

Intégrales

Licence de Physique-Chimie

Table des matières

Chapitre 1. Intégrale des fonctions d'une variable	5
1. Définition et propriétés de l'intégrale	5
2. le "théorème fondamental de l'analyse"	10
3. Intégration par parties ; changements de variable	13
4. Intégration sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert	17
5. Calcul approché ; sommes de Riemann	21
6. Le "théorème de convergence monotone"	23
Chapitre 2. Intégrales multiples	27
1. Volumes N -dimensionnels	27
2. Définition et propriétés de l'intégrale	29
3. Intégrales "itérées"	31
4. Changements de variables	39
5. Centre de gravité ; théorème de Guldin	55
Chapitre 3. Intégrales curvilignes	61
1. Chemins et courbes	61
2. Intégrale d'une fonction sur une courbe ; longueur	64
3. Formes différentielles, champs de vecteurs	66
4. La formule de Green-Riemann	73
Chapitre 4. Intégrales de surface	83
1. Surfaces	83
2. Intégrale d'une fonction sur une surface ; aire	87
3. Intégration par tranches	90
4. Formule de Stokes et formule de la divergence	93

Intégrale des fonctions d'une variable

1. Définition et propriétés de l'intégrale

La définition de l'intégrale va se faire en 3 étapes : fonctions positives, fonctions à valeurs réelles pouvant changer de signe, et fonctions à valeurs complexes. Toutes les propriétés de l'intégrale se déduisent de manière assez formelle du cas des fonctions positives.

1.1. Fonctions positives. Une fonction f définie sur une partie I de \mathbb{R} sera dite **positive** si elle prend ses valeurs dans $[0, \infty]$. Le fait d'autoriser la fonction à prendre la valeur ∞ n'est pas une pédanterie gratuite : on en a vraiment besoin dans certaines situations.

On peut calculer avec ∞ comme avec n'importe quel nombre, à un détail près : il faut donner un sens à $0 \times \infty$ et $\infty \times 0$. Par *convention*, on posera

$$0 \times \infty = 0 = \infty \times 0.$$

Bien entendu, on a également $\alpha + \infty = \infty = \infty + \alpha$ pour tout "nombre" $\alpha \in [0, \infty]$, et $\alpha \times \infty = \infty = \infty \times \alpha$ si $\alpha > 0$. En revanche, il faut se méfier des soustractions : $\alpha - \beta$ n'a pas de sens si $\alpha = \infty = \beta$.

DÉFINITION 1.1. (sous-graphe)

Soit I une partie de \mathbb{R} , et soit f une fonction positive définie sur I . (Le domaine de définition de f peut être strictement plus grand que I). Le **sous-graphe de f au dessus de I** est l'ensemble

$$\text{SG}(f, I) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}; x \in I \text{ et } 0 \leq \lambda < f(x)\}.$$

Autrement dit $\text{SG}(f, I)$ est la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et le graphe la restriction de f à l'ensemble I . *Un dessin est indispensable ici!*

Il faut tout de suite prendre conscience du fait que le sous-graphe est *une partie du plan* $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$. Par suite, $\text{SG}(f, I)$ possède une **aire**. On considérera ici que tout le monde a une idée intuitive de ce qu'est une aire. On verra au fur et à mesure quelles sont les propriétés des aires nécessaires au développement de la théorie (sans vraiment insister dessus), et ces propriétés seront formulées explicitement dans le chapitre suivant quand on définira l'intégrale des fonctions de plusieurs variables.

DÉFINITION 1.2. (intégrale)

Soit f une fonction positive définie sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$. L'**intégrale de f sur l'ensemble I** est l'aire du sous-graphe de f au dessus de I ; on la note $\int_I f$ ou $\int_I f(x) dx$. Ainsi

$$\int_I f = \text{aire}(\text{SG}(f, I)).$$

Remarque 1. Au lieu de $\int_I f(x) dx$, on peut écrire $\int_I f(t) dt$ ou $\int_I f(u) du$. Cela dépend du *nom* qu'on a donné à la variable (x, t, u, \dots) , qui est “muette” dans l'écriture de l'intégrale. (De même, l'indice i est muet dans une somme $\sum_{i=0}^n x_i$). La notation $\int_I f(x) dx$ sera “expliquée” plus loin.

Remarque 2. Par définition $\int_I f$ est un nombre positif, éventuellement égal à ∞ . Par exemple, si $f = \mathbf{1}$, la fonction constante égale à 1, alors $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1} = \infty$, car la bande comprise entre l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = 1$ a une aire infinie.

Remarque 3. Si f est définie sur un intervalle $[a, b]$, alors

$$\int_{[a,b]} f = \int_{]a,b[} f = \int_{[a,b[} f = \int_{]a,b]} f,$$

ce qui se voit immédiatement en faisant un dessin : la partie de $\text{SG}(f, I)$ située au dessus des abscisses a et b est constituée de deux segments (semi-ouverts) verticaux, qui ont une aire nulle et ne contribuent donc pas au calcul de l'aire de $\text{SG}(f, [a, b])$. Ainsi, l'intégrale $\int_{(a,b)} f$ ne dépend pas de la nature de l'intervalle (a, b) (ouvert, fermé ou semi-ouvert). Il n'y a donc aucune ambiguïté à poser

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{(a,b)} f$$

pour toute fonction positive définie sur (a, b) . Remarquons en passant qu'on a

$$\int_a^a f(x) dx = 0.$$

On utilisera aussi la notation \int_a^b dans le cas d'un intervalle (a, b) non borné, i.e. si $a = -\infty$ ou $b = \infty$. Ainsi, $\int_{-\infty}^b$ est synonyme de $\int_{(-\infty, b)}$, etc.

Exemple 1. (intégrale d'une constante)

Supposons que I soit un intervalle, et notons $|I|$ sa longueur : $|I| = b - a$ si I est un intervalle borné (a, b) , et $|I| = \infty$ si I est non-borné. Si la fonction f est **constante**, $f(x) \equiv C$, alors

$$\int_I C = C \times |I|.$$

Si I est un intervalle borné (a, b) , cela s'écrit encore

$$\int_a^b C dx = C \times (b - a).$$

DÉMONSTRATION. C'est évident en faisant un dessin : le sous-graphe $\text{SG}(f, I)$ est un rectangle de base $|I|$ et de hauteur C (éventuellement infinies), dont l'aire vaut $C \times |I|$. \square

Exemple 2. Soient a, b vérifiant $0 \leq a < b$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x$ (c'est une fonction positive car $a \geq 0$). En faisant un dessin, on voit que l'aire du sous-graphe $\text{SG}(f, [a, b])$ est la différence entre l'aire d'un “grand” triangle rectangle isocèle de base b et celle d'un “petit” triangle rectangle isocèle de base a . On a donc

$$\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Exemple 3. En utilisant uniquement la définition, on ne voit pas très bien comment calculer une intégrale aussi simple que $\int_0^1 x^2 dx$.

PROPOSITION 1.3. *L'intégrale des fonctions positives possède les propriétés suivantes.*

- (1) Additivité par rapport au domaine. Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$ pour toute fonction positive f définie sur I . En particulier, si f est définie sur un intervalle (a, b) et si $a < c < b$, alors on a la **relation de Chasles**

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

- (2) Croissance. Si $f \leq g$ sur I , alors $\int_I f \leq \int_I g$.

- (3) Linéarité. Si f et g sont des fonctions positives définies sur I , alors $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$, et $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$ pour tout nombre réel $\lambda \geq 0$.

DÉMONSTRATION. (1) En faisant un dessin on voit que $\text{SG}(f, I)$ est la réunion disjointe de $\text{SG}(f, I_1)$ et $\text{SG}(f, I_2)$, donc l'aire de $\text{SG}(f, I)$ est la somme des deux aires, i.e. $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$. La relation de Chasles s'obtient en écrivant $(a, b) = (a, c] \cup]c, b)$.

La partie (2) est évidente en faisant un dessin : si $f \leq g$, alors $\text{SG}(f, I)$ est contenu dans $\text{SG}(g, I)$, et donc l'aire de $\text{SG}(f, I)$ n'est pas plus grande que celle de $\text{SG}(g, I)$.

En revanche, la partie (3) n'est *absolument pas* évidente. On la démontrera à la fin de ce chapitre (section 6). \square

Remarque 1. Malgré ce qu'on vient de dire concernant la linéarité, il est très facile de démontrer qu'on a $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$ si l'une des deux fonctions est *constante*. En effet, si par exemple $f(x) \equiv C < \infty$, alors un dessin montre que $\text{SG}(f+g, I)$ est la réunion disjointe de $\text{SG}(f, I)$ et d'un ensemble A qui est un **translaté** de $\text{SG}(g, I)$, plus précisément, l'image de $\text{SG}(g, I)$ par la translation verticale de vecteur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ C \end{pmatrix}$. Comme les aires s'ajoutent et sont *invariantes par translations*, on a donc

$$\text{aire}(\text{SG}(f+g, I)) = \text{aire}(\text{SG}(f, I)) + \text{aire}(A) = \text{aire}(\text{SG}(f, I)) + \text{aire}(\text{SG}(g, I)),$$

autrement dit $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$. On aura besoin de ce résultat pour démontrer le "théorème fondamental de l'analyse".

Remarque 2. Il y a un autre cas où il est très facile de montrer directement à partir de la définition qu'on a $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$: c'est le cas où f et g sont "portées par des ensembles disjoints" ; autrement dit, lorsqu'il existe $I_f, I_g \subset I$ avec $I_f \cap I_g = \emptyset$ tels que f est nulle en dehors de I_f et g est nulle en dehors de I_g . Les détails sont laissés en exercice.

Exercice. Si $I \subset \mathbb{R}$, la **fonction indicatrice de I** est une fonction sur \mathbb{R} notée $\mathbf{1}_I$, définie par

$$\mathbf{1}_I(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in I \\ 0 & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty]$, on a $\int_I f = \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_I f$.

1.2. Fonctions de signe quelconque.

DÉFINITION 1.4. (partie positive et partie négative)

Soit f une fonction à valeurs réelles (non nécessairement positive) définie sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$. La **partie positive** et la **partie négative** de f sont les fonctions f^+ et f^- définies par

$$f^+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{si } f(x) < 0 \end{cases} \quad f^-(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{si } f(x) < 0 \end{cases}$$

PROPRIÉTÉS. Par définition, f^+ et f^- sont des fonctions *positives*, et on a

$$f = f^+ - f^- \quad \text{et} \quad |f| = f^+ + f^-.$$

Enfin, f^+ et f^- sont “portées” par les ensembles disjoints $I^+ = \{x; f(x) > 0\}$ et $I^- = \{x; f(x) < 0\}$, de sorte qu'on a *par définition de l'intégrale*

$$\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-.$$

DÉFINITION 1.5. (intégrale d'une fonction sommable)

Soit f une fonction à valeurs réelles définie sur $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est **sommable** sur I si on a $\int_I f^+ < \infty$ et $\int_I f^- < \infty$. Dans ce cas, on définit l'intégrale de f sur I par la formule

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-.$$

Remarque. Cette définition a bien un sens car $\int_I f^+$ et $\int_I f^-$ sont des “vrais” nombres (ils ne valent pas ∞).

INTERPRÉTATION. L'intégrale de f sur I est l'**aire algébrique** définie par le graphe de f : on compte positivement l'aire située au dessus de l'axe des abscisses et en dessous du graphe de f , et négativement l'aire située au dessus du graphe de f et en dessous de l'axe des abscisses. (*Faire un dessin.*)

Exemple. Soient a, b vérifiant $a < 0 < b$ et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x$. En faisant un dessin, on voit que l'aire algébrique définie par le graphe de f est la différence entre l'aire d'un triangle rectangle isocèle de base b et l'aire d'un triangle rectangle isocèle de base $|a| = -a$. On a donc $\int_a^b x dx = \frac{b^2}{2} - \frac{(-a)^2}{2} = \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}$, la même formule que celle trouvée lorsque $0 \leq a < b$.

Exercice. Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction sommable **impaire** ($f(-x) = -f(x)$). Calculer $\int_I f(x) dx$.

NOTATION. On notera $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions sommables sur I à valeurs réelles.

LEMME 1.6. Une fonction f est dans $L^1(I)$ si et seulement si $\int_I |f| < \infty$.

DÉMONSTRATION. C'est immédiat puisque $\int_I |f| = \int_I f^+ + \int_I f^-$. □

Remarque 1. On déduit en particulier de ce lemme que $L^1(I)$ est un **espace vectoriel** : si $f, g \in L^1(I)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g \in L^1(I)$ et $\lambda f \in L^1(I)$. En effet, comme $|f + g| \leq |f| + |g|$ et $|\lambda f| = |\lambda| |f|$, on a $\int_I |f + g| \leq \int_I |f| + \int_I |g| < \infty$ et $\int_I |\lambda f| = |\lambda| \int_I |f| < \infty$ (par linéarité de l'intégrale pour les fonctions positives).

Remarque 2. On en déduit également que si $f \in L^1(I)$, alors $f \in L^1(I')$ pour tout ensemble $I' \subset I$.

PROPOSITION 1.7. Si I est un intervalle borné, alors toute fonction f **bornée** sur I (i.e. telle que $|f(x)| \leq M$ pour une certaine constante M indépendante de $x \in I$) est dans $L^1(I)$.

DÉMONSTRATION. Si $|f(x)| \leq M$ sur I , alors $\int_I |f(x)| dx \leq \int_I M dx \leq M \times |I| < \infty$ car l'intervalle I est borné, donc $f \in L^1(I)$. □

COROLLAIRE 1.8. *Toute fonction continue est sommable sur tout intervalle fermé borné $[a, b]$ contenu dans son domaine de définition.*

DÉMONSTRATION. On sait (mais ce n'est pas évident) que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée. \square

Remarque. Ce dernier résultat est faux si l'intervalle (a, b) n'est pas fermé, même si (a, b) est borné. Par exemple, $f(x) = 1/x$ est continue sur $]0, 1[$, mais f n'est pas sommable sur $]0, 1[$. En effet, on a $\int_{]0, 1[} f \geq \int_{\varepsilon}^1 \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_{\varepsilon}^1 = -\ln(\varepsilon)$ pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, et comme $-\ln(\varepsilon)$ tend vers $+\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0^+$, on en déduit $\int_{]0, 1[} \frac{dx}{x} = \infty$.

PROPOSITION 1.9. (linéarité de l'intégrale)

Si $f, g \in L^1(I)$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$ et $\int_I \lambda f = \lambda \int_I f$.

DÉMONSTRATION. En écrivant $(f + g)^+ - (f + g)^- = f + g = (f^+ - f^-) + (g^+ - g^-)$, on voit que $f^+ + g^+ + (f + g)^- = f^- + g^- + (f + g)^+$. Par linéarité de l'intégrale pour les fonctions positives, on en déduit

$$\int_I f^+ + \int_I g^+ + \int_I (f + g)^- = \int_I f^- + \int_I g^- + \int_I (f + g)^+,$$

autrement dit $\int_I (f + g)^+ - \int_I (f + g)^- = \int_I f^+ - \int_I f^- + \int_I g^+ - \int_I g^-$, ou encore $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$.

L'identité $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$ est laissée en exercice : utiliser le fait que $(\lambda f)^+ = \lambda f^+$ et $(\lambda f)^- = \lambda f^-$ si $\lambda \geq 0$, tandis que $(\lambda f)^+ = -\lambda f^-$ et $(\lambda f)^- = -\lambda f^+$ si $\lambda \leq 0$. \square

COROLLAIRE 1.10. *Si $f, g \in L^1(I)$ et si $f \leq g$, alors $\int_I f \leq \int_I g$.*

DÉMONSTRATION. On a $g - f \geq 0$, donc $\int_I g - \int_I f = \int_I (g - f) \geq 0$. \square

Exercice. Démontrer ce dernier résultat sans utiliser la linéarité de l'intégrale.

Remarque. Soit $f \in L^1(I)$. Pour $u, v \in I$ avec $u < v$ on pose $\int_v^u f = -\int_u^v f$. Avec cette convention, la relation de Chasles

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

est valable quels que soient $a, b, c \in I$ (même si c n'est pas entre a et b).

DÉMONSTRATION. Si $a < c < b$, cela découle de la relation de Chasles pour les fonctions positives en considérant séparément f^+ et f^- . Si par exemple $c < a < b$ alors $\int_c^a f + \int_a^b f = \int_c^b f$, donc $\int_a^b f = \int_c^b f - \int_c^a f = \int_c^b f + \int_a^c f$. Les autres cas se traitent de la même façon. \square

1.3. Fonctions à valeurs complexes.

DÉFINITION 1.11. *Soit f une fonction à valeurs complexes définie sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$. On dit que f est **sommable sur I** si les fonctions à valeurs réelles $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$ le sont. Dans ce cas, on pose*

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(f).$$

Autrement dit, si $f = u + iv$ où u et v sont à valeurs réelles, alors $\int_I f = \int_I u + i \int_I v$.

Remarque. Par définition, on a donc $\int_I \operatorname{Re}(f) = \operatorname{Re}(\int_I f)$ et $\int_I \operatorname{Im}(f) = \operatorname{Im}(\int_I f)$.

NOTATION DÉFINITIVE. On notera $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions sommables sur I , à valeurs réelles ou complexes.

Remarque 1. Comme $|u|, |v| \leq |u+iv| \leq |u|+|v|$, on voit qu'une fonction $f = u+iv$ à valeurs complexes est dans $L^1(I)$ si et seulement si $\int_I |f| < \infty$. On en déduit (comme pour les fonctions à valeurs réelles) que $L^1(I)$ est un espace vectoriel, et que si $f \in L^1(I)$, alors $f \in L^1(I')$ pour tout $I' \subset I$.

Remarque 2. Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on montre que toute fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est dans $L^1([a, b])$.

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE. (1) *Relation de Chasles.* Si $f \in L^1(I)$ et si $a, b, c \in I$, alors $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

(2) *Linéarité.* Si $f, g \in L^1(I)$ et si $\lambda \in \mathbb{C}$, alors

$$\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g \quad \text{et} \quad \int_I \lambda f = \lambda \int_I f.$$

(3) *Majoration du module.* Si $f \in L^1(I)$, alors

$$\left| \int_I f(x) dx \right| \leq \int_I |f(x)| dx.$$

DÉMONSTRATION. La preuve de (1) est facile en écrivant $f = u + iv$ et en utilisant la relation de Chasles pour les fonctions à valeurs réelles. De même, on montre très facilement que $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$. Pour montrer que $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$, on écrit $\lambda = a + ib$ et $f = u + iv$, ce qui donne $\lambda f = au - bv + i(av + bu)$, et on applique la définition de l'intégrale (*exercice*).

La preuve de (3) est un peu plus astucieuse. Si f est à valeurs réelles, on utilise la définition de la valeur absolue et la croissance de l'intégrale : comme $-|f| \leq f \leq |f|$, on a $-\int_I |f| \leq \int_I f \leq \int_I |f|$, i.e. $|\int_I f| \leq \int_I |f|$. Si f est à valeurs complexes, on choisit un nombre complexe ω de module 1 tel que $|\int_I f| = \omega \int_I f$ autrement dit $|\int_I f| = \int_I (\omega f)$ (par linéarité de l'intégrale). Comme $|\int_I f|$ est un nombre réel, on a alors

$$\left| \int_I f \right| = \operatorname{Re} \left(\int_I \omega f \right) = \int_I \operatorname{Re}(\omega f),$$

et comme $\operatorname{Re}(\omega f) \leq |\omega f| = |f|$, on en déduit $|\int_I f| \leq \int_I |f|$. \square

2. le "théorème fondamental de l'analyse"

2.1. Énoncé et preuve du théorème. Le résultat suivant est "fondamental" pour toutes sortes de raisons. En ce qui nous concerne, il sera indispensable pour *calculer* effectivement des intégrales. On dira qu'une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ est **de classe \mathcal{C}^1** sur I si elle est dérivable sur I et si sa dérivée est continue.

THÉORÈME 2.1. (théorème fondamental de l'analyse)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, et soit $a \in I$. Pour $x \in I$, on pose

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Alors F est de classe \mathcal{C}^1 et $F' = f$.

DÉMONSTRATION. Comme f est continue, il suffit de montrer que F est *dérivable* sur I avec $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$. Fixons un point $x_0 \in I$. Il s'agit de montrer que $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ tend vers $f(x_0)$ quand $h \rightarrow 0$. On va se contenter de le faire pour h tendant vers 0 *en restant* > 0 , la preuve étant identique pour h tendant vers 0^- .

Pour $h > 0$, on posera

$$\varepsilon(h) = \sup \left\{ |f(t) - f(x_0)|; t \in [x_0, x_0 + h] \right\}.$$

Comme f est continue, $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand $h \rightarrow 0^+$.

Si $h > 0$, alors $F(x_0+h) - F(x_0) = \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt$ d'après la relation de Chasles. D'autre part, on a aussi $f(x_0) = \frac{h \times f(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt$ car $f(x_0)$ est une *constante*. Donc

$$\begin{aligned} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(x_0) dt \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} [f(t) - f(x_0)] dt, \end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de l'intégrale.

Comme $|f(t) - f(x_0)| \leq \varepsilon(h)$ pour tout $t \in [x_0, x_0 + h]$, on en déduit

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} \varepsilon(h) dt = \varepsilon(h);$$

et comme $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0^+$, on a donc bien montré que $\frac{F(x_0+h)-F(x_0)}{h}$ tend vers $f(x_0)$ quand $h \rightarrow 0^+$. \square

COROLLAIRE 2.2. *Toute fonction f continue sur un intervalle I possède des primitives sur I . Si $a, b \in I$, on a*

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a),$$

où F est n'importe quelle primitive de f .

DÉMONSTRATION. Si F_1 et F_2 sont deux primitives de f , on sait que F_1 et F_2 diffèrent d'une constante (car la fonction $F_1 - F_2$ a une dérivée égale à $f - f = 0$) : $F_1 = C + F_2$. On a donc $F_1(b) - F_1(a) = (F_2(b) + C) - (F_2(a) + C) = F_2(b) - F_2(a)$. Ainsi, la quantité $F(b) - F(a)$ ne dépend pas de la primitive F de f . En prenant la primitive F définie dans le théorème, on a $F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt = \int_a^b f(t) dt$ car $\int_a^a f(t) dt = 0$. \square

COROLLAIRE 2.3. *Si $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ est de classe \mathcal{C}^1 et si $a, b \in I$, alors*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b F'(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. On applique le corollaire précédent à $f = F'$ (!) \square

NOTATION. Pour $F : I \rightarrow \mathbb{C}$ et pour $a, b \in I$, on posera $[F]_a^b = F(b) - F(a)$. Avec cette notation, la formule du corollaire 2.2 devient

$$\int_a^b f(t) dt = [F]_a^b,$$

où F est une primitive de f .

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_a^b = \frac{b^{n+1}}{n+1} - \frac{a^{n+1}}{n+1}.$$

Sur cet exemple, on mesure le chemin parcouru : avec la seule définition de l'intégrale on ne voyait pas comment calculer $\int_0^1 x^2 dx$, et on sait maintenant faire des choses bien plus compliquées.

2.2. Primitives “usuelles”. Le théorème fondamental de l'analyse montre que l'évaluation de n'importe quelle intégrale se ramène “en principe” à un calcul de primitive (si la fonction à intégrer est continue). Il est donc important de disposer d'un “catalogue” de primitives “connues”. Pour autant, il n'est pas question de dresser un catalogue démesurément long qu'il faudrait apprendre par coeur : on va se contenter de donner une très courte liste de primitives “indispensables”. Bien entendu, il n'est pas interdit d'en connaître plus.

NOTATION. Si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue sur un intervalle I , on écrira $\int f(x) dx$ (**sans bornes d'intégration**) pour dire “les primitives de la fonction f ”.

Remarque. Il ne faut pas oublier les constantes quand on calcule des primitives : par exemple, on a $\int x dx = \frac{x^2}{2} + cte$ et $\int \sin x \cos x dx = \sin x + cte$.

Voici maintenant une liste minimale qui il serait déraisonnable de ne *pas* connaître.

PRIMITIVES USUELLES. (1) Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cte.$$

(1') Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$ est continue sur $]0, \infty[$, et on a

$$\int x^\alpha dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} + cte \quad \text{si } \alpha \neq -1$$

$$\int x^{-1} dx = \int \frac{dx}{x} = \ln(x) + cte.$$

(2) On a $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + cte$. Plus généralement, si $a \neq 0$ alors

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + cte.$$

(3) Si u est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et ne s'annulant pas sur un intervalle I , alors

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)} dx = \ln |u(x)| + cte.$$

(4) Si u est une fonction de classe \mathcal{C}^1 et si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int (u(x))^n u'(x) dx = \frac{u(x)^{n+1}}{n+1} + cte.$$

(4') Si u est une fonction de classe \mathcal{C}^1 strictement positive et si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, alors

$$\int u(x)^\alpha u'(x) dx = \frac{u(x)^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte.$$

(5) Si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, alors

$$\int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + cte.$$

Exercice 1. Calculer $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+3} dx$ en écrivant $\frac{x+1}{x^2+3} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+3} + \frac{1}{x^2+3}$.

Exercice 2. Déterminer les primitives de la fonction $\tan(x)$ sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Exercice 3. Déterminer $\int \cos^2 x dx$ et $\int \sin^2 x dx$ en utilisant une formule trigonométrique pour $\cos(2x)$, puis déterminer $\int (\cos x)^3 dx$ et $\int (\sin x)^3 dx$.

Exercice 4. En écrivant $e^x \sin(2x) = \text{Im}(e^{(1+2i)x})$, calculer $\int_0^\pi e^x \sin(2x) dx$.

2.3. Une remarque sur la linéarité. Un “sous-produit” du théorème fondamental de l'analyse (sous la forme du corollaire 2.2) est qu'il permet de démontrer la linéarité de l'intégrale pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné. En effet, si $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ sont continues, si $\lambda \in \mathbb{C}$ et si on choisit des primitives F et G de f et g , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ et λF est une primitive de λf . On a donc $\int_a^b (f + g) = [F + G]_a^b = [F]_a^b + [G]_a^b = \int_a^b f + \int_a^b g$ (*exercice* : vérifier la deuxième égalité) et $\int_a^b \lambda f = [\lambda F]_a^b = \lambda [F]_a^b = \lambda \int_a^b f$.

Un examen de la preuve du théorème fondamental de l'analyse montre qu'il n'y a pas de cercle vicieux dans le raisonnement. On a effectivement utilisé la linéarité de l'intégrale dans la démonstration, mais *seulement* sous la forme $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$ lorsque la fonction g est *constante*; et ce cas particulier découle directement de la définition de l'intégrale (voir la remarque 1 juste après la proposition 1.3). On a aussi utilisé la propriété de majoration du module, dont la preuve n'utilise en fait pas la linéarité de l'intégrale lorsque la fonction est à valeurs *réelles*, mais seulement la propriété de *croissance*, qui peut se voir directement sur la définition de l'intégrale (c'est l'exercice posé après le corollaire 1.10). Comme le cas “complexe” du théorème se déduit instantanément du cas “réel”, on voit donc que la preuve du théorème fondamental de l'analyse peut se faire sans utiliser la linéarité de l'intégrale. On a donc bien *démontré* la dite linéarité pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné.

3. Intégration par parties ; changements de variable

3.1. La formule d'intégration par parties. Le résultat suivant est très simple, mais extraordinairement utile.

PROPOSITION 3.1. (“primitivation par parties”)

Si F et G sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle I , alors

$$\int F'(x)G(x) dx = FG - \int F(x)G'(x) dx.$$

DÉMONSTRATION. La fonction FG est de classe \mathcal{C}^1 avec $(FG)' = F'G + FG'$, donc $FG = \int (FG)'(x)dx + cte = \int F'(x)G(x)dx + \int F(x)G'(x)dx + cte$. \square

COROLLAIRE 3.2. (formule d'intégration par parties)

Si F et G sont de classe \mathcal{C}^1 sur I et si $a, b \in I$, alors

$$\int_a^b F'(t)G(t) dt = [FG]_a^b - \int_a^b F(t)G'(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Si U est une primitive quelconque de FG' , alors $FG - U$ est une primitive de $F'G$ et donc $\int_a^b F'G = [FG - U]_a^b = [FG]_a^b - [U]_a^b = [FG]_a^b - \int_a^b FG'$. \square

Exemple 1. En posant $F(x) = x$ et $G(x) = \ln(x)$, on obtient

$$\begin{aligned} \int \ln(x) dx &= x \ln(x) - \int x \times \frac{1}{x} dx \\ &= x \ln(x) - \int dx \\ &= x \ln(x) - x + cte. \end{aligned}$$

Exemple 2. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction sommable, et soit $\hat{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ transformée de Fourier de f , qui est la fonction définie par

$$\hat{f}(\lambda) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-i\lambda x} dx.$$

Si f est nulle en dehors d'un intervalle borné $[a, b]$ et de classe \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(\lambda) = 0.$$

DÉMONSTRATION. Remarquons d'abord que $\hat{f}(\lambda)$ est bien défini pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$ car $\int_{\mathbb{R}} |f(x) e^{-i\lambda x}| dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty$ et donc la fonction $x \mapsto f(x) e^{-i\lambda x}$ est sommable sur \mathbb{R} .

Ici, f est nulle en dehors de $[a, b]$ donc $\hat{f}(\lambda) = \int_a^b f(x) e^{-i\lambda x} dx$. Pour $\lambda \neq 0$, on intègre par parties en primitivant $e^{-i\lambda x}$ et en dérivant $f(x)$:

$$\begin{aligned} \hat{f}(\lambda) &= \left[\frac{-1}{i\lambda} e^{i\lambda x} f(x) \right]_a^b + \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{-i\lambda x} f'(x) dx \\ &= \frac{1}{i\lambda} \left(e^{-i\lambda a} f(a) - e^{-i\lambda b} f(b) \right) + \frac{1}{i\lambda} \int_a^b e^{-i\lambda x} f'(x) dx. \end{aligned}$$

Comme $|e^{-i\lambda a}| = 1 = |e^{-i\lambda b}|$ (car λa et λb sont réels) et $|f'(x) e^{-i\lambda x}| = |f'(x)|$, on en déduit

$$|\hat{f}(\lambda)| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(x)| dx \right) = \frac{C}{|\lambda|}$$

pour tout $\lambda \neq 0$, d'où le résultat puisque $1/|\lambda| \rightarrow 0$ quand $\lambda \rightarrow \pm\infty$. \square

Exercice 1. Déterminer $\int (\cos x)^4 dx$.

Exercice 2. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$. En remarquant que $(\sin x)^{n+2} = (\sin x)^n - ((\sin x)^n \cos x) \times \cos x$ et en intégrant par parties, trouver une relation de récurrence entre J_{n+2} et J_n .

3.2. La formule de changement de variable.

NOTATION. Pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on notera $[u, v]$ l'intervalle fermé borné d'extrémités u et v (même si on n'a pas $u < v$).

PROPOSITION 3.3. (formule de changement de variable)

Si $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle $[a, b]$ et si $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue sur un intervalle I contenant $\varphi([a, b])$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Soit F une primitive de f sur I , et soit $G : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $G(t) = F(\varphi(t))$. Comme F et φ sont de classe \mathcal{C}^1 , la fonction G est \mathcal{C}^1 , avec

$$G'(t) = F'(\varphi(t)) \times \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt &= [G]_a^b \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} F'(x) dx \\ &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx. \end{aligned}$$

□

Remarque. Dans la pratique, tous les changements de variable φ seront **monotones**, i.e. croissants ou décroissants. Dans ce cas, on peut oublier de vérifier que f est définie sur un intervalle contenant $\varphi([a, b])$: par monotonie, on a $\varphi([a, b]) = [\varphi(a), \varphi(b)]$, donc il suffit de savoir que l'intervalle de définition de f contient $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$.

UTILISATION PRATIQUE DE LA FORMULE. Pour calculer une intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ en utilisant la formule de changement de variable, on procède de la façon suivante :

- (i) on *devine* qu'il peut être intéressant de poser $x = \varphi(t)$ pour une certaine fonction φ (c'est la partie délicate) ;
- (ii) on écrit $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)dt$;
- (iii) on trouve l'intervalle $[a, b]$ où φ habite (n'importe quel intervalle tel que $\varphi(a) = \alpha$, $\varphi(b) = \beta$ et $\varphi([a, b]) \subset [\alpha, \beta]$) ;
- (iv) on applique la formule **en faisant attention aux bornes** : comme $\alpha = \varphi(a)$ et $\beta = \varphi(b)$, l'intégrale \int_{α}^{β} devient \int_a^b ;
- (v) on remet les nouvelles bornes a et b dans le bon sens s'il le faut ;
- (vi) on fait le calcul.

Toutes les étapes sont "mécaniques" à l'exception de la première où il faut deviner quelle fonction φ utiliser.

Exemple. Calcul de l'intégrale $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$.

Compte tenu de l'identité $\cos^2 + \sin^2 = 1$, on devine qu'il peut être intéressant de poser $x = \cos t$, et donc $dx = -\sin t dt$. On a $x = 0$ pour $t = \frac{\pi}{2}$ et $x = 1$ pour $t = 0$,

donc $[0, 1]$ correspond à $[\frac{\pi}{2}, 0]$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sqrt{1-\cos^2 t} \times (-\sin t dt) \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin^2 t} \sin t dt \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t dt \end{aligned}$$

car $\sin t \geq 0$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ et donc $\sqrt{\sin^2 t} = \sin t$.

Pour conclure, on utilise l'identité $\cos(2t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 1 - 2\sin^2 t$, qui donne $\sin^2 t = \frac{1-\cos(2t)}{2}$. On obtient alors

$$\begin{aligned} J &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos(2t)) dt \\ &= \frac{1}{2} \left[t - \frac{1}{2} \sin(2t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 1. Calculer $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$ en utilisant uniquement la définition de l'intégrale.

Exercice 2. Calculer l'intégrale $\int_0^1 x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

UTILISATION DE LA FORMULE "DANS L'AUTRE SENS". Pour calculer une intégrale $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$, il se peut qu'on trouve judicieux d'effectuer le changement de variable en sens inverse, i.e. d'écrire " $u = \varphi(x)$ " pour une certaine fonction φ plutôt que " $x = \varphi(t)$ ". Cela revient à appliquer la formule de changement de variable à la fonction réciproque φ^{-1} (si elle existe).

Exemple. Calcul de l'intégrale $J = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3+\sin^2 x} dx$.

Au vu du terme $\sin x dx$, il est raisonnable de poser $u = \cos x$, de sorte que $du = -\sin x dx$. On a $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$ pour $x = \frac{\pi}{4}$ et $u = 0$ pour $x = \frac{\pi}{2}$, donc $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ correspond à $[\frac{\sqrt{2}}{2}, 0]$. De plus, $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = 1 - u^2$. Ainsi :

$$\begin{aligned} J &= \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^0 \frac{-du}{3+1-u^2} \\ &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{4-u^2}. \end{aligned}$$

Pour terminer le calcul, on décompose $\frac{1}{4-u^2}$ en "éléments simples" :

$$\frac{1}{4-u^2} = \frac{1}{(2-u)(2+u)} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2-u} + \frac{1}{2+u} \right).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}
 J &= \frac{1}{4} \left(\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{2-u} + \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{du}{2+u} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left([-\ln(2-u)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln(2+u)]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(-\ln \left(2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) + \ln \left(2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{1}{4} \ln \left(\frac{2 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2 - \frac{\sqrt{2}}{2}} \right),
 \end{aligned}$$

d'où la formule

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{3 + \sin^2 x} dx = \frac{1}{4} \ln \left(\frac{4 + \sqrt{2}}{4 - \sqrt{2}} \right).$$

4. Intégration sur un intervalle semi-ouvert ou ouvert

4.1. Passage à la limite dans les bornes d'intégration. Le résultat suivant est intuitivement "évident" (mais en fait non-trivial) et très important.

PROPOSITION 4.1. *Soit $[a, b[$ un intervalle de \mathbb{R} , avec $b \leq \infty$. Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est ou bien positive, ou bien sommable sur $[a, b[$ alors*

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(t) dt.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que pour toute suite strictement croissante $(\beta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tendant vers b , on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[a, \beta_n]} f = \int_{[a, b[} f$.

Supposons d'abord f positive. Si on pose $A_n = \text{SG}(f, [a, \beta_n])$, alors la suite d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est *croissante* (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$) car la suite (β_n) est croissante, et on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \text{SG}(f, [a, b[$ car $\beta_n \rightarrow b$. (*Faire un dessin*). Donc l'aire de $A_n = \text{SG}(f, [a, \beta_n])$ tend vers l'aire de $\text{SG}(f, [a, b[$ quand $n \rightarrow \infty$; autrement dit $\int_{[a, \beta_n]} f$ tend vers $\int_{[a, b[} f$.

Si f est sommable et à valeurs réelles, on écrit $f = f^+ - f^-$ et on applique le cas "positif" à f^+ et f^- pour obtenir la conclusion souhaitée. Si f est sommable et à valeurs complexes, on applique le cas "réel" à $\text{Re}(f)$ et à $\text{Im}(f)$. \square

Remarque. Bien entendu, on a le même résultat pour un intervalle du type $]a, b]$, et également pour un intervalle *ouvert* $]a, b[$: dans ce cas, la conclusion est

$$\int_{]a, b[} f = \lim_{\substack{\alpha \rightarrow a^+ \\ \beta \rightarrow b^-}} \int_{[\alpha, \beta]} f.$$

COROLLAIRE 4.2. *Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. Si f est ou bien positive ou bien sommable sur $[a, b[$, alors on a le droit d'écrire*

$$\int_a^b f(t) dt = [F]_a^b = F(b) - F(a)$$

où F est n'importe quelle primitive de f sur $[a, b[$, en interprétant $F(b)$ comme la limite $\lim_{x \rightarrow b^-} F(x)$, qui existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ si f est positive et dans \mathbb{C} si f est sommable.

DÉMONSTRATION. Supposons d'abord f positive. Alors la fonction F est croissante, donc $F(x)$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ quand $x \rightarrow b^-$. Comme $\int_a^\beta f(t)dt = [F]_a^\beta = F(\beta) - F(a)$ pour tout $\beta < b$, la proposition permet donc de conclure que $\int_a^b f(t)dt = \lim_{\beta \rightarrow b^-} F(\beta) - F(a) = [F]_a^b$.

Si f est sommable et à valeurs réelles et si on choisit des primitives F_+ et F_- de f^+ et f^- , alors F_+ et F_- ont des limites finies en b d'après le cas "positif", car $\int_{[a,b[} f^+ < \infty$ et $\int_{[a,b[} f^- < \infty$. Alors $F = F_+ - F_-$ est une primitive de f et admet une limite en b , égale à $F_+(b) - F_-(b)$. D'après le cas "positif", on a donc $\int_{[a,b[} f = \int_{[a,b[} f^+ - \int_{[a,b[} f^- = [F_+]_a^b - [F_-]_a^b = [F_+ - F_-]_a^b = [F]_a^b$.

Si f est sommable et à valeurs complexes, on applique le cas "réel" à $\operatorname{Re}(f)$ et $\operatorname{Im}(f)$. \square

Exemple. Pour tout $\lambda > 0$, l'intégrale $\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx$ est bien définie car la fonction $x \mapsto e^{-\lambda x}$ est positive; et on a $\int_0^\infty e^{-\lambda x} dx = \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}$ car $e^{-\lambda x} \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow +\infty$. (En particulier, $e^{-\lambda x}$ est sommable sur $[0, \infty[$ puisque $1/\lambda < \infty$).

COROLLAIRE 4.3. Si $\varphi :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction monotone de classe \mathcal{C}^1 , alors la formule de changement de variable

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

est valable pour toute fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ positive ou sommable sur $]a, b[$, en interprétant $\varphi(a)$ et $\varphi(b)$ comme les limites (finies ou infinies) de φ en a^+ et en b^- .

Exemple. On peut calculer l'intégrale $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln(x)^2}$ (qui a un sens car la fonction sous l'intégrale est positive) en posant $u = \ln(x)$: on a $du = \frac{dx}{x}$, donc $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln(x)^2} = \int_{\ln(2)}^\infty \frac{du}{u^2} = \left[-\frac{1}{u}\right]_{\ln(2)}^\infty = \frac{1}{\ln(2)}$.

COROLLAIRE 4.4. La formule d'intégration par parties $\int_a^b F'G = [FG]_a^b - \int_a^b FG'$ reste valable pour des fonctions F, G de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle (a, b) quelconque, à condition de supposer que $F'G$ et FG' sont sommables sur (a, b) .

DÉMONSTRATION. Par la formule d'intégration par parties usuelle, on a $\int_\alpha^\beta F'G = [FG]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta FG'$ pour tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. En supposant $F'G$ et FG' sommables sur (a, b) , on en déduit que FG a une limite en a et en b (d'après la proposition 4.1). Donc le "crochet" $[FG]_a^b$ a un sens, et on obtient la formule souhaitée en passant à la limite dans la formule d'intégration par parties usuelle. \square

Remarque. Il est facile d'oublier de vérifier que FG' et $F'G$ sont sommables sur (a, b) , ce qui peut conduire à des formules absurdes du style $\infty = \infty - \infty$ lorsqu'on écrit formellement l'intégration par parties. Pour cette raison, il est plus prudent de commencer par intégrer par parties sur des intervalles fermés bornés, et ensuite de passer à la limite dans la formule obtenue si cela est possible (et si on en a besoin).

4.2. Un critère de sommabilité. Le lemme suivant découle facilement de la proposition 4.1.

LEMME 4.5. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et soient ε, A tels que $0 < \varepsilon < A$.

(1) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est sommable sur $[A, \infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.

(2) La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est sommable sur $]0, \varepsilon]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

DÉMONSTRATION. (1) Si $\alpha > 1$, alors $\int_A^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \int_A^\infty t^{-\alpha} dt = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_A^\infty = \frac{A^{-\alpha+1}}{\alpha-1} < \infty$ car $t^{-\alpha+1} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Si $\alpha = 1$, alors $\int_A^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \int_A^\infty \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_A^\infty = \infty$. Si $\alpha < 1$, alors $\int_A^\infty \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_A^\infty = \infty$ car $t^{1-\alpha} \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \infty$.

La preuve de (2) est identique : Si $\alpha > 1$, alors $\int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right]_0^\varepsilon = \infty$ car $t^{-\alpha+1} \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow 0$; si $\alpha = 1$, alors $\int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^\alpha} = [\ln(t)]_0^\varepsilon = \infty$ car $\ln(0) = -\infty$; et si $\alpha < 1$, alors $\int_0^\varepsilon \frac{dt}{t^\alpha} = \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right]_0^\varepsilon = \frac{\varepsilon^{1-\alpha}}{\alpha-1} < \infty$. \square

On en déduit un critère de sommabilité très utile dans la pratique. Convenons de dire qu'une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle I est **localement sommable** si elle est sommable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset I$. Par exemple, toute fonction *continue* est localement sommable.

COROLLAIRE 4.6. (critères de sommabilité de Riemann)

- (1) Soit $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ localement sommable (par exemple continue). S'il existe $\alpha > 1$ tel que $t^\alpha f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, alors f est sommable sur $[a, \infty[$.
- (2) Soit $f :]0, b] \rightarrow \mathbb{C}$ localement sommable. S'il existe $\alpha < 1$ tel que $t^\alpha f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$, alors f est sommable sur $]0, b]$.

DÉMONSTRATION. Si $t^\alpha f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$ avec $\alpha > 1$, alors on peut trouver A tel que $|t^\alpha f(t)| \leq 6$ pour tout $t > A$. On a alors

$$\int_a^\infty |f(t)| dt \leq \int_a^A |f(t)| dt + 6 \int_A^\infty \frac{dt}{t^\alpha}.$$

La première intégrale est finie car f est localement sommable (donc sommable sur l'intervalle $[a, A]$); et la deuxième est également finie car $\alpha > 1$. Donc $\int_a^\infty |f(t)| dt < \infty$ et f est sommable sur $[a, \infty[$.

Si $t^\alpha f(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow 0^+$ avec $\alpha < 1$, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $|t^\alpha f(t)| \leq 12$ pour $t \in]0, \varepsilon]$, et on en déduit exactement de la même façon que f est sommable sur $]0, b]$. \square

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^n e^{-t}$ est sommable sur $[0, \infty[$.

DÉMONSTRATION. Si on pose $f(t) = t^n e^{-t}$, alors f est continue sur $[0, \infty[$ et $t^2 f(t) = t^{n+2} e^{-t}$ tend vers 0 quand $t \rightarrow \infty$ car "l'exponentielle l'emporte sur la puissance". Donc f est sommable sur $[0, \infty[$, d'après le critère de sommabilité de Riemann appliqué avec $\alpha = 2$. \square

Exercice 1. On pose $J_n = \int_0^\infty t^n e^{-t} dt$. Trouver une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1} (pour $n \geq 1$) en intégrant par parties, et en déduire la valeur de J_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 2. Déterminer pour quelles valeurs de $\beta > 0$ la fonction $t \mapsto \frac{1}{t |\ln(t)|^\beta}$ est sommable sur $[2, \infty[$, et pour quelles valeurs de β cette fonction est sommable sur $]0, 1/2[$. (Poser $u = \ln(t)$).

4.3. Intégrales “généralisées”. Rappelons qu’une fonction $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ est dite *localement sommable* si elle est sommable sur tout intervalle fermé borné $[\alpha, \beta] \subset [a, b[$ ou, ce qui revient au même, sur tout intervalle $[a, X]$. (Par exemple, toute fonction continue est localement sommable).

Si $f : [a, \infty[\rightarrow \mathbb{C}$ est localement sommable, il peut arriver que $\int_a^X f(t) dt$ admette une limite dans \mathbb{C} quand $X \rightarrow b$ sans pour autant que f soit sommable *sur* $[a, b[$ (de même qu’il y a des séries convergentes qui ne sont pas *absolument convergentes*). Si la limite $\lim_{X \rightarrow b} \int_a^X f(t) dt$ existe, il est naturel de la noter $\int_a^b f(t) dt$, et on dit alors que $\int_a^b f(t) dt$ **existe en tant qu’intégrale généralisée**.

Évidemment, on définit de même la notion d’intégrale généralisée pour une fonction $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{C}$, avec $a \geq -\infty$. Pour une fonction $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ définie sur un intervalle ouvert $]a, b[$, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ existe en tant qu’intégrale généralisée si, un point $c \in]a, b[$ ayant été fixé, les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ existent. Dans ce cas, on pose bien sûr $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$. (*Exercice* : cela ne dépend pas du point c).

PROPOSITION 4.7. (critère de Cauchy)

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{C}$ localement sommable. Alors $\int_a^b f(t) dt$ existe en tant qu’intégrale généralisée si et seulement si $\int_X^{X'} f(t) dt$ tend vers 0 quand X et X' tendent vers b .

DÉMONSTRATION. Supposons que $J = \int_a^\infty f(t) dt$ existe. Pour $X, X' \geq a$, on a $\int_X^{X'} f(t) dt = \int_a^{X'} f(t) dt - \int_a^X f(t) dt$, et comme $\int_a^{X'} f(t) dt$ et $\int_a^X f(t) dt$ tendent tous les deux vers J , on en déduit que $\int_X^{X'} f(t) dt$ tend vers 0 quand X et X' tendent vers l’infini.

Inversement, supposons que $\int_X^{X'} f(t) dt$ tende vers 0 quand X et X' tendent vers b . Si $\bar{X} = (X_n)$ est une suite quelconque tendant vers b et si on pose $u_n = \int_a^{X_n} f(t) dt$, alors $u_q - u_p = \int_{X_p}^{X_q} f(t) dt$ pour tous p, q , et donc $u_q - u_p$ tend vers 0 quand p et q tendent vers l’infini. Donc (u_n) est une *suite de Cauchy* dans \mathbb{C} , et par conséquent converge dans \mathbb{C} . La limite dépend a priori de la suite \bar{X} , donc il faut la noter par exemple $l(\bar{X})$. Mais si \bar{X} et \bar{Y} sont deux suites tendant vers b , alors la suite $\bar{Z} = (X_0, Y_0, X_1, Y_1, \dots)$ tend aussi vers b . On doit donc avoir $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{Z_{2n}} f(t) dt = l(\bar{Z}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{Z_{2n+1}} f(t) dt$, et comme $Z_{2n} = X_n$ et $Z_{2n+1} = Y_n$, cela signifie que $l(\bar{X}) = l(\bar{Y})$. Ainsi, $l(\bar{X})$ ne dépend pas de la suite \bar{X} tendant vers b , et on peut noter ce nombre l . On a donc montré l’existence d’un nombre $l \in \mathbb{C}$ tel que $\int_a^{X_n} f(t) dt \rightarrow l$ pour toute suite (X_n) tendant vers b ; autrement dit, $\int_a^b f(t) dt$ existe et vaut l . \square

Exemple. L’intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ existe en tant qu’intégrale généralisée.

DÉMONSTRATION. Si $1 \leq X < X'$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \int_X^{X'} \frac{\sin t}{t} dt &= \left[-\frac{\cos t}{t} \right]_X^{X'} - \int_X^{X'} \frac{\cos t}{t^2} dt \\ &= \frac{\cos X}{X} - \frac{\cos X'}{X'} - \int_X^{X'} \frac{\cos t}{t^2} dt. \end{aligned}$$

Comme $|\cos x| \leq 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, on en déduit

$$\left| \int_X^{X'} \frac{\sin t}{t} dt \right| \leq \frac{1}{X'} + \frac{1}{X} + \int_X^{X'} \frac{dt}{t^2} = \frac{2}{X},$$

ce qui montre que le critère de Cauchy est vérifié. \square

Remarque. On montre évidemment de la même façon que l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\cos t}{t} dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée.

Exercice. En utilisant l'identité $\sin^2 t = \frac{1 - \cos(2t)}{2}$, montrer que $\int_1^X \frac{\sin^2 t}{t} dt$ tend vers $+\infty$ quand $X \rightarrow \infty$, puis en déduire que $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ n'est pas sommable sur $[1, \infty[$.

5. Calcul approché; sommes de Riemann

DÉFINITION 5.1. Soit $I = (a, b)$ un intervalle borné de \mathbb{R} . Une **subdivision pointée** de I est la donnée

- d'un découpage de I en intervalles I_0, I_1, \dots, I_k ;
- pour chaque $j \in \{0, \dots, k\}$, d'un point $x_j \in I_j$.

Une telle subdivision se note $\sigma = ((I_0, x_0), \dots, (I_k, x_k))$.

Exemple. (subdivision régulière)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si on découpe l'intervalle $I = [a, b[$ en N intervalles I_j de même longueur et si on choisit comme point x_j l'extrémité gauche de l'intervalle I_j , on obtient la subdivision pointée $\sigma = ((I_0, x_0), \dots, (I_{N-1}, x_{N-1}))$, où $x_j = a + j \frac{b-a}{N}$ et $I_j = [x_j, x_{j+1}[$. On dit que σ est la **subdivision régulière de longueur N** de l'intervalle $[a, b[$.

DÉFINITION 5.2. Soit $\sigma = ((I_0, x_0), \dots, (I_k, x_k))$ une subdivision pointée de $I = (a, b)$, et soit $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$. La **somme de Riemann** associée à f et σ est le nombre

$$S_\sigma(f) = \sum_{j=0}^k |I_j| f(x_j),$$

où on a noté $|I|$ la longueur d'un intervalle I .

Remarque importante. Les sommes de Riemann sont en fait des intégrales : on a

$$S_\sigma(f) = \int_a^b \varphi_\sigma(t) dt,$$

où $\varphi_\sigma : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$ est la "fonction en escaliers" définie par $\varphi_\sigma(t) = f(x_j)$ pour $t \in I_j$.

Exemple. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Si $\sigma = ((I_0, x_0), \dots, (I_{N-1}, x_{N-1}))$ est la subdivision régulière de longueur N de l'intervalle $[a, b[$, alors $|I_j| = \frac{b-a}{N}$ pour tout j et donc

$$S_\sigma(f) = \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(a + j \frac{b-a}{N}\right).$$

NOTATION. Si $\sigma = ((I_0, x_0), \dots, (I_k, x_k))$ est une subdivision pointée d'un intervalle $I = (a, b)$, on pose $|\sigma| = \max(|I_0|, \dots, |I_k|)$. On dit que $|\sigma|$ est le **pas** de la subdivision. Par exemple, si $N \in \mathbb{N}^*$ et si σ est la subdivision régulière de longueur N de l'intervalle $[a, b[$, alors $|\sigma| = \frac{b-a}{N}$.

THÉORÈME 5.3. Soit $I = (a, b)$ un intervalle borné de \mathbb{R} et soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a, b]$. Si $(\sigma^N)_{N \geq 1}$ est une suite de subdivisions pointées de (a, b) telle que $\lim_{N \rightarrow \infty} |\sigma^N| = 0$, alors $S_{\sigma^N}(f)$ tend vers $\int_a^b f(t) dt$ quand $N \rightarrow \infty$.

DÉMONSTRATION. Pour $h > 0$, on posera

$$\varepsilon(h) = \sup \left\{ |f(y) - f(x)|; x, y \in [a, b], |y - x| \leq h \right\}.$$

Comme f est continue sur l'intervalle fermé bornée $[a, b]$, on sait (mais ce n'est pas évident) que $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand $h \rightarrow 0$: c'est la traduction du fait que f est **uniformément continue**.

Soit $\sigma = ((I_0, x_0), \dots, (I_k, x_k))$ une subdivision pointée quelconque de (a, b) . En notant φ_σ la fonction en escaliers définie par $\varphi_\sigma(t) = f(x_j)$ pour $t \in I_j$, on a $S_\sigma(f) = \int_a^b \varphi_\sigma(t) dt$ et donc

$$S_\sigma(f) - \int_a^b f(t) dt = \int_a^b (\varphi_\sigma(t) - f(t)) dt.$$

Si $t \in (a, b)$, alors t appartient à l'un des intervalles I_j de la subdivision σ et on a alors $\varphi_\sigma(t) = f(x_j)$. Comme x_j est aussi dans l'intervalle I_j , on a $|t - x_j| \leq |I_j| \leq |\sigma|$, et donc

$$|\varphi_\sigma(t) - f(t)| \leq \varepsilon(|\sigma|)$$

pour tout $t \in (a, b)$. On en déduit

$$\left| S_\sigma(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq (b - a) \varepsilon(|\sigma|),$$

pour toute subdivision pointée σ . Comme $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow 0$, on voit donc que $S_\sigma(f)$ tend vers $\int_a^b f(t) dt$ quand $|\sigma| \rightarrow 0$, ce qui termine la démonstration du théorème. \square

En prenant pour σ^N la subdivision régulière de longueur N de l'intervalle $[a, b]$, on obtient le résultat suivant :

COROLLAIRE 5.4. *Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors*

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{b-a}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(a + j \frac{b-a}{N}\right).$$

Exemple. Appliquons ce résultat pour retrouver la valeur de l'intégrale $\int_0^1 x dx$. Ici, on prend $I = [0, 1]$: alors $\frac{b-a}{N} = \frac{1}{N}$ et $a + j \frac{b-a}{N} = \frac{j}{N}$, donc on obtient

$$\int_0^1 x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{j}{N} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^2} \times \sum_{j=0}^{N-1} j.$$

On sait que la somme du membre de droite vaut $\frac{N(N-1)}{2}$. Donc

$$\int_0^1 x dx = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \times \frac{N(N-1)}{N} = \frac{1}{2},$$

ce qui est le résultat attendu.

Exercice 1. Essayer d'utiliser la même méthode pour calculer $\int_0^1 x^2 dx$.

Exercice 2. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 et que si on note σ^N la subdivision régulière de longueur N de l'intervalle $[a, b]$, alors

$$\left| S_{\sigma^N}(f) - \int_a^b f(t) dt \right| \leq \frac{(b-a)^2}{N} \times \sup\{|f'(c); c \in [a, b]\}.$$

Exercice 3. En remarquant que $\ln(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t}$, utiliser l'exercice précédent pour donner une valeur approchée de $\ln(2)$ à 10^{-2} près.

Remarque. Le théorème 5.3 permet d’“expliquer” la notation $\int_a^b f(x) dx$. Soit $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{k+1} = b$ une subdivision de l'intervalle $[a, b[$, à laquelle est associée la subdivision pointée $\sigma = ((I_0, x_0) \dots, (I_k, x_k))$, où $I_j = [x_j, x_{j+1}[$. Pour $j \in \{0, \dots, k\}$ posons $\delta x_j = x_{j+1} - x_j$. Avec ces notations, on a $S_\sigma(f) = \sum_{j=0}^k f(x_j) \delta x_j$, que l'on peut aussi écrire $S_a^b f(x) \delta x$, où la notation S_a^b signifie “somme sur tous les x entre a et b appartenant à la subdivision”. Donc le théorème 5.3 peut se formuler de la façon suivante (volontairement imprécise) : on a

$$\lim_{\delta x \rightarrow 0} S_a^b f(x) \delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

Autrement dit (et de manière très informelle) : le δx tendant vers 0 devient un dx “infinitesimal”, et le symbole “ S ” devient un “ S allongé” \int .

6. Le “théorème de convergence monotone”

Le théorème suivant est peut-être le résultat le plus important de toute la théorie. Il possède de nombreuses applications, mais on n'en donnera qu'une seule dans ce chapitre : la preuve de la linéarité de l'intégrale, qu'on a pour le moment admise (sauf dans le cas des fonctions continues sur un intervalle fermé borné).

THÉORÈME 6.1. (théorème de convergence monotone)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions positives définies sur un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, et soit f une fonction positive sur I . On suppose que

- (i) $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in I$;
- (ii) la suite (f_n) est **croissante**, i.e. $f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ pour tout n et pour tout $x \in I$.

Alors on peut conclure que $\int_I f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n(x) dx$.

DÉMONSTRATION. Posons $A_n = \text{SG}(f_n, I)$ et $A = \text{SG}(f, I)$. Alors la suite d'ensemble $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante ($A_n \subset A_{n+1}$) car la suite (f_n) est croissante, et (A_n) “tend” vers A , au sens où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = A$ car $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in I$. Donc, l'aire de A_n tend vers l'aire de A quand $n \rightarrow \infty$; autrement dit $\int_I f_n$ tend vers $\int_I f$. \square

Remarque. Sans l'hypothèse de croissance (ii), on ne peut pas en général conclure que $\int_I f_n \rightarrow \int_I f$. Par exemple, si on définit $f_n : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty[$ par $f_n(x) = 1$ si $x \in [n, n+1[$ et $f(x) = 0$ sinon, alors $f_n(x) \rightarrow 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (*exercice*) mais $\int_{\mathbb{R}} f_n(x) dx = \int_n^{n+1} dx = 1$ pour tout n .

Exercice. Utiliser le théorème de convergence monotone pour montrer que si f est une fonction positive sur un intervalle semi-ouvert $[a, b[$, alors $\int_{[a, b[} f = \lim_{\beta \rightarrow b} \int_{[a, \beta]} f$.

APPLICATION. Preuve de la linéarité de l'intégrale.

Dans ce qui suit, I est une partie de \mathbb{R} . On veut montrer que si f et g sont des fonctions positives définies sur I , alors $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$, et que si $\lambda \in \mathbb{R}^+$ alors $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$. On aura pour cela besoin de la définition suivante.

DÉFINITION 6.2. On dira qu'une fonction $f : I \rightarrow [0, \infty]$ est **simple** si elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs.

L'intérêt des fonctions simples est ... qu'elles sont simples, mais qu'elles peuvent approcher n'importe quelle fonction. C'est le contenu du lemme suivant.

LEMME 6.3. Toute fonction $f : I \rightarrow [0, \infty]$ est limite d'une suite croissante de fonctions simples (f_n) .

DÉMONSTRATION. On définit d'abord des fonctions $u_n, n \in \mathbb{N}^*$ de la façon suivante. On découpe l'ensemble d'arrivée $[0, \infty]$ sous la forme $[0, \infty] = [0, 1[\cup [1, 2[\cup \dots \cup [n-1, n[\cup [n, \infty]$. Si $f(x) \geq n$ (i.e. $f(x) \in [n, \infty]$) on pose $u_n(x) = n$. Si $f(x) < n$, il existe un unique entier $i \in \{0, \dots, n-1\}$ tel que $i \leq f(x) < i+1$ (i.e. $f(x) \in [i, i+1[$), et un unique entier $k \in \{0, \dots, n-1\}$ tels que $i + \frac{k}{n} \leq f(x) < i + \frac{k+1}{n}$; et on pose alors $u_n(x) = i + \frac{k}{n}$. De manière plus "explicite" :

$$u_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq f(x) < \frac{1}{n} \\ \frac{1}{n} & \text{si } \frac{1}{n} \leq f(x) < \frac{2}{n} \\ \vdots & \\ \frac{n-1}{n} & \text{si } \frac{n-1}{n} < f(x) \leq 1 \\ 1 & \text{si } 1 \leq f(x) < 1 + \frac{1}{n} \\ \vdots & \\ 1 + \frac{n-1}{n} & \text{si } 1 + \frac{n-1}{n} \leq f(x) < 2 \\ 2 & \text{si } 2 \leq f(x) < 2 + \frac{1}{n} \\ \vdots & \\ n-1 + \frac{n-1}{n} & \text{si } n-1 + \frac{n-1}{n} \leq f(x) < n \\ n & \text{si } f(x) \geq n \end{cases}$$

Il est clair que les u_n sont des fonctions simples, et qu'on a $0 \leq u_n(x) \leq f(x)$ pour tout n et pour tout $x \in I$. De plus $u_n(x)$ tend vers $f(x)$ quand $n \rightarrow \infty$, pour tout $x \in I$. En effet, on a $u_n(x) = n$ pour tout $n \geq 1$ si $f(x) = \infty$, donc $u_n(x) \rightarrow f(x)$ dans ce cas; et si $f(x) < \infty$, on peut trouver un entier N tel que $f(x) < N$, et on a alors $0 \leq f(x) - u_n(x) \leq \frac{1}{n}$ pour tout $n \geq N$.

La suite (u_n) n'est peut-être pas croissante, mais si on pose

$$f_n(x) = \max(u_0(x), \dots, u_n(x)),$$

alors la suite (f_n) a toutes les propriétés requises. \square

ÉTAPE 1. La formule $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$ est vraie si f est une fonction simple.

DÉMONSTRATION. On va le montrer par récurrence sur le nombre n de valeurs différentes prises par la fonction f .

Si $n = 1$, la fonction f est constante, et on a déjà démontré le résultat dans ce cas (voir la remarque suivant la proposition 1.3).

Supposons avoir démontré le résultat pour toutes les fonctions prenant n valeurs différentes, et soit f une fonction simple prenant $n+1$ valeurs. Soit C une des valeurs prises par f , et posons $I_1 = \{x \in I; f(x) = C\}$ et $I_2 = \{x \in I; f(x) \neq C\}$. Alors $I = I_1 \cup I_2$ et $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, donc $\int_I (f+g) = \int_{I_1} (f+g) + \int_{I_2} (f+g)$. Sur l'ensemble I_1 , la fonction f est constante (égale à C), donc $\int_{I_1} (f+g) = \int_{I_1} f + \int_{I_1} g$ d'après le cas " $n = 1$ ". Sur l'ensemble I_2 , la fonction f ne prend plus que n valeurs distinctes

(puisqu'on a enlevé la valeur C), donc $\int_{I_2} (f + g) = \int_{I_2} f + \int_{I_2} g$ d'après l'hypothèse de récurrence. Au total, on obtient

$$\begin{aligned} \int_I (f + g) &= \int_{I_1} (f + g) + \int_{I_2} (f + g) \\ &= \left(\int_{I_1} f + \int_{I_1} g \right) + \left(\int_{I_2} f + \int_{I_2} g \right) \\ &= \left(\int_{I_1} f + \int_{I_2} f \right) + \left(\int_{I_1} g + \int_{I_2} g \right) \\ &= \int_I f + \int_I g. \end{aligned}$$

Le résultat est donc démontré par récurrence. \square

ÉTAPE 2. On a $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$ pour toutes fonctions positives f, g .

DÉMONSTRATION. D'après le lemme 6.3, on peut trouver une suite croissante de fonctions simples (f_n) telle que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in I$. Alors $\int_I f_n \rightarrow \int_I f$ et $\int_I (f_n + g) \rightarrow \int_I (f + g)$ d'après le théorème de convergence monotone. Comme de plus $\int_I (f_n + g) = \int_I f_n + \int_I g$ d'après l'étape 1, on obtient le résultat en passant à la limite. \square

ÉTAPE 3. On a $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$ pour toute fonction positive f et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^+$.

DÉMONSTRATION. On montre d'abord par récurrence qu'on a $\int_I (nf) = n \int_I f$ pour tout $n \in \mathbb{N}$: c'est évidemment vrai pour $n = 0$, et le passage de n à $n + 1$ se fait en écrivant $\int_I ((n + 1)f) = \int_I (nf + f) = \int_I (nf) + \int_I f$.

On en déduit que $r \geq 0$ est rationnel, alors $\int_I (rf) = r \int_I f$. En effet, on peut écrire $r = \frac{p}{q}$ où $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$. En appliquant le cas "entier" à $\frac{1}{q} f$ puis à f , on obtient $\int_I (rf) = \int_I (p \times \frac{f}{q}) = p \int_I \frac{f}{q}$ et $\int_I f = \int_I (q \times \frac{f}{q}) = q \int_I \frac{f}{q}$, d'où $\int_I (rf) = p \times \frac{1}{q} \int_I f = r \int_I f$.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}^+$ quelconque, on choisit deux suites de rationnels (r_n) et (r'_n) tendant vers λ , avec $r_n \leq \lambda \leq r'_n$. On a alors

$$r_n \int_I f = \int_I (r_n f) \leq \int_I (\lambda f) \leq \int_I (r'_n f) = r'_n \int_I f$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'où $\lambda \int_I f \leq \int_I (\lambda f) \leq \lambda \int_I f$ en passant à la limite, i.e. $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$. \square

Exercice. Démontrer l'étape 3 en utilisant le théorème de convergence monotone, comme dans l'étape 2. Formuler précisément la propriété des aires utilisée.

Intégrales multiples

1. Volumes N -dimensionnels

1.1. Mesures.

DÉFINITION 1.1. Soit Ω un ensemble, et soit $\mathcal{P}(\Omega)$ l'ensemble des parties de Ω . Une **mesure sur** Ω est une application $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ vérifiant les propriétés suivantes.

- (o) $\mu(\emptyset) = 0$.
- (i) Additivité : si $A \cap B = \emptyset$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (ii) Continuité : si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'ensembles de "limite" $A = \bigcup_0^\infty A_n$, alors $\mu(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

Remarque. Dans la définition d'une mesure, la valeur ∞ est autorisée.

Exemple 1. On définit une mesure sur \mathbb{R}^2 en posant $\mu(A) = \text{aire}(A)$ pour tout $A \subset \mathbb{R}^2$; et on définit une mesure sur \mathbb{R}^3 en posant $\mu(A) = \text{volume}(A)$ pour $A \subset \mathbb{R}^3$. Ces mesures s'appellent respectivement la **mesure d'aire** sur \mathbb{R}^2 et la **mesure de volume** sur \mathbb{R}^3 .

Exemple 2. Soit Ω un ensemble quelconque. On définit une mesure sur Ω en posant $\mu(A) = \text{card}(A)$ si $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ est fini, et $\mu(A) = \infty$ si A est infini. On dit que μ est la **mesure de comptage** sur Ω .

Exemple 3. Soit Ω l'ensemble de tous les résultats possibles d'une "expérience aléatoire" (par exemple : tirer 5 cartes au hasard dans un jeu de 32 cartes, cocher 6 cases au hasard sur une grille de loto). Un ensemble $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ devient alors un "événement possible" (par exemple : tirer un brelan, avoir 4 bons numéros). Si on note $\mu(A)$ la probabilité que l'événement A ait lieu, on définit une mesure sur Ω .

Exercice. Soit μ une mesure sur un ensemble Ω .

- (1) Montrer que si $A \subset B \subset \Omega$, alors $\mu(A) \leq \mu(B)$.
- (2) Montrer que si $A, B \subset \Omega$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B) - \mu(A \cap B)$.
- (3) Montrer que si $\mu(A \cap B) = 0$, alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$.
- (4) Montrer que si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite décroissante d'ensembles et si $\mu(A_N) < \infty$ pour au moins un $N \in \mathbb{N}$, alors $\mu(\bigcap_0^\infty A_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$.

1.2. Pavés N -dimensionnels. Si N est un entier strictement positif, on note \mathbb{R}^N l'ensemble de tous les N -uplets $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N)$, où les x_i sont des nombres réels. Donc $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, \mathbb{R}^2 est "le plan" (rapporté à un système de coordonnées) et \mathbb{R}^3 est l'"espace". Dans \mathbb{R}^2 , on écrit plutôt (x, y) au lieu de (x_1, x_2) , et dans \mathbb{R}^3 on écrit en général (x, y, z) .

DÉFINITION 1.2. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Un **pavé de \mathbb{R}^N** est un ensemble $\Pi \subset \mathbb{R}^N$ de la forme $\Pi = (a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_N, b_N)$, où les (a_i, b_i) sont des intervalles bornés. Autrement dit : $\Pi = \{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N; x_1 \in (a_1, b_1), \dots, x_N \in (a_N, b_N)\}$.

Exemples. Si $N = 1$, un pavé de $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ est un intervalle borné. Si $N = 2$, un pavé de \mathbb{R}^2 est un rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées. Si $N = 3$, un pavé de \mathbb{R}^3 est un parallélépipède rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées.

On *admettra* le lemme suivant, qui jouera un rôle essentiel dans toute la suite.

LEMME 1.3. (lemme d'unicité)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et soient μ_1 et μ_2 deux mesures sur \mathbb{R}^N . Si μ_1 et μ_2 prennent les mêmes valeurs finies sur les pavés (i.e. si $\mu_1(\Pi) = \mu_2(\Pi) < \infty$ pour tout pavé Π), alors $\mu_1 = \mu_2$.

Remarque. Il suffit en fait de considérer uniquement des pavés **fermés** (i.e. produits d'intervalles fermés bornés), car tout pavé peut s'écrire comme réunion d'une suite croissante de pavés fermés (*exercice*).

1.3. La mesure de Lebesgue sur \mathbb{R}^N .

NOTATION. Si $\Pi = (a_1, b_1) \times \cdots \times (a_N, b_N)$ est un pavé de \mathbb{R}^N , on pose

$$\text{vol}(\Pi) = (b_1 - a_1) \times \cdots \times (b_N - a_N) = \prod_{i=1}^N (b_i - a_i).$$

Exemples. Si Π est un pavé de $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ (i.e. un intervalle) $\text{vol}(\Pi)$ est la longueur de Π . Si Π est un pavé de \mathbb{R}^2 (i.e. un rectangle), $\text{vol}(\Pi)$ est l'aire de Π . Si Π est un pavé de \mathbb{R}^3 (i.e. un parallélépipède rectangle), $\text{vol}(\Pi)$ est le volume de Π .

Remarque. Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$. Si Π_1 est un pavé de \mathbb{R}^p et si Π_2 est un pavé de \mathbb{R}^q , alors $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$ est un pavé de $\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q = \mathbb{R}^{p+q}$ et

$$\text{vol}(\Pi_1 \times \Pi_2) = \text{vol}(\Pi_1) \times \text{vol}(\Pi_2).$$

Inversement, tout pavé de $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ est de la forme $\Pi = \Pi_1 \times \Pi_2$, où Π_1 est un pavé de \mathbb{R}^p et Π_2 est un pavé de \mathbb{R}^q .

DÉMONSTRATION. C'est un exercice "immédiat". □

THÉORÈME 1.4. Si $N \in \mathbb{N}^*$, il existe une unique mesure λ_N sur \mathbb{R}^N telle que $\lambda_N(\Pi) = \text{vol}(\Pi)$ pour tout pavé $\Pi \subset \mathbb{R}^N$. On dit que λ_N est la **mesure de Lebesgue** sur \mathbb{R}^N .

Remarque. L'unicité est claire d'après le lemme d'unicité. L'existence de la mesure λ_N est difficile à établir, et bien sûr on l'admettra. En revanche, il est très facile de donner une formule pour λ_N : si $A \subset \mathbb{R}^N$, alors

$$\lambda_N(A) = \inf \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \text{vol}(\Pi_k) \right\},$$

où la borne inférieure est prise sur toutes les suites de pavés $(\Pi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ telles que $A \subset \bigcup_0^{\infty} \Pi_k$. Démontrer que λ_N ainsi définie convient est une autre paire de manche ; et en fait, cela dépend des axiomes que l'on admet à la base des mathématiques ! Si on admet ce que l'on appelle l'**axiome du choix**, alors on peut démontrer qu'il n'existe aucune mesure définie sur *toutes* les parties de \mathbb{R}^N et prenant la valeur souhaitée sur les

pavés : il y aura toujours des ensembles “pathologiques” qui empêcheront les propriétés d’additivité et de passage à la limite d’avoir lieu pour tous les ensembles. Mais si on rejette l’axiome du choix, on peut démontrer que l’existence d’une telle mesure *n’est pas contradictoire* : il existe un “modèle” de l’univers mathématique (construit par le logicien R. Solovay) pour lequel on dispose bien d’une mesure de Lebesgue définie sur toutes les parties de \mathbb{R}^N . Quoiqu’il en soit, il est de toutes façons vrai que la formule précédente définit effectivement une mesure sur une très vaste classe d’ensembles, qu’on appelle les ensembles **mesurables au sens de Lebesgue** ; mais on n’entrera pas dans ce genre de “détails” : pour nous, tous les ensembles seront mesurables.

Exemples. La mesure λ_2 est la mesure d’aire sur \mathbb{R}^2 , et la mesure λ_3 est la mesure de volume sur \mathbb{R}^3 . La mesure λ_1 pourrait s’appeler la **mesure de longueur** sur \mathbb{R} , puisqu’elle est caractérisée par le fait que la mesure de tout intervalle est égale à sa longueur.

1.4. La notion de “presque partout. On dit qu’une propriété $P(u)$ dépendant de $u \in \mathbb{R}^N$ a lieu **pour presque tout** $u \in I$ (où $I \subset \mathbb{R}^N$) si la mesure (de Lebesgue) de l’ensemble des $u \in I$ pour lesquels $P(u)$ n’a *pas* lieu est égale à 0. On dit aussi que $P(u)$ a lieu **presque partout** sur I . La notion de “presque partout” est très importante pour de multiples raisons théoriques. Comme on le verra plus loin, il y a des situations où il est impossible d’y “échapper”.

2. Définition et propriétés de l’intégrale

Maintenant qu’on dispose de la mesure de Lebesgue, on peut définir l’intégrale d’une fonction de N variables exactement comme on l’a fait dans le premier chapitre pour le cas “ $N = 1$ ” : il suffit de remplacer l’aire, i.e. la mesure de Lebesgue 2-dimensionnelle, par la mesure de Lebesgue $(N + 1)$ -dimensionnelle. On va donc aller vite dans la présentation de l’intégrale.

2.1. Fonctions positives. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et soit I une partie de \mathbb{R}^N . Une fonction f définie sur I est dite **positive** si elle prend ses valeurs dans $[0, \infty]$. Le **sous-graphe** d’une telle fonction f au dessus de I est défini par

$$\text{SG}(f, I) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; x \in I \text{ et } 0 \leq \lambda < f(x)\}.$$

Ce sous-graphe est une partie de $\mathbb{R}^N \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{N+1}$, donc il a une mesure $(N + 1)$ -dimensionnelle. L’**intégrale de f sur I** est alors définie par

$$\int_I f = \lambda_{N+1}(\text{SG}(f, I)).$$

NOTATIONS. On utilise indifféremment les notations suivantes pour désigner l’intégrale de f sur I :

$$\int_I f, \quad \int_I f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N, \quad \int_I f(x) dx, \quad \int_I f(x) d\lambda_N(x).$$

Bien entendu, pour une fonction de 2 variables on écrit plutôt $\int_I f(x, y) dx dy$, et pour une fonction de 3 variables (x, y, z) on écrit $\int_I f(x, y, z) dx dy dz$. Mais si les variables s’appelaient par exemple (u, v) ou (u, v, w) il vaudrait mieux écrire $\int_I f(u, v) du dv$ ou $\int_I f(u, v, w) du dv dw$.

Exemple. (intégrale d'une constante)

Soit f est une fonction constante, $f(x_1, \dots, x_N) \equiv C \geq 0$. Pour tout ensemble $I \subset \mathbb{R}^N$, on a

$$\int_I C dx_1 \cdots dx_N = C \times \lambda_N(I).$$

En particulier, $\lambda_N(I) = \int_I dx_1 \cdots dx_N$.

Remarque. On rappelle que par convention, on a $\infty \times 0 = 0 = 0 \times \infty$.

DÉMONSTRATION. On a $\text{SG}(f, I) = \{(x, \lambda) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}; x \in I \text{ et } 0 \leq \lambda < C\}$, autrement dit $\text{SG}(f, I) = I \times [0, C[$. Il s'agit donc de montrer que pour tout ensemble $I \subset \mathbb{R}^N$, on a $\lambda_{N+1}(I \times [0, C[) = C \times \lambda_N(I)$.

Supposons d'abord $C < \infty$. Alors le résultat est évident si I est un pavé Π car alors $\Pi \times [0, C[$ est aussi un pavé et donc $\lambda_{N+1}(\Pi \times [0, C[) = \text{vol}(\Pi \times [0, C[) = \text{vol}(\Pi) \times \text{vol}([0, C[) = C \lambda_N(\Pi)$. D'autre part, si on pose $\mu_1(I) = C \times \lambda_N(I)$ et $\mu_2(I) = \lambda_{N+1}(I \times [0, C[$, on vérifie très facilement que μ_1 et μ_2 sont des mesures sur \mathbb{R}^N . D'après le lemme d'unicité, on a donc $\mu_1 = \mu_2$, ce qui est le résultat souhaité.

Supposons maintenant $C = \infty$. Soit (C_n) une suite croissante de nombres réels tendant vers ∞ . Si $I \subset \mathbb{R}^N$, on a $\lambda_{N+1}(I \times [0, C_n]) = C_n \times \lambda_N(I)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ d'après le cas " $C < \infty$ ". Comme la suite d'intervalles $([0, C_n])$ est croissante et que λ_N et λ_{N+1} sont des mesures, on en déduit $\lambda_{N+1}(I \times [0, \infty[) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{N+1}(I \times [0, C_n]) = \lim_{n \rightarrow \infty} (C_n \times \lambda_N(I)) = \infty \times \lambda_N(I)$. □

Le lemme suivant sera parfois utile.

LEMME 2.1. Soit $I \subset \mathbb{R}^N$ et soit f une fonction positive définie sur I .

- (1) Si $\int_I f < \infty$, alors $f(x) < \infty$ pour presque tout $x \in I$.
- (2) On a $\int_I f = 0$ si et seulement si $f(x) = 0$ pour presque tout $x \in I$.

DÉMONSTRATION. (1) En posant $Z = \{x \in I; f(x) = \infty\}$, on a $\infty > \int_I f \geq \int_Z f = \infty \times \lambda_N(Z)$, et donc $\lambda_N(Z) = 0$.

(2) Si $f(x) = 0$ presque partout sur I et si on pose $E = \{x \in I; f(x) \neq 0\}$, alors $\int_E f = 0$ car $0 \leq \int_E f \leq \lambda_N(E) \times \infty = 0 \times \infty = 0$. Comme de plus $\int_I f = \int_E f$ par définition de E (car $\int_{I \setminus E} f = \int_{I \setminus Z} 0 dx = 0$) on a donc $\int_I f = 0$.

Inversement, supposons qu'on n'ait *pas* $f(x) = 0$ presque partout sur I , autrement dit que $E = \{x \in I; f(x) > 0\}$ vérifie $\lambda_N(E) > 0$: il s'agit de montrer que $\int_I f \neq 0$. Si on pose $E_n := \{x \in I; f(x) \geq 1/n\}$ (pour $n \in \mathbb{N}^*$), alors la suite d'ensembles $(E_n)_{n \geq 1}$ est croissante, et on a $E = \bigcup_1^\infty E_n$. Comme λ_N est une mesure, on a donc $\lambda_N(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(E_n)$; et par conséquent on peut trouver un entier n tel que $\lambda_N(E_n) > 0$. On a alors $\int_{E_n} f \geq \int_{E_n} (1/n) dx = (1/n) \times \lambda_N(E_n) > 0$, et donc $\int_I f > 0$ puisque $\int_I f \geq \int_{E_n} f$. □

Exercice 1. Montrer que si $I \subset \mathbb{R}^N$ vérifie $\lambda_N(I) = 0$, alors $\int_I f = 0$ pour toute fonction positive f définie sur I .

Exercice 2. Montrer que si $I' \subset I \subset \mathbb{R}^N$, alors $\int_{I'} f \leq \int_I f$ pour toute fonction positive f définie sur I .

2.2. Fonctions à valeurs réelles ou complexes. Soit I une partie de \mathbb{R}^N . Une fonction f définie sur I et à valeurs réelles ou complexes sera dite **sommable** si on a $\int_I |f| < \infty$. L'intégrale d'une fonction sommable à valeurs réelles est définie par

$$\int_I f = \int_I f^+ - \int_I f^-,$$

et l'intégrale d'une fonction à valeurs complexes est définie par

$$\int_I f = \int_I \operatorname{Re}(f) + i \int_I \operatorname{Im}(f).$$

On notera $L^1(I)$ l'ensemble des fonctions sommables sur I , à valeurs réelles ou complexes.

Exercice. Montrer que si f et g sont deux fonctions égales presque partout sur I , alors $f \in L^1(I)$ si et seulement si $g \in L^1(I)$, et dans ce cas $\int_I f = \int_I g$.

2.3. Propriétés de l'intégrale. Les propriétés de l'intégrale sont exactement les mêmes que pour les fonctions d'une variable, avec exactement les mêmes démonstrations. Rappelons les plus importantes.

- (1) *Additivité.* Si $I = I_1 \cup I_2$ avec $I_1 \cap I_2 = \emptyset$, alors $\int_I f = \int_{I_1} f + \int_{I_2} f$.
- (2) *Linéarité.* $\int_I (f + g) = \int_I f + \int_I g$ et $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$.
- (3) *Croissance.* Si $f \leq g$ alors $\int_I f \leq \int_I g$.
- (4) *Majoration du module.* $|\int_I f| \leq \int_I |f|$.
- (5) Toute fonction continue sur un ensemble fermé borné $I \subset \mathbb{R}^N$ est sommable sur I .
- (6) *Convergence monotone.* Si (f_n) est une suite croissante de fonctions positives et si $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in I$, alors $\int_I f = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_I f_n$.

2.4. Conclusion. Après avoir défini l'intégrale, on se retrouve devant le même problème que pour les fonctions d'une variable : comment fait-on pour effectivement calculer des intégrales de fonctions de plusieurs variables ? La suite de ce chapitre est consacrée à deux résultats répondant à cette question : le *théorème de Fubini*, qui permet de ramener un calcul d'intégrale “multiple” à des calculs d'intégrales “simples” ; et la *formule de changement de variables*, qui joue exactement le même rôle que pour les fonctions d'une variable.

3. Intégrales “itérées”

3.1. Coupes et volumes. Dans ce qui suit, p et q sont des entiers strictement positifs.

NOTATION. Soit $I \subset \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$. Pour $x \in \mathbb{R}^p$, on pose

$$I_x = \{y \in \mathbb{R}^q; (x, y) \in I\},$$

et pour $y \in \mathbb{R}^q$, on pose

$$I^y = \{x \in \mathbb{R}^p; (x, y) \in I\}.$$

On dit que I_x et I^y sont les **coupes** de l'ensemble I selon l'abscisse x et l'ordonnée y respectivement.

Exemple. Supposons que I soit de la forme $I = A \times B$, où $A \subset \mathbb{R}^p$ et $B \subset \mathbb{R}^q$. Alors on a

$$I_x = \begin{cases} B & \text{si } x \in A \\ \emptyset & \text{si } x \notin A \end{cases} \quad I^y = \begin{cases} A & \text{si } y \in B \\ \emptyset & \text{si } y \notin B \end{cases}$$

PROPOSITION 3.1. *Pour tout ensemble $I \subset \mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, on a*

$$\lambda_{p+q}(I) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(I_x) dx = \int_{\mathbb{R}^q} \lambda_p(I^y) dy.$$

DÉMONSTRATION. On va se contenter de montrer la première égalité. La preuve repose sur le fait suivant.

FAIT. L'application $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}^{p+q}) \rightarrow [0, \infty]$ définie par $\mu(I) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(I_x) dx$ est une mesure sur \mathbb{R}^{p+q} .

PREUVE DU FAIT. Il s'agit de vérifier les propriétés (o), (i) et (ii) de la définition d'une mesure.

(o) Si $I = \emptyset$, alors $I_x = \emptyset$ et donc $\lambda_q(I_x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$. Donc $\mu(\emptyset) = \int_{\mathbb{R}^p} 0 dx = 0$.

(i) Soient $I, I' \subset \mathbb{R}^{p+q}$ vérifiant $I \cap I' = \emptyset$. On a alors $I_x \cap I'_x = \emptyset$ pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, et donc $\lambda_q(I_x \cup I'_x) = \lambda_q(I_x) + \lambda_q(I'_x)$ car λ_q est une mesure. Comme de plus $(I_x \cup I'_x) = (I \cup I')_x$, on en déduit

$$\begin{aligned} \mu(I \cup I') &= \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q((I \cup I')_x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} (\lambda_q(I_x) + \lambda_q(I'_x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(I_x) dx + \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(I'_x) dx \\ &= \mu(I) + \mu(I'), \end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de l'intégrale à la troisième ligne.

(ii) Soit $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de \mathbb{R}^{p+q} , de "limite" $I = \bigcup_0^\infty I_n$. Pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, la suite d'ensembles $((I_n)_x)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et a pour "limite" $\bigcup_0^\infty (I_n)_x = (\bigcup_0^\infty I_n)_x = I_x$. Comme λ_q est une mesure, cela entraîne que la suite $(\lambda_q((I_n)_x))_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et a pour limite $\lambda_q(I_x)$. D'après le théorème de convergence monotone appliqué à $f_n(x) = \lambda_q((I_n)_x)$ et $f(x) = \lambda_q(I_x)$, on en déduit

$$\begin{aligned} \mu(I) &= \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q(I_x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q((I_n)_x) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(I_n). \end{aligned}$$

□

La proposition sera établie si on montre que $\mu = \lambda_{p+q}$; et d'après le lemme d'unicité, il suffit de vérifier que μ et λ_{p+q} prennent les mêmes valeurs sur les pavés.

Soit Π un pavé quelconque de \mathbb{R}^{p+q} . Alors $\Pi = A \times B$, où A est un pavé de \mathbb{R}^p et B est un pavé de \mathbb{R}^q . Pour $x \in \mathbb{R}^p$, on a $\Pi_x = B$ si $x \in A$ et $\Pi_x = \emptyset$ si $x \notin A$, donc $\lambda_q(\Pi_x)$

vaut $\lambda_q(B)$ si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$. On en déduit $\mu(\Pi) = \int_A \lambda_q(B) dx = \lambda_q(B) \times \lambda_p(A)$, et donc $\mu(\Pi) = \lambda_{p+q}(\Pi)$ puisque $\lambda_{p+q}(\Pi) = \text{vol}(\Pi) = \text{vol}(A)\text{vol}(B) = \lambda_p(A)\lambda_q(B)$. \square

COROLLAIRE 3.2. Si $A \subset \mathbb{R}^p$ et $B \subset \mathbb{R}^q$, alors $\lambda_{p+q}(A \times B) = \lambda_p(A) \times \lambda_q(B)$.

DÉMONSTRATION. D'après la proposition, on a $\lambda_{p+q}(A \times B) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q((A \times B)_x) dx$. Pour montrer que ceci est égal à $\lambda_p(A)\lambda_q(B)$, on recopie la fin de la preuve de la proposition : pour $x \in \mathbb{R}^p$, on a $(A \times B)_x = B$ si $x \in A$ et $(A \times B)_x = \emptyset$ si $x \notin A$; donc $\lambda_q((A \times B)_x)$ vaut $\lambda_q(B)$ si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$, et on en déduit

$$\int_{\mathbb{R}^p} \lambda_q((A \times B)_x) dx = \int_A \lambda_q(B) dx = \lambda_q(B) \times \lambda_p(A).$$

\square

Remarque. D'après le lemme d'unicité, la mesure de Lebesgue est la seule mesure sur \mathbb{R}^{p+q} vérifiant cette dernière propriété.

Exemple 1. Volume d'un cylindre.

Soient $r, h > 0$ et soit $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ et } 0 \leq z \leq h\}$. L'ensemble C est un cylindre, basé sur le disque D de centre 0 et de rayon r dans le plan des (x, y) et de hauteur h . En écrivant $C = \{(x, y), z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}; x^2 + y^2 \leq r^2 \text{ et } 0 \leq z \leq h\}$, on voit que $C = D \times [0, h]$. D'après le lemme, on a donc

$$\lambda_3(C) = \lambda_2(D) \lambda_1([0, h]),$$

autrement dit

$$\text{volume}(C) = \text{aire}(D) \times \text{longueur}([0, h]) = \pi r^2 h.$$

Exemple 2. Aire d'un disque.

Soit $R > 0$ et soit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq R^2\}$, le disque de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{R}^2 . En faisant un dessin, on voit que pour $x \in \mathbb{R}$ on a

$$D_x = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin [-R, R] \\ [-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}] & \text{si } x \in [-R, R] \end{cases}$$

Par conséquent, $\lambda_1(D_x)$ vaut $2\sqrt{R^2 - x^2}$ si $x \in [-R, R]$ et 0 sinon; donc l'aire du disque D est donnée par

$$\begin{aligned} \text{aire}(D) = \lambda_2(D) &= \int_{-R}^R \lambda_1\left(\left[-\sqrt{R^2 - x^2}, \sqrt{R^2 - x^2}\right]\right) dx \\ &= \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - x^2} dx. \end{aligned}$$

Le changement de variable $x = Rt$ donne ensuite

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx &= \int_{-1}^1 \sqrt{R^2 - R^2 t^2} R dt \\ &= R^2 \int_{-1}^1 \sqrt{1 - t^2} dt \\ &= 2R^2 \int_0^1 \sqrt{1 - t^2} dt, \end{aligned}$$

car la fonction $t \mapsto \sqrt{1-t^2}$ est paire. La dernière intégrale a déjà été calculée : elle vaut $\frac{\pi}{4}$. Au total, on obtient donc

$$\text{aire}(D) = 2 \times 2R^2 \times \frac{\pi}{4} = \pi R^2,$$

ce qu'on devait trouver !

Exemple 3. Volume d'une boule.

Soit $R > 0$ et soit B la boule de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} B &= \{M \in \mathbb{R}^3; OM \leq R\} \\ &= \{(x, y, z); x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}. \end{aligned}$$

En faisant un dessin, on voit que pour $z \in \mathbb{R}$, la coupe B^z est vide si $z \notin [-R, R]$, et que B^z est un disque de rayon $\sqrt{R^2 - z^2}$ si $z \in [-R, R]$. On a donc $\lambda_2(B^z) = 0$ si $z \notin [-R, R]$ et $\lambda_2(B^z) = \pi(R^2 - z^2)$ si $z \in [-R, R]$, d'où

$$\begin{aligned} \text{volume}(B) = \lambda_3(B) &= \int_{-R}^R \lambda_2(B^z) dz \\ &= \pi \int_{-R}^R (R^2 - z^2) dz \\ &= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{-R}^R \\ &= \pi \times \left(2R^3 - \frac{2R^3}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

Exemple 4. Volume d'un cône.

Soient $R, h > 0$, et soit $C \subset \mathbb{R}^3$ un cône de hauteur h basé sur un disque D de rayon R . Pour calculer le volume de C , on peut supposer que le disque D est centré en 0 et contenu dans le plan des xy . En faisant un dessin, on voit que pour $z \in \mathbb{R}$, la coupe C^z est vide si $z \notin [0, h]$, et que C^z est un disque de rayon $r(z)$ si $z \in [0, h]$. Le rayon $r(z)$ de ce disque se calcule à l'aide du théorème de Thalès : on a

$$\frac{r(z)}{R} = \frac{h-z}{h} = \left(1 - \frac{z}{h}\right),$$

et donc $r(z) = R\left(1 - \frac{z}{h}\right)$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \text{volume}(C) = \lambda_3(C) &= \int_0^h \lambda_2(C^z) dz \\ &= \int_0^h \pi \left(R \left(1 - \frac{z}{h}\right) \right)^2 dz \\ &= \pi R^2 \int_0^h \left(1 - \frac{z}{h}\right)^2 dz \\ &= \pi R^2 \left[-\frac{h}{3} \left(1 - \frac{z}{h}\right)^3 \right]_0^h \\ &= \frac{1}{3} \pi R^2 h. \end{aligned}$$

Exercice. Soient $L, l, h > 0$. Calculer le volume d'une pyramide de hauteur h dont la base est un rectangle de côtés l et L .

3.2. Le théorème de Fubini. Dans ce qui suit, p et q sont toujours des entiers strictement positifs.

THÉORÈME 3.3. (théorème de Fubini)

Soit I une partie de $\mathbb{R}^{p+q} = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$, et soit f une fonction positive ou à valeurs complexes définie sur I .

(1) Si f est **positive**, alors

$$\int_I f = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{I_x} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{I^y} f(x, y) dx \right] dy.$$

(2) Si f est **sommable** sur I , alors on a le droit d'écrire

$$\int_I f = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{I_x} f(x, y) dy \right] dx = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{I^y} f(x, y) dx \right] dy.$$

COMMENTAIRE. La signification précise de (2) est la suivante.

- (i) Pour presque tout $x \in \mathbb{R}^p$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est sommable sur I_x , de sorte que $\Phi(x) := \int_{I_x} f(x, y) dy$ est bien défini sur un ensemble A tel que $\lambda_p(\mathbb{R}^p \setminus A) = 0$;
- (i') pour presque tout $y \in \mathbb{R}^q$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est sommable sur I^y de sorte que $\Psi(y) = \int_{I^y} f(x, y) dx$ est bien défini sur un ensemble B tel que $\lambda_q(\mathbb{R}^q \setminus B) = 0$;
- (ii) si on définit arbitrairement Φ sur $\mathbb{R}^p \setminus A$ et Ψ sur $\mathbb{R}^q \setminus B$, alors Φ et Ψ sont sommables sur \mathbb{R}^p et \mathbb{R}^q respectivement, et on a $\int_{\mathbb{R}^p} \Phi(x) dx = \int_I f = \int_{\mathbb{R}^q} \Psi(y) dy$.

L'énoncé du théorème de Fubini peut paraître un peu compliqué pour un ensemble I général, car on est obligé de considérer les coupes de I . Lorsque I est un ensemble produit $A \times B$, tout devient beaucoup plus simple. Dans ce cas le théorème de Fubini dit exactement que pour calculer une intégrale $\int_{A \times B} f(x, y) dx dy$, on peut intégrer d'abord par rapport à x et ensuite par rapport à y , ou bien l'inverse : le résultat sera le même.

COROLLAIRE 3.4. Soient $A \subset \mathbb{R}^p$ et $B \subset \mathbb{R}^q$. Si f est une fonction ou bien positive ou bien sommable définie sur $A \times B \subset \mathbb{R}^{p+q}$, alors

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left[\int_B f(x, y) dy \right] dx = \int_B \left[\int_A f(x, y) dx \right] dy.$$

DÉMONSTRATION. D'après le théorème de Fubini, on a

$$\int_{A \times B} f = \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{(A \times B)_x} f(x, y) dy \right] dx.$$

De plus, comme $(A \times B)_x = B$ si $x \in A$ et $(A \times B)_x = \emptyset$ si $x \notin A$, l'intégrale $\int_{(A \times B)_x} f(x, y) dy$ vaut $\int_B f(x, y) dy$ si $x \in A$ et 0 si $x \notin A$. Par conséquent :

$$\int_{A \times B} f = \int_A \left[\int_B f(x, y) dy \right] dx.$$

La preuve de la deuxième égalité est identique. □

Exemple 1. Calcul de l'intégrale $J = \int_{[0, \infty[\times [0, \infty[} \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2} dx dy$.

La fonction à intégrer est positive, donc on peut appliquer le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2+y^2)^2} dx \right) dy \\ &= \int_0^\infty \left[-\frac{1}{2} \frac{1}{1+x^2+y^2} \right]_{x=0}^{x=\infty} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{dy}{1+y^2} \\ &= \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Exemple 2. Calcul de l'intégrale $J = \int_{\mathcal{D}} \frac{x}{y} dx dy$, où

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq x^2\}.$$

En faisant un dessin, on voit qu'on a $\mathcal{D}_x = \emptyset$ si $x \notin [1, 2]$, et $\mathcal{D}_x = [1, x^2]$ si $1 \leq x \leq 2$. Donc

$$\begin{aligned} J &= \int_1^2 \left[\int_1^{x^2} \frac{x}{y} dy \right] dx \\ &= \int_1^2 [x \ln(y)]_{y=1}^{y=x^2} dx \\ &= \int_1^2 x \ln(x^2) dx \\ &= 2 \int_1^2 x \ln(x) dx. \end{aligned}$$

Pour terminer, on intègre par parties, ce qui donne

$$\begin{aligned} J &= 2 \left\{ \left[\frac{x^2}{2} \ln(x) \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{x} dx \right\} \\ &= 4 \ln(2) - \int_1^2 x dx \\ &= 4 \ln(2) - \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Exemple 3. Calcul de l'intégrale $J = \int_{\mathcal{D}} \frac{dx dy}{(x+y)^4}$, où

$$\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 1, y \geq 1 \text{ et } x + y \leq 4\}$$

En faisant un dessin, on voit qu'on a $\mathcal{D}_x = \emptyset$ si $x \notin [1, 3]$, et $\mathcal{D}_x = [1, 4-x]$ si $1 \leq x \leq 3$. Donc

$$\begin{aligned} J &= \int_1^3 \left[\int_1^{4-x} \frac{dy}{(x+y)^4} \right] dx \\ &= \int_1^3 \left[-\frac{1}{3} \frac{1}{(x+y)^3} \right]_{y=1}^{y=4-x} dx \\ &= \frac{1}{3} \int_1^3 \left(\frac{1}{(x+1)^3} - \frac{1}{4^3} \right) dx. \end{aligned}$$

Le calcul ne présente alors plus de difficulté, et on trouve finalement $J = \frac{1}{48}$.

PREUVE DU THÉORÈME DE FUBINI. (1) Supposons f positive et notons \mathcal{I} le sous-graphe de f au dessus de I :

$$\begin{aligned}\mathcal{I} &= \{(x, y), \lambda) \in (\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q) \times \mathbb{R}; (x, y) \in I \text{ et } 0 \leq \lambda < f(x, y)\} \\ &= \{(x, (y, \lambda)) \in \mathbb{R}^p \times (\mathbb{R}^q \times \mathbb{R}); (x, y) \in I \text{ et } 0 \leq \lambda < f(x, y)\}.\end{aligned}$$

Par définition de l'intégrale et d'après la proposition 3.1 (appliquée avec p et $q+1$ au lieu de q), on a

$$\int_I f = \lambda_{p+q+1}(\mathcal{I}) = \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_{q+1}(\mathcal{I}_x) dx.$$

D'autre part, si $x \in \mathbb{R}^p$ alors

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_x &= \{(y, \lambda) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}; (x, y) \in I \text{ et } 0 \leq \lambda < f(x, y)\} \\ &= \{(y, \lambda) \in \mathbb{R}^q \times \mathbb{R}; y \in I_x \text{ et } 0 \leq \lambda < f(x, y)\} \\ &= \text{SG}(f_x, I_x),\end{aligned}$$

où f_x est la fonction $y \mapsto f(x, y)$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned}\int_I f &= \int_{\mathbb{R}^p} \lambda_{q+1}(\text{SG}(f_x, I_x)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{I_x} f_x \right] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{I_x} f(x, y) dy \right] dx.\end{aligned}$$

On montre évidemment de la même façon qu'on a aussi $\int_I f = \int_{\mathbb{R}^q} \left[\int_{I_y} f(x, y) dx \right] dy$.

(2) Supposons f sommable sur I . Par (1), on a $\int_{\mathbb{R}^p} \left[\int_{I_x} |f(x, y)| dy \right] dx = \int_I |f| < \infty$.

Donc la fonction positive $\tilde{\Phi}$ définie par $\tilde{\Phi}(x) = \int_{I_x} |f(x, y)| dy$ est sommable sur \mathbb{R}^p . En particulier, on a $\tilde{\Phi}(x) < \infty$ presque partout.

Posons $A = \{x \in \mathbb{R}^p; \tilde{\Phi}(x) < \infty\}$. D'après ce qui précède, on a $\lambda_p(\mathbb{R}^p \setminus A) = 0$. De plus,

$$\Phi(x) := \int_{I_x} f(x, y) dy$$

est bien défini pour tout $x \in A$, puisque A est exactement l'ensemble des $x \in \mathbb{R}^p$ tels que la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est sommable sur I_x .

Par définition, on a $|\Phi(x)| \leq \int_{I_x} |f(x, y)| dy = \tilde{\Phi}(x)$ pour tout $x \in A$, donc presque partout. Donc la fonction Φ , prolongée arbitrairement à \mathbb{R}^p , est sommable sur \mathbb{R}^p puisque $\tilde{\Phi}$ est sommable.

Si f est à valeurs réelles, on peut appliquer la partie (1) aux fonctions f^+ et f^- ; et comme $\lambda_p(\mathbb{R}^p \setminus A) = 0$ cela s'écrit

$$\int_I f^+ = \int_A \left[\int_{I_x} f^+(x, y) dy \right] dx \quad \text{et} \quad \int_I f^- = \int_A \left[\int_{I_x} f^-(x, y) dy \right] dx.$$

Pour tout $x \in A$, on sait que $\int_{I_x} f^+(x, y) dy < \infty$ et $\int_{I_x} f^-(x, y) dy < \infty$, donc on a le droit d'écrire la différence $\int_{I_x} f^+(x, y) dy - \int_{I_x} f^-(x, y) dy$. On en déduit

$$\begin{aligned} \int_I f &= \int_I f^+ - \int_I f^- \\ &= \int_A \left[\int_{I_x} f^+(x, y) dy - \int_{I_x} f^-(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_A \left[\int_{I_x} (f^+(x, y) - f^-(x, y)) dy \right] dx \\ &= \int_A \Phi(x) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^p} \Phi(x) dx, \end{aligned}$$

où on a encore utilisé le fait que $\lambda_p(\mathbb{R}^p \setminus A) = 0$.

Si f est à valeurs complexes, on applique le cas "réel" à $\text{Re}(f)$ et $\text{Im}(f)$ pour obtenir à nouveau $\int_I f = \int_{\mathbb{R}^p} \Phi(x) dx$, ce qui termine la démonstration. \square

Exercice. Montrer que la proposition 3.1 est un cas particulier du théorème de Fubini.

3.3. Remarques sur les hypothèses. Soit f une fonction définie sur $A \times B$, où $A \subset \mathbb{R}^p$ et $B \subset \mathbb{R}^q$. Le théorème de Fubini dit que *sous certaines conditions*, on peut écrire

$$(3.1) \quad \int_A \left[\int_B f(x, y) dy \right] dx = \int_B \left[\int_A f(x, y) dx \right] dy.$$

- (i) Si f est **positive**, il n'y a pas de questions à se poser : les deux intégrales "itérées" ont un sens (intégrales de fonctions positives) et sont égales dans tous les cas. Il se peut que l'une des deux vaille ∞ , et dans ce cas l'autre aussi.
- (ii) Si f n'est pas positive, il faut avoir vérifié que f est **sommable** sur $A \times B$ pour être certain de la validité de (3.1).
- (iii) Pour montrer que f est sommable sur $A \times B$, il suffit de vérifier qu'on a $\int_A \left[\int_B |f(x, y)| dy \right] dx < \infty$ ou $\int_B \left[\int_A |f(x, y)| dx \right] dy < \infty$, car les intégrales itérées sont toutes les deux égales à $\int_{A \times B} |f|$ d'après le cas "positif" du théorème de Fubini.

UN CONTRE-EXEMPLE. Soit $f :]0, 1[\times]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Un calcul facile montre que

$$f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Pour $x \in]0, 1[$ fixé, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ se prolonge continûment à $[0, 1]$, donc elle est sommable sur $]0, 1[$; et on a

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x, y) dy &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) dy \\ &= \left[\frac{y}{x^2 + y^2} \right]_{y=0}^{y=1} \\ &= \frac{1}{1 + x^2}. \end{aligned}$$

En particulier, la fonction $x \mapsto \int_0^1 f(x, y) dy$ se prolonge continûment à $[0, 1]$, donc elle est sommable sur $]0, 1[$, et on a

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dy \right] dx = \int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = [\arctan(x)]_0^1 = \frac{\pi}{4}.$$

On montrerait exactement de la même façon que

$$\int_0^1 \left[\int_0^1 f(x, y) dx \right] dy = - \int_0^1 \frac{dy}{1 + y^2} = -\frac{\pi}{4}.$$

Ainsi, le théorème de Fubini ne s'applique pas à la fonction f .

Exercice. Montrer directement que f n'est pas sommable sur $]0, 1[\times]0, 1[$.

4. Changements de variables

4.1. Difféomorphismes. Dans ce qui suit, N est un entier ≥ 1 .

RAPPELS. On considérera que les notions suivantes sont “bien connues”.

- (1) Un ensemble $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est dit **ouvert** si, pour tout point $a = (a_1, \dots, a_N) \in \Omega$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que le pavé

$$\Pi(a, \varepsilon) =]a_1 - \varepsilon, a_1 + \varepsilon[\times \dots \times]a_N - \varepsilon, a_N + \varepsilon[$$

est contenu dans Ω . En d'autres termes, cela signifie que si $a \in \Omega$, alors tout point de \mathbb{R}^N “suffisamment proche” de a est encore dans Ω .

- (2) Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Une application $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ est **de classe \mathcal{C}^1** si, en écrivant $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x))$, les fonctions Φ_1, \dots, Φ_N possèdent des dérivées partielles continues.

Exercice. Montrer que tout produit de N intervalles ouverts est un ouvert de \mathbb{R}^N .

DÉFINITION 4.1. Soient Ω et Ω' deux ouverts de \mathbb{R}^N . Un **difféomorphisme** de Ω sur Ω' est une application $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ vérifiant les propriétés suivantes.

- (i) Φ est une **bijection** de Ω sur Ω' , autrement dit : pour tout $x' \in \Omega'$, l'équation $\Phi(x) = x'$ possède une unique solution $x \in \Omega$;
(ii) Φ et Φ^{-1} sont de classe \mathcal{C}^1 .

Exemple 1. Soit $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application **linéaire**, c'est-à-dire de la forme $\Phi(x) = Mx$, où M est une matrice $N \times N$. Alors Φ est un difféomorphisme de \mathbb{R}^N sur \mathbb{R}^N si et seulement si la matrice M est **inversible**, ce qui revient à dire que $\det(M) \neq 0$.

Exemple 2. Soit I un intervalle ouvert de \mathbb{R} , et soit $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que $\Phi'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$. Alors Φ est strictement monotone, $I' = \Phi(I)$ est un intervalle ouvert, et Φ est un difféomorphisme de I sur I' .

Exemple 3. Soit $\Phi :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow]0, \infty[\times]0, \infty[$ l'application définie par $\Phi(x, y) = (xy, \frac{x}{y})$. Alors Φ est un difféomorphisme de $]0, \infty[\times]0, \infty[$ sur $]0, \infty[\times]0, \infty[$.

DÉMONSTRATION. L'application Φ est de classe \mathcal{C}^1 et envoie visiblement l'ouvert $\Omega =]0, \infty[\times]0, \infty[$ dans lui-même.

Si $(x, y) \in \Omega$ et $(u, v) \in \Omega$, alors on vérifie facilement l'équivalence suivante :

$$\Phi(x, y) = (u, v) \iff \begin{cases} x = \sqrt{uv} \\ y = \sqrt{\frac{u}{v}} \end{cases}$$

Par conséquent, Φ est une bijection de Ω sur Ω , avec $\Phi^{-1}(u, v) = (\sqrt{uv}, \sqrt{\frac{u}{v}})$. Ces formules montrent que Φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 , donc Φ est un difféomorphisme. \square

DÉFINITION 4.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et soit $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ de classe \mathcal{C}^1 ,

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \vdots \\ \Phi_N(x) \end{pmatrix}.$$

(1) Si $a \in \Omega$, la **matrice jacobienne** de Φ au point a est la matrice

$$\text{Jac}_\Phi(a) = \left(\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(a) \right)_{i,j=1}^N.$$

(2) Le **déterminant jacobien** de Φ en un point $a \in \Omega$ est le nombre

$$J_\Phi(a) = \det(\text{Jac}_\Phi(a)).$$

Remarque. Pour ne pas se tromper entre les lignes et les colonnes de la matrice jacobienne, il suffit de bien veiller à écrire Φ "en colonne". Ensuite, on dérive la colonne par rapport à chaque variable x_1, \dots, x_N .

Exemple 1. Si $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est linéaire, $\Phi(x) = Mx$, alors $\text{Jac}_\Phi(x) = M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, et donc $J_\Phi(x) = \det(M)$.

DÉMONSTRATION. Écrivons $M = (a_{ij})_{i,j=1}^N$. On sait que si $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$, alors

$$\Phi(x) = Mx \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} \Phi_1(x) \\ \vdots \\ \Phi_N(x) \end{pmatrix} \text{ avec}$$

$$\Phi_i(x) = \sum_{j=1}^N a_{ij}x_j.$$

On en déduit immédiatement qu'on a $\frac{\partial \Phi_i}{\partial x_j}(x) = a_{ij}$ pour tous $i, j \in \{1, \dots, N\}$, et donc $\text{Jac}_\Phi(x) = M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$. \square

Exemple 2. Si Ω est un ouvert de \mathbb{R} et si $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe \mathcal{C}^1 , alors $\text{Jac}_\Phi(x) = (\Phi'(x))$ (matrice 1×1) pour tout $x \in \Omega$, et donc $J_\Phi(x) = \Phi'(x)$.

Exemple 3. Si $\Phi :]0, \infty[\times]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}^2$ est définie par $\Phi(x, y) = (xy, \frac{x}{y})$, alors

$$\text{Jac}_\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & -\frac{x}{y^2} \end{pmatrix}$$

et donc $J_\Phi(x, y) = -2 \frac{x}{y}$.

On *admettra* le résultat suivant, qui n'est pas du tout évident.

PROPOSITION 4.3. *Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ une bijection \mathcal{C}^1 entre deux ouverts de \mathbb{R}^N . Alors Φ est un difféomorphisme si et seulement si $J_\Phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$.*

Remarque 1. L'intérêt de ce résultat est qu'il donne un moyen de montrer que Φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 sans avoir besoin de calculer Φ^{-1} .

Remarque 2. On peut montrer que si $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ est de classe \mathcal{C}^1 et $J_\Phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors $\Phi(\Omega)$ est un ouvert de \mathbb{R}^N . Mais là encore, ce n'est pas du tout évident. Quoi qu'il en soit, on en déduit que si $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ est *injective* et de classe \mathcal{C}^1 , avec $J_\Phi(x) \neq 0$ pour tout $x \in \Omega$, alors Φ est un difféomorphisme de Ω sur $\Omega' = \Phi(\Omega)$.

4.2. La formule de changement de variables.

4.2.1. *Le cas de la dimension 1.* Le lemme suivant est une ré-écriture (d'un cas particulier) de la formule de changement de variable établie au chapitre 1.

LEMME 4.4. *Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R} . Pour tout intervalle $[a, b] \subset \Omega$ et pour toute fonction f continue sur $\Phi([a, b])$, on a*

$$\int_{\Phi([a, b])} f(x) dx = \int_{[a, b]} f(u) |\Phi'(u)| du.$$

DÉMONSTRATION. On sait qu'on a

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\Phi(u)) \Phi'(u) du = \int_{[a, b]} f(\Phi(u)) \Phi'(u) du.$$

D'autre part, le difféomorphisme Φ est strictement monotone sur $[a, b]$. Si Φ est croissant sur $[a, b]$, alors $\Phi([a, b]) = [\Phi(a), \Phi(b)]$ et $\Phi'(u) = |\Phi'(u)|$ puisque $\Phi \geq 0$; et si Φ est décroissant, alors $\Phi([a, b]) = [\Phi(b), \Phi(a)]$ et $\Phi'(u) = -|\Phi'(u)|$. Dans les deux cas, la formule précédente peut effectivement s'écrire

$$\int_{\Phi([a, b])} f(x) dx = \int_{[a, b]} f(u) |\Phi'(u)| du.$$

□

4.2.2. *Le cas général.* Le théorème suivant est formellement une généralisation "immédiate" du lemme 4.4 en dimension N quelconque. La preuve est cependant beaucoup plus difficile!

THÉORÈME 4.5. (formule de changement de variables)

Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^N , et soit f une fonction positive ou à valeurs complexes définie sur Ω' .

(1) *Si f est **positive** et si $I \subset \Omega$, alors*

$$\int_{\Phi(I)} f(x) dx = \int_I f(\Phi(u)) |J_\Phi(u)| du.$$

(2) Si f est à valeurs complexes et si $I \subset \Omega$, alors on a le droit d'écrire

$$\int_I f(x) dx = \int_I f(\Phi(u)) |J_\Phi(u)| du$$

à condition d'avoir vérifié que f est **sommable** sur $\Phi(I)$.

Remarque. Plus précisément, la partie (2) signifie que f est sommable sur $\Phi(I)$ si et seulement si la fonction $(f \circ \Phi) |J_\Phi|$ est sommable sur I , et que dans ce cas les deux intégrales dont il est question sont égales.

En prenant $f = \mathbf{1}$, on obtient une formule décrivant l'effet d'un difféomorphisme sur les volumes :

COROLLAIRE 4.6. Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^N . Pour tout ensemble $I \subset \Omega$, on a

$$\lambda_N(\Phi(I)) = \int_I |J_\Phi(u)| du.$$

UTILISATION PRATIQUE DE LA FORMULE. Supposons qu'on veuille calculer une intégrale

$$J = \int_{\mathcal{D}} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \cdots dx_N$$

sur un certain "domaine" $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^N$. On peut procéder de la façon suivante.

- (i) On *devine* qu'il peut être avantageux d'utiliser de nouvelles variables u_1, \dots, u_N .
- (ii) On exprime $x = (x_1, \dots, x_N)$ en fonction de $u = (u_1, \dots, u_N)$, et on vérifie qu'on a bien un difféomorphisme $x = \Phi(u)$.
- (iii) On écrit $x = \Phi(u)$, $dx = |J_\Phi(u)| du$, autrement dit

$$\begin{aligned} (x_1, \dots, x_N) &= \Phi(u_1, \dots, u_N), \\ dx_1 \cdots dx_N &= |J_\Phi(u_1, \dots, u_N)| du_1 \cdots du_N \end{aligned}$$

Ici, il faut donc *calculer* le déterminant jacobien $J_\Phi(u)$.

- (iv) On n'**oublie pas** de remplacer \mathcal{D} par le domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ tel que $\Phi(\tilde{\mathcal{D}}) = \mathcal{D}$.
- (v) On écrit la formule de changement de variable

$$\int_{\mathcal{D}} f(x) dx = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} f(\Phi(u)) |\Phi(u)| du$$

sans oublier la valeur absolue autour de $J_\Phi(u)$, et on effectue le calcul de la deuxième intégrale en espérant qu'on va y arriver.

Exemple. Soit $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$ le domaine délimité par les 4 droites d'équations $y = x + 1$, $y = x + 2$, $x + 2y = 3$ et $x + 2y = 2$. On veut calculer l'intégrale

$$J = \int_{\mathcal{D}} xy dx dy.$$

Un point (x, y) appartient à \mathcal{D} si et seulement si $1 \leq y - x \leq 2$ et $2 \leq x + 2y \leq 3$. On devine donc qu'il est intéressant de poser

$$\begin{cases} u = y - x \\ v = x + 2y \end{cases}$$

car $(x, y) \in \mathcal{D} \iff (u, v) \in [1, 2] \times [2, 3]$, de sorte que \mathcal{D} correspond donc au domaine “plus simple” $\tilde{\mathcal{D}} = [1, 2] \times [2, 3]$.

Pour exprimer (x, y) en fonction de (u, v) , on “inverse” le système précédent : après un calcul facile, on trouve

$$\begin{cases} x = \frac{v-2u}{3} \\ y = \frac{u+v}{3} \end{cases}$$

Autrement dit :

$$(x, y) = \left(\frac{v-2u}{3}, \frac{u+v}{3} \right) = \Phi(u, v).$$

Il est clair que Φ est un difféomorphisme (linéaire), et on a

$$J_{\Phi}(u, v) = \det \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = -\frac{1}{3}$$

pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. La formule de changement de variables s’écrit donc

$$\int_{\mathcal{D}} xy \, dx dy = \int_{[1,2] \times [2,3]} \frac{v-2u}{3} \times \frac{u+v}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) \, dudv.$$

Il ne reste alors plus qu’à finir le calcul, ce qui est facile :

$$\begin{aligned} J &= -\frac{1}{27} \int_1^2 \left(\int_2^3 (v-2u)(u+v) \, dv \right) du \\ &= \frac{1}{27} \int_1^2 \left(\int_2^3 (2u^2 + uv - v^2) \, dv \right) du \\ &= \frac{1}{27} \int_1^2 \left(2u^2 + \frac{5}{2}u - \frac{19}{3} \right) du \\ &= \frac{25}{324}. \end{aligned}$$

4.3. Volumes et applications affines. Une application $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est **affine** si elle est de la forme

$$\Phi(x) = a + L(x),$$

où $a \in \mathbb{R}^N$ est fixé et L est une application linéaire, $L(x) = Mx$ pour une certaine matrice M .

Exemples. Les **translations** sont des applications affines ($L = 0$), et toute application linéaire est affine ($a = 0$). De même, les projections et les symétries sont des applications affines

Si $\Phi(x) = a + L(x)$ est une application affine, on dit que L est l’**application linéaire associée à Φ** . Elle est caractérisée par la propriété suivante : pour tous $p, q \in \mathbb{R}^N$, on a

$$L(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\Phi(p)\Phi(q)}.$$

Le **déterminant** d’une application affine Φ est le déterminant de l’application linéaire associée : si $\Phi(x) = a + L(x) = a + Mx$, alors

$$\det(\Phi) = \det(L) = \det(M).$$

Il est facile de vérifier qu'une application affine $\Phi(x) = a + L(x) = a + Mx$ est un difféomorphisme si et seulement l'application linéaire associée est inversible. De plus, on $\text{Jac}_\Phi(x) = M$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$, et donc

$$J_\Phi(x) = \det(\Phi).$$

D'après la formule de changement de variables, on en déduit immédiatement le résultat suivant.

PROPOSITION 4.7. *Si $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est un difféomorphisme affine, alors*

$$\int_{\Phi(I)} f(x) dx = |\det(\Phi)| \int_I f(\Phi(u)) du$$

pour tout $I \subset \mathbb{R}^N$ et pour toute fonction f positive ou sommable sur $\Phi(I)$. En particulier, Φ multiplie les volumes par le facteur $|\det(\Phi)|$: pour tout $I \subset \mathbb{R}^N$, on a

$$\lambda_N(\Phi(I)) = |\det(\Phi)| \lambda_N(I).$$

Exemple 1. Si $ABCD$ est un parallélogramme dans \mathbb{R}^2 , alors l'aire de $ABCD$ est donnée par la formule suivante : $\text{aire}(ABCD) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

DÉMONSTRATION. Un point M appartient au parallélogramme $ABCD$ si et seulement si on peut écrire

$$\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AD}$$

avec $0 \leq \lambda \leq 1$ et $0 \leq \mu \leq 1$.

En d'autres termes, en notant (x_A, y_A) les coordonnées du point A et en écrivant

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AD} = \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$

le parallélogramme $ABCD$ est l'image du pavé $[0, 1] \times [0, 1]$ par l'application $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par

$$\Phi(\lambda, \mu) = (x_A + \lambda a + \mu c, y_A + \lambda b + \mu d).$$

L'application Φ est un difféomorphisme affine de \mathbb{R}^2 sur \mathbb{R}^2 et on a

$$\det(\Phi) = \det \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$$

pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$. D'après la proposition 4.7, on a donc

$$\lambda_2(ABCD) = |\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})| \times \lambda_2([0, 1] \times [0, 1]),$$

ce qui est le résultat souhaité. □

Exemple 2. Aire de l'intérieur d'une ellipse.

Soient $a, b > 0$. On veut calculer l'aire du domaine \mathcal{E} entouré par une ellipse Γ de "demi-axes" a et b . On peut supposer que Γ est centrée en $(0, 0)$, de sorte que

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}.$$

On voit tout de suite qu'il est avantageux de poser $(u, v) = \left(\frac{x}{a}, \frac{y}{b}\right)$, car

$$(x, y) \in \mathcal{E} \iff u^2 + v^2 \leq 1.$$

Le domaine \mathcal{E} correspond donc au disque $\tilde{\mathcal{E}}$ de centre $(0,0)$ et de rayon 1, qui est clairement “plus simple” que \mathcal{E} .

On a $(x, y) = (au, bv) = \Phi(u, v)$. L’application Φ est un difféomorphisme linéaire, avec

$$\det(\Phi) = \det \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = ab.$$

Par conséquent, $\lambda_2(\mathcal{E}) = ab \times \lambda_2(\tilde{\mathcal{E}})$, autrement dit

$$\text{aire}(\mathcal{E}) = \pi ab.$$

RAPPEL. La **distance** entre deux points $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ et $\mathbf{u}' = (u'_1, \dots, u'_N)$ de \mathbb{R}^N est définie par

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{u}') = \sqrt{(u'_1 - u_1)^2 + \dots + (u'_N - u_N)^2}.$$

DÉFINITION 4.8. Une application $\Phi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une **isométrie** si elle préserve les distances, i.e. $d(\Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}')) = d(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ pour tous $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{R}^N$.

Exemples. Les translations, les rotations et les symétries orthogonales sont des isométries.

Le résultat suivant est une propriété fondamentale de la mesure de Lebesgue.

THÉORÈME 4.9. La mesure de Lebesgue est **invariante par isométries** : si Φ est une isométrie de \mathbb{R}^N , alors $\lambda_N(\Phi(I)) = \lambda_N(I)$ pour tout ensemble $I \subset \mathbb{R}^N$.

DÉMONSTRATION. On admettra que toute isométrie de \mathbb{R}^N est affine, et plus précisément de la forme $\Phi(x) = a + Mx$ où M est une matrice **orthogonale**, c’est à dire vérifiant ${}^tMM = Id$. Comme $\det({}^tM) = \det(M)$, on a $\det(M)^2 = \det(Id) = 1$, et donc $\det(M) = \pm 1$. D’où le résultat par la proposition 4.7. \square

Vu l’importance du théorème 4.9, on va maintenant en donner une démonstration plus “directe”. Tout repose sur les deux lemmes suivants.

LEMME 4.10. La mesure de Lebesgue est **invariante par translations** : on a $\lambda_N(a + I) = \lambda_N(I)$ pour tout $a \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $I \subset \mathbb{R}^N$.

DÉMONSTRATION. Si $a \in \mathbb{R}^N$ et si on pose $\mu_a(I) = \lambda_N(a + I)$ pour tout $I \subset \mathbb{R}^N$, on vérifie très facilement que μ_a est une mesure sur \mathbb{R}^N telle que $\mu_a(\Pi) = \text{vol}(\Pi)$ pour tout pavé $\Pi \subset \mathbb{R}^N$. Donc $\mu_a = \lambda_N$ pour tout $a \in \mathbb{R}^N$, i.e. λ_N est invariante par translations. \square

LEMME 4.11. Si μ est une mesure sur \mathbb{R}^N invariante par translations et telle que $\mu([0, 1]^N) < \infty$, alors μ est multiple de la mesure de Lebesgue : il existe une constante $C < \infty$ telle que $\mu(I) = C \lambda_N(I)$ pour tout $I \subset \mathbb{R}^N$.

DÉMONSTRATION. On va montrer que $\mu = C \lambda_N$, avec $C = \mu([0, 1]^N)$. D’après le lemme d’unicité, il suffit de prouver qu’on a $\mu(\Pi) = C \lambda_N(\Pi)$ pour tout pavé $\Pi \subset \mathbb{R}^N$.

Commençons par le cas où Π est un *pavé rationnel semi-ouvert*, c’est-à-dire un pavé de la forme $\Pi = [a_1, b_1[\times \dots \times [a_N, b_N[$ où les a_i et les b_i sont rationnels. En réduisant tout au même dénominateur, on voit qu’on peut trouver un entier $K \geq 1$ et des entiers p_i, q_i tels que $a_i = \frac{p_i}{K}$ et $b_i = \frac{q_i}{K}$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. En faisant un dessin (dans le plan), on se convainc sans peine que le pavé Π est réunion de

$l = (q_1 - p_1) \times \cdots \times (q_N - p_N)$ translatés deux-à-deux disjoints du pavé $[0, \frac{1}{K}]^N$. Comme μ est une mesure invariante par translations, on a donc $\mu(\Pi) = l \times \mu([0, \frac{1}{K}]^N)$. De plus, le pavé “unité” $[0, 1]^N$ est pour sa part réunion de K^N translatés deux à deux disjoints du pavé $[0, \frac{1}{K}]^N$, et donc $\mu([0, 1]^N) = K^N \times \mu([0, \frac{1}{K}]^N)$; autrement dit : $\mu([0, \frac{1}{K}]^N) = \frac{C}{K^N}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \mu(\Pi) &= l \times \frac{C}{K^N} \\ &= C \times \frac{(q_1 - p_1) \cdots (q_N - p_N)}{K^N} \\ &= C \operatorname{vol}(\Pi), \end{aligned}$$

ce qui est la conclusion souhaitée.

On passe ensuite au cas des pavés *fermés*. Comme tout intervalle fermé borné $[a, b] \subset \mathbb{R}$ est l'intersection d'une suite décroissante d'intervalles semi-ouverts $[a_n, b_n[$ à extrémités rationnelles (*exercice*), on voit que tout pavé fermé Π est l'intersection d'une suite décroissante de pavés rationnels semi-ouverts $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme μ et λ_N sont des mesures et comme $\mu(\pi_0), \lambda_N(\Pi_0) < \infty$, on a $\mu(\Pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\Pi_n)$ et $\lambda_N(\Pi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_N(\Pi_n)$; donc $\mu(\Pi) = C \lambda_N(\Pi)$ pour tout pavé fermé Π , d'après le cas “semi-ouvert”.

Enfin, comme tout pavé est réunion d'une suite croissante de pavés fermés, on obtient le résultat pour un pavé quelconque $\Pi \subset \mathbb{R}^N$ en utilisant à nouveau le fait que μ et λ_N sont des mesures. □

La démonstration du théorème 4.9 est maintenant “facile”. Soit Φ une isométrie de \mathbb{R}^N . Alors Φ est de la forme $\Phi(x) = a + L(x)$, où L est une isométrie linéaire. Comme la mesure de Lebesgue est invariante par translations, on a $\lambda_N(\Phi(I)) = \lambda_N(a + L(I)) = \lambda_N(L(I))$ pour tout $I \subset \mathbb{R}^N$. Si on pose $\mu(I) = \lambda_N(L(I))$, alors on définit une mesure sur \mathbb{R}^N car L est une bijection de \mathbb{R}^N sur \mathbb{R}^N ; et la mesure μ est invariante par translations car L est linéaire et λ_N est invariante par translations : si $a \in \mathbb{R}^N$, alors $\mu(a + I) = \lambda_N(L(a + I)) = \lambda_N(L(a) + L(I)) = \lambda_N(L(I)) = \mu(I)$. De plus, $\mu([0, 1]^N) = \lambda_N(L([0, 1]^N)) < \infty$ car $L([0, 1]^N)$ est un ensemble borné. On a donc $\mu = C \lambda_N$ pour une certaine constante C . Comme L est une isométrie linéaire, on a $L(B) = B$, où $B = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N; d(\mathbf{x}, 0) \leq 1\}$ est la “boule unité” de \mathbb{R}^N . Donc $C \lambda_N(B) = \mu(B) = \lambda_N(B)$, et donc $C = 1$ car $\lambda_N(B) > 0$. On peut donc conclure que $\mu = \lambda_N$, ce qui termine la démonstration.

4.4. Coordonnées polaires, cylindriques et sphériques.

4.4.1. *Coordonnées polaires.* Dans le plan \mathbb{R}^2 , on peut repérer un point $M = (x, y)$ à l'aide de ses “coordonnées polaires” (r, θ) en posant

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

où $r \geq 0$ et $\theta \in [0, 2\pi[$. On a alors $r^2 = x^2 + y^2$.

Notons $\Phi :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta).$$

Il est clair que Φ est de classe \mathcal{C}^1 , et il est facile de voir que Φ est une bijection de l'ouvert $\Omega =]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ sur l'ouvert $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus L$, où L est la demi-droite correspondant à l'angle $\theta = 0$, i.e. $L = \{(x, 0); x \geq 0\}$.

La matrice jacobienne de Φ en un point $(r, \theta) \in \Omega$ est facile à calculer : on a

$$\text{Jac}_\Phi(r, \theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

et donc

$$J_\Phi(r, \theta) = r.$$

En particulier, on a $J_\Phi(r, \theta) \neq 0$ pour tout $(r, \theta) \in \Omega$, et donc Φ est un difféomorphisme de $\Omega =]0, \infty[\times]0, 2\pi[$ sur $\Omega' = \mathbb{R}^2 \setminus L$. La formule de changement de variables permet donc d'écrire

$$\int_{\mathbb{R}^2 \setminus L} f = \int_{]0, \infty[\times]0, 2\pi[} f \circ \Phi |J_\Phi|,$$

pour toute fonction f positive ou sommable définie sur \mathbb{R}^2 . **D'autre part**, la demi-droite L "n'a pas d'aire", i.e. vérifie $\lambda_2(L) = 0$, et on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} f = \int_{\mathbb{R}^2 \setminus L} f.$$

Comme $J_\Phi(r, \theta) = r$, la formule de changement de variables prend donc la forme suivante :

$$\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta.$$

Plus généralement, pour tout domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^2$, on a

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y) dx dy = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta,$$

où le domaine $\tilde{\mathcal{D}}$ est défini par

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{(r, \theta) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[; (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathcal{D}\}.$$

En résumé, **la seule chose à retenir** concernant le passage en coordonnées polaires est la correspondance

$$dx dy \longleftrightarrow r dr d\theta.$$

Il est également important de garder en tête qu'on a

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

Exemple 1. Aire d'un disque (!)

Soit $R > 0$, et soit D le disque de centre 0 et de rayon R dans \mathbb{R}^2 . En coordonnées polaires, le disque D correspond au domaine $\tilde{D} = \{(r, \theta) \in]0, \infty[\times]0, 2\pi[; r \leq R\}$. On a donc

$$\begin{aligned} \text{aire}(D) = \lambda_2(D) &= \int_0^{2\pi} \int_0^R r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta \\ &= \pi R^2, \end{aligned}$$

ce qu'on savait bien entendu depuis longtemps.

Exemple 2. Comme autre illustration du passage en coordonnées polaires, on va calculer l'intégrale

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

L'idée "miraculeuse" est de calculer J^2 . On a

$$\begin{aligned} J^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) \times \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-y^2} dy \right) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2} dx \right) e^{-y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x^2+y^2)} dx dy, \end{aligned}$$

où on s'est servi du théorème de Fubini.

En passant en coordonnées polaires, on en déduit

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} \times r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \\ &= 2\pi \left[-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right]_0^{\infty} \\ &= \pi. \end{aligned}$$

Par conséquent $J = \sqrt{\pi}$, ce qui mérite bien une formule centrée :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}.$$

4.4.2. *Coordonnées cylindriques.* Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on peut repérer un point $M = (x, y, z)$ à l'aide de ses "coordonnées cylindriques" (r, θ, z) en posant

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

où $r \geq 0$, $\theta \in [0, 2\pi]$ et $z \in \mathbb{R}$. On a alors $r^2 = x^2 + y^2$.

Soit $\Phi :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\Phi(r, \theta, z) = (r \cos \theta, r \sin \theta, z).$$

Il est clair que Φ est de classe \mathcal{C}^1 , et on vérifie facilement qu'elle envoie bijectivement l'ouvert $\Omega =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ sur l'ouvert $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus H$, où H est le demi-plan correspondant à $\theta = 0$: $H = \{(x, 0, z); x \geq 0\}$.

La matrice jacobienne de Φ en un point $(r, \theta, z) \in \Omega$ est

$$\text{Jac}_{\Phi}(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

et on a donc

$$J_{\Phi}(r, \theta, z) = r.$$

En particulier, J_Φ ne s'annule jamais, donc Φ est un difféomorphisme de $\Omega =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}$ sur $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus H$. Comme le demi-plan H n'a pas de volume", i.e. $\lambda_3(H) = 0$, la formule de changement de variables s'écrit donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz;$$

et plus généralement :

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

pour tout domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, où

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{(r, \theta, z) \mid]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times \mathbb{R}; (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \mathcal{D}\}.$$

En résumé, il faut retenir la correspondance

$$dx dy dz \longleftrightarrow r dr d\theta dz,$$

et ne pas oublier que

$$r^2 = x^2 + y^2.$$

4.4.3. *Coordonnées sphériques.* Dans l'espace \mathbb{R}^3 , on peut aussi repérer un point $M = (x, y, z)$ à l'aide de ses "coordonnées sphériques" (r, θ, φ) en posant

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

où $r \geq 0$, $\theta \in [0, \pi]$ et $\varphi \in [0, 2\pi]$. On a alors $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Soit $\Phi :]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[\rightarrow \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$\Phi(r, \theta, \varphi) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta).$$

L'application Φ est de classe \mathcal{C}^1 , et elle envoie bijectivement $\Omega =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ sur $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus H$, où $H = \{(x, 0, z); x \geq 0\}$.

On a

$$\text{Jac}_\Phi(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}$$

pour tout $(r, \theta, \varphi) \in \Omega$, et en développant le déterminant par rapport à la dernière colonne on en déduit

$$\begin{aligned} J_\Phi(r, \theta, \varphi) &= -r \sin \theta \sin \varphi \times \det \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &\quad - r \sin \theta \cos \varphi \times \det \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= r^2 \sin \theta \sin^2 \varphi + r^2 \sin \theta \cos^2 \varphi \\ &= r^2 \sin \theta. \end{aligned}$$

Comme $\sin \theta > 0$ sur $]0, \pi[$, on voit donc que J_Φ ne s'annule pas et que par conséquent Φ est un difféomorphisme de $\Omega =]0, \infty[\times]0, 2\pi[\times]0, \pi[$ sur $\Omega' = \mathbb{R}^3 \setminus H$. Comme de plus $\lambda_3(H) = 0$ et comme $|J_\Phi(r, \theta, \varphi)| = r^2 \sin \theta$, la formule de changement de variables s'écrit donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

pour toute fonction f positive ou sommable sur \mathbb{R}^3 , et plus généralement

$$\int_{\mathcal{D}} f(x, y, z) dx dy dz = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$$

pour tout domaine $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^3$, où

$$\tilde{\mathcal{D}} = \{(r, \theta, \varphi) \in]0, \infty[\times]0, \pi[\times]0, 2\pi[; (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) \in \mathcal{D}\}.$$

Il faut donc retenir la correspondance

$$dx dy dz \longleftrightarrow r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

sans oublier qu'on a

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Exemple. Utilisons les coordonnées sphériques pour calculer à nouveau le volume d'une boule $B \subset \mathbb{R}^3$ de rayon $R > 0$. On peut supposer que B est centrée en 0, autrement dit que

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Avec les notations précédentes, on alors $\tilde{B} = \{(r, \theta, \varphi); r \leq R\}$, en on en déduit

$$\begin{aligned} \text{volume}(B) = \lambda_3(B) &= \int_B dx dy dz \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R r^2 \sin \varphi dr d\varphi d\theta \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \varphi \left(\int_0^R r^2 dr \right) d\varphi \\ &= 2\pi \int_0^\pi \sin \varphi \times \frac{R^3}{3} d\varphi \\ &= 2\pi \frac{R^3}{3} [-\cos \varphi]_0^\pi \\ &= \frac{4}{3} \pi R^3. \end{aligned}$$

4.5. Preuve de la formule de changement de variables. Pour démontrer la formule de changement de variables, il suffit (comme d'habitude) de traiter le cas d'une fonction f positive. On utilisera plusieurs fois le lemme suivant.

LEMME 4.12. *Si f est une fonction positive définie sur un ensemble $I' \subset \mathbb{R}^N$, alors*

$$\int_{I'} f(x) dx = \int_0^\infty \lambda_N(\{x \in I'; f(x) > t\}) dt.$$

DÉMONSTRATION. Il suffit d'écrire la définition et d'appliquer la proposition 3.1 (ou si on préfère, le théorème de Fubini) :

$$\begin{aligned} \int_{I'} f &= \lambda_{N+1}(\text{SG}(f, I')) \\ &= \int_{\mathbb{R}} \lambda_N(\text{SG}(f, I')_t) dt \\ &= \int_0^\infty \lambda_N(\{x \in I'; f(x) > t\}) dt. \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 4.13. *Pour un difféomorphisme $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ entre deux ouverts de \mathbb{R}^N , la formule de changement de variables est équivalente à l'énoncé suivant : pour tout ensemble $I \subset \Omega$,*

$$(4.1) \quad \lambda_N(\Phi(I)) = \int_I |J_\Phi(u)| \, du.$$

DÉMONSTRATION. Comme $\lambda_N(\Phi(I)) = \int_{\Phi(I)} \mathbf{1} \, dx$, l'identité (4.1) est simplement la formule de changement de variables appliquée à la fonction $f = \mathbf{1}$.

Inversement, supposons (4.1) vérifiée. Si f est une fonction positive définie sur Ω' et si $I \subset \Omega$, alors on a d'après le lemme

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(I)} f(x) \, dx &= \int_0^\infty \lambda_N(\{x \in \Phi(I); f(x) > t\}) \, dt \\ &= \int_0^\infty \lambda_N(\Phi(\{u \in I; f(\Phi(u)) > t\})) \, dt. \end{aligned}$$

En utilisant (4.1) et le théorème de Fubini, on en déduit

$$\begin{aligned} \int_{\Phi(I)} f(x) \, dx &= \int_0^\infty \left(\int_{\{u \in I; f(\Phi(u)) > t\}} |J_\Phi(u)| \, du \right) dt \\ &= \int_I |J_\Phi(u)| \left(\int_{\{t; 0 \leq t < f(\Phi(u))\}} dt \right) du \\ &= \int_I |J_\Phi(u)| f(\Phi(u)) \, du, \end{aligned}$$

ce qui est la formule souhaitée. \square

REMARQUE 4.14. Dans le corollaire précédent, il suffit en fait que (4.1) soit vraie **localement**, ce qui signifie que pour tout $a \in \Omega$, on peut trouver un voisinage ouvert U de a (contenu dans Ω) tel que (4.1) soit vraie pour tout ensemble $I \subset U$.

DÉMONSTRATION. Appelons *pavé rationnel* un pavé Π qui est un produit d'intervalles à extrémités rationnelles. Pour tout $a \in \Omega$ et pour tout voisinage ouvert U de a , on peut trouver un pavé rationnel Π tel que $a \in \Pi \subset U$. Comme la famille des pavés rationnels est **dénombrable**, on en déduit que si (4.1) est vraie localement, alors il existe une suite $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de pavés (rationnels) telle que $\Omega = \bigcup_0^\infty \Pi_n$ et (4.1) est vérifiée pour tout ensemble I contenu dans un Π_n .

Pour tout $x \in \Omega$, notons $n(x)$ le plus petit entier n tel que $x \in \Pi_n$. Si I est une partie quelconque de Ω et si, pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \{x \in I; n(x) = n\}$, alors les I_n sont deux-à-deux disjoints et $I = \bigcup_0^\infty I_n$. De plus, I_n est contenu dans Π_n par définition, donc (4.1) est vraie pour chaque I_n . Il est alors facile de conclure que (4.1) est vraie pour l'ensemble I , en utilisant le fait que les applications $I \mapsto \lambda_N(\Phi(I))$ et $I \mapsto \int_I |J_\Phi(u)| \, du$ sont des *mesures* sur Ω . \square

Commençons maintenant la preuve de la formule de changement de variables, qui va se faire en plusieurs étapes.

ÉTAPE 1. La formule de changement de variables est vraie en dimension $N = 1$.

DÉMONSTRATION. Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R} . D'après le corollaire 4.13, il s'agit de montrer qu'on a

$$(4.2) \quad \lambda_1(\Phi(I)) = \int_I |\Phi'(u)| du$$

pour tout ensemble $I \subset \Omega$.

Pour cela, définissons deux applications $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, \infty]$ par

$$\mu_1(I) = \lambda_1(\Phi(I)) \quad \text{et} \quad \mu_2(I) = \int_I |\Phi'(u)| du.$$

Il n'est pas très difficile de vérifier que μ_1 et μ_2 sont des mesures sur Ω . De plus, d'après le lemme 4.4 appliqué avec $f = \mathbf{1}$ on a $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ pour tout intervalle fermé borné $I = [a, b] \subset \Omega$. D'après une variante "évidente" du lemme d'unicité (où on considère des mesures sur Ω et non sur \mathbb{R}^N), on en déduit $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ pour tout ensemble $I \subset \Omega$, c'est-à-dire (4.2).

ÉTAPE 2. Si la formule de changement de variables est valable pour $\Phi^1 : \Omega \rightarrow \Omega'$ et $\Phi^2 : \Omega' \rightarrow \Omega''$, alors elle est valable pour $\Phi = \Phi^2 \circ \Phi^1$.

DÉMONSTRATION. Soit $I \subset \Omega$. En supposant la formule de changement de variables vraie pour Φ^1 et Φ^2 , on peut écrire

$$\begin{aligned} \lambda_N(\Phi(I)) &= \lambda_N(\Phi^2(\Phi^1(I))) \\ &= \int_{\Phi^1(I)} |J_{\Phi^2}(v)| dv \\ &= \int_I |J_{\Phi^2}(\Phi^1(u))| |J_{\Phi^1}(u)| du. \end{aligned}$$

D'autre part, on sait que la matrice jacobienne de $\Phi = \Phi^2 \circ \Phi^1$ en un point $u \in \Omega$ est donnée par

$$\text{Jac}_{\Phi}(u) = \text{Jac}_{\Phi^2}(\Phi^1(u)) \text{Jac}_{\Phi^1}(u).$$

On en déduit $J_{\Phi^2}(\Phi^1(u)) J_{\Phi^1}(u) = J_{\Phi}(u)$, d'où finalement

$$\lambda_N(\Phi(I)) = \int_I |J_{\Phi}(u)| du.$$

Par le corollaire 4.13, la formule de changement de variables est donc vraie pour le difféomorphisme Φ . \square

DÉFINITION 4.15. On dira qu'un difféomorphisme $\Sigma : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une **permutation de coordonnées** si Σ est de la forme $\Sigma(x_1, \dots, x_N) = (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(N)})$, où σ est une permutation de l'ensemble $\{1, \dots, N\}$, i.e. une bijection de $\{1, \dots, N\}$ sur $\{1, \dots, N\}$.

ÉTAPE 3. La formule de changement de variables est valable pour toute permutation de coordonnées Σ .

DÉMONSTRATION. Soit Σ une permutation de coordonnées, et soit σ la permutation de $\{1, \dots, N\}$ associée. Alors Σ est une application linéaire, et en notant (e_1, \dots, e_N) la base canonique de \mathbb{R}^N , on a $\Sigma(e_j) = e_{\sigma^{-1}(j)}$ pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$. En particulier, on a $\det(\Sigma) = \det(e_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, e_{\sigma^{-1}(N)}) = \pm 1$; donc $|J_{\Sigma}(u)| = 1$ pour tout $u \in \mathbb{R}^N$. D'après le corollaire 4.13, il suffit donc vérifier qu'on a $\lambda_N(\Sigma(I)) = \lambda_N(I)$ pour tout ensemble $I \subset \mathbb{R}^N$.

Si I est un pavé $\Pi = I_1 \times \cdots \times I_N$, on voit que $\Sigma(\Pi)$ est le pavé $\Pi_\sigma = I_{\sigma^{-1}(1)} \times \cdots \times I_{\sigma^{-1}(N)}$. Les deux pavés Π et Π_σ ont visiblement le même volume, donc $\lambda_N(\Sigma(\Pi)) = \lambda_N(\Pi)$ pour tout pavé Π . Comme l'application $I \mapsto \lambda_N(\Sigma(I))$ est une mesure sur \mathbb{R}^N , on en déduit $\lambda_N(\Sigma(I)) = \lambda_N(I)$ pour tout ensemble $I \subset \mathbb{R}^N$, d'après le lemme d'unicité. \square

\square

DÉFINITION 4.16. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N et soit $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Soit également $i \in \{1, \dots, N\}$. On dira que Φ **préserve la i -ème coordonnée** si, en écrivant $x = (x_1, \dots, x_N)$ et $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_N(x))$, on a $\Phi_i(x) = x_i$ pour tout $x \in \Omega$.

ÉTAPE 4. Soit $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ un difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^{N+1} . Pour tout $a \in \Omega$, on peut trouver un pavé ouvert U contenant a tel que

$$\forall u \in U : \Phi(u) = \Phi^2 \circ \Phi^1 \circ \Sigma(u),$$

où Σ est une permutation de coordonnées, Φ^1 est un difféomorphisme préservant les N premières coordonnées, et Φ^2 est un difféomorphisme préservant la $(N+1)$ -ième coordonnée.

DÉMONSTRATION. Écrivons $\Phi(u) = \begin{pmatrix} \Phi_1(u) \\ \vdots \\ \Phi_{N+1}(u) \end{pmatrix}$ et fixons un point $a \in \Omega$. Comme Φ est un difféomorphisme, la matrice jacobienne $\text{Jac}_\Phi(a)$ est inversible, et en particulier sa dernière ligne n'est pas identiquement nulle. On peut donc trouver $j \in \{1, \dots, N+1\}$ tel que $\frac{\partial \Phi_{N+1}}{\partial u_j}(a) \neq 0$. Par continuité de $\frac{\partial \Phi_{N+1}}{\partial u_j}$, on peut alors trouver un pavé ouvert U contenant a tel que $\frac{\partial \Phi_{N+1}}{\partial u_j}(u) \neq 0$ pour tout $u \in U$.

Notons σ la permutation de $\{1, \dots, N+1\}$ qui échange j et $N+1$, et Σ la permutation de coordonnées associée. Posons également $V = \Sigma(U)$ et définissons une application $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ par $\Psi = \Phi \circ \Sigma^{-1}$. Si on écrit $\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \vdots \\ \Psi_{N+1} \end{pmatrix}$, alors on a

$$\forall v \in V : \frac{\partial \Psi_{N+1}}{\partial v_{N+1}}(v) \neq 0,$$

par définition de σ . De plus, Ψ est un difféomorphisme de V sur $\Psi(V)$.

Soit maintenant $\Phi^2 : V \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ l'application définie par

$$\Phi^2(v) = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_N \\ \Psi_{N+1}(v) \end{pmatrix}$$

L'application Φ^2 est de classe \mathcal{C}^1 , et il n'est pas difficile de voir que Φ^2 est injective sur V . En effet, $V = \Sigma(U)$ est un pavé ouvert car Σ est une permutation de coordonnées. Écrivons $V = \Pi \times I$, où Π est un pavé de \mathbb{R}^N et I est un intervalle ouvert. Pour $(v_1, \dots, v_N) \in \Pi$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{\partial \Psi_{N+1}}{\partial v_{N+1}}(v_1, \dots, v_N, t)$ ne s'annule pas sur I par le choix de V . Donc la fonction $t \mapsto \Psi_{N+1}(v_1, \dots, v_N, t)$ est injective sur I d'après le théorème des accroissements finis; et vu la forme de Φ^2 , on en déduit immédiatement que Φ^2 est injective sur V . De plus, par définition de Φ^2 on a $J_{\Phi^2}(v) = \frac{\partial \Psi_{N+1}}{\partial v_{N+1}}(v)$, et

donc $J_{\Phi^2}(v) \neq 0$ pour tout $v \in V$. Par conséquent, Φ^2 est un difféomorphisme de V sur $V' = \Phi^2(V)$; et bien sûr Φ^2 fixe les N premières coordonnées.

Notons Φ^1 le difféomorphisme $\Psi \circ (\Phi^2)^{-1}$ (défini sur V'). Par définition, on a $\Phi^1(\Phi^2(v)) = \Psi(v)$ pour tout $v = (v_1, \dots, v_{N+1}) \in V$, ce qui s'écrit

$$\Phi^1(v_1, \dots, v_N, \Psi_{N+1}(v)) = (\Psi_1(v), \dots, \Psi_N(v), \Psi_{N+1}(v)).$$

Ainsi, on voit que pour tout $v' = \Phi^2(v) \in V'$, la $(N+1)$ -ième coordonnée de $\Phi^1(v')$ est égale à celle de v' ; autrement dit, Φ^1 fixe la $(N+1)$ -ième coordonnée.

Au total, on a obtenu $\Phi \circ \Sigma^{-1} = \Psi = \Phi^1 \circ \Phi^2$ sur $V = \Sigma(U)$, i.e. $\Phi = \Phi^1 \circ \Phi^2 \circ \Sigma$ sur U , où Φ^1 , Φ^2 et Σ ont les propriétés requises. \square

ÉTAPE 5. La démonstration.

On est maintenant en mesure de démontrer, *par récurrence sur la dimension N* , que la formule de changement de variables est valable pour tout difféomorphisme entre deux ouverts de \mathbb{R}^N .

Par l'étape 1, le résultat est valable pour $N = 1$. Pour le passage de N à $N+1$, supposons avoir établi la validité de la formule de changement de variables pour un certain $N \geq 1$, et fixons un difféomorphisme $\Phi : \Omega \rightarrow \Omega'$ entre deux ouverts de \mathbb{R}^{N+1} .

D'après la remarque 4.14, il suffit de vérifier que pour tout point $a \in \Omega$, on peut trouver un voisinage ouvert U de a tel que

$$(4.3) \quad \lambda_{N+1}(I) = \int_I |J_{\Phi}(u)| du$$

pour tout ensemble $I \subset U$. On fixe donc un point $a \in \Omega$.

Par l'étape 4, on peut trouver un pavé ouvert $U \subset \mathbb{R}^{N+1}$ contenant a sur lequel le difféomorphisme Φ peut se "décomposer" sous la forme $\Phi = \Phi^2 \circ \Phi^1 \circ \Sigma$, Σ est une permutation de coordonnées, Φ^1 est un difféomorphisme préservant la première coordonnée, et Φ^2 est un difféomorphisme préservant la dernière coordonnée. Compte tenu des étapes 2 et 3, on voit donc qu'il suffit d'établir (4.3) sous l'hypothèse additionnelle que Φ préserve la première ou la dernière coordonnée.

Supposons par exemple que Φ préserve la dernière coordonnée (le calcul serait le même si Φ préservait la première coordonnée). En écrivant le "point générique" de \mathbb{R}^{N+1} sous la forme $u = (v, t)$ où $v \in \mathbb{R}^N$ et $t \in \mathbb{R}$, on a alors

$$(4.4) \quad \Phi(u) = \Phi(v, t) = (\Psi(v, t), t)$$

pour tout $u = (v, t) \in U$, où Ψ est une application de U dans \mathbb{R}^N .

Dans la suite, on écrira $U = V \times T$, où V est un pavé ouvert de \mathbb{R}^N et T est un intervalle ouvert de \mathbb{R} . Pour tout $t \in T$, on notera $\Psi_t : V \rightarrow \mathbb{R}^N$ l'application définie par

$$\Psi_t(v) = \Psi(v, t).$$

Vu la forme de Φ , on voit immédiatement que l'application Ψ_t est injective, et qu'on a

$$J_{\Psi_t}(v) = J_{\Phi}(v, t)$$

pour tout $z \in V$. En particulier J_{Ψ_t} ne s'annule pas sur V , de sorte que $\Psi_t(V)$ est un ouvert de \mathbb{R}^N et Ψ_t est un difféomorphisme de V sur $\Psi_t(V)$.

Soit maintenant $I \subset U$. D'après la proposition 3.1, on a

$$\lambda_{N+1}(\Phi(I)) = \int_T \lambda_N(\Phi(I)_t) dt.$$

De plus, par (4.4) on peut écrire

$$\begin{aligned}\Phi(I)_t &= \{v' \in \mathbb{R}^N; \exists u \in I : \Phi(u) = (v', t)\} \\ &= \{v' \in \mathbb{R}^N; \exists v \in V : (v, t) \in I \text{ et } (\Psi(v, t), t) = (v', t)\} \\ &= \Psi_t(I_t).\end{aligned}$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\lambda_{N+1}(\Phi(I)) &= \int_T \lambda_N(\Psi_t(I_t)) dt \\ &= \int_T \left(\int_{I_t} |J_{\Psi_t}(v)| dv \right) dt,\end{aligned}$$

où on a appliqué l'hypothèse de récurrence aux difféomorphismes Ψ_t .

Comme $J_{\Psi_t}(v) = J_{\Phi}(v, t)$ pour tout $(v, t) \in V \times T = U$, on obtient donc finalement

$$\begin{aligned}\lambda_{N+1}(\Phi(I)) &= \int_T \left(\int_{I_t} |J_{\Phi}(v, t)| dv \right) dt \\ &= \int_I |J_{\Phi}(u)| du.\end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence et la preuve de la formule de changement de variables.

5. Centre de gravité; théorème de Guldin

5.1. Centre de gravité.

NOTATION. Soient $N, n \in \mathbb{N}^*$ et soit $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ une “fonction vectorielle” définie sur $I \subset \mathbb{R}^n$. Écrivons $\vec{f}(x) = (f_1(x), \dots, f_N(x))$. Si les fonctions f_1, \dots, f_N sont sommables sur I , on note $\int_I \vec{f}(x) dx$ le vecteur de \mathbb{R}^N dont les composantes sont $\int_I f_1(x) dx, \dots, \int_I f_N(x) dx$:

$$\int_I \vec{f}(x) dx = \begin{pmatrix} \int_I f_1(x) dx \\ \vdots \\ \int_I f_N(x) dx \end{pmatrix}$$

Exercice. Montrer que si $\vec{f} : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une fonction vectorielle et si $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une application linéaire, alors

$$L \left(\int_I \vec{f}(x) dx \right) = \int_I L(\vec{f}(x)) dx.$$

DÉFINITION 5.1. Soit \mathcal{A} une partie bornée de \mathbb{R}^N telle que $\lambda_N(\mathcal{A}) \neq 0$. Le **centre de gravité** de \mathcal{A} est le point $G \in \mathbb{R}^N$ défini par

$$\vec{OG} = \frac{1}{\lambda_N(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} \vec{Ox} dx,$$

où O est l'origine de \mathbb{R}^N .

CAS PARTICULIERS.

- Si $N = 2$ (donc $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$) les coordonnées du point G sont données par

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{\text{aire}(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} x dx dy \\ y_G = \frac{1}{\text{aire}(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} y dx dy \end{cases}$$

- Si $N = 3$ (donc $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^3$) les coordonnées de G sont données par

$$\begin{cases} x_G = \frac{1}{\text{volume}(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} x \, dx \, dy \, dz \\ y_G = \frac{1}{\text{volume}(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} y \, dx \, dy \, dz \\ z_G = \frac{1}{\text{volume}(\mathcal{A})} \int_{\mathcal{A}} z \, dx \, dy \, dz \end{cases}$$

Exercice. Montrer que le centre de gravité de \mathcal{A} est caractérisé par l'identité

$$\int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{Gx} \, dx = \vec{0}.$$

Exemple. Le centre de gravité d'un rectangle $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2$ est le point d'intersection de ses diagonales.

DÉMONSTRATION. L'aire du rectangle \mathcal{R} est égale à $(b-a)(d-c)$. En notant G le centre de gravité de \mathcal{R} , on a donc

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_{\mathcal{R}} x \, dx \, dy \\ &= \frac{1}{(b-a)(d-c)} \int_a^b x \left(\int_c^d dy \right) dx \\ &= \frac{1}{(b-a)} \int_a^b x \, dx \\ &= \frac{1}{(b-a)} \times \left(\frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \right) \\ &= \frac{a+b}{2}. \end{aligned}$$

On trouverait de même $y_G = \frac{c+d}{2}$. Donc $G = \left(\frac{a+b}{2}, \frac{c+d}{2} \right)$, ce qui est le résultat annoncé. \square

PROPOSITION 5.2. Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ de centre de gravité G . Si \mathcal{A} est *invariant* par une certaine bijection affine $\sigma : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, autrement dit si on a $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, alors G est un **point fixe** de σ , i.e. $\sigma(G) = G$.

DÉMONSTRATION. D'après la propriété caractéristique du centre de gravité, il s'agit de montrer qu'on a

$$\int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{\sigma(G)x} \, dx = \vec{0}.$$

Comme $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$, la formule de changement de variables donne

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{\sigma(G)x} \, dx &= \int_{\sigma(\mathcal{A})} \overrightarrow{\sigma(G)x} \, dx \\ &= |\det(\sigma)| \int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{\sigma(G)\sigma(u)} \, du. \end{aligned}$$

D'autre part, en notant L l'application linéaire associée à σ , on a

$$\overrightarrow{\sigma(G)\sigma(u)} = L(\overrightarrow{Gu})$$

pour tout $u \in \mathcal{A}$. On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{\sigma(G)x} dx &= |\det(\sigma)| \int_{\mathcal{A}} L(\overrightarrow{Gu}) du \\ &= |\det(\sigma)| L\left(\int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{Gu} du\right) \\ &= \overrightarrow{0}, \end{aligned}$$

où on a utilisé la linéarité de L à deuxième ligne, et le fait que $\int_{\mathcal{A}} \overrightarrow{Gu} du = \overrightarrow{0}$ et $L(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$ à la troisième ligne. □

Lorsque la transformation affine σ est une **symétrie**, on connaît exactement les points fixes : ce sont les points appartenant à l'ensemble par rapport auquel est effectuée la symétrie. On obtient donc les résultats suivants.

COROLLAIRE 5.3.

- (1) Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ est symétrique par rapport à une droite, alors son centre de gravité appartient à cette droite.
- (2) Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^2$ est symétrique par rapport à une droite ou à un plan, alors son centre de gravité appartient à cette droite ou à ce plan.
- (3) Si $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^N$ est symétrique par rapport à un point, alors ce point est le centre de gravité de \mathcal{A} .

Exemple 1. Dans \mathbb{R}^2 , le centre de gravité d'un parallélogramme quelconque est le point d'intersection de ses diagonales.

DÉMONSTRATION. C'est immédiat puisque le parallélogramme est symétrique par rapport au point d'intersection de ses diagonales. □

Exemple 2. Le centre de gravité d'un triangle $ABC \subset \mathbb{R}^2$ est le point d'intersection de ses médianes. On a donc

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} \quad \text{et} \quad y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}.$$

DÉMONSTRATION. Notons I le milieu de $[BC]$, et σ la symétrie par rapport à la médiane (AI) dans la direction de la droite (BC) . Le triangle ABC est visiblement invariant par la symétrie σ , donc G appartient à la médiane (AI) ; et de même, G appartient aux deux autres médianes de ABC . □

Exemple 3. Centre de gravité d'une demi-boule.

Soit $R > 0$ et soit $B \subset \mathbb{R}^3$ la "demi-boule" de centre 0 et de rayon R située dans le demi-espace $\{z \geq 0\}$:

$$B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z \geq 0 \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

La demi-boule B est symétrique par rapport à l'axe $0z$, donc son centre de gravité G est sur $0z$, autrement dit $x_G = 0 = y_G$. La coordonnée z_G se calcule bien en utilisant

les coordonnées sphériques : comme $\lambda_3(B) = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3} \pi R^3\right) = \frac{2}{3} \pi R^3$, on a

$$\begin{aligned} z_G &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_B z \, dx \, dy \, dz \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^R r \cos \varphi \times r^2 \sin \varphi \, d\varphi \, dr \, d\theta \\ &= \frac{3}{2\pi R^3} \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4}{4} \sin \varphi \cos \varphi \, d\varphi \, d\theta \\ &= \frac{3R}{8\pi} \times 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin(2\varphi) \, d\varphi \\ &= \frac{3}{8} R. \end{aligned}$$

Le centre de gravité de B est donc situé sur l'axe $0z$, aux $\frac{3}{8}$ de la hauteur de la demi-boule.

5.2. Corps de révolution ; théorème de Guldin.

NOTATION. Dans ce qui suit, on notera \mathbf{P}_+ le demi-plan $\{(0, y, z); y \geq 0\}$ dans \mathbb{R}^3 .

DÉFINITION 5.4. Soit \mathcal{A} un ensemble contenu dans le demi-plan \mathbf{P}_+ . Le **corps de révolution engendré par \mathcal{A}** est le “solide” $\hat{\mathcal{A}} \subset \mathbb{R}^3$ obtenu en faisant tourner \mathcal{A} autour de l'axe $0z$.

Il est *indispensable* de faire des dessins pour illustrer les exemples qui suivent.

Exemple 1. Si \mathcal{A} est un rectangle avec un côté sur l'axe $0z$, alors $\hat{\mathcal{A}}$ est un cylindre.

Exemple 2. Si \mathcal{A} est un demi-disque ayant son diamètre sur l'axe $0z$, alors $\hat{\mathcal{A}}$ est une boule.

Exemple 3. Si \mathcal{A} est un triangle rectangle avec un des côtés de l'angle droit sur l'axe $0z$, alors $\hat{\mathcal{A}}$ est un cône.

Exemple 4. Si \mathcal{A} est un disque disjoint de l'axe $0z$, alors $\hat{\mathcal{A}}$ est une “chambre à air” (on dit aussi : un **tore**).

Remarque. Si $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}_+$, on considère \mathcal{A} comme une partie de \mathbb{R}^2 en identifiant un point $(0, y, z) \in \mathcal{A}$ au point $(y, z) \in \mathbb{R}^2$. Par conséquent, \mathcal{A} a une aire, et un centre de gravité si \mathcal{A} est borné avec une aire non nulle.

THÉORÈME 5.5. (théorème de Guldin)

Si $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}_+$ a pour centre de gravité $G = (0, y_G, z_G)$, alors l'aire de \mathcal{A} et le volume de $\hat{\mathcal{A}}$ sont reliés par la formule suivante :

$$\text{volume}(\hat{\mathcal{A}}) = 2\pi y_G \text{aire}(\mathcal{A}).$$

DÉMONSTRATION. En faisant tourner un point $M = (0, y, z) \in \mathcal{A}$ d'un angle α autour de $0z$ (dans le sens “direct”), on obtient le point $(y \sin \alpha, y \cos \alpha, z)$. Donc, si on pose $\mathcal{A}' := \{(y, z) \in \mathbb{R}^2; (0, y, z) \in \mathcal{A}, \text{ l'ensemble } \hat{\mathcal{A}} \text{ peut être décrit comme suit :}$

$$\hat{\mathcal{A}} = \{y \sin \alpha, y \cos \alpha, z); (y, z) \in \mathcal{A}', \alpha \in [0, 2\pi]\}.$$

D'autre part, l'ensemble $\{(\sin \alpha, \cos \alpha); \alpha \in [0, 2\pi]\}$ est identique à l'ensemble $\{(\cos \theta, \sin \theta); \theta \in [0, 2\pi]\}$, et on a $y \geq 0$ si $(y, z) \in \mathcal{A}'$. Donc, en changeant les notations, on obtient

$$\widehat{\mathcal{A}} = \{(r \cos \theta, r \sin \theta, z); r \geq 0, \theta \in [0, 2\pi], (r, z) \in \mathcal{A}'\}.$$

Autrement dit, si on passe en coordonnées cylindriques le domaine $\widehat{\mathcal{A}}$ correspond à $\mathcal{B} := \{(r, \theta, z); (r, z) \in \mathcal{A}'\}$. D'après la formule de changement de variables, on a donc

$$\begin{aligned} \text{volume}(\widehat{\mathcal{A}}) &= \int_{\widehat{\mathcal{A}}} dx dy dz \\ &= \int_{\mathcal{B}} r dr d\theta dz \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\int_{\mathcal{A}'} r dr dz \right) d\theta \\ &= 2\pi \int_{\mathcal{A}'} y dy dz \\ &= 2\pi y_G \text{aire}(\mathcal{A}). \end{aligned}$$

□

Remarque. On peut formuler le théorème de Guldin de manière plus géométrique et sans faire référence à aucune coordonnée. Soit \mathbf{P} un plan dans l'espace \mathbb{R}^3 , et soit Δ une droite contenue dans \mathbf{P} . Si \mathcal{A} est situé entièrement d'un même côté de la droite Δ , notons $\widehat{\mathcal{A}}^\Delta$ le solide obtenu en faisant tourner \mathcal{A} autour de Δ . Alors le théorème de Guldin s'énonce comme suit : *en notant $G_{\mathcal{A}}$ le centre de gravité de \mathcal{A} et $\text{dist}(G_{\mathcal{A}}, \Delta)$ la distance de $G_{\mathcal{A}}$ à l'axe de rotation Δ , on a*

$$\text{volume}(\widehat{\mathcal{A}}^\Delta) = 2\pi \text{aire}(\mathcal{A}) \text{dist}(G_{\mathcal{A}}, \Delta).$$

Exemple 1. Volume d'une chambre à air.

Soit $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^3$ la chambre à air engendrée par la révolution d'un disque $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}_+$ de rayon r dont le centre M est situé à une distance $R > r$ de l'axe $0z$. Par symétrie, le centre de gravité de \mathcal{A} est égal à M , et donc $y_G = R$. Comme l'aire de \mathcal{A} vaut πr^2 , on en déduit

$$\text{volume}(\mathcal{C}) = 2\pi R \times \pi r^2 = 2\pi^2 R^2.$$

Exemple 2. Centre de gravité d'un demi-disque.

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbf{P}_+$ un demi-disque de centre 0 et de rayon R , et notons G le centre de gravité de \mathcal{A} . par symétrie, G est situé sur l'axe $0y$, i.e. $z_G = 0$. Le corps de révolution engendré par \mathcal{A} est la boule de centre 0 et de rayon R , dont le volume vaut $\frac{4}{3} \pi R^3$. D'après le théorème de Guldin, on a donc

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = 2\pi y_G \times \frac{\pi R^2}{2},$$

et donc $y_G = \frac{4}{3\pi} R$. Ainsi, le centre de gravité du demi-disque \mathcal{A} est situé sur son axe de symétrie, à une distance $\frac{4}{3\pi} R$ de son centre.

Intégrales curvilignes

1. Chemins et courbes

1.1. Définitions.

DÉFINITION 1.1. Un **chemin** dans le plan est une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, où $[a, b]$ est un intervalle de \mathbb{R} . L'ensemble $\Gamma = \gamma([a, b]) = \{\gamma(t); t \in [a, b]\}$ s'appelle l'**image** du chemin γ .

Remarque 1. Deux chemins différents peuvent très bien avoir la même image. Par exemple, les deux chemins $\gamma_1 : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ définis par $\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ et $\gamma_2(t) = (\cos(-4t), \sin(-4t))$ ont tous les deux pour image le cercle Γ d'équation $x^2 + y^2 = 1$. Le cercle Γ est parcouru 1 fois dans le sens trigonométrique avec le chemin γ_1 , et 2 fois dans le sens anti-trigonométrique avec le chemin γ_2 .

Remarque 2. On dit qu'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est **de classe \mathcal{C}^1 par morceaux** si on peut subdiviser l'intervalle $[a, b]$ en intervalles $[a_1, b_1], \dots, [a_N, b_N]$ sur lesquels γ est de classe \mathcal{C}^1 . Pour éviter d'écrire trop souvent " \mathcal{C}^1 par morceaux", on conviendra que **tous les chemins seront supposés \mathcal{C}^1 par morceaux**.

Remarque 3. On peut définir de la même façon les chemins **à valeurs dans \mathbb{R}^N** pour tout $N \geq 1$, et en particulier dans l'espace \mathbb{R}^3 .

NOTATION. Pour tout chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$, on notera $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ la dérivée de γ en un point $t \in [a, b]$, en mettant une flèche pour signifier qu'on considère $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ comme un **vecteur** de \mathbb{R}^2 . Si on note $x(t)$ et $y(t)$ les coordonnées de $\gamma(t)$, i.e. $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, alors

$$\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}.$$

Comme γ est \mathcal{C}^1 par morceaux, $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ est défini en tout point sauf un nombre fini.

DÉFINITION 1.2. Soit Γ une partie de \mathbb{R}^2 .

- (1) On dit que Γ est une **courbe simple régulière** si Γ est l'image d'un chemin $\gamma : \overrightarrow{[a, b]} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant les propriétés suivantes :
 - (i) $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ ne s'annule jamais ;
 - (ii) γ est **injectif**, i.e. $\gamma(t) \neq \gamma(t')$ si $t \neq t'$.
- (2) On dit que Γ est une **courbe fermée régulière** si Γ est l'image d'un chemin $\gamma : \overrightarrow{[a, b]} \rightarrow \mathbb{R}^2$ vérifiant
 - (i) $\overrightarrow{\gamma'(t)}$ ne s'annule jamais ;
 - (ii) γ est **injectif sur** $[a, b[$;
 - (iii) γ est un chemin **fermé**, i.e. $\gamma(b) = \gamma(a)$.

Dans les deux cas, on dira que γ est un **paramétrage** de la courbe régulière Γ .

Remarque. On dit qu'une courbe régulière est **de classe \mathcal{C}^1** si elle admet un paramétrage $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe \mathcal{C}^1 , avec de plus $\overrightarrow{\gamma'(b)} = \overrightarrow{\gamma'(a)}$ si la courbe est fermée.

Exemple 1. Segments.

Si p et q sont deux points du plan ($p \neq q$), alors le **segment** $[p, q]$ est une courbe simple régulière. Il y a au moins deux façons naturelles de paramétrer ce segment.

- On obtient un paramétrage γ en posant, pour $t \in [0, 1]$:

$$\begin{aligned}\gamma(t) &= p + t\overrightarrow{pq} \\ &= (x_p + t(x_q - x_p), y_p + t(y_q - y_p));\end{aligned}$$

et on a alors

$$\overrightarrow{\gamma'(t)} = \overrightarrow{pq}.$$

- On peut également paramétrer $[p, q]$ en commençant par déterminer une équation de la droite (pq) . Si la droite (pq) admet une équation de la forme $y = \alpha x + \beta$ et si on suppose par exemple qu'on a $x_p < x_q$, on obtient un paramétrage γ de $[p, q]$ en posant, pour $t \in [x_p, x_q]$:

$$\gamma(t) = (t, \alpha t + \beta).$$

Si la droite (pq) est horizontale, elle a pour équation $y = C$, où $C = y_p = y_q$, et on peut paramétrer $[p, q]$ en posant $\gamma_1(t) = (t, C)$ pour $t \in [x_p, x_q]$; et de même, si la droite (pq) est verticale, d'équation $x = C$, on peut poser $\gamma(t) = (C, t)$ pour $t \in [y_p, y_q]$.

Exemple 2. Cercle.

Un cercle est visiblement une courbe fermée régulière. En notant m le centre du cercle et R son rayon, on obtient un paramétrage γ en posant, pour $t \in [0, 2\pi]$:

$$\gamma(t) = (x_m + R \cos t, y_m + R \sin t);$$

et on a alors

$$\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}.$$

Si le cercle est centré en 0, le paramétrage s'écrit

$$\gamma(t) = (R \cos t, R \sin t).$$

Exemple 3. Graphe d'une fonction.

Si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , son **graphe** Γ_f est une courbe simple régulière. On obtient un paramétrage γ en posant, pour $t \in [a, b]$:

$$\gamma(t) = (t, f(t));$$

et on a alors

$$\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}.$$

Exemple 4. Le bord d'un triangle, le bord d'un rectangle $[a, b] \times [c, d]$, sont des courbes fermées régulières. Dans chaque cas, on peut obtenir un paramétrage en "mettant bout à bout" des paramétrages de chacun des segments constituant la courbe; mais c'est un peu fastidieux car il faut choisir les paramétrages de façon à ce que leurs intervalles de définition se "recollent".

Le lemme suivant nous sera très utile.

LEMME 1.3. (lemme de changement de paramètre)

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière (simple ou fermée). Si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux paramétrages de Γ , avec $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ lorsque la courbe Γ est fermée, alors il existe une unique bijection $s : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ telle que

$$\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$$

pour tout $t \in [a_1, b_1]$. De plus, s est de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, et même de classe \mathcal{C}^1 si γ_1 et γ_2 sont \mathcal{C}^1 . On dit que l'application s est un **changement de paramètre**.

DÉMONSTRATION. On traite seulement le cas où la courbe Γ est simple et où les deux paramétrages sont de classe \mathcal{C}^1 . Dans ce qui suit, on écrira $\gamma_1(t) = (x_1(t), y_1(t))$ et $\gamma_2(s) = (x_2(s), y_2(s))$.

Par définition, γ_1 est une bijection de $[a_1, b_1]$ sur Γ et γ_2 est une bijection de $[a_2, b_2]$ sur Γ . Il est donc clair qu'il existe une unique bijection $s : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ telle que $\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$, à savoir $s = \gamma_1 \circ \gamma_2^{-1}$. On admettra que l'application $\gamma_2^{-1} : \Gamma \rightarrow [a_2, b_2]$ est continue, de sorte que s est également continue.

Fixons un point $p \in [a_1, b_1]$, et montrons que l'application s est dérivable au point p . Par hypothèse, on a $\gamma_2'(s(t_0)) \neq \vec{0}$, donc par exemple $x_2'(s(p)) \neq 0$. Comme $x_1(t) = x_2(s(t))$ par définition de l'application s , on peut écrire, pour $t \neq p$:

$$\begin{aligned} \frac{x_1(t) - x_1(p)}{t - p} &= \frac{x_2(s(t)) - x_2(s(p))}{t - p} \\ &= \frac{x_2(s(t)) - x_2(s(p))}{s(t) - s(p)} \times \frac{s(t) - s(p)}{t - p}. \end{aligned}$$

Quand t tend vers p , le membre de gauche tend vers $x_1'(p)$, et $\frac{x_2(s(t)) - x_2(s(p))}{s(t) - s(p)}$ tend vers $x_2'(s(p))$ car $s(t)$ tend vers $s(p)$ par continuité de s . Comme $x_2'(s(p)) \neq 0$, on en déduit que $\frac{s(t) - s(p)}{t - p}$ tend vers $\frac{x_1'(p)}{x_2'(s(p))}$; autrement dit, s est dérivable au point p avec

$$s'(p) = \frac{x_1'(p)}{x_2'(s(p))}.$$

On a obtenu cela en utilisant uniquement le fait que $x_2'(s(p)) \neq 0$. Comme $x_2'(s(t))$ reste $\neq 0$ pour t assez proche de p par continuité de x_2' et de s , on en déduit que s est dérivable dans un voisinage de p avec $s'(t) = x_1'(t)/x_2'(s(t))$; et cette formule montre que s' est *continue* dans un voisinage de p . Ainsi, s' est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de tout point $p \in [a_1, b_1]$, et donc de classe \mathcal{C}^1 sur $[a_1, b_1]$. □

1.2. Orientation. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. On dit qu'on a **orienté** Γ si on a choisi un "sens de parcours" sur Γ . Ce n'est pas véritablement une définition au sens mathématique du terme, mais cela nous suffira. L'important est de retenir les faits suivants.

FAIT 1. Il n'y a que deux orientations possibles pour une courbe régulière Γ .

- Si la courbe Γ est **simple**, d'extrémités p et q , on peut l'orienter "de p vers q " ou "de q vers p ".
- Si la courbe Γ est **fermée**, elle entoure un "domaine" \mathcal{D} . On dit que Γ est **positivement orientée** si, quand on parcourt Γ dans le sens choisi, on a constamment le domaine \mathcal{D} "à sa gauche". Dans le cas contraire (i.e. quand

le sens de parcours fait qu'on a le domaine \mathcal{D} à sa droite), on dit que Γ est négativement orientée.

FAIT 2. Tout paramétrage de Γ définit une orientation de Γ .

FAIT 3. Soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux paramétrages de Γ (avec $\gamma_1(a_1) = \gamma_2(a_2)$ si Γ est fermée) et soit $s : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ le changement de paramètre tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$. Alors γ_1 et γ_2 définissent la même orientation de Γ si et seulement si le changement de paramètre s est **croissant**.

2. Intégrale d'une fonction sur une courbe ; longueur

RAPPEL. Si $\vec{u} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ est un vecteur de \mathbb{R}^2 , la **norme** de \vec{u} est le nombre $\|\vec{u}\|$ défini par

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Autrement dit, $\|\vec{u}\|$ est la longueur du vecteur \vec{u} . La norme vérifie les propriétés suivantes :

- (i) $\|\vec{u}\| \geq 0$, et $\|\vec{u}\| = 0$ seulement pour $\vec{u} = \vec{0}$;
- (ii) $\|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|$ (**inégalité triangulaire**) ;
- (iii) $\|\lambda \vec{u}\| = |\lambda| \|\vec{u}\|$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

DÉFINITION 2.1. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. Si $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction continue, l'**intégrale de f sur Γ** , notée $\int_{\Gamma} f dl$, est définie par la formule

$$\int_{\Gamma} f dl = \int_a^b f(\gamma(t)) \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| dt,$$

où $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est n'importe quel paramétrage de Γ .

Remarque. Il y a un petit point à clarifier car la fonction $\varphi(t) = f(\gamma(t)) \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\|$ n'est a priori pas définie partout. Mais si on définit φ arbitrairement aux éventuels points t_1, \dots, t_k où γ n'est pas dérivable, on obtient une fonction bornée et donc sommable sur $[a, b]$, dont l'intégrale ne dépend pas des valeurs arbitraires $\varphi(t_1), \dots, \varphi(t_k)$.

LEMME 2.2. Cette définition a bien un sens : la quantité $\int_a^b f(\gamma(t)) \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| dt$ ne dépend pas du paramétrage $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de Γ .

DÉMONSTRATION. Il s'agit de vérifier que si $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ sont deux paramétrages de Γ , alors

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \|\overrightarrow{\gamma_1'(t)}\| dt = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s)) \|\overrightarrow{\gamma_2'(s)}\| ds.$$

On va se contenter de le faire lorsque la courbe Γ est *simple* et que les paramétrages γ_1 et γ_2 sont de classe \mathcal{C}^1 .

Soit $s : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ le changement de paramètre tel que $\gamma_1(s(t)) = \gamma_2(s(t))$. Alors s est de classe \mathcal{C}^1 et on a

$$\overrightarrow{\gamma_1'(t)} = s'(t) \times \overrightarrow{\gamma_2'(s(t))}$$

pour tout $t \in [a_1, b_1]$. On en déduit $\|\overrightarrow{\gamma_1'(t)}\| = |s'(t)| \times \|\overrightarrow{\gamma_2'(s(t))}\|$, et par conséquent

$$\int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \|\overrightarrow{\gamma_1'(t)}\| dt = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_2(s(t))) \|\overrightarrow{\gamma_2'(s(t))}\| |s'(t)| dt.$$

En effectuant le changement de variable $s = s(t)$, on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \|\overrightarrow{\gamma_1'(t)}\| dt &= \int_{[a_1, b_1]} f(\gamma_2(s(t))) \|\overrightarrow{\gamma_2'(s(t))}\| |s'(t)| dt \\ &= \int_{s([a_1, b_1])} f(\gamma_2(s)) \|\overrightarrow{\gamma_2'(s)}\| ds \\ &= \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(s)) \|\overrightarrow{\gamma_2'(s)}\| ds. \end{aligned}$$

□

Exercice. Soit Γ l'arc de l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$ joignant le point $(\frac{1}{2}, 2)$ au point $(2, \frac{1}{2})$. Calculer l'intégrale $\int_{\Gamma} f dl$, où f est la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

DÉFINITION 2.3. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière. La **longueur** de Γ , notée $l(\Gamma)$, est définie par $l(\Gamma) = \int_{\Gamma} \mathbf{1} dl$. Autrement dit :

$$l(\Gamma) = \int_a^b \|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| dt,$$

où $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est n'importe quel paramétrage de Γ .

Exemple 1. Longueur d'un segment (!)

Si p et q sont deux points du plan, on s'attend évidemment à trouver $l([p, q]) = pq$, la distance entre les points p et q . Le segment $[p, q]$ se paramètre par $\gamma(t) = p + t\overrightarrow{pq}$, où $t \in [0, 1]$. On a $\overrightarrow{\gamma'(t)} = \overrightarrow{pq}$ et donc $\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| = \|\overrightarrow{pq}\|$ pour tout $t \in [0, 1]$. Donc $l([p, q]) = \int_0^1 \|\overrightarrow{pq}\| dt = \|\overrightarrow{pq}\| = pq$, comme il se doit.

Exemple 2. Longueur d'un cercle.

Soit Γ un cercle de rayon R : on s'attend bien sûr à trouver $l(\Gamma) = 2\pi R$. En notant m le centre du cercle, on a vu que Γ se paramètre par $\gamma(t) = (x_m + R \cos t, y_m + R \sin t)$, où $t \in [0, 2\pi]$. On a $\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix}$, et donc $\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$. D'où $l(\Gamma) = \int_0^{2\pi} R dt = 2\pi R$.

Exemple 3. Longueur d'un graphe.

Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et notons Γ_f le graphe de f . On a vu que Γ_f se paramètre par $\gamma(t) = (t, f(t))$, où $t \in [a, b]$. On a alors $\overrightarrow{\gamma'(t)} = \begin{pmatrix} 1 \\ f'(t) \end{pmatrix}$, et donc $\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\| = \sqrt{1 + f'(t)^2}$. Par conséquent :

$$l(\Gamma_f) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt.$$

Exercice. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ d'extrémités $(1, 1)$ et $(2, 4)$.

REMARQUE. Si une courbe régulière Γ se décompose en un nombre fini de courbes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ et si f est une fonction continue définie sur Γ , alors $\int_{\Gamma} f dl = \int_{\Gamma_1} f dl + \dots + \int_{\Gamma_N} f dl$. En particulier, on a $l(\Gamma) = l(\Gamma_1) + \dots + l(\Gamma_N)$. Cette remarque est importante, car elle montre qu'il est inutile d'écrire un paramétrage *global* de la courbe Γ : il suffit de paramétrer séparément chacun des morceaux $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ et d'ajouter les intégrales.

Exemple 4. Si Γ est le bord d'un triangle ABC , alors $l(\Gamma) = l([AB]) + l([BC]) + l([CA]) = AB + BC + CA$. Autrement dit, $l(\Gamma)$ est le *périmètre* du triangle ABC . De même, la longueur du bord d'un rectangle est le périmètre de ce rectangle.

3. Formes différentielles, champs de vecteurs

3.1. Définitions.

DÉFINITION 3.1. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Une **forme différentielle** sur Ω est une expression du type $\omega = P dx + Q dy$, où P et Q sont des fonctions sur Ω , à valeurs réelles.

Remarque. Quand on écrit $\omega = P dx + Q dy$, il est sous-entendu que les variables dont dépendent les fonctions P et Q sont notées x et y . Si d'aventure les variables étaient par exemple notées u et v , on écrirait plutôt $\omega = P du + Q dv$.

EXEMPLE. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . La **différentielle** de f est la forme différentielle df définie par

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy.$$

DÉFINITION 3.2. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^N . Un **champ de vecteurs** sur Ω est une application $\vec{V} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$.

Pour $N = 2$, un champ de vecteurs sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ possède 2 "composantes" P et Q , qui sont des *fonctions* sur Ω ; et on écrit

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

On peut donc associer de façon canonique à \vec{V} la forme différentielle $\omega = P dx + Q dy$; et inversement, à toute forme différentielle ω correspond un champ de vecteurs :

$$\omega = P dx + Q dy \longleftrightarrow \vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

En particulier, si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , la forme différentielle $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy$ correspond au champ de vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$. Ce champ de vecteurs s'appelle le **gradient** de la fonction f , et se note $\vec{\nabla} f$. En résumé :

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy \longleftrightarrow \vec{\nabla} f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

3.2. Intégration des formes différentielles.

DÉFINITION 3.3. Soit $\omega = P dx + Q dy$ une forme différentielle continue sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un chemin dont l'image est contenue dans Ω . On écrit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. L'**intégrale de ω sur γ** , notée $\int_{\gamma} \omega$, est définie par

$$\int_{\gamma} P dx + Q dy = \int_a^b P(x(t), y(t)) x'(t) dt + \int_a^b Q(x(t), y(t)) y'(t) dt.$$

MODE D'EMPLOI. Pour calculer une intégrale "curviligne" $\int_{\gamma} P dx + Q dy$, on procède mécaniquement comme suit :

- (i) on écrit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$;
- (ii) on pose $x = x(t)$ et $y = y(t)$, donc $dx = x'(t)dt$ et $dy = y'(t)dt$;
- (iii) on remplace dans $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$;
- (iv) on intègre entre a et b (les bornes de l'intervalle de définition de γ).

REMARQUE. Si $\vec{V} = \left(\frac{P}{Q}\right)$ est le champ de vecteurs associé à $\omega = Pdx + Qdy$, alors

$$\int_{\gamma} \omega = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} dt,$$

où “ \cdot ” désigne le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 1. (théorème fondamental de l'analyse)

Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un chemin d'image Γ . Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant Γ , alors

$$\int_{\gamma} df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

En particulier, si γ est un chemin **fermé** (i.e. $\gamma(b) = \gamma(a)$), alors $\int_{\gamma} df = 0$.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier, supposons γ de classe \mathcal{C}^1 . Écrivons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Par définition, on a

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} df &= \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) dt + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) dt \\ &= \int_a^b \frac{d}{dt} [f(x(t), y(t))] dt \\ &= [f(x(t), y(t))]_a^b \\ &= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)). \end{aligned}$$

□

Exemple 2. Soit $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Pour $R > 0$, notons $\gamma_R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ le chemin défini par $\gamma_R(t) = (R \cos t, R \sin t)$. Alors

$$\int_{\gamma_R} \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 2\pi.$$

DÉMONSTRATION. On a $\omega = Pdx + Qdy$ avec $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ et $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_R} \omega &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{-R \sin t}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} \times (-R \sin t) + \frac{R \cos t}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} \times (R \cos t) \right) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

□

LEMME 3.4. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière, et soient γ_1 et γ_2 deux paramétrages de Γ .

(1) Si γ_1 et γ_2 définissent la même orientation de Γ , alors $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$ pour toute forme différentielle ω continue sur Γ .

(2) Si γ_1 et γ_2 définissent des orientations inverses, alors $\int_{\gamma_1} \omega = -\int_{\gamma_2} \omega$.

DÉMONSTRATION. Comme d'habitude, on suppose que la courbe Γ est simple et que les paramétrages sont de classe \mathcal{C}^1 . Notons $[a_1, b_1]$ et $[a_2, b_2]$ les intervalles de définition de γ_1 et γ_2 , et $s : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ le changement de paramètre tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$.

Écrivons $\omega = Pdx + Qdy$, et notons $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ le champ de vecteurs associé. Comme $\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$, on a

$$\overrightarrow{\gamma_1'(t)} = s'(t) \times \overrightarrow{\gamma_2'(s(t))}$$

pour tout $t \in [a_1, b_1]$, et donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_{a_1}^{b_1} \vec{V}(\gamma_1(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma_1'(t)} \\ &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\vec{V}(\gamma_2(s(t))) \cdot \overrightarrow{\gamma_2'(s(t))} \right) s'(t) dt. \end{aligned}$$

En effectuant le changement de variable $s = s(t)$, on obtient donc

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{s(a_1)}^{s(b_1)} \vec{V}(\gamma_2(s)) \cdot \overrightarrow{\gamma_2'(s)} ds.$$

Si γ_1 et γ_2 définissent la même orientation de Γ , alors le changement de paramètre $s : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ est *croissant*; donc $s(a_1) = a_2$ et $s(b_1) = b_2$, et donc

$$\int_{\gamma_1} \omega = \int_{a_2}^{b_2} \vec{V}(\gamma_2(s)) \cdot \overrightarrow{\gamma_2'(s)} ds = \int_{\gamma_2} \omega.$$

Si γ_1 et γ_2 définissent des orientations inverses, alors s est *décroissant*, donc $s(a_1) = b_2$ et $s(b_1) = a_2$ et donc

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \omega &= \int_{b_2}^{a_2} \vec{V}(\gamma_2(s)) \cdot \overrightarrow{\gamma_2'(s)} ds \\ &= - \int_{a_2}^{b_2} \vec{V}(\gamma_2(s)) \cdot \overrightarrow{\gamma_2'(s)} ds \\ &= - \int_{\gamma_2} \omega. \end{aligned}$$

□

Ce lemme justifie la définition suivante.

DÉFINITION 3.5. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière **orientée**. Si ω est une forme différentielle continue sur Γ , on définit l'**intégrale de ω sur Γ** (notée $\int_{\Gamma} \omega$) par

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\gamma} \omega,$$

où γ est n'importe quel paramétrage de Γ **compatible avec l'orientation**.

REMARQUE. Si la courbe orientée Γ se décompose en un nombre fini de courbes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$ (munies de l'orientation "induite" par Γ) alors $\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_1} \omega + \dots + \int_{\Gamma_N} \omega$. Cela permet de calculer $\int_{\Gamma} \omega$ sans écrire un paramétrage global de la courbe Γ , mais en se contenant de paramétrer séparément les courbes Γ_i .

Exemple 1. Intégrale sur le bord d'un rectangle.

Soit Γ le bord d'un rectangle $]a, b[\times]c, d[$, orienté positivement. Notons A, B, C, D les sommets du rectangle, en commençant par le sommet inférieur gauche et en tournant dans le sens positif (conformément à l'orientation de Γ). On a alors

$$\int_{\Gamma} = \int_{[AB]} + \int_{[BC]} + \int_{[CD]} + \int_{[DA]} .$$

On sait comment paramétrer les 4 segments constituant Γ :

- Le segment $[AB]$ se paramètre par $\gamma(x) = (x, c)$ où $x \in [a, b]$; on a alors $dy \equiv 0$ et donc $\int_{[AB]} Pdx + Qdy = \int_a^b P(x, c) dx$.
- Le segment $[BC]$ se paramètre par $\gamma(y) = (b, y)$ où $y \in [c, d]$; on a alors $dx \equiv 0$ et donc $\int_{[BC]} Pdx + Qdy = \int_c^d Q(b, y) dy$.
- Le segment $[CD]$ se paramètre par $\gamma(x) = (x, d)$ où $x \in [a, b]$; mais ce paramétrage n'est pas compatible avec l'orientation "positive" car il fait parcourir le segment $[CD]$ de $D = (a, d)$ vers $C = (b, d)$. On a donc $\int_{[CD]} Pdx + Qdy = -\int_{\gamma} Pdx + Qdy = -\int_a^b P(x, d) dx$.
- De même, $[DA]$ se paramètre par $\gamma(y) = (a, y)$ où $y \in [c, d]$, et ce paramétrage fait parcourir $[DA]$ de A vers D ; donc $\int_{[DA]} Pdx + Qdy = -\int_c^d Q(a, y) dy$.

Au total, on obtient

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_a^b P(x, c) dx + \int_c^d Q(b, y) dy - \int_a^b P(x, d) dx - \int_c^d Q(a, y) dy .$$

Exemple 2. Soient $a, b > 0$, et soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, orientée positivement. On va calculer l'intégrale $\int_{\Gamma} xdy - ydx$.

L'ellipse Γ se paramètre par $\gamma(t) = (a \cos t, b \sin t)$, où $t \in [0, 2\pi]$; et ce paramétrage est compatible avec l'orientation "positive". On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} xdy - ydx &= \int_0^{2\pi} (a \cos t) \times (b \cos t dt) - \int_0^{2\pi} (a \cos t) \times (-a \sin t dt) \\ &= \int_0^{2\pi} ab (\cos^2 + \sin^2 t) dt \\ &= 2\pi ab . \end{aligned}$$

En notant \mathcal{D} le domaine entouré par l'ellipse Γ , on a vu au chapitre 2 que l'aire de \mathcal{D} est égale à πab . On constate donc qu'on a

$$\int_{\Gamma} xdy - ydx = 2 \text{aire}(\mathcal{D}) .$$

On verra plus loin que cette identité n'est pas du tout fortuite : elle est en fait valable pour toute courbe fermée régulière Γ entourant un domaine \mathcal{D} .

3.3. Circulation d'un champ de vecteurs. On a vu que si $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est un chemin d'image Γ et si $\omega = Pdx + Qdy$ est une forme différentielle continue sur Γ , alors $\int_\gamma \omega = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} dt$, où $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est le champ de vecteurs associé à ω . Compte tenu du lemme 3.4, on peut donc poser la définition suivante :

DÉFINITION 3.6. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière **orientée**. Si \vec{V} est un champ de vecteurs continu sur Γ , la **circulation de \vec{V} le long de Γ** est le nombre réel, noté $\int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{dl}$, défini par

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} dt,$$

où $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ est n'importe quel paramétrage de Γ **compatible avec l'orientation**.

La notation $\vec{V} \cdot \vec{dl}$ fait penser à celle utilisée pour désigner l'intégrale d'une fonction sur une courbe ($\int_\Gamma f dl$, sans flèche sur le dl). Ce n'est pas un hasard : on va expliquer cela en introduisant le *champ de vecteurs tangent* à la courbe Γ .

DÉFINITION 3.7. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière **orientée** de classe \mathcal{C}^1 , et soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage de Γ compatible avec l'orientation. Si $\xi = \gamma(t)$ est un point de Γ , le **vecteur unitaire tangent à Γ au point ξ** est le vecteur $\vec{\tau}_\Gamma(\xi)$ défini par

$$\vec{\tau}_\Gamma(\xi) = \frac{\overrightarrow{\gamma'(t)}}{\|\overrightarrow{\gamma'(t)}\|}.$$

REMARQUE. Cette définition est bien indépendante du paramétrage γ compatible avec l'orientation de Γ . Ainsi, $\vec{\tau}_\Gamma$ est une *fonction* (à valeurs vectorielles) parfaitement définie sur la courbe Γ .

DÉMONSTRATION. Supposons comme d'habitude que la courbe Γ est simple. Soient $\gamma_1 : [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 : [a_2, b_2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ deux paramétrages de Γ compatibles avec l'orientation, et soit $s : [a_1, b_1] \rightarrow [a_2, b_2]$ le changement de paramètre tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$. On a $\overrightarrow{\gamma_1'(t)} = s'(t) \times \overrightarrow{\gamma_2'(s(t))}$ et donc $\|\overrightarrow{\gamma_1'(t)}\| = |s'(t)| \times \|\overrightarrow{\gamma_2'(s(t))}\|$. De plus, le changement de paramètre s est *croissant* puisque γ_1 et γ_2 définissent la même orientation de Γ ; donc $s'(t) \geq 0$ et ainsi $\|\overrightarrow{\gamma_1'(t)}\| = s'(t) \times \|\overrightarrow{\gamma_2'(s(t))}\|$. Pour tout point $\xi = \gamma_1(t) = \gamma_2(s) \in \Gamma$ (où $s = s(t)$), on a donc

$$\frac{\overrightarrow{\gamma_1'(t)}}{\|\overrightarrow{\gamma_1'(t)}\|} = \frac{s'(t) \overrightarrow{\gamma_2'(s)}}{s'(t) \|\overrightarrow{\gamma_2'(s)}\|} = \frac{\overrightarrow{\gamma_2'(s)}}{\|\overrightarrow{\gamma_2'(s)}\|},$$

ce qui est la conclusion souhaitée. □

LEMME 3.8. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe régulière orientée de classe \mathcal{C}^1 . Si \vec{V} est un champ de vecteurs continu défini sur Γ , alors

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_\Gamma (\vec{V} \cdot \vec{\tau}_\Gamma) dl.$$

DÉMONSTRATION. C'est en fait évident. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage de Γ compatible avec l'orientation. Par définition de τ_Γ et de l'intégrale d'une fonction sur

une courbe, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} (\vec{V} \cdot \vec{\tau}_{\Gamma}) dl &= \int_a^b \overrightarrow{V(\gamma(t))} \cdot \left(\frac{\overrightarrow{\gamma'(t)}}{\|\gamma'(t)\|} \right) \times \|\gamma'(t)\| dt \\ &= \int_a^b \overrightarrow{V(\gamma(t))} \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} dt \\ &= \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l}. \end{aligned}$$

□

3.4. Formes exactes ; champs gradients.

DÉFINITION 3.9. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 .

- (1) On dit qu'une forme différentielle ω définie sur Ω est **exacte sur** Ω s'il existe une fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur Ω telle que $\omega = df$.
- (2) On dit qu'un champ de vecteurs \vec{V} sur Ω est un **champ gradient** s'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que $\vec{V} = \vec{\nabla} f$.

Remarque 1. Par définition, une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ est exacte si et seulement si le champ de vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ gradient.

Remarque 2. La notion de champ gradient a un sens sur \mathbb{R}^N pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, et pas seulement pour $N = 2$.

Exemple. La forme différentielle $\omega = 3x^2y^2dx + 2x^3y$ est exacte sur \mathbb{R}^2 : on a $\omega = df$ où $f(x, y) = x^3y^2$.

PROPOSITION 3.10. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une forme différentielle exacte et de classe \mathcal{C}^1 , alors $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. De manière équivalente, si $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ gradient de classe \mathcal{C}^1 , alors $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$.

DÉMONSTRATION. Si $\omega = df$ pour une certaine fonction $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$, alors $\frac{\partial f}{\partial x} = P$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$. Comme P et Q sont de classe \mathcal{C}^1 , la fonction f est en fait de classe \mathcal{C}^2 . On sait qu'on a $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, et on en déduit

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

□

DIGRESSION. Champs gradients et rotationnel.

Soit \vec{W} un champ de vecteurs sur un ouvert \mathbf{de} \mathbb{R}^3 . Alors \vec{W} a trois composantes : on écrit $\vec{W} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$. Le **rotationnel** de \vec{W} est le champ de vecteurs $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{W})$ défini par

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Formellement, on a

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{W}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = \vec{\nabla} \wedge \vec{W},$$

où “ \wedge ” est le **produit vectoriel** sur \mathbb{R}^3 .

On montre exactement comme plus haut (en utilisant la symétrie des “dérivées partielles croisées” pour une fonction de classe \mathcal{C}^2) que si \vec{W} est un champ gradient de classe \mathcal{C}^1 , alors $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{W}) = \vec{0}$.

Soit maintenant $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs (de classe \mathcal{C}^1) sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. En posant $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$, on peut considérer \vec{V} comme un champ de vecteurs sur $\tilde{\Omega}$ (à valeurs **dans** \mathbb{R}^3) en identifiant \vec{V} au champ de vecteurs $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}$; autrement dit en posant

$$\vec{V}(x, y, z) = \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix};$$

donc la condition “ $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0$ ” de la proposition précédente signifie exactement que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$.

DÉFINITION 3.11. *On dit qu’une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ est **fermée** si elle est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. On dit qu’un champ de vecteurs \vec{V} est **irrotationnel** s’il est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \vec{0}$.*

La discussion précédente se résume donc ainsi :

$$\begin{aligned} \text{exacte} &\implies \text{fermée} \\ \text{champ gradient} &\implies \text{irrotationnel} \end{aligned}$$

Exemple 1. La forme différentielle $\omega = x^3y^4dx + (5x + y^2)dy$ n’est pas fermée, donc elle n’est pas exacte sur \mathbb{R}^2 .

Exemple 2. Soit $\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}$, forme différentielle définie sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. Alors ω est fermée, mais elle n’est pas exacte.

DÉMONSTRATION. On a $\omega = Pdx + Qdy$ avec $P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$ et $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, et on vérifie sans difficulté que $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = \frac{\partial P}{\partial y}$. Donc ω est fermée.

Si ω était exacte, $\omega = df$, on devrait avoir $\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma} df = 0$ pour toute courbe fermée $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, d’après le théorème fondamental de l’analyse (voir l’exemple 1 après la définition de l’intégrale curviligne). Mais si on prend pour Γ un cercle centré en $(0, 0)$, on a vu qu’on a $\int_{\Gamma} \omega = 2\pi$ (exemple 2 après la définition de l’intégrale curviligne). Par conséquent, ω ne peut pas être exacte. \square

La démonstration faite dans l’exemple 2 a mis en évidence une autre condition nécessaire d’exactitude : si une forme différentielle ω est exacte sur un ouvert Ω , alors l’intégrale de ω sur tout chemin *fermé* dont l’image est contenue dans Ω doit valoir 0. Il se trouve que contrairement à la “fermeture”, cette condition est en fait une *caractérisation* de l’exactitude. C’est le contenu du théorème suivant.

THÉORÈME 3.12. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 . Une forme différentielle ω continue sur Ω est exacte si et seulement si on a $\int_{\Gamma} \omega = 0$ pour toute courbe (orientée) **fermée***

$\Gamma \subset \Omega$. De manière équivalente, un champ de vecteurs \vec{V} sur Ω est un champ gradient si et seulement si on a $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0$ pour toute courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$.

DÉMONSTRATION. On a déjà vu que la condition est nécessaire, et même que si ω est exacte, alors $\int_{\gamma} \omega = 0$ pour tout chemin fermé dont l'image est contenue dans Ω (même si cette image n'est pas une courbe régulière). On va montrer que si cette dernière propriété est satisfaite, alors ω est exacte. (C'est un résultat a priori un peu moins fort que celui énoncé dans le théorème, mais en fait équivalent). Dans la suite, on supposera que l'ouvert Ω est **connexe**, ce qui signifie qu'il est toujours possible de relier deux points quelconques de Ω par un chemin γ dont l'image est entièrement contenue dans Ω .

Fixons un point $p \in \Omega$. Le point clé est l'observation suivante : si z est un point quelconques de Ω et si γ_1 et γ_2 sont deux chemins reliant p à z et dont les images sont entièrement contenues dans Ω , alors $\int_{\gamma_1} \omega = \int_{\gamma_2} \omega$. En effet, en mettant bout à bout les chemins γ_1 et " γ_2 parcouru en sens inverse" (de z vers p), on obtient un chemin fermé γ . Par hypothèse sur ω , on a donc $\int_{\gamma} \omega = 0$, autrement dit $\int_{\gamma_1} \omega - \int_{\gamma_2} \omega = 0$.

Cette observation permet de définir une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ comme suit :

$$f(z) = \int_{\Gamma_z} \omega,$$

où Γ_z est **n'importe quel** chemin reliant p à z et dont l'image est entièrement contenue dans Ω . On va montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 avec $df = \omega$.

Écrivons $\omega = Pdx + Qdy$. On va se contenter de montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe en tout point, avec $\frac{\partial f}{\partial x} = P$. (Le raisonnement serait identique pour montrer que $\frac{\partial f}{\partial y} = Q$).

Fixons un point $z_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, on sait que si $\xi \in \mathbb{R}$ est assez proche de x_0 et si on pose $z = (\xi, y_0)$, alors le segment $[z_0, z]$ est entièrement contenu dans Ω . Pour calculer $f(z)$ on peut donc prendre pour γ_z le chemin " γ_{z_0} suivi du segment $[z_0, z]$ ". On a ainsi

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\gamma_{z_0}} \omega + \int_{[z_0, z]} \omega \\ &= f(z_0) + \int_{[(x_0, y_0), (\xi, y_0)]} Pdx + Qdy, \end{aligned}$$

autrement dit

$$f(\xi, y_0) = f(x_0, y_0) + \int_0^{\xi} P(x, y_0) dx.$$

Comme la fonction P est continue, on en déduit (d'après le théorème fondamental de l'analyse), que la fonction $\xi \mapsto f(\xi, y_0)$ est de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de x_0 avec pour dérivée $P(\xi, y_0)$. En particulier, $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$ existe et vaut $P(z_0)$. Comme le point $z_0 \in \Omega$ est quelconque, cela termine la démonstration. □

4. La formule de Green-Riemann

4.1. Énoncé général, et preuve dans un cas simple. La "formule magique" suivante relie l'intégrale d'une forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ sur une courbe fermée à l'intégrale de la fonction "témoin de fermeture" $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ sur le domaine entouré par la courbe.

THÉORÈME 4.1. (formule de Green-Riemann)

Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine \mathcal{D} . On oriente Γ dans le sens positif.

Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une forme différentielle de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert contenant $\mathcal{D} \cup \Gamma$, alors

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

De manière équivalente : si $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Gamma$, alors

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

PREUVE DANS UN CAS TRÈS PARTICULIER. On va démontrer la formule de Green-Riemann dans le cas où la courbe Γ est le bord d'un rectangle $\mathcal{D} =]a, b[\times]c, d[$. La vérification est alors un calcul direct mais cependant intéressant, basé sur le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} Pdx + Qdy &= \int_a^b P(x, c) dx + \int_c^d Q(b, y) dy - \int_a^b P(x, d) dx - \int_c^d Q(a, y) dy \\ &= \int_c^d [Q(b, y) - Q(a, y)] dy - \int_a^b [P(x, d) - P(x, c)] dx \\ &= \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dx \right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned}$$

□

Une première conséquence importante de la formule de Green-Riemann est le fait que sur certains ouverts, toute forme différentielle fermée est exacte.

COROLLAIRE 4.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert **simplement connexe**, ce qui signifie que pour toute courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$, le domaine \mathcal{D} entouré par Γ est entièrement contenu dans Ω . Alors toute forme différentielle fermée sur Ω est exacte. De manière équivalente, tout champ de vecteurs irrotationnel sur Ω est un champ gradient.

DÉMONSTRATION. Soit $\omega = Pdx + Qdy$ une forme différentielle fermée sur Ω . L'hypothèse faite sur Ω permet d'appliquer la formule de Green-Riemann à toute courbe fermée $\Gamma \subset \Omega$, et comme ω est fermée on obtient $\int_{\Gamma} \omega = 0$ pour une telle courbe Γ . D'après le théorème 3.12, on en déduit que ω est exacte. □

Exercice 1. Montrer que tout ouvert **convexe** de \mathbb{R}^2 est simplement connexe.

Exercice 2. Montrer que $\Omega = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ n'est pas simplement connexe.

Exercice 3. Montrer directement (i.e. sans utiliser le corollaire 4.2) que toute forme différentielle fermée sur $\Omega = \mathbb{R}^2$ est exacte. (*Suggestion* : en écrivant $\omega = Pdx + Qdy$, commencer par trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2)$ telles que $\frac{\partial f}{\partial x} = P$).

Une deuxième conséquence est la caractérisation suivante des champs de vecteurs irrotationnels.

COROLLAIRE 4.3. Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Alors \vec{V} est irrotationnel si et seulement si on a $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{dl} = 0$ pour toute courbe fermée régulière $\Gamma \subset \Omega$ entourant un domaine \mathcal{D} **entièrement contenu dans** Ω .

DÉMONSTRATION. D'après la formule de Green-Riemann et en posant $\phi = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, cela revient à montrer que si ϕ est une fonction continue sur Ω (à valeurs réelles), alors $\phi = 0$ si et seulement si $\int_{\mathcal{D}} \phi(x, y) dx dy = 0$ pour tout domaine \mathcal{D} entouré par une courbe fermée Γ avec $\mathcal{D} \cup \Gamma \subset \Omega$.

Évidemment, si $\phi = 0$ alors $\int_{\mathcal{D}} \phi(x, y) dx dy = 0$ pour tout domaine $\mathcal{D} \subset \Omega$. Inversement, supposons $\phi \neq 0$: il s'agit de trouver une courbe Γ entourant un domaine $\mathcal{D} \subset \Omega$ tel que $\int_{\mathcal{D}} \phi(x, y) dx dy \neq 0$. La fonction ϕ prend par exemple une valeur strictement positive en un point $p_0 = (x_0, y_0) \in \Omega$. Par continuité, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et un cercle Γ centré en p_0 (entourant un disque \mathcal{D}) tels que $\Gamma \cup \mathcal{D} \subset \Omega$ et $\phi(x, y) \geq \varepsilon$ sur \mathcal{D} . On a alors $\int_{\mathcal{D}} \phi(x, y) dx dy \geq \varepsilon \text{aire}(\mathcal{D}) > 0$, donc la courbe Γ convient. \square

Enfin, la formule de Green-Riemann permet de voir que ce qu'on a constaté plus haut dans le cas d'une ellipse est en fait une propriété très générale.

COROLLAIRE 4.4. Si $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ est une courbe fermée régulière entourant un domaine \mathcal{D} et orientée dans le sens positif, alors

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} x dy - y dx.$$

DÉMONSTRATION. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\int_{\Gamma} -y dx + x dy = \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial(x)}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy = 2 \int_{\mathcal{D}} dx dy = 2 \text{aire}(\mathcal{D}).$$

\square

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que pour toute courbe fermée régulière $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$, on a $\int_{\Gamma} f(x) dy = \int_{\Gamma} f(y) dx$.

4.2. Preuve de Green-Riemann dans un cas assez général. Soit $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine \mathcal{D} . On va démontrer la formule de Green-Riemann en supposant que $\mathcal{D} \cup \Gamma$ est un "rectangle déformé". De façon précise, on suppose qu'il existe un rectangle $\mathcal{D}_0 =]a, b[\times]c, d[$ (dont le bord est noté Γ_0) et une application $\Phi : \mathcal{D}_0 \cup \Gamma_0 \rightarrow \mathcal{D} \cup \Gamma$ vérifiant les propriétés suivantes :

- Φ est un difféomorphisme de \mathcal{D}_0 sur \mathcal{D} ;
- $\Phi(\Gamma_0) = \Gamma$;
- Φ est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathcal{D}_0 \cup \Gamma_0$ (ce qui signifie que Φ peut se prolonger en une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert contenant $\mathcal{D}_0 \cup \Gamma_0$).

Pour éviter des écritures trop lourdes, on va établir la formule de Green-Riemann uniquement pour une forme différentielle du type $\omega = P dx$. (Le cas " $Q dy$ " se traiterait de la même façon, et le cas général s'obtient en ajoutant ces deux cas particuliers). Il s'agit donc de vérifier qu'on a

$$\int_{\Gamma} P dx = - \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.$$

On admettra les deux faits suivants.

FAIT 1. On peut supposer que le déterminant jacobien $J_\Phi(u, v)$ est partout strictement positif sur \mathcal{D}_0 .

FAIT 2. Si γ_0 est un paramétrage de Γ_0 compatible avec l'orientation "positive", alors $\gamma = \Phi \circ \gamma_0$ est un paramétrage de Γ compatible avec l'orientation positive.

Soit $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage de Γ_0 compatible avec l'orientation positive, et écrivons $\gamma_0(t) = (u(t), v(t))$. En posant $\Phi(u, v) = (X(u, v), Y(u, v))$, la courbe Γ se paramètre par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, où $x(t) = X(u(t), v(t))$ et $y(t) = Y(u(t), v(t))$ (d'après le fait 2). On a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} P dx &= \int_a^b P(X(u(t), v(t)), Y(u(t), v(t))) \frac{d}{dt} [X(u(t), v(t))] dt \\ &= \int_a^b P(X(\gamma_0(t)), Y(\gamma_0(t))) \left(\frac{\partial X}{\partial u}(\gamma_0(t)) u'(t) + \frac{\partial X}{\partial v}(\gamma_0(t)) v'(t) \right) dt \\ &= \int_{\Gamma_0} P(X, Y) \frac{\partial X}{\partial u} du + P(X, Y) \frac{\partial X}{\partial v} dv. \end{aligned}$$

Comme Γ_0 est le bord d'un rectangle et comme on a vu que la formule de Green-Riemann est vraie pour les rectangles, on en déduit

$$(4.1) \quad \int_{\Gamma} P dx = \int_{\mathcal{D}_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left[P(X, Y) \frac{\partial X}{\partial v} \right] - \frac{\partial}{\partial v} \left[P(X, Y) \frac{\partial X}{\partial u} \right] \right\} dudv.$$

Maintenant, on doit calculer un peu. D'après formules pour les dérivées partielles d'une fonction composée, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(P(X, Y) \frac{\partial X}{\partial v} \right) &= \frac{\partial}{\partial u} (P(X, Y)) \frac{\partial X}{\partial v} + P(X, Y) \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} \\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(X, Y) \frac{\partial X}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial y}(X, Y) \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \frac{\partial X}{\partial v} + P(X, Y) \frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v}; \end{aligned}$$

et de même :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(P(X, Y) \frac{\partial X}{\partial u} \right) = \left(\frac{\partial P}{\partial x}(X, Y) \frac{\partial X}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial y}(X, Y) \frac{\partial Y}{\partial v} \right) \frac{\partial X}{\partial u} + P(X, Y) \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}.$$

Comme $\frac{\partial^2 X}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 X}{\partial v \partial u}$, on obtient donc après simplification :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} \left(P(X, Y) \frac{\partial X}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(P(X, Y) \frac{\partial X}{\partial u} \right) &= \frac{\partial P}{\partial y}(X, Y) \times \left(\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y}(\Phi(u, v)) \times J_\Phi(u, v), \end{aligned}$$

car $(X, Y) = \Phi(u, v)$ et donc $\frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial X}{\partial u} = J_\Phi(u, v)$.

Comme de plus $J_\Phi = |J_\Phi|$ puisqu'on suppose depuis le début que $J_\Phi > 0$ (fait 1), on peut alors conclure en revenant à (4.1) et en utilisant la **formule de changement de variable** :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} P dx &= - \int_{\mathcal{D}_0} \frac{\partial P}{\partial y}(\Phi(u, v)) |J_{\Phi}(u, v)| dudv \\
&= - \int_{\Phi(\mathcal{D}_0)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy \\
&= - \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy.
\end{aligned}$$

4.3. Une autre preuve, dans un autre cas. Pour faire encore quelques jolis calculs, on va donner une autre démonstration de la formule de Green-Riemann, dans le cas où \mathcal{D} est le **domaine compris entre deux graphes** de fonctions de classe \mathcal{C}^1 . De façon précise, on suppose que le domaine \mathcal{D} est de la forme

$$\mathcal{D} = \{(x, y); x \in]a, b[\text{ et } f(x) < y < g(x)\},$$

où f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, de classe \mathcal{C}^1 sur $]a, b[$, avec $f(x) < g(x)$ pour tout $x \in]a, b[$.

Dans ce cas, la courbe Γ est la réunion des graphes Γ_f et Γ_g et des deux segments verticaux (éventuellement réduit(s) à un point) joignant d'une part les points $A = (a, f(a))$ et $D = (a, g(a))$, et d'autre part les points $B = (b, f(b))$ et $C = (b, g(b))$.

Si ω est une forme différentielle continue sur Γ , on a alors (compte tenu des conventions d'orientation)

$$\int_{\Gamma} \omega = \int_{\Gamma_f} \omega + \int_{[BC]} \omega - \int_{\Gamma_g} \omega - \int_{[AD]} \omega$$

En écrivant $\omega = Pdx + Qdy$, on obtient donc

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} Pdx + Qdy &= \int_a^b P(x, f(x)) dx + \int_a^b Q(x, f(x)) f'(x) dx \\
&\quad + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy \\
&\quad - \left(\int_a^b P(x, g(x)) dx + \int_a^b Q(x, g(x)) g'(x) dx \right) \\
&\quad - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y) dy.
\end{aligned}$$

En réorganisant les termes, cela s'écrit encore

$$\int_{\Gamma} Pdx + Qdy = \mathbf{A} + \mathbf{B},$$

où \mathbf{A} et \mathbf{B} sont donnés par

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} &= - \int_a^b [P(x, g(x)) - P(x, f(x))] dx \text{ et} \\
\mathbf{B} &= \int_a^b [Q(x, f(x)) f'(x) - Q(x, g(x)) g'(x)] dx + \int_{f(b)}^{g(b)} Q(b, y) dy - \int_{f(a)}^{g(a)} Q(a, y) dy.
\end{aligned}$$

Le terme **A** est facile à calculer en utilisant le théorème fondamental de l'analyse :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= - \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy \right) dx \\ &= - \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy. \end{aligned}$$

Il reste donc à voir que **B** est égal à $\int_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$. Pour cela, on va utiliser le fait suivant

FAIT. Soit F la fonction définie sur $]a, b[$ par

$$F(x) = \int_{f(x)}^{g(x)} Q(x, y) dy.$$

Alors F est de classe \mathcal{C}^1 et on a

$$F'(x) = Q(x, g(x)) g'(x) - Q(x, f(x)) f'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy.$$

PREUVE DU FAIT. Soit Φ la fonction de trois variables définie par

$$\Phi(u, v, x) = \int_u^v Q(x, y) dy.$$

Alors Φ est de classe \mathcal{C}^1 et ses dérivées partielles sont données par

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v, x) = -Q(x, u) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v, x) = Q(x, v) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial x}(u, v, x) = \int_u^v \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy \end{cases}$$

Comme $F(x) = \Phi(f(x), g(x), x)$, on en déduit que F est de classe \mathcal{C}^1 avec

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{\partial \Phi}{\partial u}(f(x), g(x), x) \times f'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial v}(f(x), g(x), x) \times g'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(f(x), g(x), x) \times 1 \\ &= Q(x, g(x)) g'(x) - Q(x, f(x)) f'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy. \end{aligned}$$

Revenons maintenant au calcul de **B** : par définition de la fonction F et d'après le fait, on a

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int_a^b \left(-F'(x) + \int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy \right) dx + F(b) - F(a) \\ &= -[F]_a^b + \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) dy \right) dx + [F]_a^b \\ &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy. \end{aligned}$$

Ceci termine la preuve de Green-Riemann dans le cas considéré. \square

4.4. Autres formulations. On va maintenant donner deux “ré-écritures” de la formule de Green-Riemann, qui ont l'avantage d'être immédiatement généralisables en dimension 3.

4.5. La formule de Stokes. Rappelons que si $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, on peut considérer \vec{V} comme un champ de vecteurs à valeurs dans \mathbb{R}^3 en l'identifiant au champ $\begin{pmatrix} P \\ Q \\ 0 \end{pmatrix}$ (défini sur $\tilde{\Omega} = \Omega \times \mathbb{R}$). On a alors

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

NOTATIONS. Si Σ est une partie de \mathbb{R}^2 , on identifie Σ à une partie de \mathbb{R}^3 contenue dans le plan des xy . Pour tout point $\xi \in \Sigma$, on note \vec{n}_Σ le vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (vecteur "normal" à Σ au point ξ). Si \vec{W} est un champ de vecteurs à valeurs dans \mathbb{R}^3 défini (et continu) sur Σ , on pose

$$\int_\Sigma \vec{W} \cdot d\vec{\Phi} = \int_\Sigma \vec{W} \cdot \vec{n}_\Sigma \, dx dy.$$

On dit que $\int_\Sigma \vec{W} \cdot d\vec{\Phi}$ est le "flux" du champ de vecteurs \vec{W} à travers Σ .

Le résultat suivant est une reformulation immédiate de la formule de Green-Riemann, où on a juste changé quelques notations.

PROPOSITION 4.5. (formule de Stokes)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ un domaine entouré par une courbe fermée régulière Γ (orientée positivement). Si $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $\Sigma \cup \Gamma$, alors

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_\Sigma \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot d\vec{\Phi}.$$

DÉMONSTRATION. C'est évident d'après la formule de Green-Riemann, puisque

$$\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot \vec{n}_\Sigma = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

□

4.6. La formule de la divergence. Si $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , la **divergence** de \vec{V} est la fonction $\text{div}(\vec{V})$ définie par

$$\text{div}(\vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Formellement, on a donc

$$\text{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \cdot \vec{V}.$$

NOTATIONS. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière de classe \mathcal{C}^1 entourant un domaine \mathcal{D} . Pour tout point $\xi \in \Sigma$, on note $\vec{n}_\Sigma(\xi)$ le vecteur **normal** à Σ au point ξ (i.e. perpendiculaire à la tangente à Σ au point ξ) **unitaire** (i.e. de norme 1) et dirigé vers l'**extérieur** du domaine \mathcal{D} . Si \vec{V} est un champ de vecteurs continu sur Σ , on pose

$$\int_\Sigma \vec{V} \cdot d\vec{\Phi} = \int_\Sigma \vec{V} \cdot \vec{n}_\Sigma \, dl.$$

On dit que $\int_\Sigma \vec{V} \cdot d\vec{\Phi}$ est le **flux** du champ de vecteurs \vec{V} à travers Σ .

THÉORÈME 4.6. (formule de la divergence)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière de classe \mathcal{C}^1 entourant un domaine \mathcal{D} . Si $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ est un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$, alors

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{d\Phi} = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\vec{V}) \, dx dy.$$

DÉMONSTRATION. Orientons la courbe Σ dans le sens positif (le domaine \mathcal{D} à gauche), et pour $\xi \in \Sigma$, notons $\vec{\tau}_{\Sigma}(\xi)$ le vecteur unitaire tangent à Σ au point ξ . Par définition, les vecteurs $\vec{n}_{\Sigma}(\xi)$ et $\vec{\tau}_{\Sigma}(\xi)$ sont unitaires et orthogonaux, et de plus $(\vec{\tau}_{\Sigma}(\xi), \vec{n}_{\Sigma}(\xi))$ est orienté dans le sens *indirect* car $\vec{n}_{\Sigma}(\xi)$ est dirigé vers l'extérieur du domaine \mathcal{D} . Si on écrit $\vec{\tau}_{\Sigma}(\xi) = \begin{pmatrix} a(\xi) \\ b(\xi) \end{pmatrix}$, on a donc

$$\vec{n}_{\Sigma}(\xi) = \begin{pmatrix} b(\xi) \\ -a(\xi) \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \vec{V}(\xi) \cdot \vec{n}_{\Sigma}(\xi) &= b(\xi)P(\xi) - a(\xi)Q(\xi) \\ &= \vec{W}(\xi) \cdot \vec{\tau}_{\Sigma}(\xi), \end{aligned}$$

où on a posé $\vec{W} = \begin{pmatrix} -Q \\ P \end{pmatrix}$. En appliquant la formule de Green-Riemann au champ de vecteurs \vec{W} , on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{d\Phi} &= \int_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{\tau}_{\Sigma} \, dl \\ &= \int_{\Sigma} \vec{W} \cdot \vec{dl} \\ &= \int_{\mathcal{D}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial(-Q)}{\partial y} \right) \, dx dy \\ &= \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\vec{V}) \, dx dy. \end{aligned}$$

□

La formule de la divergence permet de caractériser les champs de vecteurs \vec{V} à **divergence nulle**, i.e. vérifiant $\operatorname{div}(\vec{V}) \equiv 0$:

COROLLAIRE 4.7. Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Alors \vec{V} est à divergence nulle si et seulement si on a $\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{d\Phi} = 0$ pour toute courbe fermée régulière $\Sigma \subset \Omega$ entourant un domaine \mathcal{D} **entièrement contenu dans** Ω .

DÉMONSTRATION. D'après la formule de la divergence et en posant $\phi = \operatorname{div}(\vec{V})$, il s'agit de montrer qu'une fonction ϕ continue sur Ω est identiquement nulle si et seulement si on a $\int_{\mathcal{D}} \phi(x, y) \, dx dy = 0$ pour tout domaine $\mathcal{D} \subset \Omega$ entouré par une courbe $\Gamma \subset \Omega$. Cela a déjà été fait, dans la preuve du corollaire 4.3. □

Pour finir, voici une autre formule très importante, faisant cette fois intervenir l'opérateur **laplacien**. Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un ouvert de \mathbb{R}^2 , le laplacien de f est la fonction Δf définie par

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Autrement dit :

$$\Delta f = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \operatorname{div}(\vec{\nabla} f).$$

COROLLAIRE 4.8. (formule de Green)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^2$ une courbe fermée régulière entourant un domaine \mathcal{D} . Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$, alors

$$\int_{\Sigma} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\Phi} = \int_{\mathcal{D}} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy.$$

DÉMONSTRATION. Un calcul facile montre qu'on a

$$\operatorname{div}(u \vec{\nabla} v) = \vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u \Delta v.$$

Si on applique la formule de la divergence au champ de vecteurs $\vec{V} = u \vec{\nabla} v$, on obtient donc

$$\int_{\Sigma} (u \vec{\nabla} v) \cdot d\vec{\Phi} = \int_{\mathcal{D}} (\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v + u \Delta v) dx dy.$$

En permutant les rôles de u et v , on a également

$$\int_{\Sigma} (v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\Phi} = \int_{\mathcal{D}} (\vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u + v \Delta u) dx dy.$$

En faisant la différence de ces deux identités (et comme $\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = \vec{\nabla} v \cdot \vec{\nabla} u$) on obtient la formule de Green. □

Une fonction u de classe \mathcal{C}^2 est dite **harmonique** si elle vérifie $\Delta u = 0$. En faisant $v = 0$ dans la formule de Green et en raisonnant comme dans la preuve du corollaire 4.7 (ou mieux : en appliquant 4.7 au champ de vecteurs $\vec{V} = \vec{\nabla} u$), on obtient la caractérisation suivante des fonctions harmoniques :

COROLLAIRE 4.9. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^2 , et soit u une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur Ω . Alors u est harmonique si et seulement si on a $\int_{\Sigma} \vec{\nabla} u \cdot d\vec{\Phi} = 0$ pour toute courbe fermée $\Sigma \subset \Omega$ entourant un domaine \mathcal{D} entièrement contenu dans Ω .

Exercice. Soit u une fonction harmonique sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$.

- (a) Montrer que si $\mathcal{D} \subset \Omega$ est un domaine entouré par une courbe fermée régulière Σ , alors

$$\int_{\mathcal{D}} \|\vec{\nabla} u\|^2 dx dy = \int_{\Sigma} (u \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\Phi}.$$

- (b) En déduire que si u est nulle sur la courbe Σ , alors elle est nulle dans le domaine \mathcal{D} .

Intégrales de surface

1. Surfaces

1.1. Surfaces paramétrées, et surfaces “générales”.

DÉFINITION 1.1. Soit Σ une partie de \mathbb{R}^3 . On dit que Σ est une **surface paramétrée** si “on peut décrire Σ à l’aide de deux paramètres”. De façon précise, s’il existe une application $\Phi = U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définie sur un ouvert U de \mathbb{R}^2 et de classe \mathcal{C}^1 telle que

- (i) $\Phi(U) = \Sigma$, et Φ est une **bijection** de U sur Σ ;
- (ii) Φ est un **homéomorphisme**, i.e. l’application $\Phi^{-1} : \Sigma \rightarrow U$ est continue ;
- (iii) Pour tout $(u, v) \in U$, les vecteurs $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$ sont **linéairement indépendants**.

On dit alors que Φ est un **paramétrage** de la surface Σ .

Exemple 1. Parallélogramme.

Soit Σ l’“intérieur” d’un parallélogramme $ABCD$ de \mathbb{R}^3 . Analytiquement, Σ est l’ensemble des points $M \in \mathbb{R}^3$ tel que le vecteur \overrightarrow{AM} s’écrive sous la forme

$$\overrightarrow{AM} = u \overrightarrow{AB} + v \overrightarrow{AD},$$

où $0 < u < 1$ et $0 < v < 1$. Si on pose $U =]0, 1[\times]0, 1[$, on a donc $\Sigma = \Phi(U)$, où $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est définie par

$$\Phi(u, v) = A + u \overrightarrow{AB} + v \overrightarrow{AD}.$$

Comme les vecteurs \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AD} ne sont pas colinéaires, l’application Φ est injective, et est donc une bijection de U sur Σ . Si $\xi = \Phi(u, v)$ est un point de Σ , alors u et v sont les coordonnées de ξ dans le repère $A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ du plan (ABC) , donc (u, v) dépend continûment de ξ ; autrement dit, l’application Φ^{-1} est continue sur Σ . Enfin, on a $\frac{\partial \Phi}{\partial u} \equiv \overrightarrow{AB}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v} \equiv \overrightarrow{AD}$, donc les vecteurs $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$ sont linéairement indépendants en tout point (u, v) . Ainsi, Σ est une surface paramétrée.

Exemple 2. Graphe d’une fonction.

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 . Si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , alors son **graphe** Σ_f est une surface paramétrée. On obtient un paramétrage Φ en posant, pour $(u, v) \in U$:

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v)).$$

Il est clair que Φ est une bijection de U sur Σ_f . On a $\Phi^{-1}(x, y, z) = (x, y)$ pour tout $(x, y, z) \in \Sigma_f$, donc Φ^{-1} est continue. Enfin, on a

$$\overrightarrow{\frac{\partial \Phi}{\partial u}}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\frac{\partial \Phi}{\partial v}}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix},$$

et on voit facilement que ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Voici maintenant la définition d'une surface "générale".

DÉFINITION 1.2. *On dira qu'une partie Σ de \mathbb{R}^3 est une **surface** si " Σ est une surface paramétrée au voisinage de chaque point". De façon précise, si pour tout point $\xi \in \Sigma$, on peut trouver un voisinage ouvert W_ξ de ξ tel que $W_\xi \cap \Sigma$ est une surface paramétrée. Si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage de $W_\xi \cap \Sigma$ (pour un certain voisinage W_ξ de ξ), on dit que Φ est un **paramétrage local de Σ au point ξ** .*

On admettra le résultat suivant, qui donne un moyen facile de reconnaître une surface. C'est une conséquence assez simple d'un résultat qui ne l'est pas (simple), qu'on appelle le **théorème des fonctions implicites**.

PROPOSITION 1.3. *Soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, et soit $\Sigma = \{(x, y, z) \in \Omega; F(x, y, z) = 0\}$. On suppose que le gradient de F ne s'annule en aucun point de Σ . Alors Σ est une surface.*

Remarque. Il est très facile de se convaincre que cet énoncé est vrai. L'équation $F(x, y, z) = 0$ donne **une** relation entre x, y, z , donc supprime un "degré de liberté". Il reste par conséquent **deux** degrés de liberté, et on obtient "donc" une surface.

Exemple 1. Plan.

Un plan $\Pi \subset \mathbb{R}^3$ peut être défini par une équation (dite "cartésienne") de la forme $ax + by + cz = d$, où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. La fonction F définie par $F(x, y, z) = ax + by + cz - d$ vérifie $\overrightarrow{\nabla} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, donc $\Pi = \{(x, y, z); F(x, y, z) = 0\}$ est une surface.

Exemple 2. Sphère.

Soit $R > 0$, et soit $m \in \mathbb{R}^3$. La **sphère** $\mathcal{S}(m, R)$ de centre m et de rayon R est l'ensemble des points $u \in \mathbb{R}^3$ à distance exactement R de m . Analytiquement, on a $\mathcal{S}(m, R) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 = R^2\}$. La fonction F définie par $F(x, y, z) = (x - x_m)^2 + (y - y_m)^2 + (z - z_m)^2 - R^2$ vérifie

$$\overrightarrow{\nabla} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x - x_m) \\ 2(y - y_m) \\ 2(z - z_m) \end{pmatrix}.$$

Si $(x, y, z) \in \mathcal{S}(m, R)$, alors on a certainement $(x, y, z) \neq m$ et donc $\overrightarrow{\nabla} F(x, y, z) \neq \vec{0}$. Par conséquent, $\mathcal{S}(m, R) = \{(x, y, z); F(x, y, z) = 0\}$ est une surface.

Exemple 3. Cylindre.

Soient $R, h > 0$, et soit $\mathcal{C}(R, h)$ la "partie latérale" du cylindre de hauteur h basé sur le disque de centre 0 et de rayon R situé dans le plan des xy . Analytiquement, on a $\mathcal{C}(R, h) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < z < h \text{ et } x^2 + y^2 = R^2\}$. Si on pose $\Omega = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; 0 < z < h\}$ et $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - R^2$, alors Ω est un ouvert de \mathbb{R}^3 et $\mathcal{C}(R, h) = \{(x, y, z) \in \Omega; F(x, y, z) = 0\}$. On a $\overrightarrow{\nabla} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 0 \end{pmatrix}$, et donc

$\vec{\nabla}F(x, y, z) \neq \vec{0}$ pour tout $(x, y, z) \in \mathcal{C}(R, h)$ car $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. Donc $\mathcal{C}(R, h)$ est une surface.

Le lemme suivant va jouer exactement le même rôle que l'énoncé du même nom vu pour les courbes.

LEMME 1.4. (lemme de changements de paramètres)

Soit Σ une surface paramétrée. Si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\Psi : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux paramétrages de Σ , alors il existe une unique bijection $\Theta : U \rightarrow U'$ telle que $\Phi(u, v) = \Psi(\Theta(u, v))$, et cette bijection Θ est un **difféomorphisme** de U sur U' .

DÉMONSTRATION. La première partie est claire : on a nécessairement $\Theta = \Psi^{-1} \circ \Phi$. De plus, Θ est *continue* car Φ et Ψ^{-1} le sont. (La continuité de Ψ^{-1} est la condition (ii) dans la définition d'un paramétrage).

La preuve du fait que Θ est de classe \mathcal{C}^1 ressemble à celle du lemme de changement de paramètre faite pour les courbes ; mais elle demanderait quelques "préliminaires" pour être correctement écrite. On *admettra* donc le résultat.

Enfin, en échangeant les rôles de Φ et Ψ on voit que l'application Θ^{-1} est également de classe \mathcal{C}^1 , autrement dit que Θ est un difféomorphisme. □

1.2. Plan tangent à une surface.

DÉFINITION 1.5. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 . Si ξ est un point de Σ , le **plan tangent** à Σ au point ξ est le plan passant par ξ et de vecteurs directeurs $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v)$ et $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$, où $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage local de Σ au point ξ et $\Phi(u, v) = \xi$.

Remarque. Cette définition est bien **indépendante** du paramétrage local Φ .

DÉMONSTRATION. Soient $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\Psi : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ deux paramétrages locaux de Σ au point ξ , et écrivons $\xi = \Phi(u_0, v_0) = \Psi(x_0, y_0)$. Il s'agit de montrer que le **plan vectoriel** engendré par les vecteurs $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0)$ est le même que celui engendré par les vecteurs $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(x_0, y_0)$.

D'après le lemme de changement de paramètres, on a $\Phi(u, v) = \Psi(\Theta(u, v))$, où Θ est un difféomorphisme de U sur U' . Si on pose $\Theta(u, v) = (X(u, v), Y(u, v))$, donc $\Phi(u, v) = \Psi(X, Y)$, alors

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(X, Y) + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(X, Y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(X, Y) + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(X, Y),$$

d'après les formules de dérivation des fonction composées.

On constate donc que les vecteurs $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0)$ sont *combinaisons linéaires* des vecteurs $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(x_0, y_0)$. En échangeant les rôles de Φ et Ψ (i.e. en remplaçant Θ par Θ^{-1}), on obtiendrait de même que $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(x_0, y_0)$ sont *combinaisons linéaires* de $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0)$. Ainsi, le plan vectoriel engendré

par $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u_0, v_0)$ et $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u_0, v_0)$ est bien le même que celui engendré par $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(x_0, y_0)$ et $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(x_0, y_0)$. \square

EXEMPLE. Si Σ est une surface d'équation $F(x, y, z) = 0$, alors le plan tangent à Σ en un point ξ est le plan passant par ξ et **orthogonal à** $\vec{\nabla} F(\xi)$.

DÉMONSTRATION. Soit $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage local de Σ au point ξ . Par définition de Σ , on a $F(\Phi(u, v)) \equiv 0$ sur U . En écrivant $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, en dérivant par rapport à u et en posant $\xi = \Phi(u, v)$, on en déduit

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi) \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi) \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial F}{\partial z}(\xi) \frac{\partial z}{\partial u}(u, v) = 0;$$

et de même, en dérivant par rapport à v :

$$\frac{\partial F}{\partial x}(\xi) \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial F}{\partial y}(\xi) \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial F}{\partial z}(\xi) \frac{\partial z}{\partial v}(u, v) = 0.$$

Autrement dit :

$$\vec{\nabla} F(\xi) \cdot \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\nabla} F(\xi) \cdot \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) = 0.$$

Ainsi, pour tout $\xi = \Phi(u, v) \in \Sigma$, le vecteur $\vec{\nabla} F(\xi)$ est orthogonal au plan tangent à Σ au point ξ . \square

Exercice. Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 20$ au point $\xi = (1, 2, 3)$.

1.3. Vecteur normal, orientation.

DÉFINITION 1.6. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 , et soit $\xi \in \Sigma$. On dit qu'un vecteur $\vec{n} \in \mathbb{R}^3$ est **normal à Σ au point ξ** si \vec{n} est orthogonal au plan tangent à Σ au point ξ .

Exemple 1. Si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage local de Σ au point ξ et si $\xi = \Phi(u, v)$, alors le vecteur $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)$ est normal à Σ au point ξ .

Exemple 2. Si Σ est une surface d'équation $F(x, y, z) = 0$, alors $\vec{\nabla} F(\xi)$ est normal à Σ au point ξ , pour tout $\xi \in \Sigma$.

DÉFINITION 1.7. Soit Σ une surface de \mathbb{R}^3 . On dit que qu'on a **orienté** Σ si on a choisi en tout point $\xi \in \Sigma$ un vecteur unitaire $\vec{n}_\Sigma(\xi)$ normal à Σ au point ξ , **de façon continue**. On dit que la surface Σ est **orientable** s'il est possible de l'orienter.

Exemple 1. Toute surface paramétrée Σ est orientable, et tout paramétrage $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ définit de façon "canonique" une orientation de Σ : pour $\xi = \Phi(u, v) \in \Sigma$, on pose

$$\vec{n}_\Sigma(\xi) = \frac{\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right\|}.$$

Exemple 2. Toute surface Σ définie par une équation $F(x, y, z) = 0$ est orientable : il suffit de poser

$$\vec{n}_\Sigma(\xi) = \frac{\vec{\nabla} F(\xi)}{\|\vec{\nabla} F(\xi)\|}.$$

2. Intégrale d'une fonction sur une surface; aire

DÉFINITION 2.1. Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface paramétrée, et soit $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ un paramétrage de Σ . Si $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction sur Σ , on définit l'**intégrale de f sur Σ** , que l'on note $\int_\Sigma f d\sigma$, par la formule

$$\int_\Sigma f d\sigma = \int_U f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

L'**aire** de la surface Σ est l'intégrale de la fonction $f = \mathbf{1}$ sur Σ :

$$\text{aire}(\Sigma) = \int_U \left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right\| dudv.$$

Remarque 1. Il est sous-entendu que l'intégrale est bien définie : ou bien la fonction f est positive, ou bien la fonction $(u, v) \mapsto f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right\|$ est sommable sur U .

Remarque 2. Dans la pratique, il arrive souvent qu'on ait sous la main un paramétrage Φ qui ne paramètre pas toute la surface Σ , mais seulement Σ privée d'une certaine courbe Γ (ou privée d'un nombre fini de courbes). Comme les courbes "n'ont pas d'aire", la formule donnant l'aire de Σ reste valable dans ce cas.

Remarque 3. On admette qu'il est possible de définir l'intégrale d'une fonction sur une surface "générale" Σ . Un cas particulier mérite d'être signalé : si la surface Σ (ou peut-être la surface privée d'un nombre fini de courbes) se décompose en un nombre fini de surfaces paramétrées $\Sigma_1, \dots, \Sigma_N$, alors l'intégrale sur chaque Σ_i est bien définie par la formule précédente, et on a $\int_\Sigma = \int_{\Sigma_1} + \dots + \int_{\Sigma_N}$.

LEMME 2.2. La définition précédente a bien un sens; autrement dit, l'intégrale $\int_U f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right\| dudv$ est **indépendante** du paramétrage Φ choisi pour Σ .

DÉMONSTRATION. Il s'agit de montrer que si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\Psi : U' \rightarrow \mathbb{R}^3$ sont deux paramétrages de Σ , alors

$$\int_U f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right\| dudv = \int_{U'} f(\Psi(x, y)) \left\| \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} \right\| dxdy.$$

D'après le lemme de changement de paramètres, on sait qu'il existe un difféomorphisme $\Theta : U \rightarrow U'$ tel que

$$\Phi(u, v) = \Psi(\Theta(u, v)).$$

Écrivons $\Theta(u, v) = (X(u, v), Y(u, v))$, de sorte que $\Phi(u, v) = \Psi(X, Y)$. D'après les formules de dérivation des fonctions composées, on a

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(X, Y) + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(X, Y) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(X, Y) + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(X, Y).$$

En “développant” le produit vectoriel $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}$ et en utilisant les identités $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} = \vec{0} = \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}$ et $\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} = -\frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}$, on en déduit

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(X, Y) + \frac{\partial Y}{\partial u} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(X, Y) \right) \wedge \left(\frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(X, Y) + \frac{\partial Y}{\partial v} \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(X, Y) \right) \\ &= \left(\frac{\partial X}{\partial u} \frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v} \frac{\partial Y}{\partial u} \right) \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x}(X, Y) \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(X, Y) \\ &= J_{\Theta}(u, v) \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(\Theta(u, v)). \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned} \int_U f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right\| dudv &= \int_U f(\Psi(\Theta(u, v))) \left\| J_{\Theta}(u, v) \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(\Theta(u, v)) \right\| \\ &= \int_U f(\Psi(\Theta(u, v))) \left\| \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y}(\Theta(u, v)) \right\| |J_{\Theta}(u, v)| dudv \\ &= \int_{U'} f(\Psi(x, y)) \left\| \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \vec{\Psi}}{\partial y} \right\| dx dy, \end{aligned}$$

où on a utilisé la **formule de changement de variables** à la dernière ligne. \square

Il est important de traiter quelques exemples très simples pour se convaincre que la définition de l’aire d’une surface est bien “la bonne”.

Exemple 1. Aire d’un parallélogramme.

Soit $ABCD$ un parallélogramme de \mathbb{R}^3 . On s’attend à trouver que l’aire de $ABCD$ est égale à $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$. L’intérieur de $ABCD$ se paramètre par

$$\Phi(u, v) = A + u \vec{AB} + v \vec{AD},$$

où $(u, v) \in]0, 1[\times]0, 1[$. On a $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \equiv \vec{AB}$ et $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \equiv \vec{AD}$, et donc

$$\begin{aligned} \text{aire}(ABCD) &= \int_0^1 \int_0^1 \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\| dudv \\ &= \|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|. \end{aligned}$$

Exemple 2. Aire d’un graphe.

Soit U un ouvert de \mathbb{R}^2 et soit $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On a vu que le graphe de f se paramètre par $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$, où $(u, v) \in U$. On a $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix}$, et donc

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial u} \\ -\frac{\partial f}{\partial v} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| &= \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)^2} \\ &= \sqrt{1 + \|\vec{\nabla} f\|^2}, \end{aligned}$$

et par conséquent l'aire du graphe de f est donnée par

$$\text{aire}(\Sigma_f) = \int_U \sqrt{1 + \|\vec{\nabla} f(u, v)\|^2} \, dudv.$$

Exemple 3. Aire d'une sphère.

Soit $R > 0$, et soit \mathcal{S}_R la sphère de centre 0 et de rayon R . Pour paramétrer \mathcal{S}_R , il est très naturel d'utiliser les coordonnées ... sphériques : en posant

$$\Phi(u, v) = (R \sin u \cos v, R \sin u \sin v, R \cos u)$$

pour $0 < u < \pi$ et $0 < v < 2\pi$, on obtient "presque toute la sphère" ; de façon précise, la sphère Σ_R privée d'un demi-cercle situé dans le plan des xz . (Si on "ferme" les intervalles en prenant (u, v) dans $[0, \pi] \times [0, 2\pi]$ on obtiendrait vraiment toute la sphère, mais le domaine de définition de Φ ne serait plus un ouvert de \mathbb{R}^2).

On a $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} R \cos u \cos v \\ R \cos u \sin v \\ -R \sin u \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} -R \sin u \sin v \\ R \sin u \cos v \\ 0 \end{pmatrix}$, donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} &= \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 u \cos v \\ R^2 \sin^2 u \sin v \\ R^2 \sin u \cos u (\cos^2 v + \sin^2 v) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} R^2 \sin^2 u \cos v \\ R^2 \sin^2 u \sin v \\ R^2 \sin u \cos u \end{pmatrix} \\ &= R \sin u \times \vec{0M}, \end{aligned}$$

où $M = \Phi(u, v)$. Comme $\|\vec{0M}\| = R$ (puisque M est sur la sphère \mathcal{S}_R) et comme $\sin u \geq 0$ (car $u \in]0, \pi[$) on a donc $\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\| = R^2 \sin u$. Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} \text{aire}(\mathcal{S}_R) &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin u \, dudv \\ &= 2\pi R^2 \int_0^\pi \sin u \, du \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

Plus généralement, si f est une fonction définie sur \mathcal{S}_R , alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{S}_R} f \, d\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\Phi(u, v)) R^2 \sin u \, dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(R \sin \theta \cos \varphi, R \sin \theta \sin \varphi, R \cos \theta) R^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi. \end{aligned}$$

Exemple 4. Aire d'un cylindre.

Soient $R, h > 0$, et soit $\mathcal{C}(R, h)$ la surface latérale du cylindre de hauteur h basé sur le disque de centre 0 et de rayon R situé dans le plan des xy . On paramètre $\mathcal{C}(R, h)$ en utilisant les coordonnées cylindriques : en posant

$$\Phi(u, v) = (R \cos u, R \sin u, v)$$

pour $0 < u < 2\pi$ et $0 < v < h$, on obtient tout le cylindre sauf le segment vertical d'extrémités $(R, 0, 0)$ et $(R, 0, h)$. On a $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) = \begin{pmatrix} -R \sin u \\ R \cos u \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, donc

$$\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} = \begin{pmatrix} R \cos u \\ R \sin u \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent $\left\| \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v} \right\| \equiv R$ et donc

$$\text{aire}(\mathcal{C}(R, h)) = \int_0^h \int_0^{2\pi} R \, du \, dv = 2\pi R h.$$

Plus généralement, si f est une fonction définie sur $\mathcal{C}(R, h)$, alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{C}(R, h)} f \, d\sigma &= \int_0^h \int_0^{2\pi} f(\Phi(u, v)) R \, du \, dv \\ &= \int_0^h \int_0^{2\pi} f(R \cos \theta, R \sin \theta, z) R \, d\theta \, dz. \end{aligned}$$

On peut également considérer un cylindre $\Sigma(R, I)$ où la coordonnée z est autorisée à varier dans un certain intervalle I quelconque (et peut-être non borné). Dans ce cas, on obtient

$$\int_{\Sigma(R, I)} f \, d\sigma = \int_I \int_0^{2\pi} f(R \cos \theta, R \sin \theta, z) R \, d\theta \, dz.$$

3. Intégration par tranches

Bien que cela ne soit pas immédiatement apparent, le résultat suivant généralise les formules d'intégration en coordonnées cylindriques et sphériques.

THÉORÈME 3.1. *Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , et soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 . On suppose que $\vec{\nabla} F$ ne s'annule en aucun point de Ω , et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on note Σ_λ la surface d'équation $F(x, y, z) = \lambda$. Avec ces notations, la formule suivante est valable pour toute fonction f positive ou sommable sur Ω :*

$$\int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\Sigma_\lambda} \frac{f}{\|\vec{\nabla} F\|} \, d\sigma \right) d\lambda.$$

Remarque 1. Lorsque $\Sigma_\lambda = \emptyset$, l'intégrale $\int_{\Sigma_\lambda} (\dots) \, d\sigma$ est par convention égale à 0. Donc l'intégrale $\int_{\mathbb{R}}$ est en réalité une intégrale sur l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\Sigma_\lambda \neq \emptyset$.

Remarque 2. Comme $\vec{\nabla} F$ ne s'annule jamais, Σ_λ est effectivement une surface pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, donc $\int_{\Sigma_\lambda} (\dots) \, d\sigma$ a bien un sens.

PREUVE DU THÉORÈME. On fera la démonstration pour $f \geq 0$, et dans un cas particulier dont on admettra qu'il contient essentiellement toute la généralité.

On va supposer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ la surface Σ_λ est le graphe d'une application $\mathbf{z}_\lambda : U_\lambda \rightarrow \mathbb{R}$ définie et de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $U_\lambda \subset \mathbb{R}^2$; autrement dit :

$$(x, y, z) \in \Sigma_\lambda \iff (x, y) \in U_\lambda \text{ et } z = \mathbf{z}_\lambda(x, y).$$

De plus, on suppose que $\Omega' = \{(x, y, \lambda); (x, y) \in U_\lambda\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^3 , et que l'application $\mathbf{z} : \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{z}(x, y, \lambda) = \mathbf{z}_\lambda(x, y)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur Ω' .

FAIT. L'application $\Phi : \Omega' \rightarrow \Omega$ définie par $\Phi(x, y, \lambda) = (x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))$ est un difféomorphisme de Ω' sur Ω , et son déterminant jacobien est donné par la formule

$$J_\Phi(x, y, \lambda) = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))}.$$

PREUVE DU FAIT. Par hypothèse, l'application Φ est de classe \mathcal{C}^1 et envoie bien Ω' dans Ω . Pour tout point $(x, y, z) \in \Omega$, il existe un unique λ tel que $(x, y, z) \in \Sigma_\lambda$, à savoir $\lambda = F(x, y, z)$; et on a évidemment $z = \mathbf{z}_\lambda(x, y)$, i.e. $(x, y, z) = \Phi(x, y, \lambda)$. Il est donc clair que Φ est une bijection de Ω' sur Ω , avec $\Phi^{-1}(x, y, z) = (x, y, F(x, y, z))$. Cette formule montre que Φ^{-1} est de classe \mathcal{C}^1 , donc Φ est un difféomorphisme.

La matrice jacobienne de Φ en un point $(x, y, \lambda) \in \Omega'$ est de la forme

$$\text{Jac}_\Phi(x, y, \lambda) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ * & * & \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) \end{pmatrix}$$

donc $J_\Phi(x, y, \lambda) = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda)$. D'autre part, on a par définition $F(x, y, \mathbf{z}(x, y, \lambda)) = \lambda$ pour tout $(x, y, \lambda) \in \Omega'$. En dérivant cette relation par rapport à λ , on obtient $\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}(x, y, \lambda)) \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \lambda}(x, y, \lambda) = 1$; d'où finalement

$$J_\Phi(x, y, \lambda) = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}(x, y, \lambda))} = \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))}.$$

□

D'après le fait et la formule de changement de variables, on a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x, y, z) \, dx dy dz &= \int_{\Omega'} f(\Phi(x, y, \lambda)) |J_\Phi(x, y, \lambda)| \, dx dy d\lambda \\ &= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{U_\lambda} \frac{f(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))}{\left| \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y)) \right|} \, dx dy \right) d\lambda. \end{aligned}$$

Il suffit donc de vérifier que pour tout λ fixé, on a

$$(3.1) \quad \int_{U_\lambda} \frac{f(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))}{\left| \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y)) \right|} \, dx dy = \int_{\Sigma_\lambda} \frac{f}{\|\vec{\nabla} F\|} \, d\sigma.$$

Comme la surface Σ_λ est le graphe de la fonction \mathbf{z}_λ , on sait qu'on a

$$(3.2) \quad \int_{\Sigma_\lambda} \frac{f}{\|\vec{\nabla} F\|} \, d\sigma = \int_{U_\lambda} \frac{f(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))}{\|\vec{\nabla} F(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))\|} \times \sqrt{1 + \|\vec{\nabla} \mathbf{z}_\lambda(x, y)\|^2} \, dx dy.$$

De plus, en dérivant la relation $F(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))$ par rapport à x et à y , on obtient

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y)) \times \frac{\partial \mathbf{z}_\lambda}{\partial x}(x, y) &= 0, \\ \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y)) \times \frac{\partial \mathbf{z}_\lambda}{\partial y}(x, y) &= 0.\end{aligned}$$

On en déduit

$$\frac{\partial \mathbf{z}_\lambda}{\partial x}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{z}_\lambda}{\partial y}(x, y) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))},$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}1 + \|\vec{\nabla} \mathbf{z}_\lambda(x, y)\|^2 &= 1 + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))^2 + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))^2}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))^2} \\ &= \frac{\|\vec{\nabla} F(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))\|^2}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, \mathbf{z}_\lambda(x, y))^2}.\end{aligned}$$

En reportant cette expression dans (3.2), on obtient bien (3.1), ce qui termine la démonstration. \square

Exemple 1. Coordonnées sphériques.

Soit $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$, et soit $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. On a $\vec{\nabla} F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$, donc $\vec{\nabla} F$ ne s'annule pas sur Ω et

$$\|\vec{\nabla} F(x, y, z)\| = 2\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Pour tout $\lambda > 0$, la surface Σ_λ d'équation $F(x, y, z) = \lambda$ est la sphère de centre 0 et de rayon $\sqrt{\lambda}$, et on a $\|\vec{\nabla} F(\xi)\| \equiv 2\sqrt{\lambda}$ pour tout $\xi \in \Sigma_\lambda$. Bien sûr, on a $\Sigma_\lambda = \emptyset$ si $\lambda \leq 0$. Enfin, l'intégrale d'une fonction f sur Ω est égale à son intégrale sur \mathbb{R}^3 car $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega = \{(0, 0, 0)\}$ est de mesure nulle. D'après le théorème 3.1, on a donc

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\infty \left(\int_{\Sigma_\lambda} \frac{f}{2\sqrt{\lambda}} d\sigma \right) d\lambda,$$

pour toute fonction f positive ou sommable sur \mathbb{R}^3 .

En posant $r = \sqrt{\lambda}$ et en notant S_r la sphère de centre 0 et de rayon r , cela s'écrit encore

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\infty \left(\int_{S_r} f d\sigma \right) dr.$$

Enfin, on a vu plus haut qu'on a

$$\int_{S_r} f d\sigma = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$$

pour tout $r > 0$. Ainsi, on retrouve par une méthode un peu alambiquée la formule d'intégration en coordonnées sphériques :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi dr.$$

Exemple 2. Coordonnées cylindriques.

Considérons cette fois $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus (0z)$ et la fonction $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $F(x, y, z) = x^2 + y^2$. Pour tout $\lambda > 0$, la surface Σ_λ d'équation $F(x, y, z) = \lambda$ est le bord du cylindre infini basé sur le disque de centre 0 et de rayon $\sqrt{\lambda}$ dans le plan des xy . Comme l'intégrale d'une fonction sur Ω est égale à son intégrale sur \mathbb{R}^3 (car $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega = (0z)$ est de mesure nulle) un calcul analogue au précédent donne alors, en posant $r = \sqrt{\lambda}$ et \mathcal{C}_r le bord du cylindre infini basé sur le disque de centre 0 et de rayon r :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\infty \left(\int_{\mathcal{C}_r} f d\sigma \right) dr$$

pour toute fonction f positive ou sommable sur \mathbb{R}^3 . Comme on a vu que

$$\int_{\mathcal{C}_r} f d\sigma = \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r d\theta dz,$$

on retrouve la formule d'intégration en coordonnées cylindriques :

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz = \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \int_0^{2\pi} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r d\theta dz dr.$$

4. Formule de Stokes et formule de la divergence

En dimension 3, on dispose de 2 versions vraiment différentes de la formule de Green-Riemann : l'une reliant la circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe fermée avec le flux du rotationnel à travers une surface "bordée" par cette courbe, et l'autre reliant le flux d'un champ de vecteurs à travers une surface fermée avec l'intégrale de la divergence sur le domaine entouré par la surface. Ce sont les analogues exacts de la proposition 4.5 et du théorème 4.6 du chapitre 3.

4.1. Circulation et flux. Pour un champ de vecteurs \vec{V} à valeurs dans \mathbb{R}^3 , la circulation et le flux se définissent exactement comme en dimension 2 :

- la **circulation** de \vec{V} le long d'une **courbe régulière orientée** $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_a^b \vec{V}(\gamma(t)) \cdot \overrightarrow{\gamma'(t)} dt,$$

où $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ est n'importe quel paramétrage de Γ compatible avec l'orientation ;

- le **flux** de \vec{V} à travers une **surface orientée** Σ est donné par

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{\Phi} = \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{n}_{\Sigma} d\sigma,$$

où \vec{n}_{Σ} est la normale donnant l'orientation de Σ .

Remarque. Si Σ est une surface *paramétrée* et si $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ est un paramétrage de Σ compatible avec l'orientation, alors

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{\Phi} = \int_U \vec{V}(\Phi(u, v)) \cdot \left(\frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial v}(u, v) \right) dudv.$$

DÉMONSTRATION. Comme Φ est compatible avec l'orientation, on a

$$\vec{n}_\Sigma(\xi) = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)}{\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\|}$$

pour tout point $\xi = \Phi(u, v) \in \Sigma$; d'où le résultat par définition de l'intégrale d'une fonction sur Σ . □

4.2. La formule de Stokes. La formule de Stokes est un énoncé concernant une surface Σ "bordée" par une courbe régulière Γ . Dans cette situation, il est d'usage d'orienter Γ et Σ en se conformant à la **règle du tire-bouchon** : si on place la pointe d'un tire-bouchon sur la surface et si on le tourne dans le sens prescrit par l'orientation de la courbe Γ , alors le tire-bouchon doit avancer dans le sens de la normale. En y réfléchissant, cela ne veut pas dire grand chose ; mais c'est suffisamment intuitif pour que l'on s'en contente.

THÉORÈME 4.1. (formule de Stokes)

Soit Σ une surface dans \mathbb{R}^3 "bordée" par une courbe fermée régulière Γ . On oriente la courbe Γ et la surface Σ selon la règle du tire-bouchon. Si \vec{V} est un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $\Sigma \cup \Gamma$, alors

$$\int_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_\Sigma \text{rot}(\vec{V}) \cdot d\vec{\Phi}.$$

PREUVE DANS UN CAS PARTICULIER. On va démontrer la formule de Stokes en se plaçant dans la situation suivante : on suppose que

- la projection de Γ dans le plan des xy est une courbe fermée régulière Γ_0 ;
- la projection de Σ est le domaine U_0 entouré par Γ_0 ;
- $\Sigma \cup \Gamma$ est le graphe d'une fonction $f : U_0 \cup \Gamma_0 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 sur $U_0 \cup \Gamma_0$.

Soit $\gamma_0 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un paramétrage de la courbe Γ_0 orientée dans le sens positif, et posons $\gamma_0(t) = (x(t), y(t))$. Alors $\gamma(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ est un paramétrage de la courbe Γ . En écrivant $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ et en posant $z(t) = f(x(t), y(t))$, on a donc

$$\begin{aligned} \int_\Gamma \vec{V} \cdot d\vec{l} &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt + \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt \\ &\quad + \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) dt \\ &= \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt + \int_a^b Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) dt \\ &\quad + \int_a^b R(x(t), y(t), z(t)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) y'(t) \right) dt \\ &= \int_a^b \left(P(x(t), y(t), z(t)) + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \right) x'(t) dt \\ &\quad + \int_a^b \left(Q(x(t), y(t), z(t)) + R(x(t), y(t), z(t)) \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \right) y'(t) dt. \end{aligned}$$

Comme $z(t) = f(x(t), y(t))$ et que $(x(t), y(t))$ est un paramétrage de Γ_0 , cela s'écrit encore

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_{\Gamma_0} \left(R(x, y, f(x, y)) + P(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} \right) dx + \left(Q(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} \right) dy.$$

D'après la **formule de Green-Riemann**, on a donc

$$\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{dl} = \int_{U_0} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(Q(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(P(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} \right) \right\} dx dy$$

Il faut maintenant calculer le terme entre accolades : on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} \right) &= \frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, f(x, y)) \\ &+ \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} \\ &+ R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \end{aligned}$$

et de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left(P(x, y, f(x, y)) + R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} \right) &= \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, f(x, y)) \\ &+ \frac{\partial P}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} \\ &+ \frac{\partial R}{\partial y}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial x} \\ &+ \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial x} \\ &+ R(x, y, f(x, y)) \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}. \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot \vec{dl} &= \int_{U_0} \left\{ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y, f(x, y)) - \frac{\partial P}{\partial y}(x, y, f(x, y)) \right) \right. \\ &\quad - \left(\frac{\partial R}{\partial y}(x, y, f(x, y)) - \frac{\partial Q}{\partial z}(x, y, f(x, y)) \right) \frac{\partial f}{\partial x} \\ &\quad \left. - \left(\frac{\partial P}{\partial z}(x, y, f(x, y)) - \frac{\partial R}{\partial x}(x, y, f(x, y)) \right) \frac{\partial f}{\partial y} \right\} dx dy. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$(4.1) \quad \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_{U_0} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(x, y, f(x, y)) \cdot \vec{N}(x, y) \, dx dy,$$

où on a posé

$$N(x, y) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pour conclure, il reste à vérifier que le membre de droite de (4.1) est égal au flux du rotationnel de \vec{V} à travers la surface Σ .

Comme Σ est le graphe de la fonction f , on peut paramétrer Σ par $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$, où $(x, y) \in U_0$. On *admettra* que l'orientation de Σ définie par le paramétrage Φ est en accord avec la règle du tire-bouchon, lorsque la courbe Γ est orientée par le paramétrage $\gamma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ défini plus haut. On a donc

$$(4.2) \quad \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot d\vec{\Phi} = \int_{U_0} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(x, y, f(x, y)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx dy.$$

Enfin,

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{N}(x, y),$$

et on obtient le résultat souhaité en revenant à (4.2) et à (4.1) :

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot d\vec{\Phi} &= \int_{U_0} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(x, y, f(x, y)) \cdot \vec{N}(x, y) \, dx dy \\ &= \int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l}. \end{aligned}$$

□

Comme en dimension 2, on déduit de la formule de Stokes une caractérisation des champs de vecteurs irrotationnels :

COROLLAIRE 4.2. *Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe C^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Alors \vec{V} est irrotationnel si et seulement si on a $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} = 0$ pour toute courbe fermée régulière $\Gamma \subset \Omega$ bordant une surface Σ **entièrement contenue dans Ω** .*

DÉMONSTRATION. D'après la formule de Stokes, cela revient à montrer que si \vec{V} n'est *pas* irrotationnel, alors on peut trouver une courbe fermée Γ bordant une surface $\Sigma \subset \Omega$ telle que $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} \neq 0$. Fixons un point $\xi_0 = (x_0, y_0, z_0)$ tel que $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(\xi_0) \neq 0$, et posons $\vec{e}_0 = \frac{\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(\xi_0)}{\|\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(\xi_0)\|}$. Alors $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(\xi_0) \cdot \vec{e}_0 = \|\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(\xi_0)\| > 0$. Par *continuité* de $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})$ on peut donc trouver $\varepsilon > 0$ et $r > 0$ tel que la boule fermée de centre ξ_0 et de rayon r est contenue dans Ω et $\overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V})(\xi) \cdot \vec{e}_0 \geq \varepsilon$ sur cette boule. Notons Σ le disque ouvert de centre ξ_0 et de rayon r situé dans le plan orthogonal à \vec{e}_0 passant par ξ_0 , et Γ le cercle correspondant. Si on oriente Σ en choisissant \vec{e}_0 comme vecteur normal en tout point, on a alors $\int_{\Sigma} \overrightarrow{\text{rot}}(\vec{V}) \cdot d\vec{\Phi} \geq \varepsilon \times \pi r^2 > 0$, et donc $\int_{\Gamma} \vec{V} \cdot d\vec{l} \neq 0$. □

4.3. La formule de la divergence. La formule de la divergence est un énoncé concernant un domaine \mathcal{D} entouré par une surface **fermée** Σ . Dans cette situation, il est d'usage d'orienter la surface Σ en choisissant en tout point le vecteur normal (unitaire) dirigé vers l'**extérieur** du domaine \mathcal{D} .

THÉORÈME 4.3. (formule de la divergence)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface fermée entourant un domaine \mathcal{D} . On oriente Σ par la normale extérieure. Si \vec{V} est un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$, alors

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{\Phi} = \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\vec{V}) \, dx dy dz.$$

RAPPEL. La divergence d'un champ de vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ à valeurs dans \mathbb{R}^3 est définie par

$$\operatorname{div}(\vec{V}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

Autrement dit : $\operatorname{div}(\vec{V}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{V}$.

PREUVE DANS UN CAS PARTICULIER. On va démontrer la formule de la divergence en supposant que le domaine \mathcal{D} peut être décrit de trois façons différentes comme le "domaine compris entre deux graphes". De façon précise, on va supposer qu'il existe

- des fonctions \mathbf{x}^+ et \mathbf{x}^- de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $U_{\mathbf{x}} \subset \mathbb{R}^2$,
- des fonctions \mathbf{y}^+ et \mathbf{y}^- de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $U_{\mathbf{y}} \subset \mathbb{R}^2$,
- des fonctions \mathbf{z}^+ et \mathbf{z}^- de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $U_{\mathbf{z}} \subset \mathbb{R}^2$,

telles que

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{(x, y, z); (x, y) \in U_{\mathbf{z}} \text{ et } \mathbf{z}^-(x, y) < z < \mathbf{z}^+(x, y)\} \\ &= \{(x, y, z); (y, z) \in U_{\mathbf{x}} \text{ et } \mathbf{x}^-(y, z) < x < \mathbf{x}^+(y, z)\} \\ &= \{(x, y, z); (x, z) \in U_{\mathbf{y}} \text{ et } \mathbf{y}^-(x, z) < z < \mathbf{y}^+(x, z)\}. \end{aligned}$$

On suppose également le domaine $U_{\mathbf{z}}$ est entouré par une certaine courbe fermée $\Gamma_{\mathbf{z}}$, que les fonctions \mathbf{z}^+ et \mathbf{z}^- se prolongent continûment à $U_{\mathbf{z}} \cup \Gamma_{\mathbf{z}}$, et qu'elles coïncident sur $\Gamma_{\mathbf{z}}$. Enfin, en notant $\mathbf{z}(x, y)$ la valeur commune à \mathbf{z}^+ et \mathbf{z}^- en un point $(x, y) \in \Gamma_{\mathbf{z}}$, on suppose que l'ensemble $\Gamma^{\mathbf{z}} = \{(x, y, \mathbf{z}(x, y)); (x, y) \in \Gamma_{\mathbf{z}}\}$ est une courbe régulière. On fait des hypothèses analogues concernant les domaines $U_{\mathbf{y}}$ et $U_{\mathbf{x}}$.

Écrivons $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix} = P \vec{\mathbf{i}} + Q \vec{\mathbf{j}} + R \vec{\mathbf{k}}$, où $\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}}$ sont les trois vecteurs de la "base canonique" de \mathbb{R}^3 . Avec ces notations, on a

$$\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{\Phi} = \int_{\Sigma} (P \vec{\mathbf{i}}) \cdot d\vec{\Phi} + \int_{\Sigma} (Q \vec{\mathbf{j}}) \cdot d\vec{\Phi} + \int_{\Sigma} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot d\vec{\Phi}.$$

On va transformer séparément les trois termes du membre de droite, en utilisant les trois descriptions du domaine \mathcal{D} .

Commençons par calculer $\int_{\Sigma} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot d\vec{\Phi}$. Avec les notations précédentes, on a

$$\Sigma = \Sigma_{\mathbf{z}^+} \cup \Sigma_{\mathbf{z}^-} \cup \Gamma^{\mathbf{z}},$$

où $\Sigma_{\mathbf{z}^+}$ et $\Sigma_{\mathbf{z}^-}$ sont les graphes des fonctions \mathbf{z}^+ et \mathbf{z}^- . Comme la courbe $\Gamma^{\mathbf{z}}$ "n'a pas d'aire", on peut l'ignorer dans le calcul du flux.

Les surfaces $\Sigma_{\mathbf{z}^+}$ et $\Sigma_{\mathbf{z}^-}$ se paramètre par $\Phi^+(x, y) = (x, y, \mathbf{z}^+(x, y))$ et $\Phi^-(x, y) = (x, y, \mathbf{z}^-(x, y))$, où $(x, y) \in U_{\mathbf{z}}$. On a

$$\frac{\partial \Phi^+}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi^+}{\partial y} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial \mathbf{z}^+}{\partial x} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial \mathbf{z}^+}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathbf{z}^+}{\partial x} \\ -\frac{\partial \mathbf{z}^+}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix};$$

et ce vecteur pointe “au dessus” de la surface $\Sigma_{\mathbf{z}^+}$, donc il est dirigé vers l’extérieur du domaine \mathcal{D} . Par conséquent

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{\mathbf{z}^+}} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot \vec{d\Phi} &= \int_{U_{\mathbf{z}}} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot \left(\frac{\partial \Phi^+}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi^+}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_{U_{\mathbf{z}}} R(x, y, \mathbf{z}^+(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

De même, $\frac{\partial \Phi^-}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi^-}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathbf{z}^-}{\partial x} \\ -\frac{\partial \mathbf{z}^-}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$; mais ce vecteur pointe au dessus de la surface $\Sigma_{\mathbf{z}^-}$, donc il est cette fois dirigé vers l’intérieur du domaine \mathcal{D} . Comme Σ est orientée par la normale extérieure, on a donc

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_{\mathbf{z}^-}} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot \vec{d\Phi} &= - \int_{U_{\mathbf{z}}} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot \left(\frac{\partial \Phi^-}{\partial x} \wedge \frac{\partial \Phi^-}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \int_{U_{\mathbf{z}}} R(x, y, \mathbf{z}^-(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot \vec{d\Phi} &= \int_{\Sigma_{\mathbf{z}^+}} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot \vec{d\Phi} + \int_{\Sigma_{\mathbf{z}^-}} (R \vec{\mathbf{k}}) \cdot \vec{d\Phi} \\ &= \int_{U_{\mathbf{z}}} [R(x, y, \mathbf{z}^+(x, y)) - R(x, y, \mathbf{z}^-(x, y))] dx dy \\ &= \int_{U_{\mathbf{z}}} \left(\int_{\mathbf{z}^-(x, y)}^{\mathbf{z}^+(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x, y, z) dz \right) dx dy \\ &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz. \end{aligned}$$

On trouve de même

$$\int_{\Sigma} (Q \vec{\mathbf{j}}) \cdot \vec{d\Phi} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz \quad \text{et} \quad \int_{\Sigma} (P \vec{\mathbf{i}}) \cdot \vec{d\Phi} = \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz;$$

et au total

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{V} \cdot \vec{d\Phi} &= \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz + \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz + \int_{\mathcal{D}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz \\ &= \int_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\vec{V}) dx dy dz. \end{aligned}$$

□

Comme en dimension 2, on déduit de la formule de la divergence une caractérisation des champ de vecteurs à divergence nulle :

COROLLAIRE 4.4. Soit \vec{V} un champ de vecteurs de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Alors \vec{V} est à divergence nulle si et seulement si on a $\int_{\Sigma} \vec{V} \cdot d\vec{\Phi} = 0$ pour toute surface fermée $\Sigma \subset \Omega$ entourant un domaine \mathcal{D} **entièrement contenu dans** Ω .

On en déduit également la formule de Green.

COROLLAIRE 4.5. (formule de Green)

Soit $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ une surface fermée entourant un domaine \mathcal{D} . Si u et v sont deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 au voisinage de $\mathcal{D} \cup \Sigma$, alors

$$\int_{\Sigma} (u \vec{\nabla} v - v \vec{\nabla} u) \cdot d\vec{\Phi} = \int_{\mathcal{D}} (u \Delta v - v \Delta u) dx dy.$$

Et enfin, une caractérisation des fonctions harmoniques.

COROLLAIRE 4.6. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^3 , et soit u une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur Ω . Alors u est harmonique si et seulement si on a $\int_{\Sigma} \vec{\nabla} u \cdot d\vec{\Phi} = 0$ pour toute surface fermée $\Sigma \subset \Omega$ entourant un domaine \mathcal{D} entièrement contenu dans Ω .