* l'ensemble de tous les points $u \in E$ pouvant sécrire sous la forme

$$u = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i \,, \quad \text{où} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_N \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1.$$

Démonstration. Notons C l'ensemble formé par toutes les combinaisons convexes d'éléments de A. On vérifie que C est un ensemble convexe (exo). Comme C contient A, il contient donc $\mathrm{conv}(A)$ par définition de $\mathrm{conv}(A)$. Mais inversement, tout ensemble convexe contenant A contient aussi C. Donc $C = \mathrm{conv}(A)$. $\square$

PROPOSITION 6.6. *Soit E un espace* de Banach. *Si K est un compact de E, alors l'enveloppe convexe fermée de K est compacte.*

Démonstration. Comme E est supposé complet, il suffit de montrer que $\mathrm{conv}(K)$ est précompacte. Autrement dit, on veut montrer que pour $\varepsilon > 0$ donné, $\mathrm{conv}(K)$ possède un ε-réseau fini. On aura besoin des deux faits suivants.

FAIT 1. Si $\Lambda \subseteq E$ est un ensemble *fini*, alors $\mathrm{conv}(\Lambda)$ est compact.

Preuve du Fait 1. Écrivons $\Lambda = \{a_1, \dots, a_N\}$, et posons

$$\Sigma := \left\{ (\lambda_1, \dots, \lambda_N) \in \mathbb{R}^N ;\ \lambda_i \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{N} \lambda_i = 1 \right\}.$$

On a déjà vu que Σ est un compact de $\mathbb{R}^N$ (car fermé borné). De plus on a $\mathrm{conv}(\Lambda) = \Phi(\Sigma)$, où $\Phi : \Sigma \to E$ est l'application définie par

$$\Phi(\lambda_1, \dots, \lambda_N) := \sum_{i=1}^{N} \lambda_i a_i.$$

Comme Φ est continue, on en déduit que $\mathrm{conv}(\Lambda)$ est compact. $\square$

FAIT 2. Soit $A \subseteq E$, et soit $\eta > 0$. Si $\Lambda \subseteq E$ est un η-réseau pour A, alors $\mathrm{conv}(\Lambda)$ est un η-réseau pour $\mathrm{conv}(A)$.

Preuve du Fait 2. C'est un exo de compréhension des définitions. $\square$

On peut maintenant finir la preuve. Soit $\varepsilon > 0$. Comme K est compact, il est précompact ; donc K possède un $(\varepsilon/2)$-réseau fini Λ_K. Alors $L := \mathrm{conv}(\Lambda_K)$ est un $(\varepsilon/2)$-réseau pour $\mathrm{conv}(K)$ d'après le Fait 2. De plus, L est compact d'après le Fait 1 ; donc L possède un $(\varepsilon/2)$-réseau fini Λ. On vérifie alors (exo) que Λ est un ε-réseau pour $\mathrm{conv}(K)$. $\square$

7. Espaces topologiquement complets

DÉFINITION 7.1. *Soit (M, d) un espace métrique. On dit que M est* ***topologiquement complet*** *s'il existe une distance δ sur M topologiquement équivalente à M et telle que (M, δ) soit complet.*

Le théorème suivant, qu'on appelle souvent le **Théorème d'Alexandrov**, donne une caractérisation des parties topologiquement complètes d'un espace métrique complet.

THÉORÈME 7.2. *Soit (E, d) une espace métrique* complet, *et soit $G \subseteq E$. Les choses suivantes sont équivalentes.*

(1) *G est topologiquement complet.*

(2) *G est un G_δ de E, i.e. une intersection dénombrable d'ouverts.*

Démonstration. On va commencer par l'implication (2) $\Longrightarrow$ (1).

FAIT 1. Soit O un ouvert de E. Pour $x, y \in O$, on pose

$$\delta(x,y) := d(x,y) + \left| \frac{1}{\operatorname{dist}(y, E\backslash O)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(x, E\backslash O)} \right|.$$

Alors δ est une distance sur O topologiquement équivalente à $d_{|O\times O}$, et (O, δ) est complet.

Preuve du Fait 1. D'abord, $\delta(x, y)$ est *bien défini* pour tous $x, y \in O$: en effet, $\operatorname{dist}(x, E\backslash O)$ est > 0 car $x \notin E\backslash O$ et $E\backslash O$ est un fermé de E, donc on peut bien considérer $\frac{1}{\operatorname{dist}(x,E\backslash O)}$; et de même pour $\frac{1}{\operatorname{dist}(y,E\backslash O)}$. Le fait que δ soit une distance est laissé en exo.

Montrons que δ est topologiquement équivalente à $d_{|O\times O}$, autrement dit que ces deux distances ont les mêmes suites convergentes. Comme $d \leqslant \delta$, toute suite $(x_k) \subseteq O$ convergeant au sens de δ converge également au sens de d. Inversement, si (x_k) est une suite de points de O convergeant au sens de d vers un point a *appartenant à* O, alors $\operatorname{dist}(x_k, E\backslash O) \to \operatorname{dist}(a, E\backslash O) > 0$, donc $\frac{1}{\operatorname{dist}(x_k,E\backslash O)} \to \frac{1}{\operatorname{dist}(a,E\backslash O)}$, et donc $\delta(x_k, a) \to 0$.

Montrons maintenant que (O, δ) est complet. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (O, δ). Comme $\delta(x_p, x_q) \geqslant d(x_p, x_q)$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, la suite (x_k) est de Cauchy dans (E, d), qui est supposé complet. Donc (x_k) converge dans E vers un certain point a. De plus, comme $\delta(x_p, x_q) \geqslant \left| \frac{1}{\operatorname{dist}(x_q,E\backslash O)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(x_p,E\backslash O)} \right|$ pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, la suite $\left(\frac{1}{\operatorname{dist}(x_k,E\backslash O)} \right)$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc elle est bornée : on a une constante $M < \infty$ telle que $\frac{1}{\operatorname{dist}(x_k,E\backslash O)} \leqslant M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si on pose $\varepsilon := 1/M$, alors $\varepsilon > 0$ et $\operatorname{dist}(x_k, E\backslash O) \geqslant \varepsilon$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc $\operatorname{dist}(a, E\backslash O) \geqslant \varepsilon > 0$, et donc le point a *appartient à* O. Comme $d_{|O\times O}$ et δ sont topologiquement équivalentes et que (x_k) n'a pas cessé de tendre vers a pour la distance d, on en déduit que $x_k \to a$ pour la distance δ. Ainsi, la suite de Cauchy (x_k) converge dans (O, δ). □

FAIT 2. Soit (M, δ) un espace métrique. Si on pose $\widetilde{\delta}(x, y) := \min\bigl(1, \delta(x, y)\bigr)$, alors $\widetilde{\delta}$ est une distance topologiquement équivalente à δ, et $(M, \widetilde{\delta})$ est complet si (M, δ) est complet.

Preuve du Fait 2. On a déjà vu que $\widetilde{\delta}$ est une distence topologiquement équivalente à δ : c'est la Proposition 1.13 du Chapitre 3. La 2ème partie est laissée en exo. □

On peut maintenant démontrer que (1) $\Longrightarrow$ (2). Supposons que G soit un G_δ de E, et écrivons $G = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$, où les O_n sont des ouverts de E.

Par les Faits 1 et 2, on peut trouver pour tout $n \in \mathbb{N}$ une distance $\widetilde{\delta}_n$ sur O_n telle que

- $\widetilde{\delta}_n$ est topologiquement équivalente à $d_{|O_n\times O_n}$;
- $(O_n, \widetilde{\delta}_n)$ est complet ;
- $\forall x, y \in O_n \ : \ \widetilde{\delta}_n(x, y) \leqslant 1$.

Soit alors $\delta : G \times G \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par

$$\delta(x,y) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\, \widetilde{\delta}_n(x,y).$$

Cette définition a un bien sens : comme $x, y \in G \subseteq O_n$, on peut écrire $\widetilde{\delta}_n(x, y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et la série converge car $\widetilde{\delta}_n(x, y) \leqslant 1$. De plus, on vérifie sans difficulté (exo) que δ est une distance sur G. Il s'agit de montrer que δ est topologiquement équivalente à $d_{G\times G}$, et que (G,δ) est complet. Tout repose sur le fait suivant.

Fait 3. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de G, et soit $a\in G$. Alors $x_k\to a$ pour la distance δ si et seulement $\widetilde{\delta}_n(x_k,a)\xrightarrow{k\to\infty}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Preuve du Fait 3. Par définition de δ, on a $\widetilde{\delta}_n(x,y)\leqslant 2^n\,\delta(x,y)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tous $x,y\in G$. Donc, si $\delta(x_k,a)\to 0$, alors $\widetilde{\delta}_n(x_k,a)\to 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Inversement, si $\widetilde{\delta}_n(x_k,a)\to 0$ pour tout $n\in\mathbb{N}$ alors, comme on a la domination $2^{-n}\widetilde{\delta}_n(x_k,a)\leqslant 2^{-n}$ (indépendante de k) et que la série $\sum 2^{-n}$ est convergente, le Théorème de convergence dominée (pour les séries) montre que $\delta(x_k,a)=\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\widetilde{\delta}_n(x_k,a)\to\sum_{n=0}^{\infty}2^{-n}\widetilde{\delta}_n(x_k,a)=\delta(x_k,a)$. $\square$

Comme $\widetilde{\delta}_n$ est topologiquement équivalente à $d_{|O_n\times O_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$, il découle directement du Fait 3 que la distance δ est topologiquement équivalente à $d_{|G\times G}$ (exo). Montrons que (G,δ) est complet. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (G,δ). Comme $\widetilde{\delta}_n(x_p,x_q)\leqslant 2^n\delta(x_p,x_q)$ pour tout n et pour tous $p,q\in\mathbb{N}$, on voit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite (x_k) est de Cauchy dans $(O_n,\widetilde{\delta}_n)$, qui est complet ; donc, pour tout $n\in\mathbb{N}$, la suite (x_k) converge pour la distance $\widetilde{\delta}_n$ vers un certain point $a^n\in O_n$. Comme $\widetilde{\delta}_n$ est topologiquement équivalente à $d_{|O_n\times O_n}$, la convergence a lieu aussi pour la distance d ; et donc a^n ne dépend pas de n par unicité de la limite relativement à d. Si on écrit maintenant a au lieu de a^n, alors le point appartient à tous les O_n, *i.e.* $a\in G$. Ainsi, on a trouvé un point $a\in G$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}\ :\ \widetilde{\delta}_n(x_k,a)\xrightarrow{k\to\infty}0$, ce qui revient à dire que $x_k\to a$ pour la distance δ d'après le Fait 3.

Passons maintenant à l'implication $(1)\implies(2)$. (Pour cette implication, on n'aura pas besoin de supposer que (E,d) est complet.) Supposons que G soit topologiquement complet, et montrons que G est un G_δ de E. Dans ce qui suit, on fixe une distance δ sur G topologiquement équivalente à $d_{|G\times G}$ telle que (G,δ) soit complet. On notera B_δ les boules ouvertes de G relativement à la distance δ, et δ - diam(A) le diamètre d'un ensemble $A\subseteq G$ relativement δ. De même, on notera B_d les boules ouvertes de E relativement à la distance d.

Observons d'abord que $\overline{G}$ est un G_δ de E car c'est un fermé de l'espace métrique E (*cf* la Proposition 7.6 du Chapitre 3). Donc, pour montrer que G est un G_δ de E, il suffit de montrer que c'est un G_δ *de* $\overline{G}$ (micro-exo). On peut donc en fait supposer que $\overline{G}=E$, *i.e.* que G *est dense dans* E.

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, posons

$$O_n:=\left\{x\in E;\ \exists V \text{ voisinage ouvert de } x\quad\text{tel que}\quad \delta\text{-}\mathrm{diam}(V\cap G)<\frac{1}{n}\right\}.$$

Par définition, les O_n sont des ouverts de E. On va montrer que $G=\bigcap_{n\geqslant 1}O_n$.

Soit $x\in G$, et soit $n\in\mathbb{N}^*$ fixé. Si on pose $B:=B_\delta\big(x,\frac{1}{3n}\big)$, alors B est un ouvert de G tel que δ - diam$(B)\leqslant\frac{2}{3n}<\frac{1}{n}\cdot$ Donc, si on choisit un ouvert V de E tel que $B=V\cap G$, alors V témoigne que $x\in O_n$. Ceci étant vrai pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a donc montré l'inclusion $G\subseteq\bigcap_{n\geqslant 1}O_n$.

Inversement, soit $x\in\bigcap_{n\geqslant 1}O_n$ quelconque, et montrons que $x\in G$. Pour tout $n\geqslant 1$, choisissons un ouvert $V_n\subseteq E$ tel que $x\in V_n$ et δ - diam$(V_n\cap G)<\frac{1}{n}\cdot$ Quitte à remplacer V_n par $V_n\cap B_d\big(x,\frac{1}{n}\big)$, on peut supposer que $V_n\subseteq B_d\big(x,\frac{1}{n}\big)$; et quitte à remplacer ensuite V_n par $V_n \cap V_{n-1}$ pour $n \geqslant 2$, on peut également supposer que la suite $(V_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

Comme G est dense dans E, on a $V_n \cap G \neq \varnothing$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc on peut choisir un point $x_n \in V_n \cap G$. Alors $x_n \to x$ car $x_n \in V_n \subseteq B_d\big(x, \frac{1}{n}\big)$ De plus, si $p, q \in \mathbb{N}$, alors x_p et x_q sont tous les deux dans $V_{\min(p,q)} \cap G$ car la suite (V_n) est décroissante, donc

$$\delta(x_p, x_q) \leqslant \delta\text{ - diam}(V_{\min(p,q)} \cap G) \xrightarrow{p,q\to\infty} 0.$$

Par conséquent, la suite (x_n) est de Cauchy dans (G, δ), qui est complet ; donc (x_n) converge pour δ vers un certain point $x_\infty \in G$. Mais δ est topologiquement équivalente à $d_{|G\times G}$, donc $x_n \to x_\infty$ pour d ; et donc $x_\infty = x$ car $x_n \to x$ pour d. Donc $x \in G$! $\square$

8. Théorème du point fixe

Le théorème suivant possède d'innombrables applications.

THÉORÈME 8.1. *Soit (E, d) un espace métrique* complet*, et soit Z un ensemble tel que $E \subseteq Z$. Soit également $\Phi : E \to Z$. On suppose que*

(i) *E est **stable par** Φ, i.e. $\Phi(E) \subseteq E$;*

(ii) *l'application $\Phi : (E, d) \to (E, d)$ est **contractante**, i.e k - lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$.*

Alors Φ possède un unique point fixe dans E ; autrement dit, il existe un et un seul point $a \in E$ tel que $\Phi(a) = a$. De plus, si on se donne un point $x_0 \in E$ quelconque, alors la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la récurrence $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ converge vers a, et la convergence a lieu à vitesse géométrique *; plus précisément :*

$$\forall n \geqslant 1 \;:\; d(x_n, a) \leqslant \frac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in E$ quelconque. Comme E est stable par Φ, on peut en effet définir une suite $(x_n)_{n\geqslant 0} \subseteq E$ par la récurrence $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. On remarque d'abord que si $n \geqslant 1$, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) = d\big(\Phi(x_{n-1}), \Phi(x_n)\big) &\leqslant k\, d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leqslant k^2\, d(x_{n-2}, x_{n-1}) \quad \text{si } n \geqslant 2 \\ &\leqslant \cdots \\ &\leqslant k^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

(L'inégalité est vraie également pour $n = 0$.) On en déduit que si $p, q \in \mathbb{N}$ et $p < q$, alors

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leqslant d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \cdots + d(x_{q-1}, x_q) \\ &\leqslant \big(k^p + k^{p+1} + \cdots + k^{q-1}\big)\, d(x_0, x_1) \\ &\xrightarrow{p,q\to\infty} 0 \qquad \text{car la série } \textstyle\sum k^i \text{ converge.} \end{aligned}$$

Donc la suite (x_n) est en effet de Cauchy. Comme E est supposé complet, la suite (x_n) converge, $x_n \to a \in E$. De plus, en prenant $p := n \in \mathbb{N}$ et en faisant $q \to \infty$ dans l'inégalité précédente, on voit que

$$\forall n \in \mathbb{N} \;:\; d(x_n, a) \leqslant \left(\sum_{i=n}^{\infty} k^i\right) d(x_0, x_1) = \frac{k^n}{1-k}\, d(x_0, x_1).$$

Comme l'application Φ est continue (car lipschitzienne), on a $\Phi(a) = \lim \Phi(x_n) = \lim x_{n+1} = a$; autrement dit a est un point fixe de Φ.

Enfin, a est le *seul* point fixe de Φ : si $b \in E$ vérifie $\Phi(b) = b$, alors

$$d(a,b) = d\big(\Phi(a), \Phi(b)\big) \leqslant k\, d(a,b),$$

ce qui n'est possible que si $d(a,b) = 0$ puisque $k < 1$. □

Corollaire 8.2. *Soient (E,d) un espace métrique complet, Z un ensemble tel que $E \subseteq Z$ et $\Phi : E \to Z$ telle que $\Phi(E) \subseteq E$. S'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que $\Phi^r := \Phi \circ \cdots \Phi$ soit contractante, alors Φ possède un et un seul point fixe dans E.*

Démonstration. Par le théorème, l'application Φ^r possède un unique point fixe a. Mais $\Phi(a)$ est alors point fixe de Φ^r (micro-exo), donc $\Phi(a) = a$ par unicité, et ainsi a est en fait point fixe de Φ. Enfin, si b est un autre point fixe de Φ, alors b est aussi point fixe de Φ^r (micro-exo), et donc $b = a$. □

Exemple 1. Soit E un espace de Banach. Si $h : E \to E$ est une application contractante, alors $Id - h$ est une bijection de E sur E. De plus, $(Id - h)^{-1}$ est lipschitzienne.

Démonstration. Montrons d'abord que $f := Id - h$ est bijective. Soit $y \in E$ quelconque : on veut montrer que l'équation $f(x) = y$ possède une et une seule solution. Cette équation peut s'écrire comme un problème de point fixe (c'est une idée importante) :

$$f(x) = y \iff x + \big(y - f(x)\big) = x.$$

Soit $\Phi = \Phi_y : E \to E$ l'application définie par

$$\Phi(x) := x + \big(y - f(x)\big) = y + h(x).$$

Comme y est fixé et que h est contractante, l'application Φ est contractante ; donc elle possède un unique point fixe, ce qui prouve que f est bijective.

Montrons maintenant que f^{-1} est lipschitzienne. Par hypothèse, l'application h est k-lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$. On a donc pour tous $x, x' \in E$:

$$\begin{aligned}\|f(x') - f(x)\| &= \|(x' - x) - (h(x') - h(x))\| \\ &\geqslant \|x' - x\| - \|h(x') - h(x)\| \\ &\geqslant (1-k)\,\|x' - x\|.\end{aligned}$$

Comme f est bijective, on en déduit

$$\forall y, y' \in E \ : \ \|y' - y\| \geqslant (1-k)\,\|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\|;$$

ce qui prouve que f^{-1} est M-lipschitzienne avec $M := \frac{1}{1-k}$. □

Exercice. Soit E un espace de Banach, et soit $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|H\| < 1$. Écrire l'équation $(Id - H)T = Id$ d'inconnue $T \in \mathcal{L}(E)$ comme un problème de point fixe pour une certaine application $\Phi : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$, et montrer que ce problème admet une unique solution T. Déterminer explicitement la suite $(T_n)_{n \geqslant 0}$ définie par $T_0 := Id$ et l'itération $T_{n+1} = \Phi(T_n)$. Conclusion ?

EXEMPLE 2. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $I \times \mathbb{R}$, et *lipschitzienne par rapport à la 2ème variable.* Alors, pour tout $t_0 \in I$ et pour pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $u : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ qui est solution de l'équation différentielle $u'(t) = f\big(t, x(t)\big)$ avec la "condition initiale" $u(t_0) = u_0$.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier (mais non trivial) du **Théorème de Cauchy-Lipschitz**, dont on ne donnera pas l'énoncé général. Le propos ici est juste de donner une illustration intéressante du Théorème du point fixe sans s'embarasser de complications techniques.

Dans le jargon des équations différentielles, on veut montrer que le *Problème de Cauchy*

$$(*) \qquad \begin{cases} u'(t) = f\big(t, u(t)\big) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors u est solution de $(*)$ si et seulement si elle vérifie

$$\forall t \in I \ : \ u(t) = u_0 + \int_{t_0}^{t} f\big(s, u(s)\big)\, ds.$$

Autrement dit, si on note comme d'habitude $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues $x : I \to \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de toutes les fonctions $x : I \to \mathbb{R}$, alors u est solution du problème de Cauchy si et seulement si u est un point fixe de l'application $\Phi : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{F}(I)$ définie par

$$\Phi(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, u(s))\, ds.$$

Il s'agit donc de montrer que Φ possède un unique point fixe $u \in \mathcal{C}(I)$.

On sait $\mathcal{C}(I)$ est complet pour la distance induite par la norme $\|\cdot\|_\infty$. De plus, si $u \in \mathcal{C}(I)$, alors $\Phi(u)$ est une fonction continue et même de classe $\mathcal{C}^1$, car f est continue. Donc $\mathcal{C}(I)$ est stable par Φ. Pour conclure, il suffit donc de montrer que l'application $\Phi : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ possède une itérée contractante, *i.e.* qu'il existe un entier $r \geqslant 1$ tel que Φ^r soit contractante.

Par hypothèse sur f, il existe une constante C telle que

$$\forall s \in I\ \forall x, y \in \mathbb{R} \ : \ |f(s,y) - f(s,x)| \leqslant C\, |y - x|.$$

Donc, si $u, v \in \mathcal{C}(I)$ et si $t \in I$, alors

$$\begin{aligned} |\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)| &\leqslant \left| \int_{t_0}^{t} |f(s, v(s)) - f(s, u(s))|\, ds \right| \\ &\leqslant C \left| \int_{t_0}^{t} |v(s) - u(s)|\, ds \right| \\ &\leqslant C\, |t - t_0| \times \|v - u\|_\infty. \end{aligned}$$

En remplaçant u et v par $\Phi(u)$ et $\Phi(v)$, on en déduit

$$\begin{aligned} ||\Phi^2(v)(t) - \Phi^2(u)(t)|| &\leqslant C \left| \textstyle\int_{t_0}^{t} |\Phi(v)(s) - \Phi(u)(s)|\, ds \right| \\ &\leqslant C \left| \textstyle\int_{t_0}^{t} C\, |s - t_0|\, \|v - u\|_\infty\, ds \right| \\ &= \tfrac{C^2 |t - t_0|^2}{2}\, \|v - u\|_\infty; \end{aligned}$$

puis par récurrence :

$$\|\Phi^r(v)(t) - \Phi^r(u)(t)\| \leqslant \frac{C^r|t-t_0|^r}{r!}\,\|v-u\|_\infty$$

pour tout $t \in I$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\|\Phi^r(v) - \Phi^r(u)\|_\infty \leqslant \frac{C^r|I|^r}{r!}\,\|v-u\|_\infty$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tous $u, v \in \mathcal{C}(I)$. Ainsi, Φ^r est C_r - lipschitzienne pour tout $r \in \mathbb{N}$, où $C_r := \frac{C^r|I|^r}{r!}\cdot$ Donc Φ^r est contractante si r est suffisamment grand, puisque $C_r \to 0$ quand $r \to \infty$. □

Exercice. Soient $a, , u_0 \in \mathbb{R}$, et soit $\Phi : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application définie par $\Phi(u)(t) := u_0 + \int_0^t a\,u(s)\,ds$. Déterminer explicitement la suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0(t) := u_0$ et $u_{n+1} := \Phi(u_n)$. Conclusion ?

9. Théorème de Baire

Le résultat suivant est un moyen souvent efficace de montrer que certains ensembles sont non-vides. Il a de très nombreuses applications, parfois inattendues.

THÉORÈME 9.1. *Soit (E, d) un espace métrique* topologiquement complet*, et soit $(O_i)_{i\in I}$ une famille* dénombrable *d'ouverts de E. On suppose que chaque ouvert O_i est dense dans E. Alors, on peut conclure que $G := \bigcap_{i\in I} O_i$ est dense dans E ; et en particulier que $\bigcap_{i\in I} O_i \neq \varnothing$.*

Démonstration. On fait la preuve pour un ensemble d'indices I infini (ce qui est clairement le cas le plus difficile). Comme I est dénombrable, on peut supposer que $I = \mathbb{N}$; et on note alors la suite d'ouverts $(O_n)_{n\in\mathbb{N}}$ plutôt que $(O_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Enfin, comme E est topologiquement complet, on peut d'emblée supposer qu'il est complet pour la distance d donnée.

Soit O un ouvert quelconque de E, avec $O \neq \varnothing$: on veut montrer que $G \cap O \neq \varnothing$.

Comme O_0 est dense dans E, on a $O_0 \cap O \neq \varnothing$. Soit $x_0 \in O_0 \cap O$. Comme $O_0 \cap O$ est un ouvert de E (intersection de 2 ouverts), on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subseteq O \cap O_0$.

La boule ouverte $B(x_0, \varepsilon_0)$ est un ouvert non-vide de E ; donc $B(x_0, \varepsilon_0) \cap O_1 \neq \varnothing$ car O_1 est dense dans E. Soit $x_1 \in B(x_0, \varepsilon_0) \cap O_1$. Comme $B(x_0, \varepsilon_0) \cap O_1$ est un ouvert de E, on peut trouver ε_1 tel que $0 < \varepsilon_1 \leqslant 2^{-1}$ et $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subseteq B(x_0, \varepsilon_0) \cap O_1$.

En répétant ce raisonnement, on voit qu'on peut construire par récurrence une suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ de points de E et une suite $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 0}$ de nombres réels > 0 telles que

- $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subseteq O \cap O_0$.
- $\varepsilon_n \leqslant 2^{-n}$ et $\overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subseteq B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap O_n$ pour tout $n \geqslant 1$;

Posons alors $C_n := \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ pour tout $n \geqslant 0$. Par définition, les C_n sont des fermés non-vides de E, la suite (C_n) est décroissante, et $\mathrm{diam}(C_n) \to 0$ quand $n \to \infty$. D'après le Théorème des fermés emboîtés, on sait que $\bigcap_{n\geqslant 0} C_n$ est non-vide, réduite à un point $\{a\}$. Comme $C_n \subseteq O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $C_0 \subseteq O$, on a $a \in O \cap \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n = G \cap O$, ce qui termine la preuve. □

Exercice. Soit E un espace métrique quelconque. Montrer que si $O_1, \dots, O_N$ sont des ouverts denses de E, alors $O_1 \cap \cdots \cap O_N$ est encore dense dans E.

Corollaire 9.2. *Soit E un espace métrique topologiquement complet.*

- *Si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* suite *de fermés de E et si chaque F_n est d'intérieur vide dans E, alors $M := \bigcup_{\in\mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide ; et en particulier $E\backslash\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n \neq \varnothing$.*
- *De manière équivalente : si $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'un espace métrique topologiquement complet E et si $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur non-vide dans E, alors il existe au moins un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathring{F}_n \neq \varnothing$.*

Démonstration. Soit $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Si on pose $O_n := E\backslash F_n$, alors les O_n sont des ouverts denses de E. Donc $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} O_n$ est dense dans E ; autrement dit M est d'intérieur vide puisque $E\backslash G = M$. □

Corollaire 9.3. *Soit E un espace métrique topologiquement complet. Si $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une* suite *de fermés de E telle que $\bigcup_{\in\mathbb{N}} C_n = E$, alors $\Omega := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{C}_n$ est dense dans E.*

Démonstration. On va montrer que $E\backslash\Omega$ est d'intérieur vide. Comme $E = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$, on a

$$E\backslash\Omega = \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n\right) \Big\backslash \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{C}_n\right) \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C_n\backslash\mathring{C}_n).$$

Si on pose $F_n := C_n\backslash\mathring{C}_n$, alors les F_n sont des fermés de E car les C_n sont fermés ; et les F_n sont visiblement d'intérieur vide (micro-exo). Donc $E\backslash\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide d'après le Corollaire 9.2 □

Corollaire 9.4. *Soit E un espace métrique topologiquement complet. Si $(G_i)_{i\in I}$ est une famille dénombrable de G_δ denses de E, alors $G := \bigcap_{i\in I} G_i$ est encore un G_δ dense de E.*

Démonstration. Exo. □

Exemple 1. Si E est un espace métrique topologiquement complet et *sans point isolé*, alors E est nécessairement *non dénombrable*. En particulier :

- $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable ;
- $\mathbb{Q}$ n'est pas topologiquement complet.

Démonstration. On a déjà démontré ce résultat en utilisant le Théorème des fermés emboîtés. Avec le Théorème de Baire, ça va un peu plus vite.

Supposons que E soit dénombrable, et écrivons $E = \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Si on pose $F_n := \{x_n\}$, alors les F_n sont des fermés de E, et ils sont d'*intérieur vide* dans E car E n'a pas de point isolé. D'après le Théorème de Baire, $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$ doit encore être d'intérieur vide dans E, ce qui est absurde puisque $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = E$. □

Exemple 2. Il existe des fonctions continues sur $[0, 1]$ qui ne sont dérivables en aucun point.

Démonstration. On va utiliser le Théorème de Baire pour montrer que l'ensemble des fonctions continues nulle-part dérivable est dense dans l'espace de Banach $\mathcal{C}([0, 1])$, et donc en particulier non-vide. Mais on ne produira pas explicitement une telle fonction, ce qui est typique dans les démonstrations d'existence d'objets bizarres basées sur le Théorème de Baire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{O}_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0,1]);\ \forall x \in [0,1]\ :\ \sup_{y \neq x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} > n \right\}.$$

Fait 1. Chaque $\mathcal{U}_n$ est un ouvert de $\mathcal{C}([0,1])$.

Preuve du Fait 1. Fixons n, et posons $\mathcal{F}_n := \mathcal{C}([0,1]) \backslash \mathcal{O}_n$. Par définition, une fonction f appartient à $\mathcal{F}_n$ si et seulement si il existe un point $x \in [0,1]$ tel que la propriété suivante ait lieu :

$$(*) \qquad \forall y \in [0,1]\ :\ |f(y) - f(x)| \leqslant n\,|x - y|.$$

Notons $\mathbf{F}$ l'ensemble des couples $(x, f) \in [0,1] \times \mathcal{C}([0,1])$ vérifiant la propriété $(*)$. Comme l'application $(x, f) \mapsto f(x)$ est continue sur $[0,1] \times \mathcal{C}([0,1])$ (exo), on voit que l'ensemble $\mathbf{F}$ est un fermé de $[0,1] \times \mathcal{C}([0,1])$; et par définition de $\mathbf{F}$, on a l'équivalence

$$f \in \mathcal{F}_n \iff \exists x \in [0,1]\ :\ (x, f) \in \mathbf{F}.$$

Comme $[0,1]$ est compact, on en déduit que $\mathcal{F}_n$ est fermé dans $\mathcal{C}([0,1])$, d'après le Lemme 4.7 du Chapitre 4. Donc $\mathcal{U}_n$ est en effet ouvert. □

Fait 2. Chaque $\mathcal{O}_n$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$.

Preuve du Fait 2. On sait que l'ensemble des fonctions *lipschitziennes* est dense dans $\mathcal{C}([0,1]$: cela vient par exemple du fait que toute fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions affines par morceaux ; ou moins élémentairement du fait qu'une telle f est limite de uniforme de fonctions polynomiales (Théorème de Weierstrass), qui sont lipschitziennes car de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle compact $[0,1]$. Pour montrer que $\mathcal{U}_n$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$, il suffit donc de montrer qu'on peut approcher toute fonction lipschitzienne $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ par un élément de $\mathcal{U}_n$. Fixons g, et fixons $\varepsilon > 0$. On cherche $f \in \mathcal{U}_n$ telle que $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Comme g est lipschitzienne, il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\left| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \right| \leqslant C$$

pour tous $x, y \in [0,1]$, $x \neq y$.

Soit $M > 0$ à fixer ultérieurement, et soit $\theta : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue affine par morceaux de pente partout supérieure à M en valeur absolue et vérifiant $\|\theta\|_\infty \leqslant \varepsilon$. (Dessiner le graphe d'une telle fonction.) Enfin, posons $f := g + \theta$. On a évidemment $\|f - g\|_\infty \leqslant \varepsilon$.

Si x est un point quelconque de $[0,1]$, alors on peut trouver $y \neq x$ tel que

$$\left| \frac{\theta(y) - \theta(x)}{y - x} \right| \geqslant M.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| &\geqslant M - \left| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \right| \\ &\geqslant M - C \\ &> n \qquad \text{si on a choisi } M > n + C. \end{aligned}$$

Comme le point $x \in [0,1]$ est arbitraire, on en déduit que $f \in \mathcal{U}_n$. Ceci termine la preuve du Fait 2. □

D'après le théorème de Baire l'intersection de tous les ouverts $\mathcal{U}_n$ est dense dans $\mathcal{C}([0,1])$. Comme il est assez clair qu'une fonction f appartenant à tous les $\mathcal{U}_n$ n'est dérivable en aucun point (micro-exo), cela termine la preuve. $\square$

Exemple 3. Soit E un espace métrique topologiquement complet (par exemple un intervalle de $\mathbb{R}$), et soit $f : E \to \mathbb{R}$. S'il existe une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge *simplement* vers f, alors l'ensemble des points de continuité de f est dense dans E.

Démonstration. On va appliquer *2 fois* le Théorème de Baire. Dans la suite, on notera $\mathrm{Cont}(f)$ l'ensemble des points de continuité de f. Pour $\varepsilon > 0$, posons

$$O_\varepsilon := \{x \in E; \quad \exists V \text{ voisinage ouvert de } x \quad \text{tel que} \quad \forall y, z \in V \ \ |f(y) - f(z)| \leqslant \varepsilon\}.$$

Par définition, chaque ensemble O_ε est ouvert dans E. De plus, on vérifie sans difficulté (exo) qu'on a

$$\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} O_{1/p} = \mathrm{Cont}(f).$$

D'après le théorème de Baire, il suffit donc de montrer que chaque ouvert O_ε est dense dans E. Fixons $\varepsilon > 0$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$C_n := \big\{x \in E;\ \forall p, q \geqslant n \ :\ |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon/3\big\}.$$

Comme les fonctions f_n sont continues, les C_n sont des fermés de E. De plus, comme la suite (f_n) converge simplement, elle est de Cauchy en tout point, et on a donc $\bigcup_n C_n = E$. D'après le théorème de Baire (Corollaire 9.3), on en déduit que $\Omega := \bigcup_n \mathring{C}_n$ est dense dans E. On va montrer que Ω est contenu dans O_ε, ce qui terminera la démonstration.

Soit $x \in \Omega$. Par définition, il existe un entier n_0 et un voisinage ouvert V_1 de x tels que $V_1 \subseteq C_{n_0}$. Pour $y, z \in V_1$, on a alors

$$\begin{aligned} |f_p(y) - f_p(z)| \ &\leqslant |f_p(y) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)| + |f_{n_0}(z) - f_p(z)| \\ &\leqslant \varepsilon/3 + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)| + \varepsilon/3. \end{aligned}$$

En faisant $p \to \infty$, on en déduit

$$\forall y, z \in V_1 \ :\ |f(y) - f(z)| \leqslant 2\varepsilon/3 + |f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)|.$$

Mais la fonction f_{n_0} étant continue, on peut trouver un voisinage ouvert V_2 de x tel que $|f_{n_0}(y) - f_{n_0}(z)| \leqslant \varepsilon/3$ pour $y, z \in V_2$. Si on pose $V := V_1 \cap V_2$, alors V est un voisinage ouvert de x tel que

$$\forall y, z \in V \ :\ |f(y) - f(z)| \leqslant \varepsilon.$$

Donc $x \in O_\varepsilon$. $\square$

Remarque. Le résultat qu'on vient d'établir montre en particulier que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, alors la fonction F' possède nécessairement des points de continuité. En effet, F' est limite simple de la suite de fonctions continues $(f_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $f_n(x) := \frac{f(x+1/n)-f(x)}{1/n}$.

Chapitre 7

L'espace de Cantor

L'**espace de Cantor**, que l'on notera $\mathbf{C}$, est l'ensemble de toutes les suites infinies de 0 et de 1 :

$$\mathbf{C} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}.$$

On écrira les éléments de $\mathbf{C}$ sous la forme

$$\alpha = \big(\alpha(0), \alpha(1), \alpha(2), \dots\big),$$

où $\alpha(i) \in \{0,1\}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

On a vu au Chapitre 2 (Exercice 1.2) qu'on définit une distance $\mathbf{d}$ sur $\mathbf{C}$ en posant $\mathbf{d}(\alpha,\alpha) := 0$ et, pour $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ différents,

$$\mathbf{d}(\alpha,\beta) := 2^{-\mathbf{i}(\alpha,\beta)},$$

où $\mathbf{i}(\alpha,\beta)$ est le plus petit entier $i \geqslant 0$ tel que $\alpha(i) \neq \beta(i)$.

Dans ce micro-chapitre, on va démontrer quelques propriétés remarquables de l'espace métrique $\mathbf{C}$.

Lemme 1. *La convergence dans l'espace $\mathbf{C}$ est la convergence "coordonnée par coordonnée" : une suite (α_k) d'éléments de $\mathbf{C}$ converge vers $\alpha \in \mathbf{C}$ si et seulement si $\alpha_k(i) \to \alpha(i)$ pour tout $i \geqslant 0$; autrement dit, si pour tout $i \geqslant 0$, on a $\alpha_k(i) = \alpha(i)$ à partir d'un certain rang. En particulier, les "applications coordonnées" $\alpha \mapsto \alpha(i)$ sont continues sur $\mathbf{C}$.*

Démonstration. On la laisse en exo. $\square$

Corollaire. *L'espace $\mathbf{C}$ est compact.*

Démonstration. Comme l'espace à 2 éléments $\{0,1\}$ est compact, cela découle immédiatement du lemme et du "Théorème de Tikhonov dénombrable" (Théorème 5.1 du Chapitre 4). $\square$

Lemme 2. *Notons $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les suites* finies *de 0 et de 1. Pour $s = (s_0, \dots, s_n)$, posons $W_s := \big\{\alpha \in \mathbf{C};\ \alpha \text{ commence par } s\big\}$. Alors les W_s sont ouverts et fermés dans $\mathbf{C}$, et ils forment une base pour la topologie de $\mathbf{C}$.*

Démonstration. On a $W_s = \big\{\alpha \in \mathbf{C};\ \alpha(i) = s_i \text{ pour } i = 0, \dots, n\big\}$, donc W_s est ouvert et fermé car les applications coordonnées $\alpha \mapsto \alpha(i)$ sont continues de $\mathbf{C}$ dans $\{0,1\}$ et les singletons $\{s_i\}$ sont ouverts et fermés dans $\{0,1\}$.

Si O est un ouvert quelconque de $\mathbf{C}$ et si $\alpha \in O$, alors on peut trouver un entier n tel que $B(\alpha, 2^{-n}) \subseteq O$. Si on pose $s := (\alpha(0), \dots, \alpha(n))$, alors $\alpha \in W_s$, et $W_s \subseteq \overline{B}(\alpha, 2^{-n-1})$ par définition de la distance $\mathbf{d}$; donc $W_s \subseteq B(\alpha, 2^{-n}) \subseteq O$. Ainsi, les W_s forment une base pour la topologie de $\mathbf{C}$. $\square$

Corollaire. *L'espace* $\mathbf{C}$ *est* ***totalement discontinu*** *: les seules parties connexes de* $\mathbf{C}$ *sont* $\varnothing$ *et les singletons.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que si $A \subseteq \mathbf{C}$ contient au moins 2 points $\alpha \neq \beta$, alors A n'est pas connexe. Par le lemme, on peut trouver $s \in \mathcal{S}$ tel que $\alpha \in W_s$ et $\beta \notin W_s$. Alors $W_s \cap A$ est ouvert et fermé dans A, non-vide et différent de A ; donc A n'est pas connexe. □

Lemme 3. *L'espace* $\mathbf{C}$ *n'a pas de point isolé.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathbf{C}$. Si V est un voisinage quelconque de α, on peut trouver une suite finie $s \in \mathcal{S}$ telle que $\alpha \in W_s$ et $W_s \subseteq V$. Comme W_s est clairement infini et même non-dénombrable (exo), on en déduit que tout voisinage V de α est infini ; et donc que α n'est pas un point isolé de $\mathbf{C}$. □

Remarque. On peut montrer que les 3 propriétés topologiques de $\mathbf{C}$ qu'on vient de mettre en évidence *caractérisent* complètement $\mathbf{C}$ en tant qu'espace topologique : *Tout espace métrique compact, totalement discontinu et sans point isolé est homéomorphe à* $\mathbf{C}$. La preuve n'est pas du tout hors de portée, mais on ne la fera pas.

Proposition. *Tout espace métrique* X *complètement métrisable et sans point isolé contient une "copie" de* $\mathbf{C}$*, i.e. il existe un compact* $K \subseteq X$ *homéomorphe à* $\mathbf{C}$.

Démonstration. Soit d une distance définissant la topologie de X et telle que (X, d) soit complet. Comme X n'a pas de point isolé, il contient au moins 2 points ; et donc, on peut trouver deux ouverts non vides $V_0, V_1 \subseteq X$ tels que $\overline{V_0} \cap \overline{V_1} = \varnothing$, avec de plus $\mathrm{diam}(\overline{V_0}) \leqslant \frac{1}{2}$ et $\mathrm{diam}(\overline{V_1}) \leqslant \frac{1}{2}$. On peut faire de même dans V_0 et V_1, et ainsi de suite. De façon précise, en notant comme d'habitude $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les suites finies de 0 et de 1, on construit une famille $(V_s)_{s \in \mathcal{S}}$ d'ouverts non vides de X telle que pour tout $s \in \mathcal{S}$, les choses suivantes aient lieu :

- $\overline{V_{s0}} \cup \overline{V_{s1}} \subseteq V_s$ et $\overline{V_{s0}} \cap \overline{V_{s1}} = \varnothing$;
- $\mathrm{diam}(\overline{V_s}) \leqslant 2^{-|s|}$, où $|s|$ est la longueur de s.

Si $\alpha \in \mathbf{C}$ alors l'intersection $\bigcap_{n=0}^{\infty} \overline{V_{(\alpha(0),\dots,\alpha(n))}}$ est non vide et réduite à un point $\{x_\alpha\}$, d'après le théorème des fermés emboîtés. On peut donc poser $j(\alpha) := x_\alpha$, ce qui définit une application $j : \mathbf{C} \to X$.

L'application $j : \mathbf{C} \to X$ est *continue*. En effet, soit $\alpha \in \mathbf{C}$ quelconque. Si V est un voisinage ouvert de $j(\alpha) = x_\alpha$, alors on peut trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $V_{(\alpha(0),\dots,\alpha(n))} \subseteq V$ car $\mathrm{diam}(V_{(\alpha(0),\dots,\alpha(n))}) \to 0$ quand $n \to \infty$. Si on pose $s := (\alpha(0), \dots, \alpha(n))$, alors toute suite $\beta \in \mathbf{C}$ qui commence par s est telle que $j(\beta) = x_\beta \in V_s \subseteq V$; donc W_s est un voisinage ouvert de α tel que $j(W_s) \subseteq V$.

L'application j est de plus *injective*. En effet, si $\alpha \neq \beta$, soit n le plus petit indice tel que $\alpha_n \neq \beta_n$. Alors $V_{(\alpha(0),\dots,\alpha(n))} \cap V_{(\beta(0),\dots,\beta(n))} = \varnothing$, et donc $j(\alpha) = x_\alpha \neq x_\beta = j(\beta)$ puisque $x_\alpha \in V_{(\alpha(0),\dots,\alpha(n))}$ et $x_\beta \in V_{(\beta(0),\dots,\beta(n))}$.

Comme $\mathbf{C}$ est compact, on peut maintenant conclure que $K := j(\mathbf{C}) \subseteq X$ est un compact homéomorphe à $\mathbf{C}$. □

Exemple. Soit $j : \mathbf{C} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$j(\alpha) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2\alpha(i)}{3^{i+1}}.$$

Alors j est injective et continue, donc $\mathbf{C}_3 := j(\mathbf{C}) \subseteq \mathbb{R}$ est homéomorphe à $\mathbf{C}$. L'ensemble $\mathbf{C}_3$ s'appelle l'**ensemble triadique de Cantor**. Il est contenu dans $[0,1]$ et contient 0 et 1.

Démonstration. La série définissant $j(\alpha)$ converge normalement sur $\mathbf{C}$, donc uniformément. Comme les applications coordonnées $\alpha \mapsto \alpha(i)$ sont continues, on en déduit que l'application j est continue.

Montrons l'injectivité. Soient $\alpha, \beta \in \mathbf{C}$ avec $\alpha \neq \beta$: on veut montrer que $j(\alpha) \neq j(\beta)$. Soit $i_0 := \mathbf{i}(\alpha, \beta)$, le plus petit entier $i \geqslant 0$ tel que $\alpha(i) \neq \beta(i)$. Par définition de i_0, on a $\alpha(i) = \beta(i)$ pour $i < i_0$ et $|\beta(i_0) - \alpha(i_0)| = 1$. Donc

$$\begin{aligned} |j(\beta) - j(\alpha)| &= \left| \sum_{i=i_0}^{\infty} \frac{2(\beta(i) - \alpha(i))}{3^{i+1}} \right| \\ &\geqslant \frac{2}{3^{i_0+1}} - 2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{|\beta(i) - \alpha(i)|}{3^{i+1}} \\ &\geqslant \frac{2}{3^{i_0+1}} - 2 \sum_{i=i_0+1}^{\infty} \frac{1}{3^{i+1}} \\ &= \frac{2}{3^{i_0+1}} - \frac{2}{3^{i_0+2}} \times \frac{1}{1-1/3} \\ &= \frac{1}{3^{i_0+1}} > 0; \end{aligned}$$

et donc en effet $j(\alpha) \neq j(\beta)$.

Comme j est injective et que $\mathbf{C}$ est compact, j est un homéomorphisme de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C}_3 = j(\mathbf{C})$. Le fait que $\{0,1\} \subseteq \mathbf{C}_3 \subseteq [0,1]$ est laissé en exo. $\square$

Exercice. On définit une suite de fermés $L_n \subseteq [0,1]$ de la manière suivante : $L_0 = [0,1]$, $L_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $L_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$, et ainsi de suite (À chaque étape, on coupe en 3 les intervalles déjà construits et on enlève l'intervalle du milieu.) Montrer que $\mathbf{C}_3 = \bigcap_{n \geqslant 0} L_n$.

On vient de voir que l'espace de Cantor est contenu dans tout espace raisonnablement "touffu". Le théorème suivant va dans l'autre sens : il montre que $\mathbf{C}$ est d'une certaine façon "plus gros" que n'importe quel espace métrique compact.

Théorème. *Tout espace métrique compact est* image continue *de* $\mathbf{C}$. *Autrement dit : si K est un espace métrique compact, alors il existe une surjection continue $\phi : \mathbf{C} \twoheadrightarrow K$.*

Dans la preuve de ce théorème, on aura besoin du lemme suivant, intéressant pour lui même.

Lemme. *Si F est un fermé de $\mathbf{C}$, il existe une **rétraction continue** de $\mathbf{C}$ sur F, i.e. une application continue $r : \mathbf{C} \to F$ telle que $r(\beta) = \beta$ pour tout $\beta \in F$.*

Preuve du lemme. Soit d la distance sur $\mathbf{C}$ définie par

$$d(\alpha, \beta) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{|\beta(i) - \alpha(i)|}{3^i}.$$

La fonction d est continue sur $\mathbf{C}\times\mathbf{C}$ par convergence normale de la série et par continuité des applications coordonnées. (En fait, il n'est pas très difficile de montrer que d définit la topologie de $\mathbf{C}$.) En particulier, si $\alpha\in\mathbf{C}$ est fixé, la fonction $\beta\mapsto d(\alpha,\beta)$ est continue sur le compact F ; donc il existe au moins 1 point $\beta\in F$ tel que $d(\alpha,\beta)$ soit minimale. De plus, comme l'application $\mathbf{C}\ni\varepsilon\mapsto\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\varepsilon_i}{3^i}$ est *injective* (*cf* la preuve concernant l'ensemble triadique de Cantor), on voit que si α est fixé, alors

$$d(\alpha,\beta)=d(\alpha,\beta')\implies|\beta(i)-\alpha(i)|=|\beta'(i)-\alpha(i)|\quad\text{pour tout } i\in\mathbb{N}\implies\beta=\beta'.$$

Donc, pour tout $\alpha\in\mathbf{C}$, il existe *exactement 1* point $\beta\in F$ tel que $d(\alpha,\beta)$ soit minimale. On note ce point $r(\alpha)$. Par définition, on a $r(\beta)=\beta$ pour tout $\beta\in F$. De plus, le graphe de l'application $r:\mathbf{C}\to F$ est fermé dans $\mathbf{C}\times F$, car pour $(\alpha,\beta)\in\mathbf{C}\times F$ on a l'équivalence

$$r(\alpha)=\beta\iff\forall\beta'\in F\ :\ d(\alpha,\beta)\leqslant d(\alpha,\beta').$$

Donc le graphe de r est *compact* puisque $\mathbf{C}\times F$ est compact ; et donc r est continue d'après le Lemme du graphe compact. $\square$

Preuve du théorème. Soit K un espace métrique compact quelconque. Grâce au Lemme 4, il suffit de montrer qu'il existe un fermé $F\subseteq\mathbf{C}$ et une surjection continue $s=F\twoheadrightarrow K$. En effet, comme il existe une rétraction continue $r:\mathbf{C}\to F$ (qui est en particulier une surjection continue), on obtiendra alors une surjection continue $\phi:\mathbf{C}\twoheadrightarrow K$ en posant simplement $\phi:=s\circ r$.

Comme tout espace métrique compact, K est *séparable* et donc la topologie de K possède une base dénombrable $\mathcal{B}=(V_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Pour construire une surjection continue de $\mathbf{C}$ sur K, l'idée de base est l'observation suivante : on peut "coder" tout point $x\in K$ par une sous-suite de la suite (V_i) ; de façon précise, si $x\in K$, alors $\{x\}=\bigcap_{i\in I(x)}V_i$, où $I(x):=\{i\in\mathbb{N};\ x\in V_i\}$.

Pour tout $i\in\mathbb{N}$, on posera

$$E_i(0):=K\backslash V_i\qquad\text{et}\qquad E_i(1):=\overline{V_i}.$$

Par définition, $E_i(0)$ et $E_i(1)$ sont des fermés de K.

Fait 1. Pour tout $\alpha\in\mathbf{C}$, l'ensemble $E_\alpha:=\bigcap_{i\in\mathbb{N}}E_i\big(\alpha(i)\big)$ contient au plus 1 point.

Preuve du Fait 1. Soient x et x' deux points de K tels que $x\neq x'$. Comme $\mathcal{B}$ est une base pour la topologie de K, on peut trouver $i\in\mathbb{N}$ tel que $x\in V_i$ et $x'\notin\overline{V_i}$. Alors $x\notin E_\alpha$ si $\alpha(i)=0$, et $x'\notin E_\alpha$ si $\alpha(i)=1$; donc E_α ne peut pas contenir les 2 points x et x'. $\square$

Fait 2. L'ensemble $F:=\{\alpha\in\mathbf{C};\ E_\alpha\neq\varnothing\}$ est un fermé de $\mathbf{C}$.

Preuve du Fait 2. Par définition, on a l'équivalence suivante pour tout $\alpha\in\mathbf{C}$:

$$\alpha\in F\iff\exists x\in K\ :\ x\in E_\alpha.$$

Comme K est compact, il suffit donc, d'après le Lemme 4.7 du Chapitre 4, de montrer que l'ensemble

$$\mathcal{E}:=\big\{(\alpha,x)\in\mathbf{C}\times K;\ x\in E_\alpha\big\}$$

est un fermé de $\mathbf{C}\times K$. (Si on préfère ne pas utiliser ce Lemme 4.7, on peut aussi dire ceci : si $\mathcal{E}$ est fermé dans $\mathbf{C}\times K$, alors il est compact car $\mathbf{C}\times K$ est compact ; et donc F est fermé en tant qu'image d'un compact par une application continue.)

Maintenant, la définition de E_α montre que pour tout $(\alpha, x) \in \mathbf{C} \times K$, on a l'équivalence suivante :

$$(\alpha, x) \in \mathcal{E} \iff \forall i \in \mathbb{N} \;:\; \big(\alpha(i) = 0 \text{ et } x \in E_i(0)\big) \quad \text{ou} \quad \big(\alpha(i) = 1 \text{ et } x \in E_i(1)\big).$$

Autrement dit,

$$\mathcal{E} = \bigcap_{i \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_i,$$

où, pour $i \in \mathbb{N}$:

$$\mathcal{E}_i := \Big\{ (\alpha, x) \in \mathbf{C} \times K ;\; \big(\alpha(i) = 0 \text{ et } x \in E_i(0)\big) \quad \text{ou} \quad \big(\alpha(i) = 1 \text{ et } x \in E_i(1)\big) \Big\}.$$

Comme l'application $\alpha \mapsto \alpha(i)$ est continue sur $\mathbf{C}$ et que les ensembles $E_i(0)$ et $E_i(1)$ sont des fermés de K, on voit que chaque ensemble $\mathcal{E}_i$ est un fermé de $\mathbf{C} \times K$. Donc $\mathcal{E}$ est également fermé. □

Fait 3. Pour tout $\alpha \in F$, notons $s(\alpha)$ l'unique point de l'ensemble E_α. Alors l'application $s : F \to K$ est surjective et continue.

Preuve du Fait 3. Le graphe de l'application s est précisément l'ensemble $\mathcal{E}$ introduit dans la preuve du Fait 2. On a vu que $\mathcal{E}$ est un fermé de $\mathbf{C} \times K$. Donc $\mathcal{E}$ est compact car $F \times K$ est compact ; et donc s est continue d'après le Lemme du graphe compact.

Soit $x \in K$ quelconque, et soit $\alpha \in \mathbf{C}$ défini comme suit : $\alpha(i) = 0$ si $x \in V_i$ et $\alpha(i) = 1$ si $x \notin V_i$. Par définition, on a $x \in E_i\big(\alpha(i)\big)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; donc $x \in E_\alpha$, autrement dit $\alpha \in F$ et $x = s(\alpha)$. Donc l'application s est surjective. □

Par les Faits 2 et 3, la preuve du théorème est maintenant terminée. □

Voici une conséquence spectaculaire du théorème qu'on vient de démontrer.

Corollaire 1. *Si K est un* compact convexe *d'un espace vectoriel normé E, alors il existe une surjection continue de l'intervalle* $[0, 1]$ *sur K.*

Démonstration. Soit $\mathbf{C}_3 \subseteq [0, 1]$ l'ensemble triadique de Cantor. Comme $\mathbf{C}_3$ est homéomorphe à $\mathbf{C}$, on peut trouver une surjection continue $\phi : \mathbf{C}_3 \to K$. On va prolonger ϕ en une application continue Φ définie sur $[0, 1]$ et encore à valeurs dans K. L'application $\Phi : [0, 1] \to K$ sera alors surjective puisque ϕ l'est déjà, donc elle fera le travail.

Comme $\mathbf{C}_3$ est un fermé de $[0, 1]$ contenant 0 et 1, l'ensemble $[0, 1] \backslash \mathbf{C}_3$ est un ouvert de $[0, 1]$ contenu dans $]0, 1[$; donc $[0, 1] \backslash \mathbf{C}_3$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Par conséquent, $[0, 1] \backslash \mathbf{C}_3$ est réunion d'une famille (dénombrable) d'intervalles ouverts deux à deux disjoints $]a_i, b_i[$, à savoir les composantes connexes de $[0, 1] \backslash \mathbf{C}_3$, dont les extrémités a_i et b_i appartiennent nécessairement à $\mathbf{C}_3$ (exo). On définit alors $\Phi : [0, 1] \to E$ de la façon suivante : $\Phi(t) \equiv \phi(t)$ sur $\mathbf{C}_3$ (donc en particulier en tous les points a_i, b_i), et Φ est *affine* sur chaque intervalle $[a_i, b_i]$.

Montrons que Φ est à valeurs dans K. Comme $\Phi \equiv \phi$ sur $\mathbf{C}_3$, il suffit de montrer que $\Phi(t) \in K$ pour tout $t \in [0, 1] \backslash \mathbf{C}_3$; ce qui n'est pas difficile : le point t appartient à un certain intervalle $]a_i, b_i[$, donc t est combinaison convexe de a_i et b_i, donc $\Phi(t)$ est combinaison convexe de $\Phi(a_i)$ et $\Phi(b_i)$ car Φ est affine sur $[a_i, b_i]$, et donc $\Phi(t) \in K$ car $\Phi(a_i) = \phi(a_i)$ et $\Phi(b_i) = \phi(b_i)$ appartiennent à K (qui est supposé convexe).

La continuité de Φ "se voit bien", mais il faut l'écrire soigneusement. Comme la restriction de Φ à chaque intervalle ouvert $]a_i, b_i[$ est continue (car affine), on voit que Φ est continue en tout point de l'ouvert $[0,1]\backslash \mathbf{C}_3$ (micro-exo). Donc il suffit de montrer que Φ est continue en tout point $t_0 \in \mathbf{C}_3$. On va supposer que $0 < t_0 < 1$ (l'adaptation aux cas $t_0 = 0$ et $t_0 = 1$ est laissée en exo). Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme $\Phi_{|\mathbf{C}_3} = \phi$ est continue, on peut trouver $\eta > 0$ tel que $\|\Phi(t) - \Phi(t_0)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbf{C}_3$ tel que $|t - t_0| < \eta$. Comme $0 < t_0 < 1$, le point t_0 n'est ni "isolé à gauche" ni "isolé à droite" dans $\mathbf{C}_3$ (exo). Donc on peut trouver $\alpha, \beta \in \mathbf{C}_3$ tels que $t_0 - \eta < \alpha < t_0 < \beta < t_0 + \eta$. Choisissons alors $\delta > 0$ tel que $[t_0 - \delta, t_0 + \delta] \subseteq [\alpha, \beta]$. Comme $\delta \leqslant \eta$, on a $\|\Phi(t) - \Phi(t_0)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in \mathbf{C}_3$ tel que $|t - t_0| < \delta$. Montrons qu'on a également $\|\Phi(t) - \Phi(t_0)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [0,1]\backslash \mathbf{C}_3$ vérifiant $|t - t_0| \leqslant \delta$. Par le choix de δ, on a $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$. Comme α et β appartiennent à $\mathbf{C}_3$, on en déduit que le point t appartient à un intervalle $]a_i, b_i[$ avec $\alpha \leqslant a_i < b_i \leqslant \beta$, puisque $]a_i, b_i[$ est entièrement contenu dans $[0,1]\backslash \mathbf{C}_3$. Comme a_i et b_i sont dans $\mathbf{C}_3$, on a donc $\|\Phi(a_i) - \Phi(t_0)\| \leqslant \varepsilon$ et $\|\Phi(b_i) - \Phi(t_0)\| \leqslant \varepsilon$. Mais $\Phi(t)$ est combinaison convexe de $\Phi(a_i)$ et de $\Phi(b_i)$ puisque Φ est affine sur $[a_i, b_i]$; donc on a aussi $\|\Phi(t) - \Phi(t_0)\| \leqslant \varepsilon$ par convexité de la boule $\overline{B}\big(\Phi(t_0), \varepsilon\big)$. Ainsi, on a trouvé un "δ de continuité" pour Φ associé à ε. □

Corollaire 2. *Il existe une surjection continue de l'intervalle* $[0,1]$ *sur le carré* $[0,1] \times [0,1]$ *; autrement dit, il existe un chemin* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ *dont l'image remplit tout un carré. Un tel chemin est souvent appelé une* ***courbe de Peano****.*

Démonstration. On applique le Corollaire 1 avec $K := [0,1] \times [0,1] \subseteq \mathbb{R}^2$. □

Autre preuve. On va démontrer le Corollaire 2 directement, sans faire appel au théorème. Pour cela, on a besoin des deux faits suivants.

Fait 1. L'espace $\mathbf{C}$ est homéomorphe à $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$.

Preuve du Fait 1. Pour tout $\alpha \in \mathbf{C}$, notons α^0 et α^1 les éléments de $\mathbf{C}$ définis par $\alpha^0 := (\alpha(0), \alpha(2), \alpha(4), \cdots)$ et $\alpha^1 := (\alpha(1), \alpha(3), \alpha(5), \cdots)$. Il est assez clair que l'application $\alpha \mapsto (\alpha^0, \alpha^1)$ est une bijection de $\mathbf{C}$ sur $\mathbf{C} \times \mathbf{C}$, et facile de vérifier que c'est un homéomorphisme (exo). □

Fait 2. Il existe une surjection continue de $\mathbf{C}$ sur $[0,1]$.

Preuve du Fait 2. C'est un cas très particulier du théorème, qui se démontre à la main. Soit $s : \mathbf{C} \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$s(\alpha) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\alpha(i)}{2^{i+1}}.$$

L'application s est bien définie et continue par convergence normale de la série et continuité des applications $\alpha \mapsto \alpha(i)$. Il est assez clair que s est à valeurs dans $[0,1]$ (micro-exo). Enfin, s est surjective de $\mathbf{C}$ sur $[0,1]$ car tout nombre réel $x \in [0,1]$ admet un "développement en base 2". □

En appliquant le Fait 2 puis le Fait 1 et en se souvenant que $\mathbf{C}$ est homéomorphe à $\mathbf{C}_3$, on voit (exo) qu'il existe une surjection continue $\phi : \mathbf{C}_3 \to [0,1] \times [0,1]$. En raisonnant comme dans la preuve du Corollaire 1, on montre alors que ϕ se prolonge en une surjection continue $\Phi : [0,1] \to [0,1] \times [0,1]$. □

Exercice. Le but de ce long exercice est de montrer que tout espace métrique compact totalement discontinu et sans point isolé est homéomorphe à $\mathbf{C}$. Dans ce qui suit, on fixe un tel espace métrique (K, d).

(1) Montrer que tout point $x \in K$ possède une base de voisinages formée d'ensembles ouverts fermés. (Utiliser le Corollaire 6.8 du Chapitre 5.)

(2) Déduire de (1) que si $V \subseteq K$ est ouvert fermé et si $\varepsilon > 0$ est donné, alors V est réunion d'un nombre fini d'ensembles ouverts fermés deux à deux disjoints de diamètre $\leqslant \varepsilon$.

(3) Montrer que si $W \subseteq K$ est un ouvert fermé non-vide alors, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut partitionner W en k ouverts fermés non-vides.

(4) En utilisant (2) et (3), montrer que si $V \subseteq K$ est un ouvert fermé non-vide et si $\varepsilon > 0$ est donné, alors, pour tout entier N assez grand, on peut partitionner V en 2^N ouverts fermés non-vides de diamètre $\leqslant \varepsilon$.

(5) On note $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les suites finies de 0 et de 1 (y compris la suite vide $\varnothing$). Montrer qu'on peut construire une famille $(V_s)_{s\in\mathcal{S}}$ d'ouverts fermés non-vides de K de sorte que les choses suivantes aient lieu :
   - $V_\varnothing = K$;
   - $V_{s0} \cap V_{s1} = \varnothing$ et $V_{s0} \cup V_{s1} = V_s$ pour tout $s \in \mathcal{S}$;
   - $\operatorname{diam}(V_s) \to 0$ quand $|s| \to \infty$.

(6) Démontrer le résultat annoncé.