Analyse 2

Intégrale de Riemann, fonctions convexes

Licence de mathématiques, 1ère année

Table des matières

Chapitre 1

Subdivisions, fonctions en escalier, fonctions réglées

1. Subdivisions d'un intervalle

1.1. Vocabulaire.

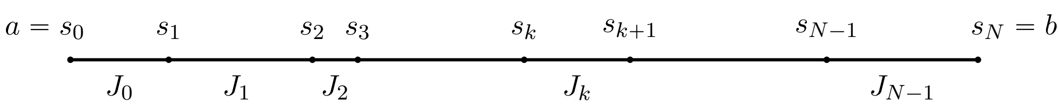
Définition 1.1. *Soit* $[a,b]$ *un intervalle fermé de* $\mathbb{R}$*.Une* ***subdivision de*** $[a,b]$ *est une suite finie* $S = (s_0, \dots, s_N)$ *de points de* $[a,b]$ *deux à deux distincts et rangés par ordre croissant, avec* $s_0 = a$ *et* $s_N = b$*. Si* $a < b$*, on a donc* $a = s_0 < \cdots < s_N = b$*.*

Exemple. $S := (0, 1, 3/2, 2)$ et $S' := (0, 1/4, 3/4, 1, 3/2, 7/4, 2)$ sont des subdivisions de $[a,b] := [0,2]$.

Remarque 1. Par définition, la seule subdivision d'un intervalle *trivial* $[a,a] = \{a\}$ est $S = (a)$.

Remarque 2. Une subdivision $S = (s_0, \dots, s_N)$ de $[a,b]$ contient $N+1$ points. Elle détermine un **découpage** de $[a,b]$ en N intervalles fermés consécutifs $J_0, \dots, J_{N-1}$:

$$J_k = [s_k, s_{k+1}] \qquad \text{pour} \quad k = 0, \dots N-1.$$



Définition 1.2. *Soient* S *et* S' *deux subdivisions de* $[a,b]$*. On dit que* S' *est* ***plus fine*** *que* S*, et on écrit* $S' \geq S$*, si* S' *contient tous les points de* S

Exemple. $S' = (0, 1/4, 3/4, 1, 3/2, 7/4, 2)$ est une subdivision de $[a,b] = [0,2]$ plus fine que $S = (0, 1, 3/2, 2)$.

1.2. Le Lemme de Cousin. Le résultat suivant peut à juste titre sembler très abstrait ; mais il est également très utile. Il porte le nom de **Lemme de Cousin**.

Théorème 1.3. *Soit* $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalle fermé borné. Pour tout* $x \in [a,b]$*, on suppose donné un intervalle ouvert* V_x *tel que* $x \in V_x$*. Alors il existe une subdivision* $S = (s_0, \dots, s_N)$ *de* $[a,b]$ *telle que chaque intervalle* $[s_k, s_{k+1}]$ *est entièrement contenu dans* V_{x_k} *pour un certain* $x_k \in [a,b]$*, avec de plus* $x_k \in [s_k, s_{k+1}]$*.*

Démonstration. On dira qu'un intervalle fermé $J \subseteq [a,b]$ est **gentil** s'il existe une subdivision $S = (s_0, \dots, s_N)$ de J telle que chaque intervalle $[s_k, s_{k+1}]$ est contenu dans un certain V_{x_k} avec $x_k \in [s_k, s_{k+1}]$ (et on dira qu'une telle S est une **bonne subdivision** de J). Bien entendu, un intervalle qui n'est pas gentil sera dit **méchant**. Avec cette terminologie, il s'agit de montrer que l'intervalle $J = [a,b]$ est gentil.

FAIT 0. Si $x \in [a,b]$, alors tout intervalle fermé $J \subseteq V_x$ tel que $x \in J$ est gentil.

Preuve du Fait 0. C'est évident : si $J = [u,v]$, alors (u,v) est une bonne subdivision de J puisque $x \in [u,v] \subseteq V_x$. □

FAIT 1. Soient $u, v, m \in [a,b]$ avec $u \leqslant m \leqslant v$. Si $[u,m]$ et $[m,v]$ sont gentils, alors $[u,v]$ est gentil.

Preuve du Fait 1. Il suffit de mettre "bout à bout" une bonne subdivision de $[u,m]$ et une bonne subdivision de $[m,v]$. (Exo : écrire les détails.) □

Dans la suite, on notera $|J|$ la longueur d'un intervalle J.

FAIT 2. Soit $J \subseteq [a,b]$ un intervalle fermé. Si J est méchant, alors il existe un intervalle $J' \subseteq J$ avec $|J'| = \frac{1}{2}|J|$ qui est encore méchant.

Preuve du Fait 2. Écrivons $J = [u,v]$, et soit m le milieu de $[u,v]$. Par le Fait 1, l'un des deux intervalles $[u,m]$ et $[m,v]$ n'est pas gentil ; donc il suffit de prendre pour J' cet intervalle. □

Maintenant, montrons par l'absurde que $[a,b]$ est gentil.

Supposons que $J_0 := [a,b]$ *ne soit pas* gentil. Par le Fait 2, on peut trouver un intervalle $J_1 \subseteq [a,b]$ qui est méchant et vérifie $|J_1 = \frac{1}{2}|J_0|$. En réappliquant le Fait 2, on trouve un intervalle $J_2 \subseteq J_1$ qui est encore méchant et vérifie $|J_2| = \frac{1}{2}|J_1| = \frac{1}{2^2}|J_0|$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite décroissante d'intervalles $J_1, J_2, J_3, \dots$ telle que $|J_n| = \frac{1}{2^n}|J_0|$ et J_n est méchant, pour tout $n \geqslant 0$.

Par le *Théorème des segments emboités*, il existe un (et un seul) point $x \in [a,b]$ appartenant à tous les intervalles J_n. Comme V_x est un intervalle ouvert contenant x, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $[x-\varepsilon, x+\varepsilon] \subseteq V_x$; et comme $|J_n| \to 0$ quand $n \to \infty$, on peut ensuite trouver un entier n tel que $|J_n| \leqslant \varepsilon$. Alors $J_n \subseteq [x-\varepsilon, x+\varepsilon]$ car $x \in J_n$ (micro-exo) ; et donc $J_n \subseteq V_x$. Donc J_n est gentil par le Fait 0 (puisque $x \in J_n$), ce qui contredit le choix de J_n. □

Du Lemme de Cousin, on peut déduire un autre résultat très utile, qu'on appelle le **Lemme de Lebesgue**.

COROLLAIRE 1.4. *Supposons donné, pour tout $x \in [a,b]$, un intervalle ouvert V_x tel que $x \in V_x$. Alors on peut trouver $\delta > 0$ tel que : tout intervalle $J \subseteq [a,b]$ vérifiant $|J| < \delta$ est contenu dans un certain V_x.*

Démonstration. Soit $(s_0, \dots, s_N)$ une subdivision de $[a,b]$ donnée par le Lemme de Cousin. Chaque intervalle $[s_k, s_{k+1}]$ est donc contenu dans V_{x_k} pour un certain $x_k \in [a,b]$. Comme les V_{x_k} sont des intervalles ouverts, on peut, pour $k = 0, \dots, N-1$, trouver $\delta_k > 0$ tel que $[s_k - \delta_k, s_{k+1} + \delta_k] \subseteq V_{x_k}$ (micro-exo).

Soit alors $\delta = \min(\delta_0, \dots, \delta_{N-1})$. Si $J \subseteq [a,b]$ est un intervalle non vide tel que $|J| < \delta$, alors J rencontre $[s_k, s_{k+1}]$ pour un certain k, donc $J \subseteq [s_k - \delta, s_{k+1} + \delta]$ (exo), et donc $J \subseteq [s_k - \delta_k, s_{k+1} + \delta_k] \subseteq V_{x_k}$ puisque $\delta \leqslant \delta_k$. Par conséquent, δ convient. □

La preuve du Lemme de Lebesgue qu'on vient de donner n'est sans doute pas la plus naturelle qui soit. En voici donc une autre.

Preuve directe du Lemme de Lebesgue. Par l'absurde, on suppose que la conclusion n'est pas vraie, *i.e.* que pour tout $\delta > 0$, il existe un intervalle $J(\delta) \subseteq [a, b]$ tel que $|J(\delta)| < \delta$ mais $J(\delta)$ n'est contenu dans aucun V_x. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $J_n = J(2^{-n})$, et on choisit un point $x_n \in J_n$. Ainsi :

- $|J_n| \to 0$,
- J_n n'est contenu dans aucun V_x,
- $x_n \in J_n$.

La suite (x_n) est bornée ($x_n \in [a, b]$), donc elle possède une *sous-suite convergente* (x_{n_k}) par le Théorème de Bolzano-Weierstrass : $x_{n_k} \to x \in [a, b]$.

Comme V_x est un intervalle ouvert et $x \in V_x$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $[x - 2\varepsilon, x + 2\varepsilon] \subseteq V_x$ (faire un dessin). Et comme $x_{n_k} \to x$ et $|J_{n_k}| \to 0$, on peut ensuite trouver un entier k tel que $|x_{n_k} - x| \leqslant \varepsilon$ et $|J_{n_k}| \leqslant \varepsilon$. Alors $J_{n_k} \subseteq [x_{n_k} - \varepsilon, x_{n_k} + \varepsilon] \subseteq [x - 2\varepsilon, x + 2\varepsilon]$ (compléter le dessin). Donc $J_{n_k} \subseteq V_x$, ce qui contredit la définition des J_n ! □

1.3. Une application : continuité uniforme.

Rappel. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue sur I* si elle est continue en tout point de I ; ce qui s'écrit comme suit avec des quantificateurs :

$$\forall x \in I \;\; \forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \textit{dépendant de } \varepsilon \textit{ et de } x \quad \text{tel que}$$
$$\forall y \in I \text{ vérifiant } |y - x| < \delta, \quad \text{on a} \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Définition 1.5. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$. On dit que f est* ***uniformément continue sur*** *I si*

- *f est continue ;*
- *pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut prendre le même "δ de continuité" pour tous les x de I.*

Autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \quad \text{dépendant uniquement de } \varepsilon \quad \textit{tel que}$$
$$(*) \qquad \forall x, y \in I \textit{ vérifiant } |y - x| < \delta, \quad \textit{on a} \quad |f(y) - f(x)| < \varepsilon.$$

Exemple. $f(t) := t$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}$, mais $f(t) = t^2$ ne l'est pas.

Démonstration. Le fait que $f(t) = t$ soit uniformément continue sur $\mathbb{R}$ est un micro-exo. Pour $f(t) = t^2$, on observe que si $\delta > 0$ est donné, alors

$$x := \frac{1}{\delta} \qquad \text{et} \qquad y := x + \frac{\delta}{2}$$

vérifient

$$|y - x| = \frac{\delta}{2} < \delta \qquad \text{et} \qquad y^2 - x^2 = x\delta + \frac{\delta^2}{4} \geqslant x\delta = 1.$$

Donc, pour $\varepsilon := 1$, il est impossible de trouver $\delta > 0$ tel que $(*)$ soit vérifiée. □

Le résultat suivant s'appelle le **Théorème de Heine**. On aura l'occasion de s'en servir au Chapitre 4.

THÉORÈME 1.6. *Si $I = [a, b]$ est un intervalle* fermé borné*, alors toute fonction continue $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est uniformément continue.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$: on cherche un $\delta > 0$ tel que $(*)$ soit vérifié.

Comme f est continue, pour chaque $z \in [a, b]$ on peut trouver un $\delta_z > 0$ tel que $|f(u) - f(z)| < \varepsilon/2$ pour tout u vérifiant $|u - z| < \delta_z$.

Pour $z \in [a, b]$, on pose $V_z :=]z - \delta_z, z + \delta_z[$. Alors

$$\forall x, y \in V_z \cap [a, b] \;:\; |f(y) - f(x)| \leqslant |f(x) - f(z)| + |f(z) - f(y)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Par le Lemme de Lebesgue, il existe un $\delta > 0$ tel que tout intervalle $J \subseteq [a, b]$ vérifiant $|J| < \delta$ est contenu dans un certain V_z. Montrons que δ vérifie $(*)$.

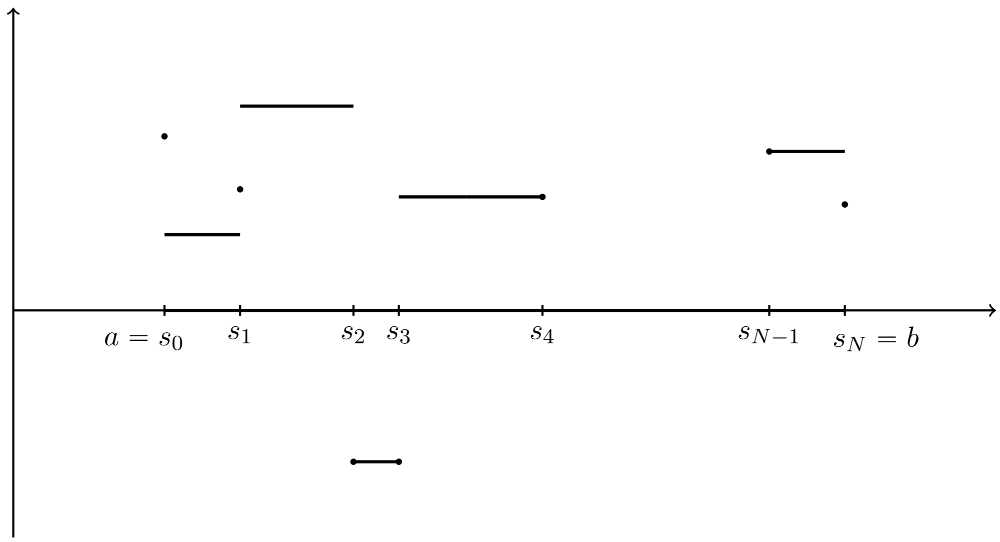
Soit $x \in [a, b]$ quelconque, et soit y tel que $|y - x| < \delta$. Alors $J := [x, y]$ (ou $[y, x]$ si $y < x$) vérifie $|J| < \delta$. Donc $J \subseteq V_z$ pour un certain $z \in [a, b]$. En particulier x et y sont dans V_z, et donc $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. □

Pour faire bonne mesure, voici les grandes lignes d'une

Preuve directe du Théorème de Heine. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continue. Par l'absurde, supposons que f *ne soit pas* uniformément continue. Alors (micro-exo) on peut trouver $\varepsilon > 0$ et deux suites $(x_n), (y_n) \subseteq [a, b]$ telles que $|y_n - x_n| < 2^{-n}$ et $|f(y_n) - f(x_n)| \geqslant \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Quitte à extraire une sous-suite (Bolzano-Weierstrass), on peut supposer que la suite (x_n) converge, $x_n \to p \in [a, b]$. Alors $y_n \to p$ également car $|y_n - x_n| \to 0$ (micro-exo) ; et comme $|f(x_n) - f(y_n)|$ ne tend pas vers 0, cela contredit la continuité de f au point p. □

2. Fonctions en escalier

DÉFINITION 2.1. *Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, et soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$. On dit que la fonction φ est* ***en escalier sur*** *$[a, b]$ s'il existe une subdivision $S = (s_0, \ldots, s_N)$ de $[a, b]$ telle que φ est* constante *sur chaque intervalle $I_k =]s_k, s_{k+1}[$, $0 \leqslant k \leqslant N - 1$. On dit alors que la subdivision S est* ***adaptée à*** *φ.*



Une fonction en escalier

Remarque 2.2. Par définition, une fonction en escalier *ne prend qu'un nombre fini de valeurs.*

Remarque 2.3. Si une fonction φ est en escalier sur $[a, b]$, alors sa restriction à tout tout sous-intervalle $[u, v] \subseteq [a, b]$ est en escalier sur $[u, v]$.

Démonstration. Exo. □

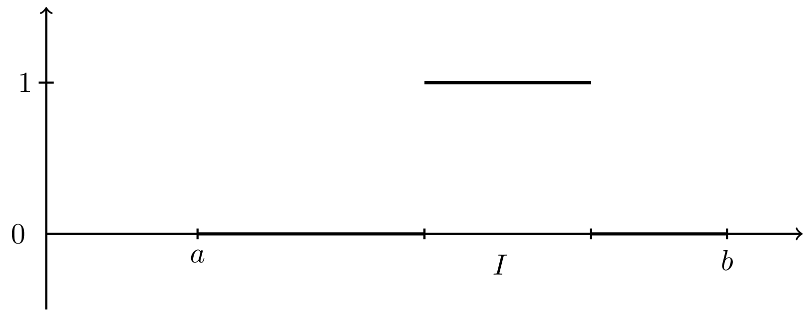
Exemple 0. Toute fonction *constante* est en escalier !

Exemple 1. La fonction "partie entière" est en escalier sur tout intervalle $[a, b]$. (Faire un dessin.)

Exemple 2. Soit $I \subseteq [a, b]$. La **fonction indicatrice** de I est la fonction notée $\mathbf{1}_I$ définie par

$$\mathbf{1}_I(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in I \\ 0 & \text{si } t \notin I \end{cases}$$

Si I est un *intervalle*, alors la fonction $\mathbf{1}_I$ est en escalier.



Fonction indicatrice

Exemple 3. $\varphi(t) := t$ n'est en escalier sur aucun intervalle $[a, b]$ non trivial, car elle prend une infinité de valeurs sur $[a, b]$. (Faire un dessin.)

Exercice 1. Soit $E \subseteq [a, b]$, et soit $\mathbf{1}_E$ la fonction indicatrice de E. Montrer que $\mathbf{1}_E$ est en escalier sur $[a, b]$ si et seulement si E est une réunion finie d'intervalles.

Exercice 2. Soit $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier. Montrer que si φ est continue sur $[a, b]$, alors elle est constante.

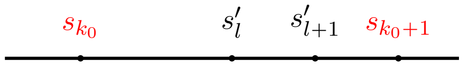
Notation. On note $\boldsymbol{\mathcal{E}([a, b])}$ l'ensemble de toutes les fonctions en escalier sur $[a, b]$.

Lemme 2.4. *Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a, b])$. Si S est une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ, alors toute subdivision S'* plus fine *que S est adaptée à φ.*

Démonstration. Écrivons $S = (s_0, \ldots, s_N)$ et $S' = (s'_0, \ldots, s'_M)$.

Fait. Chaque intervalle $]s'_l, s'_{l+1}[$ est contenu dans un intervalle $]s_k, s_{k+1}[$.

Preuve du Fait. L'intervalle $]s'_l, s'_{l+1}[$ ne contient aucun point de S', donc aucun point de S puisque $S' \geq S$. Donc, si on note k_0 le plus grand k tel que $s_k \leqslant s'_l$, on a forcément $s_{k_0+1} \geqslant s'_{l+1}$, et donc $]s'_l, s'_{l+1}[\subseteq]s_k, s_{k+1}[$.



□

La preuve du lemme est maintenant immédiate : par hypothèse, φ est constante sur $]s_k, s_{k+1}[$ pour $k = 0, \dots, N-1$, et d'après le Fait, chaque intervalle $]s'_l, s'_{l+1}[$ est contenu dans un certain $]s_k, s_{k+1}[$; donc φ est constante sur chaque $]s'_l, s'_{l+1}[$, et donc S' est adaptée à φ. □

Corollaire 2.5. *Si $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathcal{E}([a,b])$, il existe une subdivision S de $[a,b]$ qui est adaptée à toutes les φ_i.*

Démonstration. Pour $i = 1, \dots, d$, soit S_i une subdivision adaptée à φ_i ; et soit S la subdivision obtenue en prenant les points de toutes les subdivisions $S_1, \dots, S_d$. Alors $S \geq S_i$ pour tout i, donc S est adaptée à chaque φ_i par le lemme. □

Corollaire 2.6. *Si $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathcal{E}([a,b])$ et si $F : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, alors la fonction Φ définie par $\Phi(t) = F(\varphi_1(t), \dots, \varphi_d(t))$ est en escalier.*

Démonstration. Soit $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision adaptée à toutes les φ_i. Pour $k = 0, \dots, N$, toutes les φ_i sont constantes sur $]s_k, s_{k+1}[$; donc Φ aussi par définition. Donc $\Phi \in \mathcal{E}([a,b])$ et S est adaptée à Φ. □

Corollaire 2.7. *Si φ et ψ sont des fonctions en escalier et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors les fonctions $\varphi + \psi$, $\lambda\varphi$, $\varphi\psi$ et $|\varphi|$ sont en escalier.*

Démonstration. On a $(\varphi + \psi)(t) = F(\varphi(t), \psi(t))$, où $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est définie par $F(u,v) = u + v$; donc $\varphi + \psi$ est en escalier par le corollaire précédent. Même raisonnement pour $c\varphi$, $\varphi\psi$ et $|\varphi|$ (exo). □

Exercice. Montrer qu'une fonction $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est en escalier si et seulement si elle est de la forme
$$\varphi = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j \, \mathbf{1}_{I_j},$$
où les I_j sont des intervalles (et les λ_j sont des constantes).

3. Fonctions réglées

Définition 3.1. *Soit $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est **réglée** si*

- *f admet une limite à gauche et à droite en tout point $x \in]a,b[$;*
- *f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.*

Exemple 1. Toute fonction *continue* est réglée (!)

Exemple 2. Toute fonction *monotone* est réglée.

Exemple 3. Toute fonction *en escalier* est réglée.

Exemple 4. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(x) = \sin(1/x)$ pour $0 < x \leqslant 1$. Alors f n'est pas réglée car elle ne possède pas de limite à droite en 0 (exo).

THÉORÈME 3.2. *Toute fonction réglé peut être "approchée" par des fonctions en escalier. De façon précise : si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction réglée, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $\theta \in \mathcal{E}([a,b])$ telle que*

$$\forall t \in [a,b] \ : \ |\theta(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Exemple. Faire un dessin pour $f(t) = t$.

Preuve du Théorème 3.2. Supposons f réglée, et fixons $\varepsilon > 0$.

On note $f(x^+)$ et $f(x^-)$ les limites à droite et à gauche de f en un point $x \in [a,b]$. (Pour simplifier la rédaction, on pose $f(a^-) = f(a)$ et $f(b^+) = f(b)$.)

Par définition, pour tout $x \in [a,b]$, on peut trouver $\delta_x^-, \delta_x^+ > 0$ tels que

$$(*) \qquad \begin{cases} |f(t) - f(x^-)| < \varepsilon & \text{pour tout } t \in [a,b] \text{ vérifiant } x - \delta_x^- < t < x, \\ |f(t) - f(x^+)| < \varepsilon & \text{pour tout } t \in [a,b] \text{ vérifiant } x < t < x + \delta_x^+. \end{cases}$$

On pose alors $V_x =]x - \delta_x^-, x + \delta_x^+[$. Ainsi, $(*)$ devient

$$(**) \qquad \begin{cases} |f(t) - f(x^-)| < \varepsilon & \text{pour tout } t \in V_x \cap [a,b] \text{ tel que } t < x, \\ |f(t) - f(x^+)| < \varepsilon & \text{pour tout } t \in V_x \cap [a,b] \text{ tel que } t > x. \end{cases}$$

Par le Lemme de Cousin, il existe une subdivision $S = (s_0, \dots, s_N)$ de $[a,b]$ telle que, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on a $[s_k, s_{k+1}] \subseteq V_{x_k}$ pour un certain point $x_k \in [s_k, s_{k+1}]$.

Soit alors $\theta : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$\theta(t) := \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad t \text{ est un } s_k \text{ ou un } x_k, \\ f(x_k^-) & \text{si} \quad s_k < t < x_k \text{ pour un certain } k, \\ f(x_k^+) & \text{si} \quad x_k < t < s_{k+1} \text{ pour un certain } k. \end{cases}$$

La fonction θ est en escalier (micro-exo) ; et elle convient par définition. En effet : si $t \in [a,b]$, alors ou bien t est un s_k ou un t_k, auquel cas $\theta(t) = f(t)$; ou bien $s_k < t < x_k$ ou $x_k < t < s_{k+1}$ pour un certain k, auquel cas $t \in V_{x_k}$ et $(**)$ donne $|f(t) - \theta(t)| < \varepsilon$. $\square$

REMARQUE 3.3. On peut montrer que la réciproque de la proposition est vraie : si une fonction f peut être approchée au sens précédent par des fonctions en escalier, alors f est réglée.

Chapitre 2

Intégrale sur un segment : théorie "minimale"

1. Intégrale des fonctions en escalier

NOTATION. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier, et soit $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision adaptée à φ. Pour $k = 0, \dots, N-1$, on note I_k l'intervalle $]s_k, s_{k+1}[$ et α_k la valeur constante de φ sur I_k :

$$\varphi(t) \equiv \alpha_k \qquad \text{sur } I_k =]s_k, s_{k+1}[, \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Avec ces notations, on pose

$$I(\varphi, S) := \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \, |I_k| = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \, (s_{k+1} - s_k).$$

LEMME 1.1. *Si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, alors $I(\varphi, S)$ ne dépend que de φ, et pas de la subdivision S de $[a,b]$ adaptées à φ.*

Preuve "géométrique". Soit $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision adaptée à φ :

$$\varphi(t) \equiv \alpha_k \qquad \text{sur } I_k =]s_k, s_{k+1}[, \qquad 0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Faire un dessin !

En notant R_k le rectangle basé sur I_k et de "hauteur" α_k, on a

$$\alpha_k \, |I_k| = \begin{cases} \text{aire}(R_k) & \text{si} \quad \alpha_k \geqslant 0, \\ -\text{aire}(R_k) & \text{si} \quad \alpha_k < 0. \end{cases}$$

Donc

$$I(\varphi, S) = \sum_{\{k;\, \alpha_k \geqslant 0\}} \text{aire}(R_k) - \sum_{\{k;\, \alpha_k < 0\}} \text{aire}(R_k) = A^+(\varphi) - A^-(\varphi),$$

où $A^+(\varphi)$ est l'aire de la partie du plan située au dessus de l'axe des abscisses et en dessous du graphe de φ, et $A^-(\varphi)$ est l'aire de la partie du plan située en dessous de l'axe des abscisses et au dessus du graphe de φ. Et ceci ne dépend pas de la subdivision S. □

Exercice. Cette preuve est "malhonnête". Pourquoi ?

Preuve "analytique". Soient S et S' deux subdivisions adpatées à φ : on veut montrer que $I(S, \varphi) = I(S', \varphi)$.

Écrivons $S = (s_0, \dots, s_N)$ et $S' = (s'_0, \dots, S'_M)$, de sorte qu'il existe des constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_{N-1}, \alpha'_0, \dots, \alpha'_{M-1}$ telles que

$$\varphi(t) \equiv \alpha_k \quad \text{sur } I_k =]s_k, s_{k+1}[, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1,$$
$$\varphi(t) \equiv \alpha'_l \quad \text{sur } I'_l =]s'_l, s'_{l+1}[, \quad 0 \leqslant l \leqslant M-1.$$

Fait 1. Si $k \in [\![0, N-1]\!]$, alors $|I_k| = \sum_{l=0}^{M-1} |I_k \cap I'_l|$; et de même, si $l \in [\![0, M-1]\!]$, alors $|I'_l| = \sum_{k=0}^{N-1} |I'_l \cap I_k|$.

Preuve du Fait 1. Les $I_k \cap I'_l$ non vides déterminent un découpage de I_k (faire un dessin). Donc

$$\begin{aligned} |I_k| &= \sum_{\{l;\, I'_l \cap I_k \neq \varnothing\}} |I_k \cap I'_l| \\ &= \sum_{l=0}^{N-1} |I_k \cap I'_l| \qquad \text{car } |I_k \cap I'_l| = 0 \text{ si } I_k \cap I'_l = \varnothing. \end{aligned}$$

□

Fait 2. Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ et pour tout $l \in [\![0, M-1]\!]$, on a

$$\alpha_k |I_k \cap I'_l| = \alpha'_l |I'_l \cap I_k|. \tag{$*$}$$

Preuve du Fait 2. Si $I_k \cap I'_l = \varnothing$, c'est évident car $|I_k \cap I'_l| = 0$. Si $I_k \cap I'_l \neq \varnothing$ et si on choisit $t_0 \in I_k \cap I'_l$, alors $\alpha_k = \varphi(t_0) = \alpha'_l$; donc $(*)$ est vraie aussi. □

Montrons maintenant que $I(\varphi, S) = I(\varphi, S')$. On a

$$\begin{aligned} I(\varphi, S) &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, |I_k| \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \left(\sum_{l=0}^{M-1} |I_k \cap I'_l| \right) \qquad \text{par le Fait 1} \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, |I_k \cap I'_l| \qquad \text{(interversion de sommes)} \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{N-1} \alpha'_l\, |I'_l \cap I_k| \qquad \text{par le Fait 2} \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} \alpha'_l \left(\sum_{k=0}^{N-1} |I'_l \cap I_k| \right) \\ &= \sum_{l=0}^{M-1} \alpha'_l\, |I'_l| \qquad \text{par le Fait 1} \\ &= I(\varphi, S'). \end{aligned}$$

□

Définition 1.2. *Si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, on pose $\int_a^b \varphi := I(\varphi, S)$, où S est n'importe quelle subdivision de $[a,b]$ adaptée à φ. On dit que $\int_a^b \varphi$ est l'**intégrale de** φ **sur** $[a,b]$.*

Redite. Si $S = (s_0, \dots, s_N)$, et si $\varphi(t) \equiv \alpha_k$ sur $I_k =]s_k, s_{k+1}[$ pour $k = 0, \dots, N-1$, alors

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, |I_k| = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, (s_{k+1} - s_k).$$

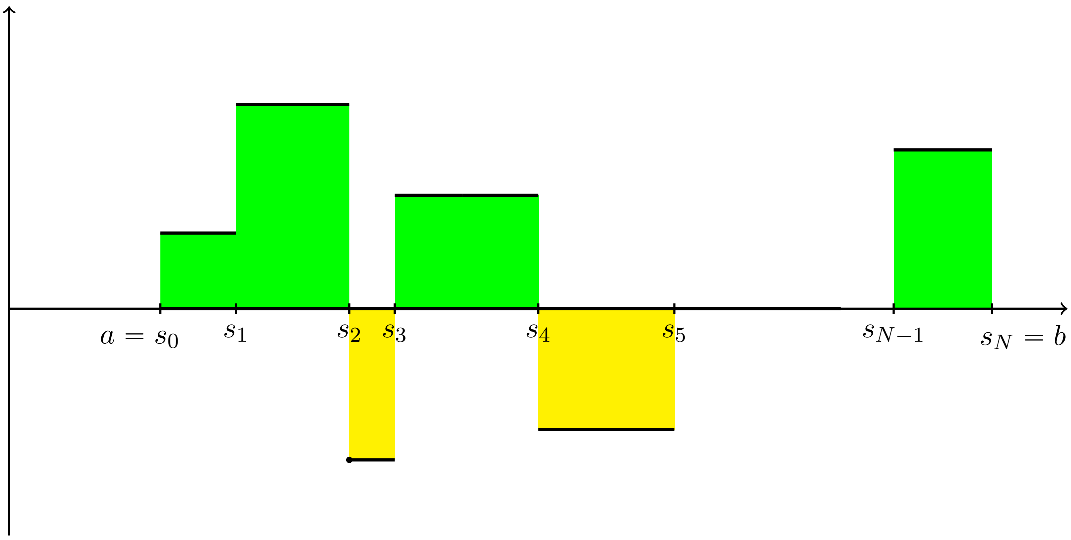
AUTRES NOTATIONS. Au lieu de $\int_a^b \varphi$, on peut écrire $\int_{[a,b]} \varphi$, ou bien $\int_a^b \varphi(t)\,dt$, $\int_a^b \varphi(x)\,dx$, $\int_a^b \varphi(u)\,du$, ... (la variable d'intégration est "muette"), ou bien $\int_{[a,b]} \varphi(t)\,dt$, $\int_{[a,b]} \varphi(x)\,dx$, $\int_{[a,b]} \varphi(u)\,du$ ...

EXEMPLE IMPORTANT. Si φ est *constante* sur $[a,b]$, $\varphi(t) \equiv M$, alors

$$\int_a^b M = M \times (b-a).$$

EXEMPLE IDIOT. Si $a = b$, on a $\int_a^a \varphi = 0$.

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE. La preuve "géométrique" du Lemme 1.1 a montré que si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, alors $\int_a^b \varphi$ est l'**aire algébrique** déterminée par le graphe de φ (entre a et b).



$\int_a^b \varphi =$ aire verte $-$ aire jaune

Exercice. Soit $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, et soit $\tilde{\varphi} : [a,b] \to \mathbb{R}$. Montrer que si l'ensemble $\{t \in [a,b];\ \tilde{\varphi}(t) \neq \varphi(t)\}$ est fini, alors $\tilde{\varphi} \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\int_a^b \tilde{\varphi} = \int_a^b \varphi$.

PROPOSITION 1.3. *L'intégrale des fonctions en escalier possède les propriétés suivantes.*

(1) **Positivité.** *Si* $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ *et* $\varphi \geqslant 0$, *alors* $\int_a^b \varphi \geqslant 0$.
(2) **Linéarité.** *Si* $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$, *alors*

$$\int_a^b (\varphi + \psi) = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\lambda\varphi) = \lambda \int_a^b \varphi.$$

(3) **Additivité.** *Si* $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ *et si* $a \leqslant u \leqslant b$, *alors*

$$\int_a^b \varphi = \int_a^u \varphi + \int_u^b \varphi \qquad (\textbf{relation de Chasles}).$$

Remarque. Dans (3), on tient pour acquis le fait que si φ est en escalier sur $[a,b]$, alors ses restrictions aux intervalles $[a,u]$ et $[u,b]$ sont en escalier (Exercice 2.3 du Chapitre 1). Par ailleurs, on devrait en fait écrire $\int_a^u \varphi_{|[a,u]} + \int_u^b \varphi_{|[u,b]}$; mais on ne le fait pas, pour ne pas alourdir les notations.

Preuve de la proposition. (1) est évident (micro-exo).

(2) Soit $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision adaptée à φ et à ψ :

$$\varphi(t) \equiv \alpha_k \quad \text{et} \quad \psi(t) \equiv \beta_k \qquad \text{sur } I_k = \left]s_k, s_{k+1}\right[\quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1.$$

Alors S est adaptée à $\varphi + \psi$ et $\varphi + \psi \equiv \alpha_k + \beta_k$ sur chaque intervalle I_k ; donc

$$\int_a^b (\varphi + \psi) = \sum\nolimits_{k=0}^{N-1} (\alpha_k + \beta_k)\, |I_k| = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, |I_k| + \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k\, |I_k| = \int_a^b \varphi + \int_a^b \psi.$$

La preuve pour $\int_a^b (\lambda\varphi)$ est laissée en exo.

(3) Soit $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision adaptée à φ,

$$\varphi(t) \equiv \alpha_k \qquad \text{sur } I_k = \left]s_k, s_{k+1}\right[\quad \text{pour } k = 0, \dots, N-1.$$

Quitte à rajouter le point u à S, on peut supposer que u fait partie de S, disons $u = s_{k_0}$. Alors $(s_0, \dots, s_{k_0})$ est une subdivision de $[a,u]$ adaptée à $\varphi_{|[a,u]}$, et $(s_{k_0}, \dots, s_N)$ est une subdivision de $[u,b]$ adaptée à $\varphi_{|[u,b]}$. Donc

$$\begin{aligned}
\int_a^u \varphi + \int_u^b \varphi &= \sum_{k=0}^{k_0-1} \alpha_k\, |I_k| + \sum_{k=k_0}^{N-1} \alpha_k\, |I_k| \\
&= \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k\, |I_k| \\
&= \int_a^b \varphi.
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 1.4. *L'intégrale est* ***croissante*** *: si $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ et si $\varphi \leqslant \psi$ (i.e. $\varphi(t) \leqslant \psi(t)$ pour tout $t \in [a,b]$), alors $\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi$.*

Démonstration. On a $\psi = \varphi + (\psi - \varphi)$ et $\psi - \varphi \geqslant 0$. Comme $\psi - \varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, on en déduit, par linéarité et positivité :

$$\int_a^b \psi = \int_a^b \varphi + \int_a^b (\psi - \varphi) \geqslant \int_a^b \varphi.$$

□

COROLLAIRE 1.5. *Si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ et $\varphi \geqslant 0$ sur $[a,b]$, alors $\int_u^v \varphi \leqslant \int_a^b \varphi$ pour tout sous-intervalle $[u,v] \subseteq [a,b]$.*

Démonstration. Par Chasles et positivité :

$$\int_a^b \varphi = \int_a^u \varphi + \int_u^v \varphi + \int_v^b \varphi \geqslant \int_u^v \varphi.$$

□

2. Fonctions intégrables au sens de Riemann

2.1. Définitions.

Notation. Si f et g sont des fonctions sur $[a,b]$, à valeurs réelles, on écrira $f \leqslant g$ pour signifier que $f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a,b]$:

$$f \leqslant g \iff \forall t \in [a,b] \;:\; f(t) \leqslant g(t).$$

Rappel. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite **bornée** s'il existe une constante M telle que

$$\forall t \in [a,b] \;:\; |f(t)| \leqslant M.$$

Point clé : M ne doit pas dépendre de $t \in [a,b]$.

Reformulation. Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée si et seulement si il existe *deux constantes* C_1 et C_2 telles que

$$C_1 \leqslant f(t) \leqslant C_2 \qquad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

Démonstration. Exo. □

Exemple 1. Toute fonction en escalier est bornée.

Démonstration. Si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$, alors φ ne prend qu'un nombre fini de valeurs. En notant C_1 la plus petite de ces valeurs et C_2 la plus grande, on a $C_1 \leqslant \varphi(t) \leqslant C_2$ pour tout $t \in [a,b]$. □

Exemple 2. Toute fonction *continue* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée.

Démonstration. C'est un théorème connu (et non trivial). □

Exemple 3. Toute fonction *monotone* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée.

Démonstration. Si par exemple f est croissante, alors $f(a) \leqslant f(t) \leqslant f(b)$ pour tout $t \in [a,b]$. □

Exemple 4. Soit $\alpha > 0$. La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 6$ et $f(t) = 1/t^\alpha$ pour $0 < t \leqslant 1$ n'est pas bornée, car $f(t) \to \infty$ quand $t \to 0^+$.

Exercice 2.1. En utilisant le Théorème 3.2 du Chapitre 1, montrer que toute fonction réglée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée.

Remarque. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée, alors

- l'ensemble $\underline{\mathcal{I}}(f) = \left\{ \int_a^b \varphi ;\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \ ,\ \varphi \leqslant f \right\}$ est *non vide et majoré* ;
- l'ensemble $\overline{\mathcal{I}}(f) = \left\{ \int_a^b \varphi ;\ \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \ ,\ \psi \geqslant f \right\}$ est *non vide et minoré*

Démonstration. Soient C_1 et C_2 deux constantes telles que $C_1 \leqslant f \leqslant C_2$. La fonction constante $\varphi = C_1$ est en escalier (!) et vérifie $\varphi \geqslant f$, donc l'ensemble $\underline{\mathcal{I}}(f)$ est non vide. Si $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ vérifie $\varphi \leqslant f$, alors $\varphi \leqslant C_2$ et donc $\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b C_2 = C_2(b-a)$, qui est une constante indépendante de φ. Donc $\underline{\mathcal{I}}(f)$ est majoré par $C_2(b-a)$. On montre de même que $\overline{\mathcal{I}}(f)$ est non vide et minoré par $C_1(b-a)$. □

DÉFINITION 2.2. *Pour toute fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, on pose*

$$\underline{\int_a^b} f := \sup\left\{\int_a^b \varphi;\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b])\ ,\ \varphi \leqslant f\right\}$$

et

$$\overline{\int_a^b} f := \inf\left\{\int_a^b \varphi;\ \psi \in \mathcal{E}([a,b])\ ,\ \psi \geqslant f\right\}.$$

*On dit que $\underline{\int_a^b} f$ est l'**intégrale inférieure** de f sur $[a,b]$, et que $\overline{\int_a^b} f$ est l'**intégrale supérieure** de f sur $[a,b]$.*

FAIT 2.3. *On a toujours $\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f$. Plus précisément :*

(∗)

$$\int_a^b \varphi \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^b \psi \qquad \text{pour toutes } \varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b]) \text{ vérifiant } \varphi \leqslant f \leqslant \psi.$$

Démonstration. Par croissance de l'intégrale des fonctions en escalier, si $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ vérifient $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, alors $\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b \psi$. En fixant ψ et en prenant le "sup en φ", on en déduit $\underline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^b \psi$ pour toute $\psi \in \mathcal{E}([a,b])$ telle que $\psi \geqslant f$; d'où $\underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f$ en prenant maintenant l'"inf en ψ". □

FAIT 2.4. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* en escalier, *alors $\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f$.*

Démonstration. On peut prendre $\varphi = f = \psi$ dans (∗). □

DÉFINITION 2.5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. On dit que f est **intégrable au sens de Riemann sur** $[a,b]$ si f est bornée et si on a $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Dans ce cas, on note $\int_a^b f$ cette valeur commune, et on dit que $\int_a^b f$ est l'**intégrale de** f **sur** $[a,b]$. On a ainsi*

$$\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f.$$

AUTRES NOTATIONS. Au lieu de $\int_a^b f$, on peut écrire $\int_{[a,b]} f$; ou bien $\int_a^b f(t)\,dt$, $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b f(u)du$ ... ; ou bien $\int_{[a,b]} f(t)\,dt$, $\int_{[a,b]} f(x)\,dx$, $\int_{[a,b]} f(u)\,du$ ...

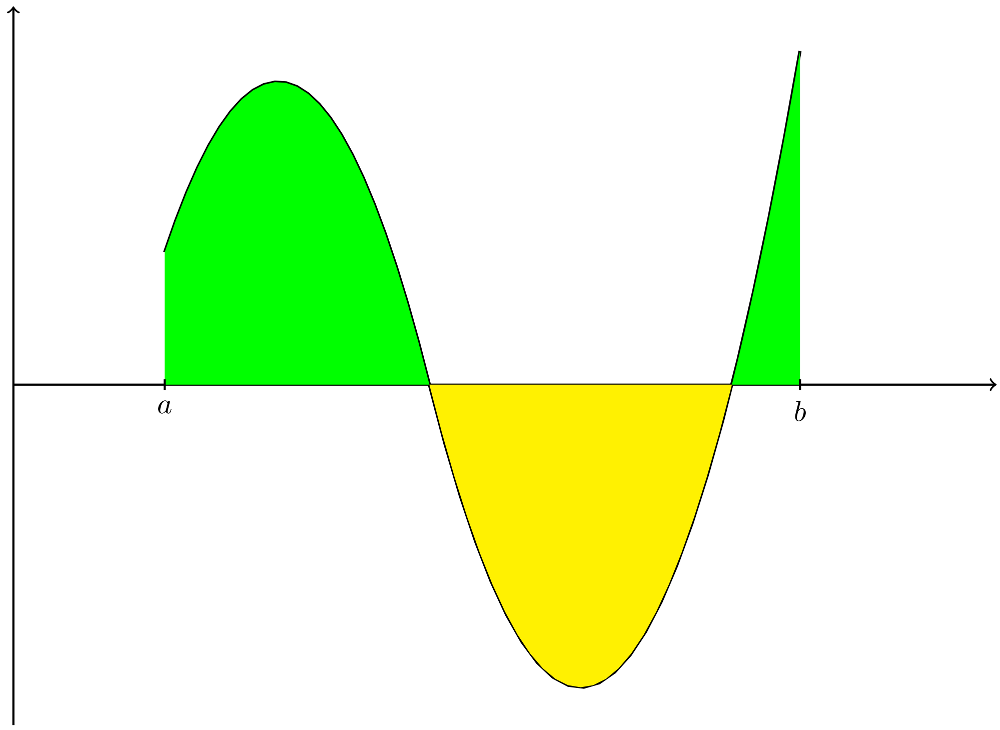
Remarque 1. Au lieu de "intégrable au sens de Riemann", on écrira souvent "(R)-intégrable", ou même seulement "intégrable".

Remarque 2. Toute fonction en escalier est intégrable au sens de Riemann.

Démonstration. C'est le Fait 2.4. □

Remarque idiote. Si $a = b$, alors toute fonction $f : [a,a] \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a,a]$, avec $\int_a^a f = 0$.

INTERPRÉTATION GÉOMÉTRIQUE. Si une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable sur $[a,b]$, alors $\int_a^b f$ *s'interprète* comme l'"aire algébrique déterminée par le graphe de f" (entre a et b). C'est une intuition utile, qui permet parfois de deviner la valeur d'une intégrale sans faire aucun calcul ; mais cela ne peut pas constituer une fondation rigoureuse de la théorie, car on n'a pas donné de définition précise de ce qu'est l'aire d'une partie "quelconque" du plan.



$\int_a^b f = \text{aire verte} - \text{aire jaune}$

EXERCICE 2.6. Utiliser l'interprétation géométrique de l'intégrale pour calculer $\int_a^b t\,dt$. (Distinguer les cas "a et b de même signe" et "$a < 0 < b$".)

2.2. Exemples et contre-exemples. Le théorème suivant donne une vaste classe de fonctions intégrables.

THÉORÈME 2.7. *Toute fonction* réglée *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. En particulier :*

- *toute fonction* continue *sur $[a,b]$ est* (R)*-intégrable sur $[a,b]$;*
- *toute fonction* monotone *sur $[a,b]$ est* (R)*-intégrable sur $[a,b]$.*

Démonstration. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction réglée. D'après l'Exercice 2.1, on sait déjà que f est bornée. Il s'agit de voir que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme f est réglée, on sait qu'on peut trouver une fonction en escalier θ telle que

$$\forall t \in [a,b] \ : \ |\theta(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon.$$

On a alors

$$\underbrace{\theta - \varepsilon}_{\varphi} \leqslant f \leqslant \underbrace{\theta + \varepsilon}_{\psi}.$$

Comme les fonctions φ et ψ sont en escalier, on en déduit que

$$\int_a^b (\theta - \varepsilon) \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^b (\theta + \varepsilon).$$

Donc

$$0 \leqslant \overline{\int_a^b} f - \underline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^b (\theta + \varepsilon) - \int_a^b (\theta - \varepsilon) = \int_a^b 2\varepsilon = 2\varepsilon(b-a).$$

Ceci étant vrai *pour tout* $\varepsilon > 0$, on a donc $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$. □

Contre-exemple 1. Soit $\alpha > 0$, et soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 6$ et $f(t) = 1/t^\alpha$ pour $0 < t \leqslant 1$. Alors f n'est pas (R)-intégrable sur $[0,1]$, car elle n'est pas bornée.

Contre-exemple 2. Soit $\mathbf{1}_\mathbb{Q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction **fonction indicatrice des rationnels**, qui est définie par

$$\mathbf{1}_\mathbb{Q}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$ n'est (R)-intégrable sur aucun intervalle $[a,b]$ non trivial.

Démonstration. Soit $\varphi : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction en escalier quelconque telle que $\varphi \leqslant \mathbf{1}_\mathbb{Q}$ sur $[a,b]$, et soit $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision adaptée à φ,

$$\varphi(t) \equiv \alpha_k \qquad \text{sur } I_k =]s_k, s_{k+1}[.$$

Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, l'intervalle ouvert I_k contient au moins un *irrationnel* t_k. On a donc $\alpha_k = \varphi(t_k) \leqslant \mathbf{1}_\mathbb{Q}(t_k) = 0$, pour $k = 0, \dots, N-1$; et donc

$$\int_a^b \varphi = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k \, |I_k| \leqslant 0 \times \sum_{k=0}^{N-1} |I_k| = 0 \times (b-a) = 0.$$

Ceci étant vrai pour toute $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ vérifiant $\varphi \leqslant \mathbf{1}_\mathbb{Q}$, on en déduit que

$$\underline{\int_a^b} \mathbf{1}_\mathbb{Q} \leqslant 0 \times (b-a) = 0.$$

En utilisant le fait que tout intervalle ouvert $I \neq \varnothing$ contient au moins un *rationnel*, on montre de la même façon (exo) que

$$\overline{\int_a^b} \mathbf{1}_\mathbb{Q} \geqslant 1 \times (b-a) = b-a.$$

Donc $\underline{\int_a^b} \mathbf{1}_\mathbb{Q} \neq \overline{\int_a^b} \mathbf{1}_\mathbb{Q}$ puisque $a < b$. □

2.3. Reformulations de la définition.

Lemme 2.8. *Pour une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, les propriétés suivantes sont équivalentes.*

(1) *f est* (R)*-intégrable sur $[a,b]$.*

(2) *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escalier φ et ψ telles que*

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

(3) *Il existe deux suites (φ_n) et (ψ_n) de fonctions en escalier telles que*

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \quad \textit{pour tout } n \in \mathbb{N} \qquad \textit{et} \qquad \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

De plus, si (φ_n) *et* (ψ_n) *sont comme dans* (3)*, on a*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n.$$

Démonstration. (1) $\implies$ (2). Supposons que f soit (R)-intégrable sur $[a,b]$, et fixons $\varepsilon > 0$. Par définition de $\underline{\int_a^b} f$, le nombre $\underline{\int_a^b} f - \varepsilon/2$ n'est pas un majorant de l'ensemble $\left\{\int_a^b \varphi;\ \varphi \in \mathcal{E}([a,b])\ ,\ \varphi \leqslant f\right\}$; autrement dit, on peut trouver $\varphi \in \mathcal{E}([a,b])$ telle que

$$\varphi \leqslant f \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \varphi > \underline{\int_a^b} f - \varepsilon/2.$$

De même, on peut trouver $\psi \in \mathcal{E}([a,b])$ telle que

$$\psi \geqslant f \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \psi < \overline{\int_a^b} f + \varepsilon/2.$$

Comme $\underline{\int_a^b} f = \int_a^b f = \overline{\int_a^b} f$ (par hypothèse sur f), on a alors

$$\int_a^b (\psi-\varphi) = \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leqslant \left(\int_a^b f + \varepsilon/2\right) - \left(\int_a^b f - \varepsilon/2\right) = 2\varepsilon/2 = \varepsilon;$$

et donc (2) est vérifiée puisque $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$.

(2) $\implies$ (3). Supposons (2) vérifiée. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver des fonctions en escalier φ_n et ψ_n telles que

$$\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \leqslant \varepsilon_n := 2^{-n}.$$

Donc (3) est vérifiée.

(3) $\implies$ (1). Soient (φ_n) et (ψ_n) vérifiant (3). Comme $\varphi_0 \leqslant f \leqslant \psi_0$ et comme les fonctions φ_0 et ψ_0 sont bornées, on voit que f est bornée (micro-exo). Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\underline{\int_a^b} \varphi_n \leqslant \underline{\int_a^b} f \leqslant \overline{\int_a^b} f \leqslant \int_a^b \psi_n.$$

Comme $\int_a^b \psi_n - \int_a^b \varphi_n = \int_a^b (\psi_n - \varphi_n) \to 0$, on en déduit (exo) que $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$ et que les deux suite $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$ et $\left(\int_a^b \psi_n\right)$ convergent toutes les deux vers $\underline{\int_a^b} f = \overline{\int_a^b} f$. Donc f est (R)-intégrable sur $[a,b]$ et $\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \varphi_n = \lim_{n\to\infty}\int_a^b \psi_n$. □

Remarque 1. Si (φ_n) et (ψ_n) sont comme dans (3), on dit que la suite (φ_n, ψ_n) est une **suite approximante** pour f.

Remarque 2. Si f est (R)-intégrable sur $[a,b]$ et si C_1 et C_2 sont deux constantes telles que $C_1 \leqslant f \leqslant C_2$, alors on peut trouver une suite approximante (φ_n, ψ_n) pour f telle que $C_1 \leqslant \varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \leqslant C_2$. De même, pour $\varepsilon > 0$ donné, les fonctions φ et ψ de (2) peuvent être choisies telles que $C_1 \leqslant \varphi \leqslant f \leqslant \psi \leqslant C_2$.

Démonstration. Soit $(\widetilde{\varphi_n}, \widetilde{\psi_n})$ une suite approximante quelconque pour f. Si on pose $\varphi_n = \max(C_1, \widetilde{\varphi_n}(t))$ et $\psi_n(t) = \min(C_2, \widetilde{\psi_n}(t))$, alors $C_1 \leqslant \varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n \leqslant C_2$. De plus, $\psi_n - \varphi_n \leqslant \widetilde{\psi_n} - \widetilde{\varphi_n}$ car $\psi_n \leqslant \widetilde{\psi_n}$ et $\varphi_n \geqslant \widetilde{\varphi_n}$, donc $\int_a^b(\psi_n - \varphi_n) \leqslant \int_a^b(\widetilde{\psi_n} - \widetilde{\varphi_n})$ et donc $\int_a^b(\psi_n - \varphi_n) \to 0$. Ainsi, la suite (φ_n, ψ_n) convient. Même preuve pour la 2ème partie de la remarque. □

Voici une variante du Lemme 2.8 qui a également son utilité.

LEMME 2.9. *Une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est* (R)*-intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si la propriété suivante est satisfaite :*

(2') *Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver deux fonctions en escalier θ et $\mathbf{e}$ telles que*

$$|\theta - f| \leqslant \mathbf{e} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \mathbf{e} \leqslant \varepsilon.$$

De plus, si M est une constante telle que $|f| \leqslant M$, alors on peut imposer que la fonction θ de (2') *vérifie également $|\theta| \leqslant M$.*

Démonstration. Supposons f intégrable, et soit $\varepsilon > 0$. Par le Lemme 2.8, on peut trouver $\varphi, \psi \in \mathcal{E}([a,b])$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\int_a^b(\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$. Alors $|\varphi - f| \leqslant \psi - \varphi$ et $\int_a^b(\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$, donc (2') est satisfaite avec $\theta := \varphi$ et $\mathbf{e} := \psi - \varphi$. De plus, si $|f| \leqslant M$, *i.e.* $-M \leqslant f \leqslant M$, on a vu (Remarque 2 après le Lemme 2.8) qu'on peut imposer à $\theta = \varphi$ de vérifier également $-M \leqslant \theta \leqslant M$, *i.e.* $|\theta| \leqslant M$.

Inversement, supposons (2') vérifiée. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Par (2'), on peut trouver $\theta, \mathbf{e} \in \mathcal{E}([a,b])$ telles que $|\theta - f| \leqslant \mathbf{e}$ et $\int_a^b \mathbf{e} \leqslant \varepsilon/2$. Alors

$$\underbrace{\theta - \mathbf{e}}_{\varphi} \leqslant f \leqslant \underbrace{\theta + \mathbf{e}}_{\psi} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) = \int_a^b 2\mathbf{e} \leqslant 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Donc f est intégrable sur $[a,b]$ d'après le Lemme 2.8. □

Exercice. Utiliser le Lemme 2.9 pour montrer que toute fonction réglée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$.

2.4. Propriétés de l'intégrale.

NOTATION. On note $\mathcal{R}([a,b])$ l'ensemble de toutes les fonctions $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ intégrables au sens de Riemann sur $[a,b]$.

THÉORÈME 2.10. *L'intégrale possède les propriétés suivantes.*

1. **Positivité.** *Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ et si $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f \geqslant 0$.*
2. **Linéarité.** *Si $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $f + g$ et λf sont intégrables, avec $\int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b(\lambda f) = \lambda \int_a^b f$.*
3. **Additivité.** *Soit u tel que $a \leqslant u \leqslant b$, et soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Alors f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si elle est intégrable sur $[a,u]$ et sur $[u,b]$, et dans ce cas on a $\int_a^b f = \int_a^u f + \int_u^b f$* (**relation de Chasles**).

Démonstration. (1) C'est évident : si $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f = \underline{\int_a^b} f \geqslant \int_a^b 0 = 0$ puisque 0 est une fonction en escalier minorant f.

(2) (i) Montrons que $f + g \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\int_a^b(f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$. Soit $(\varphi_{n,1}, \psi_{n,1})$ une suite approximante pour f, et $(\varphi_{n,2}, \psi_{n,2})$ une suite approximante pour g. Si on pose

$$\varphi_n := \varphi_{n,1} + \varphi_{n,2} \qquad \text{et} \qquad \psi_n := \psi_{n,1} + \psi_{n,2},$$

alors

$$\varphi_n \leqslant f + g \leqslant \psi_n \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N};$$

et par *linéarité de l'intégrale pour les fonctions en escalier* :

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi_n - \varphi_n) &= \int_a^b \big((\psi_{n,1} - \varphi_{n,1}) + (\psi_{n,2} - \varphi_{n,2})\big)\\ &= \int_a^b (\psi_{n,1} - \varphi_{n,1}) + \int_a^b (\psi_{n,2} - \varphi_{n,2}) \xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Par le Lemme 2.8, on en déduit que $f+g$ est (R)-intégrable sur $[a,b]$ et que (φ_n, ψ_n) est une suite approximante pour $f+g$. De plus,

$$\begin{aligned}\int_a^b (f+g) &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b (\varphi_{n,1} + \varphi_{n,2})\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b \varphi_{n,1} + \int_a^b \varphi_{n,2}\right) \qquad \text{par linéarité de } \textstyle\int_a^b \text{ sur } \mathcal{E}([a,b])\\ &= \int_a^b f + \int_a^b g \qquad \text{puisque } \textstyle\int_a^b \varphi_{n,1} \to \int_a^b f \text{ et } \int_a^b \varphi_{n,2} \to \int_a^b g.\end{aligned}$$

(ii) On montre de même que si $f \in \mathcal{R}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda f \in \mathcal{R}([a,b])$ avec $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$. Les détails sont laissés en exo. (Ce n'est pas totalement immédiat : Il faut distinguer les cas $\lambda \geqslant 0$ et $\lambda < 0$.)

(3) Supposons que f soit (R)-intégrable sur $[a,b]$, et soit (φ_n, ψ_n) une suite approximante pour f. Alors les φ_n et les ψ_n sont en escalier sur $[a,u]$, avec $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ sur $[a,u]$. De plus $\int_a^u (\psi_n - \varphi_n) \leqslant \int_a^b (\psi_n - \varphi_n)$ car $\psi_n - \varphi_n \geqslant 0$, donc $\int_a^u (\psi_n - \varphi_n) \to 0$. Par le Lemme 2.8, on en déduit que f est (R)-intégrable sur $[a,u]$, avec $\int_a^u f = \lim_{n\to\infty} \int_a^u \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_a^u \psi_n$. De même, f est (R)-intégrable sur $[u,b]$ avec $\int_u^b f = \lim_{n\to\infty} \int_u^b \varphi_n = \lim_{n\to\infty} \int_u^b \psi_n$. Enfin,

$$\begin{aligned}\int_a^u f + \int_u^b f &= \lim_{n\to\infty} \int_a^u \varphi_n + \lim_{n\to\infty} \int_u^b \varphi_n\\ &= \lim_{n\to\infty} \left(\int_a^u \varphi_n + \int_u^b \varphi_n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \int_a^b \varphi_n \qquad \text{par Chasles pour } \mathcal{E}([a,b])\\ &= \int_a^b f.\end{aligned}$$

Inversement, supposons que f soit intégrable sur $[a,u]$ et sur $[u,b]$. Soit $(\varphi_{n,1}, \psi_{n,1})$ une suite approximante pour f sur $[a,u]$ et $(\varphi_{n,2}, \psi_{n,2})$ une suite approximante pour f sur $[u,b]$:

$$\begin{cases} \varphi_{n,1} \leqslant f \leqslant \psi_{n,1} & \text{sur } [a,u] \quad \text{et} \quad \int_a^u (\psi_{n,1} - \varphi_{n,1}) \to 0\\ \varphi_{n,2} \leqslant f \leqslant \psi_{n,2} & \text{sur } [u,b] \quad \text{et} \quad \int_u^b (\psi_{n,2} - \varphi_{n,2}) \to 0\end{cases}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, soient $\varphi_n, \psi_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ les fonctions définies par

$$\begin{cases} \varphi_n = \varphi_{n,1} & \text{sur } [a,u] \quad \text{et} \quad \varphi_n = \varphi_{n,2} \quad \text{sur }]u,b]\\ \psi_n = \psi_{n,1} & \text{sur } [a,u] \quad \text{et} \quad \psi_n = \psi_{n,2} \quad \text{sur }]u,b]\end{cases}$$

Les fonctions φ_n et ψ_n sont en escalier (micro-exo), et on a $\varphi_n \leqslant f \leqslant \psi_n$ sur $[a,b]$ par définition. De plus

$$\begin{aligned}\int_a^b (\psi_n - \varphi_n) &= \int_a^u (\psi_n - \varphi_n) + \int_u^b (\psi_n - \varphi_n) \qquad \text{par Chasles pour } \mathcal{E}([a,b])\\ &= \int_a^u (\psi_{n,1} - \varphi_{n,1}) + \int_u^b (\psi_{n,2} - \varphi_{n,2}) \qquad \text{par définition de } \varphi_n \text{ et } \psi_n\\ &\xrightarrow{n\to\infty} 0.\end{aligned}$$

Donc f est (R)-intégrable sur $[a,b]$ et (φ_n, ψ_n) est une suite approximante pour f. □

Remarque. La propriété (2) signifie que $\mathcal{R}([a,b])$ est un **espace vectoriel** et que l'application $f \mapsto \int_a^b f$ est une **forme linéaire** sur $\mathcal{R}([a,b])$.

Corollaire 2.11. *L'intégrale est* ***croissante*** *: si $f, g \in \mathcal{R}([a,b])$ et $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$.*

Démonstration. Identique à celle donnée pour les fonctions en escalier (*cf* Corollaire 1.4). □

Corollaire 2.12. *Si $f \in \mathcal{R}([a,b])$, alors la fonction $|f|$ est* (R)*-intégrable sur $[a,b]$, et on a*

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

Démonstration. (i) *Intégrabilité de $|f|$.* Soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme f est (R)-intégrable sur $[a,b]$, le Lemme 2.9 permet de trouver deux fonctions $\theta_0, \mathbf{e} \in \mathcal{E}([a,b])$ telles que

$$|\theta_0 - f| \leqslant \mathbf{e} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \mathbf{e} \leqslant \varepsilon.$$

D'après l'inégalité triangulaire, on a $\big||f| - |\theta_0|\big| \leqslant |f - \theta_0|$; donc

$$\big||\theta_0| - |f|\big| \leqslant \mathbf{e} \qquad \text{et} \qquad \int_a^b \mathbf{e} \leqslant \varepsilon.$$

Comme $\theta := |\theta_0| \in \mathcal{E}([a,b])$, on en déduit que $|f|$ est (R)-intégrable sur $[a,b]$ d'après le Lemme 2.9.

(ii) *Majoration.* Comme $-|f| \leqslant f \leqslant |f|$, on a (par croissance et linéarité)

$$-\int_a^b |f| = \int_a^b (-|f|) \leqslant \int_a^b f \leqslant \int_a^b |f|;$$

d'où le résultat. □

Corollaire 2.13. *Si f est intégrable sur $[a,b]$ et si M est une constante telle que $\forall t \in [a,b] \ : \ |f(t)| \leqslant M$, alors $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant M(b-a)$.*

Démonstration. On a $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt \leqslant \int_a^b M = M(b-a)$. □

Corollaire 2.14. *Si f est une fonction intégrable sur $[a,b]$, alors f est intégrable sur tout sous-intervalle $[u,v] \subseteq [a,b]$.*

Démonstration. Par (3), f est intégrable sur $[u, b]$, et donc intégrable sur $[u, v]$ à nouveau par (3). □

COROLLAIRE 2.15. *Si $f \in \mathcal{R}([a, b])$ et si $f \geqslant 0$ sur $[a, b]$, alors $\int_u^v f \leqslant \int_a^b f$ pour tout sous-intervalle $[u, v] \subseteq [a, b]$.*

Démonstration. Identique à celle donnée pour les fonctions en escalier (*cf* Corollaire 1.5). □

COROLLAIRE 2.16. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Si f est bornée et ne possède qu'*un nombre fini de points de discontinuité*, alors f est* (R)*-intégrable sur $[a, b]$.*

Démonstration. Notons $x_1 < \cdots < x_K$ les points de discontinuité de f (on suppose qu'il y en a), et posons également $x_0 := a$ et $x_{K+1} := b$. Par la propriété d'additivité, il suffit de montrer que f est intégrable sur chaque intervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, K$. On fixe donc $i \in [\![0, K]\!]$.

Soit $\varepsilon > 0$: il s'agit de trouver deux fonctions φ et ψ en escalier sur $[x_i, x_{i+1}]$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sur $[x_i, x_{i+1}]$ et $\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$.

Par définition de $x_1, \ldots, x_K$, on sait que f est continue sur $]x_i, x_{i+1}[$, donc intégrable sur tout intervalle fermé $[u, v]$ contenu dans $]x_i, x_{i+1}[$. De plus, comme f est bornée, on peut choisir une constante M telle que $-M \leqslant f \leqslant M$.

Soient u, v tels que $x_i < u \leqslant v < x_{i+1}$ à choisir ultérieurement. Comme f est intégrable sur $[u, v]$, on peut trouver des fonctions $\widetilde{\varphi}$ et $\widetilde{\psi}$ en escalier sur $[u, v]$ telles que $\widetilde{\varphi} \leqslant f \leqslant \widetilde{\psi}$ sur $[u, v]$ et $\int_u^v (\widetilde{\psi} - \widetilde{\varphi}) \leqslant \varepsilon/2$. Définissons alors φ et ψ sur $[x_i, x_{i+1}]$ comme suit : $\varphi := \widetilde{\varphi}$ sur $[u, v]$, et $\varphi := -M$ sur $[x_i, u[\cup]v, x_{i+1}]$; et de même, $\psi = \widetilde{\psi}$ sur $[u, v]$, et $\varphi = M$ sur $[x_i, u[\cup]v, x_{i+1}]$. Alors φ et ψ sont en escalier, et $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ sur $[x_i, x_{i+1}]$. De plus, on a $\psi - \varphi = 2M$ sur $[x_i, u[\cup]v, x_{i+1}]$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{x_i}^{x_{i+1}} (\psi - \varphi) &= \int_{x_i}^{u} 2M + \int_u^v (\widetilde{\psi} - \widetilde{\varphi}) + \int_v^{x_{i+1}} 2M \\ &\leqslant 2M\big((u - x_i) + (x_{i+1} - v)\big) + \varepsilon/2.\end{aligned}$$

Si on choisit maintenant les points u et v suffisamment proches de x_i et x_{i+1} pour avoir $(u - x_i) + (x_{i+1} - v) < \varepsilon/4M$, on obtient $\int_{x_i}^{x_{u+1}} (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$; ce qui termine la démonstration. □

Exemple. La fonction $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 6$ et $f(t) = \sin(1/t)$ si $0 < t \leqslant 1$ est intégrable au sens de Riemann sur $[0, 1]$ par le Corollaire 2.16, car elle est bornée et continue en tout point sauf 0 ; mais cette fonction n'est pas réglée car elle n'a pas de limite en 0 (exo).

EXERCICE 2.17. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction *continue et* $\geqslant 0$. Montrer que si $\int_a^b f(t)\, dt = 0$, alors $f = 0$.

PROPOSITION 2.18. *L'espace vectoriel $\mathcal{R}([a, b])$ est* stable par produit *: si $f, g \in \mathcal{R}([a, b])$, alors $fg \in \mathcal{R}([a, b])$.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par le Lemme 2.9, on peut trouver des fonctions en escalier $\theta_1, \mathbf{e}_1, \theta_2, \mathbf{e}_2$ telles que

$$\begin{cases} |\theta_1 - f| \leqslant \mathbf{e}_1 & \text{et} \quad \int_a^b \mathbf{e}_1 \leqslant \varepsilon/2M \\ |\theta_2 - g| \leqslant \mathbf{e}_2 & \text{et} \quad \int_a^b \mathbf{e}_1 \leqslant \varepsilon/2M \end{cases}$$

où M est une constante telle que $|f| \leqslant M$ et $|g| \leqslant M$. De plus, on peut également supposer qu'on a $|\theta_1| \leqslant M$ et $|\theta_2| \leqslant M$. Alors

$$|\theta_1\theta_2 - fg| \leqslant \underbrace{|\theta_1|}_{\leqslant M}\ \underbrace{|\theta_2 - g|}_{\leqslant \mathbf{e}_2} + \underbrace{|\theta_1 - f|}_{\leqslant \mathbf{e}_1}\ \underbrace{|g|}_{\leqslant M} \leqslant M(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2),$$

et

$$\int_a^b M(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2) \leqslant M(\varepsilon/2M + \varepsilon/2M) = \varepsilon.$$

Donc la propriété (2') du Lemme 2.9 est satisfaite avec $\theta := \theta_1\theta_2$ et $\mathbf{e} := M(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2)$. □

ILLUSTRATION. Inégalité de Cauchy-Schwarz.

On va montrer que si f et g sont deux fonctions intégrables au sens de Riemann sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b |f(t)g(t)|\, dt \leqslant \sqrt{\int_a^b |f(t)|^2 dt} \times \sqrt{\int_a^b |g(t)|^2 dt}.$$

Cette inégalité, extrêmement utile, porte le nom d'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

Quitte à remplacer f et g par $|f|$ et $|g|$, on peut supposer que les fonctions f et g sont $\geqslant 0$. L'idée est de dire que si on pose

$$P(x) := \int_a^b \big(xf(t) + g(t)\big)^2 dt,$$

alors, par positivité de l'intégrale, on a

$$P(x) \geqslant 0 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

Par ailleurs, comme $\big(xf(t) + g(t)\big)^2 = f(t)^2x^2 + 2f(t)g(t)x + g(t)^2$, on a par linéarité de l'intégrale :

$$P(x) = Ax^2 + 2Bx + C,$$

où

$$A := \int_a^b f^2, \quad B := \int_a^b fg \quad \text{et} \quad C := \int_a^b g^2.$$

Comme “$\Delta \leqslant 0$” pour toute fonction polynomiale de signe constant, on en déduit

$$B^2 \leqslant AC,$$

ce qui est exactement l'inégalité recherchée.

2.5. Fonctions à valeurs complexes.

DÉFINITION 2.19. *Soit* $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. *On dit que* f *est* (R)*-intégrable sur* $[a, b]$ *si les fonctions* Re(f) *et* $\mathrm{Im}(f)$ *sont* (R)*-intégrables sur* $[a, b]$ *; et dans ce cas, on pose*

$$\int_a^b f = \int_a^b \mathrm{Re}(f) + i \int_a^b \mathrm{Im}(f).$$

Autrement dit : si $f = u + iv$ *avec* u *et* v *à valeurs réelles, alors*

$$\int_a^b (u + iv) = \int_a^b u + i \int_a^b v.$$

Remarque 1. Par définition, si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est intégrable, alors

$$\mathrm{Re}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Re}(f(t))\,dt \qquad \text{et} \qquad \mathrm{Im}\left(\int_a^b f(t)\,dt\right) = \int_a^b \mathrm{Im}(f(t))\,dt.$$

Remarque 2. Notons $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ l'ensemble de toutes les fonction (R)-intégrables sur $[a,b]$, à valeurs complexes. Alors $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ est un espace vectoriel stable par produit.

Démonstration. C'est un bon exo de compréhension de la définition. □

Propriétés de l'intégrale. Ce sont les mêmes que pour les fonctions à valeurs réelles.

(1) **Linéarité** : $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ et $\int_a^b (\lambda f) = \lambda \int_a^b f$ pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$.

(2) **Majoration du module** : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$.

Démonstration. (1) Le fait que $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$ pour toutes $f, g \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ est "immédiat" à partir de la définition (micro-exo). Soient maintenant $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On écrit $f = u+iv$ et $\lambda = \alpha + i\beta$ (où u, v sont à valeurs réelles et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Alors

$$\lambda f = (\alpha + i\beta)(u+iv) = (\alpha u - \beta v) + i(\beta u + \alpha v)$$

et donc, par définition de l'intégrale des fonctions à valeurs complexes :

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\lambda f) &= \int_a^b (\alpha u - \beta v) + i \int_a^b (\beta u + \alpha v) \\
&= \alpha \int_a^b u - \beta \int_a^b v + i\beta \int_a^b u + i\alpha \int_a^b v \\
&= (\alpha + i\beta) \int_a^b u + i(\alpha + i\beta) \int_a^b v \\
&= \lambda \left(\int_a^b u + i \int_a^b v \right) = \lambda \int_a^b f.
\end{aligned}$$

(2) (i) *Intégrabilité de $|f|$ si $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$.* On laisse la démonstration en exo (adapter la preuve du Corollaire 2.12).

(ii) *Majoration.* Soit $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{C})$. Comme $\int_a^b f$ est un nombre complexe, on peut écrire $\int_a^b f = re^{i\theta}$ où $r \geqslant 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Alors $r = \left|\int_a^b f\right|$. Donc, si on pose $\omega = e^{-i\theta}$, on a

$$|\omega| = 1 \qquad \text{et} \qquad \left|\int_a^b f\right| = \omega \int_a^b f.$$

Alors, comme $\left|\int_a^b f\right|$ est un nombre *réel*, on peut écrire

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f\right| &= \mathrm{Re}\left(\left|\int_a^b f\right|\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\omega\int_a^b f\right)\\ &= \mathrm{Re}\left(\int_a^b \omega f\right) \qquad \text{par linéarité}\\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(\omega f)\\ &\leqslant \int_a^b |\omega f| \qquad \text{car} \quad \mathrm{Re}(\omega f)\leqslant |\omega f|\\ &= \int_a^b |f| \qquad \text{car} \quad |\omega| = 1.\end{aligned}$$

□

2.6. Inversion des bornes d'intégration.

NOTATION. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction (R)-intégrable sur tout intervalle $[a, b] \subseteq I$. Si $u, v \in I$ et si $u \leqslant v$, on pose

$$\int_v^u f = -\int_u^v f.$$

L'intérêt d'autoriser des "bornes inversées" tient au fait suivant :

FAIT 2.20. *La relation de Chasles $\int_u^w f = \int_u^v f + \int_v^w f$ est valable pour tous $u, v, w \in I$, quel que soit l'ordre dans lequel u, v, w sont rangés.*

Démonstration. Si par exemple $u \leqslant w \leqslant v$, alors $\int_u^v f = \int_u^w f + \int_w^v f$ par la relation de Chasles usuelle, donc $\int_u^w f = \int_u^v f - \int_w^v f = \int_u^v f + \int_v^w f$. *Idem* pour les autres cas. □

REMARQUE. Il faut faire attention quand on veut majorer le module d'une intégrale $\int_u^v f(t)\,dt$ si les bornes sont "dans le mauvais sens", *i.e.* $v < u$: dans ce cas, on a $\int_u^v |f(t)|\,dt \leqslant 0$, donc on ne peut pas écrire que $\left|\int_u^v f(t)\,dt\right| \leqslant \int_u^v |f(t)|\,dt$. Pour écrire l'inégalité correctement, il faut remettre les bornes "dans le bon sens" en écrivant que $\left|\int_u^v f(t)\,dt\right| = \left|-\int_u^v f(t)\,dt\right| = \left|\int_v^u f(t)\,dt\right|$, et donc $\left|\int_u^v f(t)\,dt\right| \leqslant \int_v^u |f(t)|\,dt$. En résumé : on a

$$\left|\int_u^v f(t)\,dt\right| \leqslant \begin{cases}\displaystyle\int_u^v |f(t)|\,dt & \text{si } u \leqslant v\\[2ex] \displaystyle\int_v^u |f(t)|\,dt & \text{si } u > v\end{cases}$$

3. Le "Théorème fondamental de l'analyse"

Au stade où on en est, on sait que beaucoup de fonctions sont intégrables et que l'intégrale possède des propriétés sympathiques. Cependant, on est pour le moment incapable de calculer l'intégrale de la moindre fonction "concrète" un peu compliquée. Par exemple, on peut calculer $\int_a^b t\,dt$ par un argument géométrique (Exercice 2.6), mais on ne voit pas très bien comment se débrouiller avec $\int_a^b t^2 dt$ ou $\int_a^b t^3 dt$. Dans cette section, on va voir comment améliorer la situation.

3.1. La version utile.

RAPPEL. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{C}$ est **de classe** $\mathcal{C}^1$ si F est dérivable sur I et si la fonction f' est continue sur I.

THÉORÈME 3.1. (Théorème fondamental de l'analyse)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Soit également $x_0 \in I$, et soit $F : I \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$F(x) = \int_{x_0}^{x} f(t)\, dt.$$

Alors F est de classe $\mathcal{C}^1$ et $F' = f$.

Démonstration. Comme f est continue, il suffit de montrer que F est dérivable sur I avec $F' = f$.

Fixons un point $x \in I$. Il s'agit de voir que

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} \to f(x) \qquad \text{quand} \quad h \to 0.$$

Dans ce qui suit, on ne considère que des $h \neq 0$ tels que $x + h \in I$.
D'après la relation de Chasles, on peut écrire

$$F(x+h) - F(x) = \int_{x_0}^{x+h} f - \int_{x_0}^{x} f = \int_{x}^{x_0} f + \int_{x_0}^{x+h} f = \int_{x}^{x+h} f,$$

et donc

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(t)\, dt.$$

Par ailleurs, on a aussi $\int_x^{x+h} f(x)\, dt = h\, f(x)$ (intégrale de la *constante* $f(x)$ par rapport à t), et donc

$$f(x) = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} f(x)\, dt.$$

Ainsi, on obtient par linéarité

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) = \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} \big(f(t) - f(x)\big)\, dt.$$

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$. On cherche : un $\delta > 0$ tel que

$$|h| < \delta \implies \left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leqslant \varepsilon.$$

Comme f est continue au point x, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } t \in I \text{ vérifiant } |t - x| < \delta.$$

Donc, si $0 < h < \delta$, alors

$$\left| \frac{F(x+h) - F(x)}{h} - f(x) \right| \leqslant \frac{1}{h} \int_{x}^{x+h} |f(t) - f(x)|\, dt \leqslant \frac{1}{h} \times \varepsilon h = \varepsilon.$$

De même, si $-\delta < h < 0$, alors $x+h = x-|h|$ et donc

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x-|h|}\big(f(t)-f(x)\big)\,dt\right|\\ &\leqslant \frac{1}{|h|}\int_{x-|h|}^{x}|f(t)-f(x)|\,dt \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que

$$\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| \leqslant \varepsilon \qquad \text{pour tout } h \text{ vérifiant } |h| < \delta\,;$$

soit exactement ce qu'on voulait. $\square$

Rappel. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $F : I \to \mathbb{C}$ est une **primitive de f sur I** si F est dérivable sur I avec $F' = f$.

Fait important. Deux primitives d'une même fonction $f : I \to \mathbb{C}$ diffèrent d'une constante.

Démonstration. Si $F_1' = f = F_2'$, alors $(F_2 - F_1)' = 0$, donc $F_2 - F_1$ est constante sur l'intervalle I. $\square$

Corollaire 3.2. *Toute fonction continue $f : I \to \mathbb{C}$ possède des primitives.*

Démonstration. C'est évident par le théorème (mais très loin de l'être si on n'a pas le théorème à sa disposition). $\square$

Du Théorème fondamental de l'analyse, on déduit très facilement ce qu'on pourrait appeler la "Formule fondamentale du calcul intégral".

Notation. Pour tout fonction $F : I \to \mathbb{C}$ et pour tous $a, b \in I$, on pose

$$\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a).$$

Corollaire 3.3. *Si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue et si $a, b \in I$, alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = \big[F\big]_a^b,$$

où F est n'importe quelle *primitive de f sur* $[a, b]$.

Démonstration. Comme deux primitives de f diffèrent d'une constante, la quantité $\big[F\big]_a^b$ ne dépend pas de la primitive F.

On prend pour F la fonction définie dans le théorème : $F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt$. Alors, par Chasles :

$$\big[F\big]_a^b = F(b) - F(a) = \int_{x_0}^b f - \int_{x_0}^a f = \int_a^{x_0} f + \int_{x_0}^b f = \int_a^b f.$$

$\square$

Corollaire 3.4. *Si $F : I \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors, pour tous $u, v \in I$, on a*

$$F(v) = F(u) + \int_u^v F'(t)\,dt.$$

Démonstration. On applique le Corollaire 3.3 à $f := F'$ entre $a = u$ et $b = v$. □

EXEMPLES. Les formules suivantes découlent immédiatement du Théorème fondamental de l'analyse.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b t^n\, dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_a^b = \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}\cdot$$

(2) Si $\lambda \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, alors

$$\int_a^b \cos(\lambda t)\, dt = \left[\frac{1}{\lambda}\,\sin(\lambda t)\right]_a^b = \frac{\sin(\lambda b) - \sin(\lambda a)}{\lambda}$$

et

$$\int_a^b \sin(\lambda t)\, dt = \left[-\frac{1}{\lambda}\,\cos(\lambda t)\right]_a^b = \frac{\cos(\lambda a) - \cos(\lambda b)}{\lambda}\cdot$$

(3) Soit $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_a^b e^{\lambda t} dt = \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}\right]_a^b = \frac{e^{\lambda b} - e^{\lambda a}}{\lambda}\cdot$$

En effet : si on écrit $\lambda = \alpha + i\beta$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors

$$e^{\lambda t} = e^{\alpha t} e^{i\beta t} = e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i \sin(\beta t)\big);$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(e^{\lambda t}\right)' &= \alpha e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big) + e^{\alpha t}\big(-\beta \sin(\beta t) + i\beta\cos(\beta t)\big)\\
&= e^{\alpha t}\Big(\cos(\beta t)(\alpha + i\beta) + \sin(\beta t)(i\alpha - \beta)\Big)\\
&= e^{\alpha t}\Big(\cos(\beta t)(\alpha + i\beta) + i\sin(\beta t)(\alpha + i\beta)\Big)\\
&= \lambda e^{\alpha t}\big(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)\big)\\
&= \lambda e^{\lambda t}.
\end{aligned}$$

Donc la fonction $t \mapsto \frac{1}{\lambda} e^{\lambda t}$ est une primitive de $t \mapsto e^{\lambda t}$, ce qui donne la formule annoncée.

(4) Pour tout $x > 0$, on a

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t}\cdot$$

(5) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\cdot$$

(6) Pour tout $x \in \,]-1, 1[$, on a

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}\cdot$$

Remarque. En fait, la formule (4) pourrait servir de *définition* de la fonction ln. Avec cette définition, on obtient immédiatement que la fonction ln est une primitive de la fonction $x \mapsto 1/x$ et que $\ln(1) = 0$: on a ainsi *démontré* qu'il existe effectivement une fonction possédant ces propriétés (chose qui est en général *admise* au lycée). De là, on peut définir la fonction exponentielle comme étant la fonction réciproque de ln, et *montrer* que $(e^x)' = e^x$ et $e^0 = 1$ (alors qu'au lycée on *admet* qu'il existe une fonction possédant ces propriétés).

3.2. Une version plus générale. Le théorème suivant est plus général que la “formule fondamentale du calcul intégral” (Corollaire 3.3).

Théorème 3.5. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $[a, b]$ (pas forcément continue)* et si f possède des primitives, *alors $\int_a^b f(t)\, dt = \big[F\big]_a^b$ pour n'importe quelle primitive F de f. De manière équivalente : si $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction dérivable sur $[a, b]$ (pas forcément $\mathcal{C}^1$)* et si F' est intégrable sur $[a, b]$, *alors $\int_a^b F'(t)\, dt = F(b) - F(a)$.*

Démonstration. On démontre la 2ème formulation. Soit donc $F : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction dérivable telle que F' soit (R)-intégrable sur $[a, b]$. En considérant séparément $\mathrm{Re}(F)$ et $\mathrm{Im}(F)$, on se ramène au cas où F est à valeurs réelles.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme F' est intégrable sur $[a, b]$, on peut trouver deux fonctions φ et ψ en escalier telles que

$$\varphi \leqslant F' \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Soit $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision de $[a, b]$ adaptée à φ et ψ :

$$\varphi(t) \equiv \alpha_k \quad \text{et} \quad \psi(t) \equiv \beta_k \qquad \text{sur} \quad I_k = \,]s_k, s_{k+1}[.$$

Pour $k = 0, \dots, N - 1$, on a ainsi

$$\alpha_k \leqslant F'(t) \leqslant \beta_k \qquad \text{sur} \quad]s_k, s_{k+1}[.$$

D'après l'*inégalité des accroissements finis*, on en déduit

$$\alpha_k(s_{k+1} - s_k) \leqslant F(s_{k+1}) - F(s_k) \leqslant \beta_k(s_{k+1} - s_k) \qquad \text{pour} \quad k = 0, \dots, N - 1.$$

En sommant ces inégalités, on obtient ainsi

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha_k |I_k| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \big(F(s_{k+1}) - F(s_k)\big) \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \beta_k |I_k|,$$

autrement dit

$$\int_a^b \varphi \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \int_a^b \psi.$$

Mais comme $\varphi \leqslant F' \leqslant \psi$, on a également

$$\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b F'(t)\, dt \leqslant \int_a^b \psi;$$

donc on obtient

$$\left| F(b) - F(a) - \int_a^b F'(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b \psi - \int_a^b \varphi \leqslant \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc conclure que $\int_a^b F'(t)\,dt = F(b)-F(a)$, comme attendu. □

Remarque. En pratique, la généralité supplémentaire apportée par le Théorème 3.5 est d’un intérêt limité, pour les raisons suivantes :

- la plupart des fonctions intégrables qu’on considère sont des fonctions réglées ;
- on peut montrer que si F est une fonction dérivable telle que F' est une fonction réglée, alors F' est en fait continue.

Exercice. Montrer que si $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en tout point et si la fonction F' est bornée, alors

$$\underline{\int_a^b} F' \leqslant F(b) - F(a) \leqslant \overline{\int_a^b} F'.$$

Chapitre 3

Calculs et formules

1. Calculs de primitives

1.1. Une notation utile. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction *continue* sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. La notation

$$\int f(x)\,dx \qquad \text{(sans bornes d'intégration)}$$

désigne *toutes les primitives de la fonction* f.

Ainsi, quand on écrit

$$\text{“}\int f(x)\,dx = \mathit{truc} \text{ sur } I\text{”},$$

cela signifie :

“les primitives de f sur I sont de la forme *truc*”

Exemple 1. On a $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + cte$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exemple 2. Sur $I =]0,\infty[$, on a $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + cte$, et sur $I =]-\infty, 0[$, on a $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + cte$.

Attention. La notation $\int f(x)\,dx$ est commode, mais il faut la manipuler avec précaution : $\int f(x)\,dx$ n'est ni un nombre, ni une fonction ; c'est une façon de désigner une *famille de fonctions*.

1.2. Petite liste de primitives à connaitre impérativement.

(i) Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cte \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

(ii) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$, alors

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \qquad \text{sur }]0,\infty[.$$

Exemple 1. $\int \sqrt{x}\,dx = \int x^{1/2} dx = \frac{1}{1/2+1} x^{1/2+1} + cte = \frac{2}{3} x^{3/2} + cte.$

Exemple 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int x^{-3/2} dx = \frac{1}{-3/2+1} x^{-3/2+1} + cte = -\frac{2}{\sqrt{x}} + cte.$

(iii) Si n est un entier $\geqslant 2$, alors

$$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)}\,\frac{1}{x^{n-1}} + cte \qquad \text{sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0,\infty[.$$

<u>Pour le retrouver</u> : on écrit $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

Exemple. $\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + cte.$

(iv) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$, alors

$$\int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + cte \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Exemple d'utilisation. Calcul des primitives de $\cos(ax)e^{bx}$ sur $\mathbb{R}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

On a $\cos(ax)e^{bx} = \mathrm{Re}\big(e^{iax}e^{bx}\big) = \mathrm{Re}\big(e^{(b+ia)x}\big)$. Donc

$$\int \cos(ax)e^{bx} dx = \mathrm{Re}\left(\int e^{(b+ia)x} dx\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{1}{b+ia} e^{(b+ia)x}\right) + cte.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned} \frac{1}{b+ia} e^{(b+ia)x} &= \frac{b - ia}{b^2 + a^2} e^{bx}(\cos(ax) + i\sin(ax)) \\ &= \frac{e^{bx}}{a^2 + b^2}\Big(\big(b\cos(ax) + a\sin(ax)\big) + i\big(-a\cos(ax) + b\sin(ax)\big)\Big); \end{aligned}$$

donc on obtient

$$\int \cos(ax)e^{bx} dx = \frac{e^{bx}}{a^2 + b^2}\big(b\cos(ax) + a\sin(ax)\big) + cte.$$

(v) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 0$, alors (sur $\mathbb{R}$)

$$\int \cos(\lambda x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) + cte,$$
$$\int \sin(\lambda x)\, dx = -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x) + cte.$$

(vi) Si $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, alors

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan\Big(\frac{x}{a}\Big) + cte \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

<u>En effet</u> : on a

$$\begin{aligned} \Big(\arctan\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big)' &= \frac{1}{a} \arctan'\Big(\frac{x}{a}\Big) \\ &= \frac{1}{a} \times \frac{1}{1 + \big(\frac{x}{a}\big)^2} \\ &= \frac{a}{a^2 + x^2}. \end{aligned}$$

1.3. "Formes usuelles" à retenir.

FAIT 1.1. *Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si f est une fonction continue sur un intervalle contenant $u(I)$, alors (sur I)*

$$\int f(u(x))u'(x)\, dx = F(u(x)) + cte,$$

où F est n'importe quelle primitive de f.

Démonstration. C'est évident puisque $\big(F(u(x)\big)' = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$. $\square$

Remarque. On peut présenter la preuve de manière légèrement différente. Si on pose
$$u = u(x),$$
alors $u'(x) = \frac{du}{dx}$ (avec la notation "des physiciens"). On peut donc écrire
$$du = u'(x)dx;$$
et on en déduit
$$\int f(u(x))\, u'(x)dx = \int f(u)\, du = F(u) + cte = f(u(x)) + cte.$$

Conséquence 1. Si $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et ne s'annule pas sur I, alors
$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\, dx = \ln(|u(x)|) + cte.$$

Démonstration. Comme u est continue et ne s'annule pas, elle garde un signe constant sur I d'après le Théorème des valeurs intermédiaires. Donc on a ou bien $u(I) \subseteq]0, \infty[$, ou bien $u(I) \subseteq]-\infty, 0[$. On peut donc appliquer le Fait avec $f(u) := 1/u$ (définie sur $]0, \infty[$ ou $]-\infty, 0[$) et $F(u) := \ln(|u|)$. □

Exemple 1. Primitives de $\frac{x}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$.

On a
$$\frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)} \qquad \text{où } u(x) = x^2+3,$$
donc $\int \frac{x}{x^2+3}\, dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + cte$ (car x^2+3 est toujours > 0).

Exemple 2. Primitives de $\tan(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos(x)$. Comme $\cos(x) > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit
$$\int \tan(x)\, dx = -\ln(\cos x) + cte \qquad \text{sur }]0, \tfrac{\pi}{2}[.$$

Conséquence 2. Si $n \in \mathbb{N}$ et si $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors
$$\int u(x)^n u'(x)\, dx = \frac{1}{n+1}\, u(x)^{n+1} + cte.$$

Démonstration. On applique le Fait avec $f(u) := u^n$ (définie sur $\mathbb{R}$) et $F(u) := \frac{1}{n+1}\, u^{n+1}$. □

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\int (\sin x)^n \cos x\, dx = \frac{1}{n+1}\,(\sin x)^{n+1} + cte \qquad \text{et}$$
$$\int (\cos x)^n \sin x\, dx = -\frac{1}{n+1}\,(\cos x)^{n+1} + cte.$$

Conséquence 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq -1$. Si $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors
$$\int u(x)^\alpha u'(x)\, dx = \frac{1}{\alpha+1}\, u(x)^{\alpha+1} + cte.$$

Démonstration. On applique le Fait avec $f(u) := u^\alpha$ (définie sur $]0, \infty[$) et $F(u) := \frac{1}{\alpha+1}\, u^{\alpha+1}$. □

Exemple. Primitives de $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\, dx &= \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-1/2} \times 2x dx \\ &= \frac{1}{2}\int u^{-1/2} du \qquad \text{avec } u = x^2+3 \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(-1/2)+1} u^{-(1/2)+1} + cte \\ &= \sqrt{u} + cte \\ &= \sqrt{x^2+3} + cte.\end{aligned}$$

Conséquence 4. Si $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int e^{u(x)} u'(x)\, dx = e^{u(x)} + cte.$$

Démonstration. On applique le Fait avec $f(u) := e^u$ (définie sur $\mathbb{R}$) et $F(u) := e^u$. □

Exemple. Primitives de xe^{-x^2} sur $\mathbb{R}$.

On a

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2}\int e^{-x^2} \times (-2x) dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + cte.$$

Remarque. On ne sait pas primitiver e^{-x^2} ! Cependant, il est possible de montrer que

$$\int_0^X e^{-x^2} dx \to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{quand } X \to \infty.$$

1.4. Primitivation par parties.

Fait 1.2. *Soit $u : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $v : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si U est une primitive de u sur I, alors*

$$\int u(x) v(x)\, dx = U(x) v(x) - \int U(x) v'(x)\, dx.$$

Démonstration. On a $(Uv)' = U'v + Uv' = uv + Uv'$, donc

$$\begin{aligned}\int u(x)v(x)\, dx &= \int (Uv)'(x)\, dx - \int U(x)v'(x)\, dx \\ &= U(x)v(x) + cte - \int U(x)v'(x)\, dx \\ &= U(x)v(x) - \int U(x)v'(x)\, dx \qquad (\text{la constante rentre dans } \textstyle\int).\end{aligned}$$

□

Exemple 1. Primitives de $\ln(x)$ sur $]0,\infty[$.
On écrit $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$; et on en déduit

$$\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - \int x \times \frac{1}{x}\,dx = x\ln(x) - x + cte.$$

Exemple 2. Primitives de $\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On écrit $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}\int \arctan(x)\,dx &= x\arctan(x) - \int x \times \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &= x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + cte.\end{aligned}$$

Exemple 3. Primitives de $x^2\cos(3x)$ et x^3e^x sur $\mathbb{R}$.

Pour $\int x^2\cos(x)\,dx$ on primitive 2 fois par parties, en dérivant 2 fois x^2 et en primitivant 2 fois $\cos(3x)$:

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)x^2\,dx &= \frac{1}{3}\sin(3x)x^2 - \frac{1}{3}\int \sin(3x) \times 2x\,dx \\ &= \frac{1}{3}\sin(3x)x^2 - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)x + \frac{1}{3}\int \cos(3x)\,dx\right) \\ &= \frac{2}{9}\,x\cos(3x) + \left(\frac{1}{3}\,x^2 - \frac{2}{27}\right)\sin(3x) + cte.\end{aligned}$$

Pour $\int x^3e^x\,dx$, on primitive 3 fois par parties (exo).

Exemple 4. Primitives de $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

L'idée est de partir de $\int \frac{dx}{1+x^2}$ (que l'on connait), et d'écrire $\frac{1}{1+x^2} = 1 \times \frac{1}{1+x^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{1+x^2} &= x \times \frac{1}{1+x^2} - \int x \times \frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\,dx \\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int \frac{dx}{1+x^2} - 2\int \frac{dx}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{dx}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right) \\ &= \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\,\frac{x}{1+x^2} + cte.\end{aligned}$$

1.5. Primitivation des fonctions rationnelles. Une *fonction rationnelle* est une fonction f de la forme

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)},$$

où A et B sont des polynômes. Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash Z(B)$, où $Z(B) = \{x \in \mathbb{R};\ B(x) = 0\}$. Comme $Z(B)$ est un ensemble fini, $\mathcal{D}_f$ est donc une réunion finie d'intervalles ouverts ; et on peut déterminer les primitives de f sur chacun de ces intervalles.

1.5.1. *Fonctions de la forme* $\frac{1}{(x-\lambda)^n}$, *où* $\lambda \in \mathbb{R}$ *et* $n \geqslant 1$. On calcule les primitives sur $]-\infty, \lambda[$ et sur $]\lambda, \infty[$. On a

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)} = \ln|x-\lambda| + cte,$$

et

$$\int \frac{dx}{(x-\lambda)^n} = -\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{(x-\lambda)^{n-1}} \qquad \text{si} \quad n \geqslant 2.$$

1.5.2. *Fonctions de la forme* $\frac{1}{P(x)}$, *où* $\deg(P) = 2$ *et* P *n'a pas de racines réelles.* On calcule les primitives sur $\mathbb{R}$.

Principe : on se ramène au calcul de choses de la forme $\int \frac{du}{u^2+b^2}$ où b est une constante, en écrivant $P(x)$ sous la forme

$$P(x) = c\big((x+a)^2 + b^2\big).$$

Exemple. Primitives de $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+3}$.

Le polynôme $P(x) = 3x^2 + 2x + 3$ n'a pas de racines réelles car $\Delta = 2^2 - 4 \times 3 \times 3 = -32 < 0$. On écrit

$$3x^2 + 2x + 3 = 3\Big(x^2 + \frac{2}{3}x + 1\Big) = 3\left(\Big(x + \frac{1}{3}\Big)^2 - \frac{1}{9} + 1\right) = 3\left(\Big(x + \frac{1}{3}\Big)^2 + \frac{8}{9}\right);$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x^2+2x+3} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\big(x+1/3\big)^2 + (\sqrt{8/9}\,)^2} \\ &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2 + (\sqrt{8/9})^2} \qquad \text{où } u = x + 1/3.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x^2+2x+3} &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{8/9}} \arctan\Big(\frac{u}{\sqrt{8/9}}\Big) + cte \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{\sqrt{8/9}} \arctan\Big(\frac{x+1/3}{\sqrt{8/9}}\Big) + cte \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \arctan\Big(\frac{3}{2\sqrt{2}}(x+1/3)\Big) + cte \qquad \text{car } \sqrt{8/9} = 2\sqrt{2}/3 \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \arctan\Big(\frac{3\sqrt{2}}{4}(x+1/3)\Big) + cte.\end{aligned}$$

1.5.3. *Fonctions de la forme* $\frac{x}{P(x)}$, *où* $\deg(P) = 2$ *et* P *n'a pas de racines réelles.* On calcule les primitives sur $\mathbb{R}$.

Principe : on se ramène au calcul de $\int \frac{1}{P(x)}\,dx$ et de $\int \frac{P'(x)}{P(x)}\,dx$.

Exemple. Primitives de $f(x) = \frac{x}{3x^2+2x+3}$.

Comme dans l'exemple précédent, $P(x) = 3x^2 + 2x + 3$. Pour faire apparaitre $\frac{P'(x)}{P(x)}$, on "introduit de force" $P'(x) = 6x + 2$ au numérateur en écrivant

$$x = \frac{1}{6}(6x+2) - \frac{1}{3}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{3x^2+2x+3} &= \frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+3}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3x^2+2x+3}\\ &= \frac{1}{6}\int \frac{(3x^2+2x+3)'}{3x^2+2x+3}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3x^2+2x+3}\\ &= \frac{1}{6}\ln\left(3x^2+2x+3\right) - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{3x^2+2x+3}}_{\text{qu'on sait calculer}}.\end{aligned}$$

1.5.4. *Fonctions de la forme* $\frac{1}{P(x)^n}$*, où* $\deg(P)=2$ *avec* P *sans racines réelles, et* $n \geqslant 2$. On calcule les primitives sur $\mathbb{R}$.

Principe : se ramener à des choses de la forme $\int \frac{du}{(u^2+b^2)^n}$, et faire des *primitivations par parties* pour calculer $\int \frac{du}{(u^2+b^2)^n}$.

Exemple. Primitives de $\frac{1}{(3x^2+2x+3)^2}$.

On a vu que

$$3x^2+2x+3 = 3(u^2+b^2) \qquad \text{où} \qquad u = x+1/3 \text{ et } b = \sqrt{8/9}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{9}\int \frac{du}{(u^2+b^2)^2}.$$

Ensuite, on calcule $\int \frac{du}{u^2+b^2}$ par parties :

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{u^2+b^2} &= \int 1 \times \frac{1}{u^2+b^2}\,du\\ &= u \times \frac{1}{u^2+b^2} - \int u \times \frac{-2u}{(u^2+b^2)^2}\,du\\ &= \frac{u}{u^2+b^2} + 2\int \frac{u^2}{(u^2+b^2)^2}\\ &= \frac{u}{u^2+b^2} + 2\int \frac{u^2+b^2-b^2}{(u^2+b^2)^2} \qquad \text{(“astuce” générale)}\\ &= \frac{u}{u^2+b^2} + 2\int \frac{du}{u^2+b^2} - 2b^2\int \frac{du}{(u^2+b^2)^2}.\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}\int \frac{du}{(u^2+b^2)^2} &= \frac{1}{2b^2}\left(\frac{u}{u^2+b^2} + \int \frac{du}{u^2+b^2}\right)\\ &= \frac{1}{2b^2}\left(\frac{u}{u^2+b^2} + \frac{1}{b}\arctan\left(\frac{u}{b}\right)\right) + cte;\end{aligned}$$

et on en déduit $\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)^2}$ en remplaçant u par $x+1/3$ (finir le calcul).

1.5.5. *Fonctions de la forme* $\frac{x}{(P(x))^n}$, *où* P *est sans racines réelles avec* $\deg P = 2$, *et* $n \geqslant 2$. On calcule les primitives sur $\mathbb{R}$.

Principe : se ramener à calculer $\int \frac{P'(x)}{P(x)^n}\,dx$ et $\int \frac{dx}{P(x)^n}$.

Exemple. Primitives de $\frac{x}{(3x^2+2x+3)^2}$.

On "introduit de force" $P'(x) = 6x + 2$ comme plus haut :

$$\frac{x}{(3x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{6}\frac{6x+2}{(3x^2+2x+3)^2} - \frac{1}{3}\frac{1}{(3x^2+2x+3)^2};$$

ce qui donne

$$\int \frac{x}{(3x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{6}\int \underbrace{\frac{6x+2}{(3x^2+2x+3)^2}}_{\frac{P'x)}{P(x)^2}}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)^2}$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{3x^2+2x+3} - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)^2}}_{\text{qu'on sait calculer}}.$$

1.5.6. *Cas général.* Soit $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ une fonction rationnelle quelconque.

ÉTAPE 1. On écrit $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$, où B et R sont des polynômes et $\deg(R) < \deg(Q)$, en effectuant la *division euclidienne* de A par B :

$$A = BQ + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(B),$$

et donc $f = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$. (Si on a déjà $\deg(A) < \deg(B)$, cette étape est inutile.)

ÉTAPE 2. On *factorise* $B(x)$ le plus possible (sur $\mathbb{R}$).

ÉTAPE 3. On **décompose** $\frac{R(x)}{B(x)}$ **en éléments simples**. Autrement dit : on écrit $\frac{R(x)}{B(x)}$ comme somme de termes de la forme $\frac{a}{(x-\lambda)^n}$ ou $\frac{ax+b}{P(x)^n}$, avec $\deg(P) = 2$ et P sans racines réelles.

ÉTAPE 4. On primitive chaque "élément simple" séparément, et on met tout ensemble.

Exemple. Primitives de $f(x) := \frac{3x^5-4x^4+8x^3-6x^2-3x-6}{3x^4-4x^3+2x^2-4x+3} = \frac{A(x)}{B(x)}$.

(i) Division euclidienne : on trouve

$$A(x) = B(x) \times x + 6x^3 - 2x^2 - 6x - 6,$$

et donc

$$f(x) = x + \frac{6x^3-2x^2-6x-6}{3x^4-4x^3+2x^2-4x+3} = x + \frac{R(x)}{B(x)}.$$

(ii) Factorisation de $B(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3$.

- $x = -1$ est racine évidente, donc on peut factoriser par $x - 1$.
- En faisant la division euclidienne, on trouve $B(x) = (x-1)(3x^3 - x^2 + x - 3)$.

- $x = 1$ est racine évidente de $3x^3 - x^2 + x - 3$, donc on peut re-factoriser par $x - 1$.
- On trouve $3x^3 - x^2 + x - 3 = (x-1)(3x^2 + 2x + 3)$, donc
$$B(x) = (x-1)^2(3x^2 + 2x + 3).$$
- $P(x) = 3x^2+2x+3$ n'a pas de racines réelles, donc on ne peut plus factoriser (sur $\mathbb{R}$).

La seule racine réelle de B est $x = 1$; donc on va calculer les primitives sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, \infty[$

(iii) Décomposition de $\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{6x^3-2x^2-6x-6}{(x-1)^2(3x^2+2x+3)}$ en éléments simples.

- Vu la forme de $B(x)$, la décomposition est *a priori* de la forme
$$(*) \qquad \frac{R(x)}{B(x)} = \frac{6x^3 - 2x^2 - 6x - 6}{(x-1)^2(3x^2 + 2x + 3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{3x^2+2x+3},$$
où a, b, c, d sont des constantes à déterminer.
- Si on multiplie tout par $(x-1)^2$ dans $(*)$, on obtient
$$\frac{6x^3 - 2x^2 - 6x - 6}{3x^2 + 2x + 3} = a(x-1) + b + \frac{(cx+d)(x-1)^2}{3x^2+2x+3};$$
d'où, en faisant $x = 1$:
$$b = -1.$$
- Comme $\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{6x^3-2x^2-6x-6}{3x^4-4x^3+2x^2-4x+3}$, on voit que
$$\frac{R(x)}{B(x)} \sim \frac{6x^3}{3x^4} = \frac{2}{x} \qquad \text{quand } x \to +\infty,$$
et donc
$$\lim_{x\to+\infty} x\,\frac{R(x)}{B(x)} = 2.$$
Mais
$$x\,\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx}{(x-1)^2} + \frac{cx^2+dx}{3x^2+2x+3};$$
donc, en faisant $x \to +\infty$, on obtient
$$a + 0 + \frac{c}{3} = 2.$$
- En prenant $x = 0$ dans $(*)$, on obtient
$$\frac{R(0)}{B(0)} = -a + b + \frac{d}{3},$$
autrement dit
$$-a + b + \frac{d}{3} = -2.$$
- Enfin, en prenant par exemple $x = 2$ dans $(*)$, on obtient
$$\frac{R(2)}{B(2)} = a + b + \frac{2c+d}{19},$$
autrement dit (vérifier)
$$a + b + \frac{2c+d}{19} = \frac{22}{19}.$$

(iv) Bilan provisoire : on est ramené à résoudre le système

$$\begin{cases} b = -1 \\ a + \frac{c}{3} = 2 \\ -a + \frac{d}{3} = -1 \\ a + \frac{2}{19}c + \frac{1}{19}d = \frac{41}{19} \end{cases}$$

On le résout par sa méthode favorite ; et on trouve $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$ et $d = 3$.

(v) Conclusion : on a

$$f(x) = x + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{3x^2+2x+3};$$

et on sait primitiver chacun des termes (finir le calcul).

2. Intégration par parties

Formule d'intégration par parties. Si u est une fonction continue sur $[a, b]$ et si v est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$, alors

$$\int_a^b u(t)v(t)\,dt = \left[Uv\right]_a^b - \int_a^b U(t)v'(t)\,dt,$$

où U est n'importe quelle primitive de u.

Démonstration. On a $(Uv)' = U'v + Uv' = uv + Uv'$, donc

$$\left[Uv\right]_a^b = \int_a^b (Uv)'(t)\,dt = \int_a^b u(t)v(t)\,dt + \int_a^b U(t)v'(t)\,dt.$$

□

Exemple 1. Calcul de $\int_0^1 t^2 e^{3t} dt$ et de $\int_0^\pi t^3 \cos t\,dt$.

On calcule $\int_0^1 t^2 e^{3t} dt$ par parties, en dérivant t^2 pour faire baisser le degré et en primitivant e^{3t}. Faire le calcul.

Exemple 2. Calcul de $I = \int_0^1 \arctan(t)\,dt$.

On intègre par parties en écrivant $\arctan(t) = 1 \times \arctan(t)$. Faire le calcul.

Exemple 3. calcul de $I_2 = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ et $I_3 = \int_0^1 \frac{dt}{(1+t^2)^3}$.

Pour I_2, on part de $I_1 = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$ (qui vaut $\left[\arctan(t)\right]_0^1 = \frac{\pi}{4}$) et on intègre par parties en écrivant $\frac{1}{1+t^2} = 1 \times \frac{1}{1+t^2}$. Faire le calcul.

Pour I_3, on part de I_2 (qu'on vient de calculer) et on intègre par parties en écrivant $\frac{1}{(1+t^2)^2} = 1 \times \frac{1}{(1+t^2)^2}$. Faire le calcul.

Exemple 4. Calcul des **intégrales de Wallis**

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin t)^n dt.$$

L'idée est d'intégrer par parties pour trouver une relation de récurrence.

Pour $n \geqslant 2$, on a

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \times (\sin t)^{n-1} dt \\
&= \Big[-\cos t\,(\sin t)^{n-1}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \times (n-1)(\sin t)^{n-2}\cos t\,dt \\
&= 0 + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,(\sin t)^{n-2} dt \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^2 t)(\sin t)^{n-2} dt \\
&= (n-1)(W_{n-2} - W_n).
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}.$$

En utilisant cette relation de récurrence, on trouve des formules à base de factorielles pour W_{2k} et W_{2k+1}. De façon précise (exo) :

$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!^2}\,\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad W_{2k+1} = \frac{2^{2k}k!^2}{(2k+1)!}.$$

Exemple 5. Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt \to 0 \quad \text{quand } \lambda \to \pm\infty.$$

Démonstration. Si $\lambda \neq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt &= \left[\frac{1}{i\lambda}e^{i\lambda t} f(t)\right]_a^b - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(t)e^{i\lambda t} dt \\
&= \frac{1}{i\lambda}\left(f(b)e^{i\lambda b} - f(a)e^{i\lambda a} - \int_a^b f(t)e^{i\lambda t} dt\right).
\end{aligned}$$

Comme $|e^{i\lambda t}| = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, on en déduit

$$\left|\int_a^b f(t)e^{i\lambda t}\,dt\right| \leqslant \frac{1}{|\lambda|}\left(|f(b)| + |f(a)| + \int_a^b |f'(t)|\,dt\right) := \frac{C}{|\lambda|},$$

où C est une constant indépendante de λ. D'où le résultat. $\square$

3. Changements de variables

Formule de changement de variable. Si $\phi : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si f est une fonction *continue* sur un intervalle I *contenant* $\phi([a,b])$, alors

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)dt.$$

Démonstration. Soit F une primitive de f sur I. Alors $f(\phi(t))\phi'(t)$ est la dérivée de $G(t) = F(\phi(t))$ (micro-exo). Donc

$$\int_a^b f(\phi(t))\,\phi'(t)dt = \big[F(\phi(t))\big]_a^b = F(\phi(b)) - F(\phi(a)) = \big[F\big]_{\phi(a)}^{\phi(b)} = \int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\,dx.$$

$\square$

Remarque. Si la fonction ϕ est strictement monotone, on peut montrer que la formule de changement de variable reste vraie pour f seulement supposée *intégrable* sur $\phi([a,b])$.

Mode d'emploi de la formule. Il y a deux façons d'utiliser la formule de changement de variable.

(1) On doit calculer une intégrale $\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$, et on a envie d'écrire $x=\phi(t)$ pour une certaine fonction ϕ. On peut le faire, à condition
   - de remplacer dx par $\phi'(t)dt$;
   - de trouver a et b tels que ϕ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$ avec $\phi(a)=\alpha$ et $\phi(b)=\beta$, et tels que f soit continue sur un intervalle contenant $\phi([a,b])$;
   - de bien changer les bornes d'intégration.

Exemple. Calcul de $I:=\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx$.

On peut déterminer la valeur de I en utilisant l'interprétation géométrique de l'intégrale : le graphe de la fonction $x\mapsto\sqrt{1-x^2}$ est le demi-cercle de diamètre $[-1,1]$ situé au dessus de l'axe des abscisses, donc $I=\frac{\pi}{2}\cdot$ Le propos ici est de faire un calcul.

Comme $\cos^2 t+\sin^2 t=1$, il est assez naturel d'avoir envie de poser $x=\cos t$ ou $x=\sin t$. Posons par exemple

$$x=\cos t.$$

Alors $x=-1$ pour $t=\pi$ et $x=1$ pour $t=0$, $\phi(t)=\cos(t)$ est $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\pi]$, et $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ est continue sur $[-1,1]=\phi([0,\pi])$. On a $dx=-\sin t dt$ et $\sqrt{1-x^2}=\sqrt{\sin^2 t}=\sin t$ car $\sin t\geqslant 0$ sur $[0,\pi]$. Donc

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx&=\int_\pi^0\sin t\times(-\sin t dt)\\&=\int_0^\pi\sin^2 t dt.\end{aligned}$$

Ensuite, on se souvient que

$$\sin^2 t=\frac{1-\cos(2t)}{2};$$

et on obtient ainsi

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1\sqrt{1-x^2}\,dx&=\frac12\int_0^\pi(1+\cos(2t))\,dt\\&=\frac12\Big[t+\frac12\sin(2t)\Big]_0^\pi\\&=\frac{\pi}{2}\cdot\end{aligned}$$

Exercice. Calculer l'inégrale $\int_0^\pi x^2\sqrt{1-x^2}\,dx$.

(2) On doit calculer une intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$, et on a envie de poser $x:=\phi(t)$ pour une certaine fonction ϕ. On peut le faire à condition d'être certain que dans $g(t)dt$ on peut *tout exprimer en fonction de x*. C'est possible si $\phi'(t)\neq 0$ pour tout $t\in[a,b]$. En effet :
   - Comme $dx=\phi'(t)dt$, on peut écrire $dt=\frac{dx}{\phi'(t)}\cdot$

- La fonction ϕ est continue et strictement monotone sur $[a,b]$ car ϕ' garde un signe constant, donc ϕ est une bijection de $[a,b]$ sur $\phi([a,b])$. Donc on peut exprimer t en fonction de $x=\phi(t)$ en écrivant $t=\phi^{-1}(x)$, ce qui donne $g(t)dt=\frac{g(t)}{\phi'(t)}dx=\frac{g(\phi^{-1}(x))}{\phi'(\phi^{-1}(x))}dx$.

Exemple 1. Calcul de $I:=\int_0^1\frac{dt}{1+e^t}\cdot$

On a envie de poser $x:=e^t$, ce qui est possible car $(e^t)'=e^t\neq 0$ pour tout $t\in[0,1]$. On a $dx=e^tdt$, donc $dt=e^{-t}dx=\frac{dx}{x}\cdot$ De plus, on a $x=1$ pour $t=0$ et $x=e$ pour $t=1$. Donc

$$\int_0^1\frac{dt}{1+e^t}=\int_1^e\frac{1}{1+x}\frac{dx}{x}=\int_1^e\frac{dx}{x(1+x)},$$

et on est ramené à un calcul qu'on sait faire (intégrale d'une fonction rationnelle ; terminer le calcul).

Exemple 2. Calcul de $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{2+\sin t}\cdot$

L'intégrale I est bien définie car $2+\sin t>0$ pour tout $t\in\mathbb{R}$, et donc $f(t)=\frac{1}{2+\sin t}$ est bien définie et continue sur $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Pour des raisons en apparence mystérieuses, on a envie de poser

$$x:=\tan(t/2).$$

Ce changement de variable est "autorisé" car $\phi(t)=\tan(t/2)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ avec $\phi'(t)=\frac{1}{2}(1+\tan^2(t/2))\neq 0$ pour tout t.

On a

$$dx=\phi'(t)dt=\frac{1}{2}(1+\tan^2(t/2))dt=\frac{1}{2}(1+x^2)dt,$$

et donc

$$dt=\frac{2dx}{1+x^2}\cdot$$

De plus,

$$\sin t=2\sin(t/2)\cos(t/2)=2\tan(t/2)\times\cos^2(t/2)=2\tan(t/2)\times\frac{1}{1+\tan^2(t/2)},$$

autrement dit

$$\sin t=\frac{2x}{1+x^2}\cdot$$

Enfin, on a $x=0$ si $t=0$, et $x=\tan(\pi/4)=1$ si $t=\pi/2$. Donc

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{dt}{2+\sin t}dt&=\int_0^1\frac{1}{2+\frac{2x}{1+x^2}}\frac{2dx}{1+x^2}\\&=\int_0^1\frac{dx}{1+x+x^2}\cdot\end{aligned}$$

On est donc ramené à un calcul qu'on sait faire (intégrale d'une fonction rationnelle ; terminer le calcul).

Remarque. La méthode qu'on vient d'utiliser est générale : si on a à calculer une intégrale de la forme $\int_a^b \Phi(t)\,dt$ où $\Phi(t)$ est une "fonction rationnelle de $\sin t$ et $\cos t$", alors le changement de variable $x = \tan(t/2)$ permet *toujours* de se ramener au calcul d'une intégrale de la forme $\int_\alpha^\beta F(x)\,dx$ où F est une fonction rationnelle. Cependant, il peut y avoir des cas où il est plus rapide d'utiliser un autre changement de variable, par exemple $x := \cos t$ ou $x := \sin t$. Pour savoir dans quels cas précisément, on pourra entrer les mots **règles de Bioche** dans un moteur de recherche.

Exercice. Calculer l'intégrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dt}{2+\cos t}$.

4. Formule de Taylor

4.1. Énoncé et preuve de la formule.

Rappel. Si $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$. On pose aussi $0! = 1$.

Théorème 4.1. *Soit $N \in \mathbb{N}$, et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. Pour tous $a, b \in I$, on a*

$$f(b) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + R_N(a,b),$$

où le "reste" $R_N(a,b)$ est donné par la formule

$$R_N(a,b) = \int_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,dt.$$

Cette formule s'appelle la ***formule de Taylor à l'ordre*** *$N+1$ pour f entre les points a et b.*

Remarque. Cas où $N = 1$ et $N = 0$.

- Pour $N = 0$, la formule s'écrit

$$f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t)\,dt.$$

  Autrement dit :

  Formule de Taylor à l'ordre 1 = Théorème Fondamental de l'Analyse.

- Pour $N = 1$, la formule s'écrit

$$f(b) = f(a) + f'(a)\,(b-a) + \int_a^b (b-t) f''(t)\,dt.$$

Preuve de la formule de Taylor. On procède par récurrence sur N.

Pour $N = 0$ (formule de Taylor à l'ordre 1), on vient de voir que le résultat est vrai (c'est le Théorème Fondamental de l'Analyse).

Passage de N à $N+1$. On suppose la formule démontrée à l'ordre $N+1$ pour toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^{N+1}$, et il s'agit de la démontrer à l'ordre $N+2$ pour toute fonction f de classe $\mathcal{C}^{N+2}$.

Par hypothèse de récurrence, on a

$$f(b) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + R_N(a,b);$$

donc il suffit de montrer que

$$R_N(a,b) = \frac{f^{(N+1)}(a)}{(N+1)!}\,(b-a)^{N+1} + R_{N+1}(a,b).$$

Par définition,

$$R_N(a,b) = \int_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,dt = \frac{1}{N!}\int_a^b (b-t)^N f^{(N+1)}(t)\,dt.$$

Donc, en faisant une intégration par parties :

$$\begin{aligned}
R_N(a,b) &= \frac{1}{N!}\left(\left[-\frac{(b-t)^{N+1}}{N+1} \times f^{(N+1)}(t)\right]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{N+1}}{N+1} \times f^{(N+2)}(t)\,dt\right)\\
&= \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!}\,f^{(N+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{N+1}}{(N+1)!} \times f^{(N+2)}(t)\,dt\\
&= \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!}\,f^{(N+1)}(a) + R_{N+1}(a,b).
\end{aligned}$$

Ceci termine la preuve par récurrence. □

Reformulation. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^{N+1}$, soit $a \in I$ et soit $h \in \mathbb{R}$ tel que $a+h \in I$. Alors

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k + \int_0^1 \frac{(1-s)^N}{N!}\,f^{(N+1)}(a+sh)\,h^{N+1}ds.$$

Démonstration. On applique la formule de Taylor entre a et $b := a+h$: comme $b-a = h$, on obtient

$$f(a+h) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k + R_N(a,a+h);$$

donc il s'agit de vérifier que

$$R_N(a,a+h) = \int_0^1 \frac{(1-s)^N}{N!}\,f^{(N+1)}(a+sh)\,h^{N+1}ds.$$

Pour $h = 0$, c'est évident (micro-exo) ; et pour $h \neq 0$, il suffit de faire le changement de variable qui "saute aux yeux" :

$$\begin{aligned}
R_N(a,a+h) &= \int_a^{a+h} \frac{(a+h-t)^N}{N!} f^{(N+1)}(t)\,dt\\
&= \int_0^1 \frac{\big(a+h-(a+sh)\big)^N}{N!} f^{(N+1)}(a+sh)\,hds \qquad \text{en posant } t = a+sh\\
&= \int_0^1 \frac{\big((1-s)h\big)^N}{N!} f^{(N+1)}(a+sh)\,hds\\
&= \int_0^1 \frac{(1-s)^N}{N!}\,f^{(N+1)}(a+sh)\,h^{N+1}ds.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 4.2. *Si $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^{N+1}$ et s'il existe une constante M telle que $\forall t \in I\ :\ |f^{(N+1)}(t)| \leqslant M$, alors on a pour tous $a, b \in I$:*

$$\left| f(b) - \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k \right| \leqslant M\,\frac{|b-a|^{N+1}}{(N+1)!};$$

ou si on préfère : pour tout $a \in I$ et pour tout h tel que $a+h \in I$,

$$\left| f(a+h) - \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,h^k \right| \leqslant M\,\frac{|h|^{N+1}}{(N+1)!}.$$

*Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Taylor-Lagrange**.*

Démonstration. On montre l'inégalité sous la 2ème forme. Avec les notations du théorème, il s'agit de vérifier que

$$|R_N(a, a+h)| \leqslant M\,\frac{|h|^{N+1}}{(N+1)!};$$

ce qui se fait tout seul :

$$\begin{aligned}
|R_N(a, a+h)| &= \left| \int_0^1 \frac{(1-s)^N}{N!}\, f^{(N+1)}(a+sh)\, h^{N+1} ds \right| \\
&\leqslant \int_0^1 |\cdots|\, ds \\
&= |h|^{N+1} \int_0^1 \frac{(1-s)^N}{N!}\, \underbrace{\left|f^{(N+1)}(a+sh)\right|}_{\leqslant M}\, ds \\
&\leqslant M\,|h|^{N+1} \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-s)^N}{N!}\, ds}_{\left[-\frac{(1-s)^N}{(N+1)!}\right]_0^1} \\
&= M\,|h|^{N+1} \times \frac{1}{(N+1)!}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 4.3. Si la fonction f est à valeurs réelles, on a même une *égalité* de Taylor-Lagrange : il existe un nombre réel $c = c_{N,a,b}$ compris entre a et b tel que

$$f(b) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\,(b-a)^k + \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!}\, f^{(N+1)}(c).$$

Démonstration. Supposons que $a < b$. Il s'agit de montrer que $R_N(a,b)$ est de la forme $\frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!}\, f^{(N+1)}(c)$ pour un certain $c \in [a,b]$. Dans ce qui suit, on suppose que $a < b$.

Comme f est supposée de classe $\mathcal{C}^{N+1}$, la fonction $f^{(N+1)}$ est continue sur $[a,b]$, donc elle possède un maximum M et un minimum m sur $[a,b]$. Par définition de $R_N(a,b)$, on a alors

$$\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times m\, dt \leqslant R_N(a,b) \leqslant \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} \times M\, dt.$$

Comme de plus

$$\int_a^b \frac{(b-t)^N}{N!} = \left[-\frac{(b-t)^{N+1}}{(N+1)!}\right]_a^b = \frac{(b-a)^{N+1}}{(N+1)!},$$

on en déduit

$$m \leqslant \frac{(N+1)!}{(b-a)^{N+1}}\, R_N(a,b) \leqslant M.$$

Donc, par définition de m et M et d'après le Théorème des valeurs intermédiaires (applicable car $f^{(N+1)}$ est continue), il existe bien un $c \in [a,b]$ tel que $f^{(N+1)}(c) = \frac{(N+1)!}{(b-a)^{N+1}}\, R_N(a,b)$. □

Exercice. Montrer qu'il n'y a pas d'égalité de Taylor-Lagrange pour les fonctions à valeurs complexes. (Prendre $N = 0$ et considérer $f(t) = e^{it}$.)

Remarque 4.4. La formule de Taylor permet de montrer que si $f : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^n$ (avec $n \geqslant 1$), alors f possède un développement limité à l'ordre n en tout point $a \in I$; autrement dit qu'il existe des constantes $c_0, \dots, c_n$ (dépendant de a) telles que

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o(h^n) \qquad \text{quand } h \to 0.$$

Démonstration. Fixons $a \in I$. Pour h tel que $a + h \in I$, on applique la formule de Taylor à l'ordre n, *i.e.* avec $N = n-1$, entre a et $a+h$: on obtient

$$f(a+h) = c_0 + c_1 h + \cdots c_{n-1} h^{n-1} + R_{n-1}(a, a+h),$$

avec

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \text{pour } k = 0, \dots, n-1.$$

Donc il s'agit de montrer qu'il existe une constante c_n telle que

$$R_{n-1}(a, a+h) = c_n h^n + o(h^n) \qquad \text{quand } h \to 0.$$

Autrement dit, on veut montrer qu'on peut écrire

$$R_{n-1}(a, a+h) = c_n h^n + h^n \varepsilon(h) \qquad \text{où} \quad \varepsilon(h) \to 0 \text{ quand } h \to 0.$$

On a

$$R_{n-1}(a, a+h) = \int_0^1 \frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, f^{(n)}(a+sh)\, h^n ds,$$

et comme la fonction $f^{(n)}$ est continue au point a, on peut écrire

$$f^{(n)}(a+sh) = f^{(n)}(a) + \eta(sh), \qquad \text{où } \eta(u) \to 0 \text{ quand } u \to 0.$$

Donc

$$\begin{aligned}
R_{n-1}(a, a+h) &= \int_0^1 \frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!} \left(f^{(n)}(a) + \eta(sh)\right) h^n ds \\
&= f^{(n)}(a) h^n \underbrace{\int_0^1 \frac{(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}\, ds}_{\left[-\frac{(1-s)^n}{n!}\right]_0^1} + h^n \int_0^1 \eta(sh)\, ds \\
&= \underbrace{\frac{f^{(n)}(a)}{n!}}_{c_n}\, h^n + h^n \int_0^1 \eta(sh)\, ds.
\end{aligned}$$

Il ne reste alors plus qu'à montrer que $\varepsilon(h) := \int_0^1 \eta(sh)\, ds$ tend vers 0 quand $h \to 0$; ce qui n'est pas difficile en utilisant le fait que $\eta(u) \to 0$ quand $u \to 0$ (exo). □

Exercice. Démontrer plus rapidement ce résultat dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^{n+1}$ et à valeurs réelles.

4.2. Une application : développement de l'exponentielle "en série".

NOTATION. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes, et pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

Si A_n admet une limite quand $n \to \infty$, on dit que **la série $\sum a_k$ converge**, et on pose

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k := \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k.$$

EXEMPLE. Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < 1$, alors la série $\sum z^k$ converge, et on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}\cdot$$

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = 1 + z + \cdots + z^n = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}\cdot$$

De plus, comme $|z| < 1$ on sait que $z^n \to 0$ quand $n \to \infty$. Donc $\sum_{k=0}^{n} z^k \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{1-z}\cdot$ □

EXERCICE 1. Montrer que dans le cas où les a_k sont réels et $\geqslant 0$, la série $\sum a_k$ converge si et seulement si il existe une constante M telle que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ \sum_{k=0}^{n} a_k \leqslant M$.

EXERCICE 2. Soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a

$$\int_2^{n+1} \frac{dt}{t^\alpha} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha} \leqslant \int_1^{n} \frac{dt}{t^\alpha};$$

et en déduire que la série $\sum \frac{1}{k^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

THÉORÈME 4.5. *Pour tout $z \in \mathbb{C}$, la série $\sum \frac{z^k}{k!}$ converge et on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!} = e^z.$$

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{C}$. Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\varphi(t) := e^{zt}.$$

La fonction φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$, et on a (micro-exo)

$$\varphi^{(k)}(t) = z^k e^{zt} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

En particulier :

$$\varphi^{(k)}(0) = z^k.$$

Enfin, $\varphi(1) = e^z$. Donc, pour $n \in \mathbb{N}$ quelconque, la formule de Taylor à l'ordre $n+1$ entre $a = 0$ et $b = 1$ s'écrit

$$e^z = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}(1-0)^k + R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!} + R_n,$$

où

$$R_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\varphi^{(n+1)}(t)\,dt = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1}e^{zt}dt.$$

Il suffit donc de montrer que $R_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

On a

$$|R_n| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(1-t)^n}{n!} \times z^{n+1}e^{zt}\right| dt = |z|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,|e^{tz}|\,dt.$$

De plus, la fonction $t \mapsto e^{tz}$ est continue sur $[0,1]$, donc *bornée* : on a une constante $M = M_z$ telle que $\forall t \in [0,1] \quad |e^{tz}| \leqslant M$. (En fait, on peut prendre $M := e^{|z|}$ car $|e^{tz}| = e^{\mathrm{Re}(tz)} \leqslant e^{|tz|} \leqslant e^{|z|}$ si $t \in [0,1]$.) Donc

$$|R_n| \leqslant M\,|z|^{n+1} \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\,dt = M\,\frac{|z|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Pour conclure, il suffit donc de démontrer le fait suivant :

Fait. Pour tout $C \in \mathbb{R}^+$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{C^n}{n!} = 0$.

Preuve du Fait. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $n_0 \geqslant 2C$. Pour tout $n > n_0$, on a

$$\frac{C^n}{n!} = \frac{C^{n_0}}{n_0!} \times \frac{C^{n-n_0}}{(n_0+1)(n_0+2)\cdots n} = \frac{C^{n_0}}{n_0!} \times \underbrace{\frac{C}{n_0+1}}_{\leqslant 1/2}\,\underbrace{\frac{C}{n_0+2}}_{\leqslant 1/2} \cdots \underbrace{\frac{C}{n}}_{\leqslant 1/2};$$

et donc

$$0 \leqslant \frac{C^n}{n!} \leqslant \frac{C^{n_0}}{n_0!} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-n_0} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

□

□

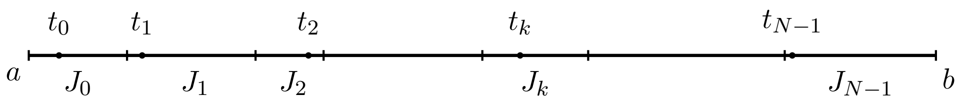
Chapitre 4

Sommes de Riemann

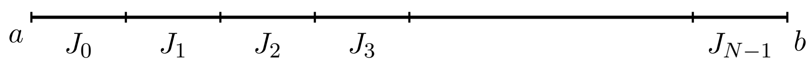
1. Découpages pointés et sommes de Riemann

Définition 1.1. *Soit $[a, b]$ un intervalle fermé borné de $\mathbb{R}$. Un* ***découpage pointé*** *de $[a, b]$ est une suite finie $\mathcal{D} = \big((J_0, t_0), \ldots, (J_{N-1}, t_{N-1})\big)$ où*

- *les J_k sont des intervalles fermés formant un découpage de $[a, b]$;*
- *$t_k \in J_k$ pour $k = 0, \ldots, N-1$.*



Exemple. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ donné, soit $(J_0, \ldots, J_{N-1})$ le découpage de $[a, b]$ en N intervalles de même longueur.



Par définition, on a

$$J_k = \left[a + k\,\frac{b-a}{N}\,,\ a + (k+1)\,\frac{b-a}{N}\right] \qquad \text{pour } k = 0, \ldots, N-1.$$

Si on pose

$$\xi_k := a + k\,\frac{b-a}{N} \qquad \text{pour } k = 0, \ldots, N,$$

de sorte que ξ_k est la borne de gauche de J_k si $0 \leqslant k \leqslant N-1$ et la borne de droite de J_{k-1} si $1 \leqslant k \leqslant N$, alors

$$\underline{\mathcal{D}}_N := \big((J_0, \xi_0), (J_1, \xi_1), \ldots, (J_{N-1}, \xi_{N-1})\big) \quad \text{et}$$
$$\overline{\mathcal{D}}_N := \big((J_0, \xi_1), (J_1, \xi_2), \ldots, (J_{N-1}, \xi_N)\big)$$

sont deux découpages pointés de $[a, b]$, qu'on appellera dans la suite les **découpages pointé réguliers d'ordre** N de $[a, b]$.

Notation. On note $\mathbf{DP}([a, b])$ l'ensemble de tous les découpages pointés de l'intervalle $[a, b]$.

Définition 1.2. *Soit $\mathcal{D} = \big((J_0, t_0), \ldots, (J_{N-1}, t_{N-1})\big) \in \mathbf{DP}([a, b])$, et soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. La* ***somme de Riemann*** *pour f associée à $\mathcal{D}$ est la somme*

$$R(f, \mathcal{D}) := \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\,|J_k| = \sum_{(J,t) \in \mathcal{D}} f(t)\,|J|.$$

Exemple. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right), \quad \text{et}$$

$$R(f,\overline{\mathcal{D}}_N) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right).$$

Démonstration. Par définition, $\underline{\mathcal{D}}_N = \big((J_0,\xi_0),\dots(J_{N-1},\xi_{N-1})\big)$ où $|J_k| = \frac{b-a}{N}$ pour tout k et $\xi_k = a + k\,\frac{b-a}{N}$. Donc

$$R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) = \sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \times \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right).$$

De même,

$$R(f,\overline{\mathcal{D}}_N) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + (k+1)\,\frac{b-a}{N}\right) = \frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right).$$

□

Remarque. D'après les formules précédentes, on a

$$R(f,\overline{\mathcal{D}}_N) - R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) = \frac{b-a}{N}\,(f(b) - f(a)).$$

En particulier, pour *n'importe quelle* fonction f,

$$R(f,\overline{\mathcal{D}}_N) - R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) \to 0 \qquad \text{quand } N \to \infty.$$

2. Convergence des sommes de Riemann

2.1. Deux petits calculs.

Exemple 1. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := t$. Alors

$$R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2} \qquad \text{et} \qquad R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) \xrightarrow{N\to\infty} \frac{b^2}{2} - \frac{a^2}{2}.$$

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) &= \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \\ &= \frac{b-a}{N} \times \left(Na + \frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} k\right) \\ &= (b-a)\left(a + \frac{(b-a)}{N^2} \times \frac{N(N-1)}{2}\right) \\ &= (b-a)\left(a + \frac{(b-a)}{2} \times \frac{N-1}{N}\right). \end{aligned}$$

Comme $\frac{N-1}{N} \to 1$ quand $N \to \infty$, on en déduit que

$$R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) \xrightarrow{N\to\infty} (b-a)\left(a + \frac{b-a}{2}\right) = (b-a)\,\frac{b+a}{2} = \frac{b^2-a^2}{2}.$$

Et de même pour $R(f,\underline{\mathcal{D}}_N)$ puisque $R(f,\overline{\mathcal{D}}_N) - R(f,\underline{\mathcal{D}}_N) \to 0$. □

EXEMPLE 2. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := e^t$. Alors

$$R(f, \underline{\mathcal{D}}_N) \xrightarrow{N\to\infty} e^b - e^a \qquad \text{et} \qquad R(f, \underline{\mathcal{D}}_N) \xrightarrow{N\to\infty} e^b - e^a.$$

Démonstration. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} R(f, \underline{\mathcal{D}}_N) &= \frac{b-a}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{a+k\frac{b-a}{N}} \\ &= \frac{b-a}{N}\, e^a \times \sum_{k=0}^{N-1} \big(e^{\frac{b-a}{N}}\big)^k \qquad \text{car } e^{a+k\frac{b-a}{N}} = e^a \times (e^{\frac{b-a}{N}})^k \\ &= \frac{b-a}{N}\, e^a \times \frac{1-e^{b-a}}{1-e^{\frac{b-a}{N}}} \\ &= (e^b - e^a) \times \frac{\frac{b-a}{N}}{e^{\frac{b-a}{N}} - 1}. \end{aligned}$$

Comme $\frac{e^u-1}{u} \to 1$ quand $u \to 0$ (car $e^u \sim 1 + u$ au voisinage de 0), on en déduit que $R(f, \underline{\mathcal{D}}_N) \to e^b - e^a$. Et de même pour $R(f, \underline{\mathcal{D}}_N)$. □

Sur les deux exemples qu'on vient de traiter, on *constate* que les sommes de Riemann $R(f, \underline{\mathcal{D}}_N)$ et $R(f, \overline{\mathcal{D}}_N)$ tendent vers $\int_a^b f(t)\, dt$ quand $N \to \infty$. Même si les calculs qu'on a fait sont assez particuliers, on se doute que ceci ne peut pas être une simple coïncidence...

2.2. Un résultat général.

NOTATION. Pour tout $\mathcal{D} = \big((J_0, t_0), \dots, (J_{N-1}, t_{N-1})\big) \in \mathbf{DP}([a, b])]$, on pose

$$|\mathcal{D}| := \max\big(|J_0|, \dots, |J_{N-1}|\big).$$

On dit que $|\mathcal{D}|$ est le **pas** du découpage pointé $\mathcal{D}$.

EXEMPLE. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour les découpages réguliers $\underline{\mathcal{D}}_N$ et $\overline{\mathcal{D}}_N$, on a

$$|\underline{\mathcal{D}}_N| = \frac{b-a}{N} = |\overline{\mathcal{D}}_N|.$$

THÉORÈME 2.1. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable au sens de Riemann quelconque, alors $R(f, \mathcal{D})$ tend vers $\int_a^b f(t)\, dt$ quand $|\mathcal{D}| \to 0$. Autrement dit : pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que*

$$\left| R(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \varepsilon \qquad \textit{pour tout } \mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a, b]) \textit{ vérifiant } |\mathcal{D}| < \delta.$$

Preuve dans le cas où f est continue. On aura besoin du fait suivant (qui servira aussi dans la preuve du cas général).

FAIT. Pour tout $\mathcal{D} = \big((J_0, t_0), \dots, (J_{N-1}, t_{N-1})\big) \in \mathbf{DP}([a, b])$, on a

$$\left| R(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{J_k} |f(t) - f(t_k)|\, dt. \tag{2.1}$$

Preuve du Fait. Par Chasles, on peut écrire

$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{J_k} f(t)\,dt.$$

De plus, on a

$$f(t_k)\,|J_k| = \int_{J_k} f(t_k)\,dt \qquad \text{pour } k = 0, \dots, N-1,$$

et donc

$$R(f, \mathcal{D}) = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{J_k} f(t_k)\,dt.$$

On obtient ainsi

$$R(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt = \sum_{k=0}^{N-1} \int_{J_k} \big(f(t_k) - f(t)\big)\,dt;$$

d'où le résultat par l'inégalité triangulaire (micro-exo). □

Maintenant, soit $\varepsilon > 0$ fixé. On cherche : un $\delta > 0$ tel que $\left|R(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \varepsilon$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a, b])$ vérifiant $|\mathcal{D}| < \delta$.

Comme f est continue sur $[a, b]$, elle est uniformément continue (Théorème 1.6 du Chapitre 1). Donc on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|f(v) - f(u)| \leqslant \varepsilon/(b-a) \qquad \text{pour tous } u, v \in [a, b] \text{ vérifiant } |v - u| < \delta.$$

On va montrer que ce δ convient.

Soit $\mathcal{D} = \big((J_0, t_0), \dots, (J_{N-1}, t_{N-1})\big) \in \mathbf{DP}([a, b])$ vérifiant $|\mathcal{D}| < \delta$, *i.e.*

$$|J_k| < \delta \qquad \text{pour } k = 0, \dots, N-1.$$

Si $k \in [\![0, N-1]\!]$ et si $t \in J_k$, alors $|t - t_k| \leqslant |J_k| < \delta$ puisque $t_k \in J_k$; donc, par définition de δ, on a

$$|f(t) - f(t_k)| \leqslant \varepsilon/(b-a) \qquad \text{pour tout } k \text{ et pour tout } t \in J_k.$$

Par (2.1), on en déduit

$$\begin{aligned} \left|R(f, \mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt\right| &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{J_k} |f(t) - f(t_k)|\,dt \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{J_k} \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt \\ &= \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dt = \varepsilon. \end{aligned}$$

□

Preuve dans le cas général. On veut montrer la convergence des sommes de Riemann vers $\int_a^b f(t)\,dt$ pour toute fonction (R)-intégrable $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. En considérant séparément $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, on se ramène au cas d'une fonction f à valeurs réelles.

Cas 1. On suppose que f est *en escalier*.

Soit $S = (s_0, \dots, s_M)$ une subdivision de $[a,b]$ adaptée à f :

$$f(t) \equiv c_m \quad \text{sur } I_m =]s_m, s_{m+1}[\quad \text{pour } m = 0, \dots, M-1.$$

Soit également C une constante telle que

$$|f(t)| \leqslant C \quad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

Fait. Si $\mathcal{D} = \big((J_0, t_0), \dots, (J_{N-1}, t_{N-1})\big)$ est un découpage pointé quelconque de $[a,b]$, alors

$$\left| R(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant 4MC\,|\mathcal{D}|.$$

Preuve du Fait. Par (2.1), on sait que

$$\left| R(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} \int_{J_k} |f(t) - f(t_k)|\,dt.$$

De plus, si $k \in [\![0, N-1]\!]$, alors

- ou bien J_k contient un point s_m ;
- ou bien J_k est entièrement contenu dans un intervalle $]s_m, s_{m+1}[$, et donc $f(x) = c_m$ pour tout $x \in J_k$.

Donc, si on pose

$$\mathbf{K} = \big\{k \in [\![0, N-1]\!];\ J_k \text{ contient un point } s_m\big\},$$

alors

$$\forall k \notin \mathbf{K} \ :\ \int_{J_k} |f(t) - f(t_k)|\,dt = \int_{J_k} |c_m - c_m|\,dt = 0.$$

Par conséquent, on a en fait

$$\begin{aligned}\left| R(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt \right| &\leqslant \sum_{k \in \mathbf{K}} \int_{J_k} \underbrace{|f(t) - f(t_k)|}_{\leqslant 2C}\,dt \\ &\leqslant \sum_{k \in \mathbf{K}} 2C\,|J_k| \\ &\leqslant 2C\,|\mathcal{D}| \times \#\mathbf{K}.\end{aligned}$$

Enfin, pour tout $m \in [\![0, M]\!]$, le point s_m appartient à au plus 2 intervalles J_k, et même à 1 seul J_k si $m = 0$ ou $m = M$. Donc

$$\#\mathbf{K} \leqslant 1 + 2 \times (M-1) + 1 = 2M,$$

ce qui termine la preuve du Fait. □

Par le Fait, on voit que si on choisit δ tel que $4MC\delta \leqslant \varepsilon$, alors

$$\left| R(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt \right| \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } \mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a,b]) \text{ vérifiant } |\mathcal{D}| < \delta.$$

Donc on a le résultat souhaité dans le cas d'une fonction f en escalier.

Cas 2. On suppose seulement que f est (R)-intégrable sur $[a,b]$.

Soit $\varepsilon > 0$ donné. Comme f est intégrable sur $[a,b]$, on peut trouver deux fonctions en escalier φ et ψ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon/2.$$

On a alors en particulier

$$\int_a^b \varphi \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b \psi, \quad \text{et}$$

$$R(\varphi,\mathcal{D}) \leqslant R(f,\mathcal{D}) \leqslant R(\psi,\mathcal{D}) \quad \text{pour tout } \mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a,b]).$$

Donc, si $\mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a,b])$ alors

$$R(\varphi,\mathcal{D}) - \int_a^b \psi \leqslant R(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt \leqslant R(\psi,\mathcal{D}) - \int_a^b \varphi.$$

Comme $\int_a^b \psi \leqslant \int_a^b \varphi + \varepsilon/2$, on en déduit

$$\left(R(\varphi,\mathcal{D}) - \int_a^b \varphi\right) - \varepsilon/2 \leqslant R(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \left(R(\psi,\mathcal{D}) - \int_a^b \psi\right) + \varepsilon/2;$$

et donc *a fortiori*

$$(*) \qquad -\left|R(\varphi,\mathcal{D}) - \int_a^b \varphi\right| - \varepsilon/2 \leqslant R(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \left|R(\psi,\mathcal{D}) - \int_a^b \psi\right| + \varepsilon/2$$

pour tout $\mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a,b])$.
Par le Cas 1 appliqué à φ et à ψ, on peut ensuite trouver $\delta > 0$ tel que

$$(**) \qquad \left|R(\varphi,\mathcal{D}) - \int_a^b \varphi\right| \leqslant \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad \left|R(\psi,\mathcal{D}) - \int_a^b \psi\right| \leqslant \varepsilon/2$$

pour tout $\mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a,b])$ vérifiant $|\mathcal{D}| < \delta$. (On prend le plus petit des deux δ, celui associé à φ et celui associé à ψ.)
En combinant $(*)$ et $(**)$, on obtient

$$-\varepsilon \leqslant R(f,\mathcal{D}) - \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \varepsilon \quad \text{pour tout } \mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a,b]) \text{ vérifiant } |\mathcal{D}| < \delta;$$

ce qui est le résultat souhaité. □

COROLLAIRE 2.2. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ est intégrable au sens de Riemann, alors*

$$\frac{b-a}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \xrightarrow{N\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt \qquad \text{et}$$

$$\frac{b-a}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(a + k\,\frac{b-a}{N}\right) \xrightarrow{N\to\infty} \int_a^b f(t)\,dt.$$

Démonstration. C'est clair par le théorème puisque les sommes considérées sont les sommes de Riemann “régulières” $R(f,\underline{\mathcal{D}}_N)$ et $R(f,\overline{\mathcal{D}}_N)$ et que $|\underline{\mathcal{D}}_N| = \frac{b-a}{N} = |\overline{\mathcal{D}}_N|$ tend vers 0 quand $N \to \infty$. □

Remarque. Explication de la notation $\int_a^b f(t)\,dt$.
Soit $T = (t_0, \ldots, t_N)$ une subdivision de $[a, b]$ et soit $(J_0, \ldots, J_{N-1})$ le découpage de $[a, b]$ associé ($J_k = [t_k, t_{k+1}]$). Pour $k = 0, \ldots, N-1$, posons

$$\delta t_k := t_{k+1} - t_k = |J_k|.$$

Alors, pour le découpage pointé $\mathcal{D} = \big((J_0, t_0), \ldots, (J_{N-1}, t_{N-1})\big)$, on a

$$\begin{aligned} R(f, \mathcal{D}) &= \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\,\delta t_k \\ &= S_a^b\, f(t)\,\delta t, \end{aligned}$$

où S_a^b veut dire "somme pour tous les t dans $[a, b[$ appartenant à la subdivision T". Avec ces notations, le Théorème 2.1 s'énonce comme suit :

$$S_a^b\, f(t)\,\delta t \to \int_a^b f(t)\,dt \quad \text{quand } \delta t \to 0.$$

Ainsi, on peut dire que $\int_a^b f(t)\,dt$ est ce qu'on obtient quand, dans la somme $S_a^b\, f(t)\,\delta t$, le δt devient un "dt infinitésimal". Le symbole de somme S est remplacé par un "S allongé" $\int$, qu'on peut interpréter comme un symbole de "somme continue" (on "somme" une infinité non dénombrable d'"infinitésimaux"). Que ceci soit ou non convaincant, il est important de retenir le "slogan" suivant :

Une intégrale, c'est une limite de sommes.

3. Réciproque

Le théorème suivant montre que la convergence des sommes de Riemann *caractérise* l'intégrabilité au sens de Riemann.

Théorème 3.1. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$. On suppose que $R(f, \mathcal{D})$ admet une limite quand $|\mathcal{D}| \to 0$; autrement dit, qu'il existe un nombre $L \in \mathbb{C}$ tel que la chose suivante ait lieu : pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que*

$$|R(f, \mathcal{D}) - L| \leqslant \varepsilon \qquad \textit{pour tout } \mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a, b]) \textit{ vérifiant } |\mathcal{D}| < \delta.$$

Alors on peut conclure que f est (R)*-intégrable sur $[a, b]$ et que $L = \int_a^b f(t)\,dt$.*

Démonstration. En considérant séparément $\mathrm{Ref}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$, on se ramène au cas où f est à valeurs réelles (et donc $L \in \mathbb{R}$).

(i) Montrons d'abord que f est bornée.
Si on prend $\varepsilon := 6$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|R(f, \mathcal{D}) - L| \leqslant 6$ pour tout $\mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a, b])$ vérifiant $|S| < \delta$. On a alors

$$|R(f, \mathcal{D}) \leqslant 6 + |L| \qquad \text{pour tout } \mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a, b]) \text{ vérifiant } |\mathcal{D}| < \delta.$$

Fixons un découpage pointé $\mathcal{D} = \big((J_0, t_0), \ldots, (J_{N-1}, t_{N-1}\big)$ tel que $|\mathcal{D}| < \delta$. Alors, pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$ et pour tout $t \in J_k$, le découpage pointé $\mathcal{D}_t$ obtenu en remplaçant t_k par t dans $\mathcal{D}$ vérifie $|\mathcal{D}_t| = |\mathcal{D}| < \delta$; donc $|R(f, \mathcal{D}_t)| \leqslant |L| + 6$. On a ainsi

$$\left| f(t)\,|J_k| + \sum_{l \neq k} f(t_l)\,|J_l| \right| \leqslant 6 + |L|,$$

et donc

$$|f(t)|\,|J_k| \leqslant 6 + |L| + \sum_{l\neq k} |f(t_l)|\,|J_l| \quad \text{pour tout } k \text{ et pour tout } t \in J_k.$$

Par conséquent, si on pose

$$M := 6 + |L| + \max_{0\leqslant k\leqslant N-1} \sum_{l\neq k} |f(t_l)|\,|J_l| \qquad \text{et} \qquad \alpha := \min(|J_0|, \dots, |J_{N-1}|),$$

alors

$$|f(t)| \leqslant \frac{M}{\alpha} \quad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

(ii) Montrons maintenant que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver deux fonctions en escalier φ et ψ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Par hypothèse, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|R(f,\mathcal{D}) - L| \leqslant \varepsilon/2 \quad \text{pour tout } \mathcal{D} \in \mathbf{DP}([a,b]) \text{ vérifiant } |\mathcal{D}| < \delta.$$

Dans la suite, on fixe un découpage $(J_0, \dots, J_{N-1})$ de $[a,b]$ en intervalles fermés tels que $|J_k| < \delta$ pour $k = 0, \dots, N-1$. On écrit $J_k = [s_k, s_{k+1}]$, et on pose

$$m_k := \inf_{J_k} f \qquad \text{et} \qquad M_k := \sup_{J_k} f.$$

Comme la fonction f est bornée, m_k et M_k sont des nombres réels bien définis.

Fait. On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1} (M_k - m_k)\,|J_k| \leqslant \varepsilon$.

Preuve du Fait. Soit $\eta > 0$. Pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, on peut trouver des points $\underline{t}_k, \overline{t}_k \in J_k$ tels que

$$f(\underline{t}_k) \leqslant m_k + \eta \qquad \text{et} \qquad f(\overline{t}_k) \geqslant M_k - \eta.$$

Alors $\underline{\mathcal{D}} := \big((J_0, \underline{t}_0), \dots, (J_{N-1}, \underline{t}_{N-1})\big)$ et $\overline{\mathcal{D}} := \big((J_0, \overline{t}_0), \dots, (J_{N-1}, \overline{t}_{N-1})\big)$ sont des découpages pointés de $[a,b]$ vérifiant $|\underline{\mathcal{D}}| < \delta$ et $|\overline{\mathcal{D}}| < \delta$. Par définition de δ, on a donc $|R(f,\underline{\mathcal{D}}) - L| \leqslant \varepsilon/2$ et $|R(f,\underline{\mathcal{D}}) - L| \leqslant \varepsilon/2$, et donc

$$|R(f,\overline{\mathcal{D}}) - R(f,\underline{\mathcal{D}})| \leqslant 2\varepsilon/2 = \varepsilon.$$

Mais par le choix des $\underline{t}_k$ et des $\overline{t}_k$, on a aussi

$$R(f,\underline{\mathcal{D}}) = \sum_{k=0}^{N-1} f(\underline{t}_k)\,|J_k| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} (m_k + \eta)\,|J_k| = \sum_{k=0}^{N-1} m_k\,|J_k| + \eta(b-a);$$

et de même

$$R(f,\overline{\mathcal{D}}) \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} M_k\,|J_k| - \eta(b-a).$$

Donc

$$R(f,\overline{\mathcal{D}}) - R(f,\underline{\mathcal{D}}) \geqslant \sum_{k=0}^{N-1} (M_k - m_k)\,|J_k| - 2\eta(b-a).$$

On obtient ainsi

$$\sum_{k=0}^{N-1} (M_k - m_k)\,|J_k| \leqslant \varepsilon + 2\eta(b-a) \qquad \text{pour tout } \eta > 0;$$

d'où le Fait. □

Soient maintenant φ et ψ les fonctions en escalier définies comme suit :

$$\begin{cases} \varphi(t) \equiv m_k \quad \text{et} \quad \psi(t) \equiv M_k & \text{sur} \quad I_k =]s_k, s_{k+1}[, \\ \varphi(s_k) = f(s_k) = \psi(s_k) & \text{pour} \quad k = 0, \dots, N. \end{cases}$$

Par définition, on a

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) = \sum_{k=0}^{N-1} (M_k - m_k)\,|J_k| \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, on a montré que f est (R)-intégrable sur $[a,b]$. Enfin, on a nécessairement $L = \int_a^b f(t)\,dt$ d'après le Théorème 2.1.

□

Chapitre 5

Caractérisation de l'intégrabilité

1. Points de continuité et points de discontinuité d'une fonction

NOTATION. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, on note $\mathrm{Cont}(f)$ l'ensemble des *points de continuité* de f, *i.e.*

$$\mathrm{Cont}(f) := \big\{x \in [a,b];\ f \text{ est continue au point } x\big\};$$

et on note $\mathrm{Disc}(f)$ l'ensemble des *points de discontinuité* de f :

$$\begin{aligned}\mathrm{Disc}(f) &:= \big\{x \in [a,b];\ f \text{ n'est } \textit{pas} \text{ continue au point } x\big\}\\ &= [a,b]\backslash\mathrm{Cont}(f).\end{aligned}$$

Exemple 0. Si f est continue, alors $\mathrm{Disc}(f) = \varnothing$ (et réciproquement).

Exemple 1. Si f est en escalier sur $[a,b]$, alors $\mathrm{Disc}(f)$ est un ensemble fini.

Exemple 2. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 1/2 < t \leqslant 1\\ \frac{1}{2} & \text{si} \quad 1/3 < t \leqslant 1/2\\ \frac{1}{3} & \text{si} \quad 1/4 < t \leqslant 1/3\\ \vdots & \\ 0 & \text{si} \qquad t = 0\end{cases}$$

Alors f est croissante et $\mathrm{Disc}(f) = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\}$. Donc $\mathrm{Disc}(f)$ est infini mais cependant *dénombrable*.

Exemple 3. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction réglée quelconque, alors $\mathrm{Disc}(f)$ est dénombrable.

Démonstration. Comme f est réglée, elle peut être approchée par des fonctions en escalier : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction en escalier θ telle que $|\theta(t) - f(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout $t \in [a,b]$. En prenant $\varepsilon = 2^{-n}$ pour $n \in \mathbb{N}$, on obtient ainsi une suite $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fonctions en escalier telle que

$$\forall n\ \forall t \in [a,b]\ :\ |\theta_n(t) - f(t)| \leqslant 2^{-n}.$$

Le point clé est alors le fait suivant :

FAIT. Soit $x \in [a,b]$. Si x est un point de continuité de toutes les fonctions θ_n, alors x est un point de continuité de f.

Preuve du Fait. Supposons que x soit un point de continuité de toutes les fonctions θ_n. Soit $\varepsilon > 0$, et choisissons un entier n tel que $2^{-n} < \varepsilon/3$. Alors

$$|\theta_n(t) - f(t)| < \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } t \in [a,b].$$

Pour tout $u \in [a,b]$, on a donc

$$\begin{aligned}|f(u) - f(x)| &\leqslant |f(u) - \theta_n(u)| + |\theta_n(u) - \theta_n(x)| + |\theta_n(x) - f(x)| \\ &\leqslant 2\varepsilon/3 + |\theta_n(u) - \theta_n(x)|.\end{aligned}$$

De plus, θ_n est par hypothèse continue au point x. Donc on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$|\theta_n(u) - \theta_n(x)| < \varepsilon/3 \quad \text{pour tout } u \in [a,b] \text{ vérifiant } |u - x| < \delta.$$

Ainsi, on voit que

$$|u - x| < \delta \implies |f(u) - f(x)| < 2\varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon;$$

ce qui prouve que f est continue au point x. □

Posons maintenant

$$D := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Disc}(\theta_n).$$

Comme chaque ensemble $\mathrm{Disc}(\theta_n)$ est fini (Exemple 1), on voit que D est dénombrable. De plus, le Fait dit exactement que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cont}(\theta_n) \subseteq \mathrm{Cont}(f)$. Donc

$$\mathrm{Disc}(f) \subseteq \Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Cont}(\theta_n)\Big)^c = D;$$

et donc $\mathrm{Disc}(f)$ est dénombrable. □

Exemple 4. Supposons $a < b$. Soit $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ la fonction fonction indicatrice de $\mathbb{Q}$ (restreinte à $[a,b]$) :

$$\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad t \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si} \quad t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Alors $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est continue en aucun point, autrement dit $\mathrm{Disc}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) = [a,b]$.

Démonstration. Soit $x \in [a,b]$ quelconque, et supposons par exemple que $x \in \mathbb{Q}$, de sorte que $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x) = 1$. Comme "$\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$", on peut trouver une suite $(t_n) \subseteq [a,b]$ telle que $t_n \notin \mathbb{Q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $t_n \to x$. Alors $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t_n) = 0$ pour tout n, donc $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t_n)$ ne tend pas vers $1 = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$. Ainsi, $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$ n'est pas continue au point x. Le raisonnement est le même si $x \notin \mathbb{Q}$ (en utilisant le fait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$). □

2. Ensembles négligeables

Notation. Si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de nombres réels positifs, on pose

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n := \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} a_n.$$

Cette limite existe dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ car les $S_N = \sum_{n=0}^N a_n$ sont $\geqslant 0$ et forment une suite *croissante* ($S_{N+1} - S_N = a_{N+1} \geqslant 0$).

Remarque. On définit de même $\sum_{n=p}^{\infty} a_n$ pour n'importe quel $p \in \mathbb{N}$.

Exemple 1. On a $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = 2$.

Démonstration. On calcule directement les "sommes partielles" :

$$\sum_{n=0}^{N} 2^{-n} = \sum_{n=0}^{N} (1/2)^N = \frac{1 - (1/2)^{N+1}}{1 - (1/2)} \xrightarrow{N\to\infty} \frac{1}{1 - (1/2)} = 2.$$

□

Exemple 2. On a $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$.

Démonstration. Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} &\geqslant \sum_{n=2}^{2^p} \frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{8}\right) + \cdots \left(\frac{1}{2^{p-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^p}\right)\\ &\geqslant \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8} + \cdots + 2^{p-1} \times \frac{1}{2^p}\\ &= \frac{p}{2};\end{aligned}$$

d'où le résultat en faisant tendre p vers l'infini. □

Exercice 5.1. Soit $(a_{l,m})_{(l,m)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une "suite double" de nombres positifs, et soit $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une énumération des $a_{l,m}$ sans répétition, *i.e.* $b_n = a_{\varphi(n)}$ où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est une bijection. Montrer qu'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{l,m}.$$

(*Suggestion* : plutôt que d'essayer d'établir le résultat directement, démontrer deux inégalités.)

Définition 2.1. *Soit $E \subseteq \mathbb{R}$. On dit que E est **négligeable** si la chose suivante a lieu : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une suite d'intervalles bornés $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que*

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \varepsilon.$$

Remarque 1. $\Delta = \varnothing$ est un intervalle borné et $|\varnothing| = 0$. Donc... $E := \varnothing$ est négligeable (prendre $\Delta_n := \varnothing$ pour tout n).

Remarque 2. Si $E \subseteq \mathbb{R}$ et si $E' \subseteq E$, alors E' est négligeable.

Le fait suivant est techniquement important.

Remarque 2.2. Dans la définition d'un ensemble négligeable, on peut remplacer "intervalle borné" par "intervalle ouvert borné".

Démonstration. Évidemment, la définition avec "intervalle ouvert borné" est plus forte que la définition initiale.

Inversement, supposons que E soit négligeable. Étant donné $\varepsilon > 0$, il s'agit de voir qu'on peut trouver une suite d'intervalles ouverts bornés $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \varepsilon$.

Comme E est négligeable, on peut trouver une suite d'intervalles bornés $(\widetilde{\Delta}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \widetilde{\Delta}_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_n| \leqslant \varepsilon/2.$$

Ensuite, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un intervalle ouvert borné Δ_n "un tout petit peu plus gros que $\widetilde{\Delta}_n$" ; de façon précise, tel que

$$\widetilde{\Delta}_n \subseteq \Delta_n \qquad \text{et} \qquad |\Delta_n| \leqslant |\widetilde{\Delta}_n| + 2^{-n}\varepsilon/4.$$

Alors
$$E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$$
puisque les Δ_n sont plus gros que les $\widetilde{\Delta}_n$, et
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| &\leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \left(|\widetilde{\Delta}_n| + 2^{-n}\varepsilon/4\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} |\widetilde{\Delta}_n| + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\varepsilon/4 \\ &\leqslant \varepsilon/2 + 2\varepsilon/4 = \varepsilon.\end{aligned}$$
□

Exemple 1. Tout singleton $\{a\} \subseteq \mathbb{R}$ est négligeable.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Si on pose $\Delta_0 := \{a\} = [a,a]$ et $\Delta_n := \varnothing$ pour $n \geqslant 1$, alors $\{a\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| = 0 \leqslant \varepsilon$ (!) □

Exemple 2. Tout ensemble *dénombrable* $E \subseteq \mathbb{R}$ est négligeable.

Démonstration. On suppose que $E \neq \varnothing$, et on écrit $E = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\Delta_n := \{a_n\} = [a_n, a_n]$. Alors $E \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| = 0 \leqslant \varepsilon$. □

Exemple 3. Si $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle non trivial, alors I n'est *pas* négligeable.

Démonstration. Par hypothèse, I contient un intervalle $[a,b]$ non trivial, i.e. avec $a < b$. Il suffit donc de montrer que $[a,b]$ n'est pas négligeable ; ce qui va découler immédiatement du fait suivant.

Fait. Si $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles ouverts telle que $[a,b] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$, alors $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| \geqslant b - a$.

Preuve du Fait. Pour tout $x \in [a,b]$, on peut trouver un entier $n(x) \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \Delta_{n(x)}$. Par le Lemme de Cousin appliqué avec $V_x := \Delta_{n(x)}$, on peut trouver une subdivision $S = (s_0, \dots, s_N)$ de $[a,b]$ telle que tout intervalle $J_k = [s_k, s_{k+1}]$ est contenu dans un certain $\Delta_{n(x_k)}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, posons
$$\mathbf{K}_n := \{k \in [\![0, N-1]\!];\ n(x_k) = n\}.$$
Par définition, on a $J_k \subseteq \Delta_n$ pour tout $k \in \mathbf{K}_n$. Comme les intervalles J_k sont "presque disjoints" (ils ne s'intersectent qu'en leurs extrémités), on en déduit (exo)
$$\sum_{k\in\mathbf{K}_n} |J_k| \leqslant |\Delta_n| \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$
De plus, les $\mathbf{K}_n$ sont deux à deux disjoints par définition, et $[\![0, N-1]\!] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbf{K}_n$. Enfin, comme il n'y a qu'un nombre fini de $n(x_k)$, il existe un entier N_0 tel que $\mathbf{K}_n = \varnothing$ pour tout $n > N_0$. Ainsi
$$[\![0, N-1]\!] = \bigcup_{n=0}^{N_0} \mathbf{K}_n \qquad \text{union disjointe.}$$

On peut donc écrire

$$b - a = \sum_{k=0}^{N-1} |J_k| = \sum_{n=0}^{N_0} \sum_{k \in \mathbf{K}_n} |J_k|;$$

et on en déduit

$$b - a \leqslant \sum_{n=0}^{N_0} |\Delta_n| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n|.$$

□

Par le Fait, on voit que si on prend $\varepsilon < b - a$, on ne pourra jamais "recouvrir" $[a, b]$ par une suite d'intervalles ouverts (Δ_n) telle que $\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \varepsilon$. Donc $[a, b]$ n'est pas négligeable, d'après la Remarque 2.2. □

Le résultat suivant est "très important".

Proposition 2.3. *Toute réunion dénombrable d'ensembles négligeables est encore un ensemble négligeable. Autrement dit : si $(E_l)_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles négligeables, alors $E = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l$ est négligeable.*

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme les E_l sont négligeables, on peut, pour tout $l \in \mathbb{N}$, trouver une suite $(\Delta_{l,m})_{m \in \mathbb{N}}$ d'intervalles ouverts telle que

$$E_l \subseteq \bigcup_{m \in \mathbb{N}} I_{l,m} \qquad \text{et} \qquad \sum_{m=0}^{\infty} |\Delta_{l,m}| \leqslant 2^{-l}\, \varepsilon/2.$$

Alors

$$E = \bigcup_{l \in \mathbb{N}} E_l \subseteq \bigcup_{l \in \mathbb{N}} \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \Delta_{l,m} = \bigcup_{(l,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}} \Delta_{l,n}.$$

Maintenant, comme l'ensemble $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ est dénombrable, on peut énumérer les $\Delta_{l,m}$ en une suite $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, sans répétition. Alors $E \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n$; et d'après l'Exercice 5.1, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |\Delta_{l,m}| \leqslant \sum_{l=0}^{\infty} 2^{-l}\, \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

□

3. Théorème de Lebesgue-Vitali

Soit $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. On sait que toute fonction réglée est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$, et que la fonction $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}} : [a, b] \to \mathbb{R}$ définie par $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t) = 1$ si $t \in \mathbb{Q}$ et $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(t) = 0$ si $t \notin \mathbb{Q}$ n'est pas intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$. Par ailleurs, on sait aussi que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction réglée est dénombrable, donc en particulier négligeable, et que $\mathrm{Disc}(\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}) = [a, b]$ n'est pas négligeable. Le théorème suivant montre que ceci n'est pas du tout un hasard.

Théorème 3.1. *Une fonction $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$ si et seulement si f est bornée et l'ensemble de ses points de discontinuité est négligeable.*

Ce théorème est remarquablement général, et permet en particulier de retrouver très rapidement un certain nombres de résultats qu'on a déjà démontrés "à la main".

Corollaire 3.2. *Toute fonction réglée $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable au sens de Riemann.*

Démonstration. Si f est réglée, alors f est bornée (Exercice 2.1 du Chapitre 2), et $\mathrm{Disc}(f)$ est dénombrable. $\square$

Corollaire 3.3. *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est bornée et n'a qu'un nombre fini de points de discontinuité, alors f est intégrable au sens de Riemann.*

Démonstration. C'est évident par le théorème. $\square$

Corollaire 3.4. *La somme et le produit de deux fonctions intégrables au sens de Riemann sont encore des fonctions intégrables au sens de Riemann.*

Démonstration. Si $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions quelconques, alors tout point de continuité commun à f et à g est un point de continuité de $f+g$ et de fg. Autrement dit : $\mathrm{Cont}(f) \cap \mathrm{Cont}(g) \subseteq \mathrm{Cont}(f+g)$ et $\mathrm{Cont}(f) \cap \mathrm{Cont}(g) \subseteq \mathrm{Cont}(fg)$. On a donc $\mathrm{Disc}(f+g) \subseteq \mathrm{Disc}(f) \cup \mathrm{Disc}(g)$ et $\mathrm{Disc}(fg) \subseteq \mathrm{Disc}(f) \cup \mathrm{Disc}(g)$. Par la Proposition 2.3, on en déduit que si $\mathrm{Disc}(f)$ et $\mathrm{Disc}(g)$ sont tous les deux négligeables, alors $\mathrm{Disc}(f+g)$ et $\mathrm{Disc}(fg)$ le sont également. De plus, si f et g sont bornées, alors $f+g$ et fg le sont aussi. D'où le résultat. $\square$

Le Théorème 3.1 permet également d'obtenir très facilement des résultats nouveaux non triviaux, qu'il ne serait pas du tout évident de démontrer "à la main" :

Corollaire 3.5. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable au sens de Riemann. Si Φ est une fonction* continue *sur un ensemble $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ contenant $f([a,b])$ et si la fonction $\Phi \circ f$ est bornée, alors $\Phi \circ f$ est intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$. En particulier, c'est le cas si Φ est continue sur un* intervalle fermé *contenant $f([a,b])$.*

Démonstration. Comme Φ est continue, tout point de continuité de f est aussi un point de continuité de $\Phi \circ f$. Donc $\mathrm{Disc}(\Phi \circ f) \subseteq \mathrm{Disc}(f)$. Donc $\mathrm{Disc}(\Phi \circ f)$ est négligeable, et donc $\Phi \circ f$ est intégrable si elle est de plus bornée.

Supposons que Φ soit continue sur un intervalle fermé contenant $f([a,b])$. Comme f est bornée, on peut trouver un intervalle *fermé borné* J contenant $f([a,b])$ tel que Φ est continue sur J. Alors Φ est bornée sur J (fonction continue sur un intervalle fermé borné), et donc $\Phi \circ f$ est bornée sur $[a,b]$. $\square$

Exemple 1. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable et $f \geqslant 0$, alors la fonction f^α est intégrable pour tout $\alpha > 0$.

Démonstration. On applique le Corollaire 3.5 avec $\Phi(x) = x^\alpha$, qui est continue sur l'intervalle fermé $[0, \infty[$. $\square$

Exemple 2. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est intégrable avec $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a,b]$. Si la fonction $1/f$ est bornée sur $[a,b]$, alors elle est intégrable sur $[a,b]$.

Démonstration. Par hypothèse, $f([a,b])$ est contenu dans $\mathbb{R}^*$. On applique le Corollaire 3.5 avec $\Phi(x) = 1/x$, qui est continue sur $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$. $\square$

Remarque. La fonction $1/f$ est bornée sur $[a,b]$ si et seulement si il existe une constante $\delta > 0$ telle que $\forall t \in [a,b] \ : \ |f(t)| \geqslant \delta$.

Démonstration. Exo. $\square$

Exemple 3. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 6$ et $f(t) = t$ pour $0 < t \leqslant 1$. Alors f est intégrable et $f(t) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, mais la fonction $1/f$ n'est pas intégrable sur $[0,1]$ car elle n'est pas bornée. Il ne faut donc pas oublier de vérifier que $\Phi \circ f$ est bornée si on veut appliquer le Corollaire 3.5.

4. Preuve du Théorème de Lebesgue-Vitali

4.1. Notations. Dans ce qui suit, on fixe une fonction bornée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que f est intégrable au sens de Riemann si et seulement si $\mathrm{Disc}(f)$ est négligeable.

NOTATION 1. Pour tout intervalle $J \subseteq [a,b]$, on pose

$$\mathrm{osc}(f,J) := \sup_J f - \inf_J f.$$

On dit que $\mathrm{osc}(f,J)$ est l'**oscillation** de f sur l'intervalle J.

Exercice. Montrer qu'on a $\mathrm{osc}(f,J) = \sup\{|f(y) - f(x)|;\ x,y \in J\}$.

FAIT 4.1. *Soit $x \in [a,b]$. Alors $x \in \mathrm{Cont}(f)$ si et seulement si la propriété $(*)$ suivante a lieu : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un intervalle ouvert V contenant x tel que $\mathrm{osc}(f, V \cap [a,b]) \leqslant \varepsilon$.*

Démonstration. Supposons que $x \in \mathrm{Cont}(f)$, et fixons $\varepsilon > 0$. Comme $x \in \mathrm{Cont}(f)$, on peut trouver un intervalle ouvert V contenant x tel que $|f(t) - f(x)| \leqslant \varepsilon/2$ pour tout $t \in V \cap [a,b]$. On a ainsi

$$\forall t \in V \cap [a,b]\ :\ f(x) - \varepsilon/2 \leqslant f(t) \leqslant f(x) + \varepsilon/2.$$

On en déduit

$$\sup_{V \cap [a,b]} \leqslant f(x) + \varepsilon/2 \qquad \text{et} \qquad \inf_{V \cap [a,b]} \geqslant f(x) - \varepsilon/2;$$

et donc $\mathrm{osc}(f, V \cap [a,b]) \leqslant (f(x) + \varepsilon/2) - (f(x) - \varepsilon/2) = \varepsilon$.

Supposons maintenant que $x \notin \mathrm{Cont}(f)$. Alors, on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que la chose suivante ait lieu : pour tout intervalle ouvert V contenant x, il existe un point $y_V \in V \cap [a,b]$ tel que $|f(y_V) - f(x)| \geqslant \varepsilon_0$. Comme x et y_V sont dans $V \cap [a,b]$, on a alors $|f(y_V) - f(x)| \leqslant \mathrm{osc}(f, V \cap [a,b])$ (exo déjà posé). Donc $\mathrm{osc}(f, V \cap [a,b]) \geqslant \varepsilon_0$ pour tout intervalle ouvert V contenant x ; et donc la propriété $(*)$ n'a pas lieu. $\square$

NOTATION 2. Pour tout $\eta > 0$, on pose

$$D_\eta(f) := \Big\{x \in [a,b]; \mathrm{osc}(f, I \cap [a,b]) > \eta \quad \text{pour tout intervalle ouvert } I \text{ contenant } x\Big\}.$$

FAIT 4.2. *On a $\mathrm{Disc}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}(f)$.*

Démonstration. Par le Fait 4.1 un point $x \in [a,b]$ appartient à $\mathrm{Disc}(f)$ si et seulement si la propriété $(*)$ n'a pas lieu ; autrement dit (en changeant les notations : η au lieu de ε et I au lieu de V), si et seulement si il existe un $\eta > 0$ tel que $x \in D_\eta(f)$. Ainsi, on a $\mathrm{Disc}(f) = \bigcup_{\eta > 0} D_\eta(f)$. Donc certainement $\mathrm{Disc}(f) \supseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}(f)$. De plus, pour tout $\eta > 0$ on peut trouver un entier n tel que $\frac{1}{n} \leqslant \eta$, et alors $D_\eta(f) \subseteq D_{1/n}(f)$ (micro-exo). Donc $D_\eta(f) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}(f)$ pour tout $\eta > 0$, et donc $\mathrm{Disc}(f) = \bigcup_{\eta > 0} D_\eta(f) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}(f)$. $\square$

4.2. Preuve de l'implication "directe". Supposons que f soit intégrable au sens de Riemann sur $[a,b]$, et montrons que $\mathrm{Disc}(f)$ est négligeable.

Comme $\mathrm{Disc}(f) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*} D_{1/n}(f)$ et comme une réunion dénombrable d'ensembles négligeables est négligeable (Proposition 2.3), il suffit de montrer que pour tout $\eta > 0$, l'ensemble $D_\eta(f)$ est négligeable. On fixe donc $\eta_0 > 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver une suite (Δ_n) d'intervalles bornés telle que $D_{\eta_0} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$ et $\sum_{n=0}^\infty |\Delta_n| \leqslant \varepsilon$. En fait, on va montrer qu'il existe une suite *finie* d'intervalles $\Delta_1, \dots, \Delta_M$ vérifiant cette propriété.

Soit $\delta > 0$ à choisir ultérieurement. Comme f est intégrable sur $[a,b]$, on peut trouver des fonctions en escalier φ et ψ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \delta.$$

Soit $S = (s_0, \dots, s_N)$ une subdivision adaptée à φ et à ψ :

$$\varphi(t) \equiv \alpha_k \quad \text{et} \quad \psi(t) \equiv \beta_k \qquad \text{sur} \quad I_k =]s_k, s_{k+1}[\,, \quad 0 \leqslant k \leqslant N-1.$$

Fait. Si on pose $\mathbf{K} := \{k \in [\![0, N-1]\!];\ I_k \cap D_{\eta_0} \neq \varnothing\}$, alors

$$\sum_{k\in\mathbf{K}} |I_k| \leqslant \frac{1}{\eta_0}\,\delta.$$

Preuve du Fait. Comme $\alpha_k \leqslant f(t) \leqslant \beta_k$ sur I_k, on a

$$\mathrm{osc}(f, I_k) \leqslant \beta_k - \alpha_k \qquad \text{pour tout } k \in [\![0, N-1]\!].$$

De plus, si $k \in \mathbf{K}$, alors I_k contient un point $x \in D_{\eta_0}(f)$, et donc $\mathrm{osc}(f, I_k) > \eta_0$ par définition de $D_{\eta_0}(f)$. Par conséquent :

$$\beta_k - \alpha_k > \eta_0 \quad \text{pour tout } k \in \mathbf{K}.$$

On en déduit

$$\sum_{k\in\mathbf{K}} (\beta_k - \alpha_k)\,|I_k| \geqslant \eta_0 \sum_{k\in\Lambda} |I_k|.$$

Mais par ailleurs, on a aussi

$$\sum_{k\in\mathbf{K}} (\beta_k - \alpha_k)\,|I_k| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} (\beta_k - \alpha_k)\,|I_k| = \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \delta.$$

Donc

$$\eta_0 \sum_{k\in\mathbf{K}} |I_k| \leqslant \delta.$$

□

La Fait va permettre de conclure rapidement. Par définition de $\mathbf{K}$, on a

$$D_{\eta_0}(f) \subseteq \bigcup_{k\in\mathbf{K}} I_k \cup \{s_0, \dots, s_N\}.$$

Pour $k = 0, \dots, N$, posons

$$\Delta(s_k) := \{s_k\} = [s_k, s_k];$$

et soit $\Delta_1, \dots, \Delta_M$ une énumération sans répétitions de la famille finie d'intervalles $\{I_k;\ k \in \mathbf{K}\} \cup \{\Delta(s_k);\ k \in [\![0, N]\!]\}$. Alors

$$D_{\eta_0}(f) \subseteq \bigcup_{n=1}^{M} \Delta_n,$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{M} |\Delta_n| &= \sum_{k \in \mathbf{K}} |I_k| + \sum_{k=0}^{N} |\Delta(s_k)| \\ &= \sum_{k \in \mathbf{K}} |I_k| + 0 \\ &\leqslant \delta/\eta_0 \qquad \text{par le Fait} \\ &\leqslant \varepsilon \qquad \text{si } \delta \text{ est assez petit.}\end{aligned}$$

On a donc bien montré que $D_\eta(f)$ est négligeable pour tout $\eta > 0$, et donc que $\mathrm{Disc}(f) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} D_{1/n}(f)$ est négligeable.

4.3. Preuve de l'implication "réciproque". Supposons que $\mathrm{Disc}(f)$ soit un ensemble négligeable, et montrons que la fonction f est intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de trouver deux fonctions en escalier φ et ψ telles que

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi \qquad \text{et} \qquad \int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon.$$

Soit $\delta > 0$ à choisir ultérieurement. Comme $\mathrm{Disc}(f)$ est négligeable, on peut trouver une suite d'intervalles ouverts $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que

$$\mathrm{Disc}(f) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Delta_n \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \delta.$$

Pour tout $x \in \mathrm{Disc}(f)$, on peut donc choisir un entier $n(x)$ tel que $x \in \Delta_{n(x)}$. On pose alors $V_x := \Delta_{n(x)}$.

Par ailleurs, pour tout $x \in \mathrm{Cont}(f)$, on peut trouver un intervalle ouvert V_x tel que $\mathrm{osc}\big(f, V_x \cap [a, b]\big) \leqslant \delta$.

Ainsi, on a associé à tout point $x \in [a, b]$ un intervalle ouvert V_x tel que

$$\begin{cases} x \in V_x \quad \text{pour tout } x \in [a, b], \\ V_x = \Delta_{n(x)} \quad \text{si } x \in \mathrm{Disc}(f), \\ \mathrm{osc}\big(f, V_x \cap [a, b]\big) \leqslant \delta \quad \text{si } x \in \mathrm{Cont}(f). \end{cases}$$

Par le Lemme de Cousin, on peut trouver une subdivision $S = (s_0, \dots, s_N)$ de $[a, b]$ telle que pour tout $k = 0, \dots, N - 1$:

$$J_k := [s_k, s_{k+1}] \subseteq V_{x_k} \quad \text{pour un certain } x_k \in [a, b].$$

Dans la suite, on posera

$$\mathbf{K}_{\mathrm{cont}} := \big\{k \in [\![0, N-1]\!];\ x_k \in \mathrm{Cont}(f)\big\} \quad \text{et} \quad \mathbf{K}_{\mathrm{disc}} := \big\{k \in [\![0, N-1]\!];\ x_k \in \mathrm{Disc}(f)\big\}.$$

Fait 1. On a $\displaystyle\sum_{k \in \mathbf{K}_{\mathrm{disc}}} |J_k| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n| \leqslant \delta$.

Preuve du Fait 1. On répète un raisonnement déjà fait quand on a montré qu'un intervalle non-trivial n'est pas négligeable.

Par définition des V_x, on a $J_k \subseteq \Delta_{n(x_k)}$ pour tout $k \in \mathbf{K}_{\rm disc}$. Donc, si pour $n \in \mathbb{N}$ on pose $\mathbf{K}_n := \{k \in \mathbf{K}_{\rm disc};\ n(x_k) = n\}$, alors $J_k \subseteq \Delta_n$ pour tout $k \in \mathbf{K}_n$. Comme les intervalles J_k sont "presque disjoints", on a donc $\sum_{k\in\mathbf{K}_n} |J_k| \leqslant |\Delta_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Et comme les $\mathbf{K}_n$ non vides forment une partition finie de $\mathbf{K}_{\rm disc}$, on en déduit

$$\sum_{k\in\mathbf{K}_{\rm disc}} |J_k| = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k\in\mathbf{K}_n} |J_k| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\Delta_n|.$$

□

Dans la suite, pour $k = 0, \ldots, N-1$, on posera

$$m_k := \inf_{I_k} f \quad \text{et} \quad M_k := \sup_{I_k} f, \qquad \text{où} \quad I_k = \,]s_k, s_{k+1}[.$$

On pose également

$$\|f\|_\infty := \sup\big\{|f(t)|;\ t \in [a,b]\big\}.$$

Fait 2. On a $M_k - m_k \leqslant 2\|f\|_\infty$ pour tout $k \in [\![0, N-1]\!]$, et $M_k - m_k \leqslant \delta$ pour tout $k \in \mathbf{K}_{\rm cont}$.

Preuve du Fait 2. Comme $-\|f\|_\infty \leqslant f(t) \leqslant \|f\|_\infty$, on a $m_k \geqslant -\|f\|_\infty$ et $M_k \leqslant \|f\|_\infty$ pour tout k, ce qui donne la 1ère partie du Fait. Pour la 2ème partie, il suffit d'observer que $M_k - m_k = \operatorname{osc}(f, I_k)$, et que $\operatorname{osc}(f, I_k) \leqslant \operatorname{osc}(f, J_k) \leqslant \operatorname{osc}(f, V_{x_k} \cap [a,b]) \leqslant \delta$ si $k \in \mathbf{K}_{\rm cont}$ (puisque $x_k \in \operatorname{Cont}(f)$). □

Soient maintenant φ et ψ les fonctions en escalier définies comme suit :

$$\begin{cases} \varphi(t) \equiv m_k \quad \text{et} \quad \psi(t) \equiv M_k \quad \text{sur } I_k \quad \text{pour } k = 0, \ldots, N-1, \\ \varphi(s_k) = f(s_k) = \psi(s_k) \quad \text{pour } k = 0, \ldots, N. \end{cases}$$

Par définition, on a

$$\varphi \leqslant f \leqslant \psi.$$

De plus,

$$\begin{aligned}
\int_a^b (\psi - \varphi) &= \sum_{k=0}^{N-1} (M_k - m_k)\,|J_k| \\
&= \sum_{k\in\mathbf{K}_{\rm cont}} (M_k - m_k)\,|J_k| + \sum_{k\in\mathbf{K}_{\rm disc}} (M_k - m_k)\,|J_k| \\
&\leqslant \delta \sum_{k\in\mathbf{K}_{\rm cont}} |J_k| + 2\|f\|_\infty \sum_{k\in\mathbf{K}_{\rm disc}} |J_k| \qquad \text{par le Fait 2} \\
&\leqslant \delta \sum_{k=0}^{N-1} |J_k| + 2\|f\|_\infty \times \delta \qquad \text{par le Fait 1} \\
&= \delta\,(b - a + 2\|f\|_\infty).
\end{aligned}$$

Donc $\int_a^b (\psi - \varphi) \leqslant \varepsilon$ si δ est choisi assez petit.

Chapitre 6

Fonctions convexes

1. Vocabulaire géométrique

1.1. Segments.

NOTATIONS. Si $u, v \in \mathbb{R}$, on note $[u, v]$ l'intervalle fermé d'extrémités u et v. Si A et B sont deux points de $\mathbb{R}^2$, on note $[A, B]$ le segment d'extrémités A et B.

LEMME 1.1. (paramétrisation)

(1) *Soient $u, v \in \mathbb{R}$. Si $x \in \mathbb{R}$, alors*

$$x \in [u, v] \iff \exists \lambda \in [0, 1] \ : \ x = (1 - \lambda)u + \lambda v.$$

(2) *Soient $A = (x_A, y_A)$ et $B = (x_B, y_B)$ deux points de $\mathbb{R}^2$. Si $M = (x_M, y_M) \in \mathbb{R}^2$, alors*

$$\begin{aligned} M \in [A, B] &\iff \exists \lambda \in [0, 1] \ : \ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \\ &\iff \exists \lambda \in [0, 1] \ : \\ &\qquad x_M = (1 - \lambda)x_A + \lambda x_B \quad \textit{et} \quad y_M = (1 - \lambda)y_A + \lambda y_B. \end{aligned}$$

Démonstration. (2) Par définition :

$$\begin{aligned} M \in [A, B] &\iff \exists \lambda \in [0, 1] \ : \ \overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB} \qquad (\text{faire un dessin}) \\ &\iff \exists \lambda \in [0, 1] \ : x_M - x_A = \lambda(x_B - x_A) \quad \text{et} \quad y_M - y_A = \lambda(y_B - y_A) \\ &\iff \text{ce qu'on veut.} \end{aligned}$$

(1) On applique (2) aux points $A := (u, 0)$, $B := (v, 0)$ et $M := (x, 0)$. $\square$

Remarque. Dans (2), c'est le même $\lambda \in [0, 1]$ pour x_M et pour y_M.

1.2. Au dessus, en dessous.

DÉFINITION 1.2. *Soit $\mathcal{E}$ une partie de $\mathbb{R}^2$, et soit $M \in \mathbb{R}^2$. On dit que M est* **au dessus de** $\mathcal{E}$ *si*

- *la droite verticale $\mathcal{D}_M$ passant par M rencontre $\mathcal{E}$, i.e. il existe au moins 1 point de $\mathcal{E}$ ayant la même abscisse que M ;*
- *M est au dessus de tous les points de $\mathcal{D}_M \cap \mathcal{E}$, i.e. l'ordonnée de M est supérieure ou égale a l'ordonnée de tout point de $\mathcal{E}$ ayant la même abscisse que M.*

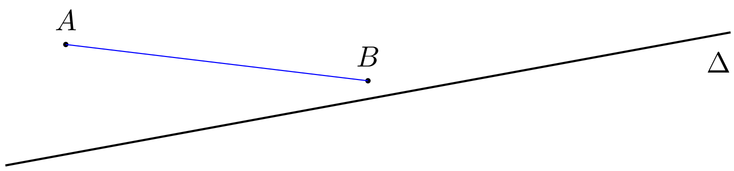
De même, on dit que M est **en dessous de** $\mathcal{E}$ *si $\mathcal{D}_M \cap \mathcal{E} \neq \varnothing$ et si M est en dessous de tous les points de $\mathcal{D}_M \cap \mathcal{E}$.*

Faire un dessin

Exemple. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $M = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Alors

$$M \text{ est au dessus de graphe de } f \iff \big(x \in I \text{ et } y \geqslant f(x)\big), \quad \text{et}$$
$$M \text{ est en dessous de graphe de } f \iff \big(x \in I \text{ et } y \leqslant f(x)\big)$$

Lemme 1.3. *Soit Δ une droite non verticale de $\mathbb{R}^2$, et soient $A, B \in \mathbb{R}^2$. Si A et B sont au dessus de Δ, alors tous les points de $[A, B]$ sont au dessus de Δ.*



Démonstration. Soit M un point quelconque de $[A, B]$. Notons A', B' et M' les point de Δ ayant mêmes abscisses que A, B et M (ces points existent et sont uniques puisque Δ est une droite non verticale ; faire un dessin). Comme A et B sont au dessus de Δ, on sait que $y_A \geqslant y_{A'}$ et $y_B \geqslant y_{B'}$. De plus, comme $M \in [A, B]$, on sait qu'on peut écrire

$$x_M = (1 - \lambda)x_A + \lambda x_B \quad \textit{et} \quad y_M = (1 - \lambda)y_A + \lambda y_B$$

pour un certain $\lambda \in [0, 1]$. De manière équivalente,

$$\overrightarrow{AM} = \lambda\, \overrightarrow{AB}.$$

D'après le Théorème de Thalès, on a $\overrightarrow{A'M'} = \lambda\, \overrightarrow{A'B'}$ pour le *même* λ. Donc $y_{M'} = (1-\lambda)y_{A'} + \lambda y_{B'}$; et comme λ et $1-\lambda$ sont $\geqslant 0$, on en déduit que $y_{M'} \leqslant (1-\lambda)y_A + \lambda y_B = y_M$. Donc M est au dessus de Δ. □

2. Fonctions convexes, fonctions concaves

Dans ce qui suit, I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

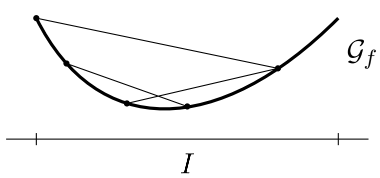
2.1. Définitions géométriques.

Notation. Pour toute fonction $f : I \to \mathbb{R}$, on note $\mathcal{G}_f$ le graphe de f :

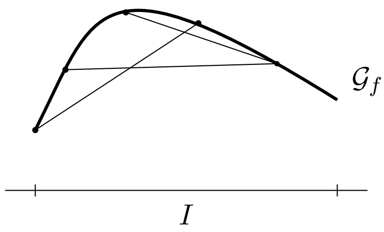
$$\mathcal{G}_f = \big\{(x, f(x));\ x \in I\big\}.$$

Définition 2.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$.*

(1) *On dit que la fonction f est **convexe sur** I si "le graphe de f est en dessous de toutes ses cordes" ; autrement dit : si, pour tous $A, B \in \mathcal{G}_f$, le segment $[A, B]$ est au dessus de $\mathcal{G}_f$.*



(2) *On dit que f est **concave** si, pour tous $A, B \in \mathcal{G}_f$, le segment $[A, B]$ est en dessous de $\mathcal{G}_f$.*



Reformulation.

(1) La fonction f est convexe si et seulement si

$$\forall A, M, B \in \mathcal{G}_f \quad \text{avec } x_M \in [x_A, x_B], \quad \text{le point } M \text{ est en dessous de } [A, B].$$

(2) La fonction f est concave si et seulement si

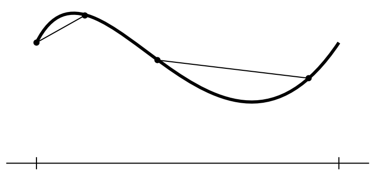
$$\forall A, M, B \in \mathcal{G}_f \quad \text{avec } x_M \in [x_A, x_B], \quad \text{le point } M \text{ est au dessus de } [A, B].$$

Remarque 1. On a l'équivalence (f convexe) $\iff$ ($-f$ concave).

Démonstration. Les graphes de f et de $-f$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; et quand on effectue cette symétrie, "au dessus" devient "en dessous" et *vice versa* □

Remarque 2. "En dessous" et "au dessus" sont pris au sens large : si on est sur le segment $[A, B]$ (ou sur $\mathcal{G}_f$), on est à la fois au dessus et en dessous, et réciproquement.

Attention. Pour vérifier qu'une fonction f est convexe ou concave, il faut regarder tous les segments $[A, B]$ avec $A, B \in \mathcal{G}_f$.



Fonction ni convexe ni concave

Exemple 1. Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$ sont convexes sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. C'est clair géométriquement (faire les dessins). On donnera une preuve détaillée un peu plus tard. □

Exemple 2. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est à la fois convexe et concave si et seulement si elle est *affine*, *i.e.* de la forme $f(x) = ax + b$.

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned}
f \text{ convexe et concave } &\iff \forall A,B,M \in \mathcal{G}_f \text{ avec } x_A \leqslant x_M \leqslant x_B,\\
&\qquad \text{le point } M \text{ est en dessous et au dessus de } [A,B]\\
&\iff \forall A,B,M \in \mathcal{G}_f \text{ avec } x_A \leqslant x_M \leqslant x_B, \text{ on a } M \in [A,B]\\
&\iff 3 \text{ points quelconques de } \mathcal{G}_f \text{ sont toujours alignés}\\
&\iff \mathcal{G}_f \text{ est contenu dans une droite}\\
&\iff f \text{ est affine.}
\end{aligned}$$

□

2.2. Reformulations analytiques. La définition géométrique de la convexité n'est pas toujours très manipulable en pratique. Fort heureusement, elle se reformule "analytiquement" de façon très simple :

Proposition 2.2. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si*

$$\forall u,v \in I\ \forall \lambda \in [0,1]\ :\ f\big((1-\lambda)u+\lambda v\big) \leqslant (1-\lambda)f(u)+\lambda f(v). \tag{2.1}$$

Démonstration. Supposons f convexe, et montrons (2.1). Soient $u,v \in I$ et $\lambda \in [0,1]$. Par le Lemme 1.1 appliqué avec $A=(u,f(u))$ et $B=(v,f(v))$, le point

$$M_\lambda := ((1-\lambda)u+\lambda v, (1-\lambda)f(u)+\lambda f(v))$$

appartient au segment $[A,B]$. Comme $A,B \in \mathcal{G}_f$ et comme f est convexe, M_λ est donc au dessus de $\mathcal{G}_f$, autrement dit $y_{M_\lambda} \geqslant f(x_{M_\lambda})$, ou encore

$$(1-\lambda)f(u)+\lambda f(v) \geqslant f((1-\lambda)u+\lambda v).$$

Inversement, supposons (2.1) vérifiée. Soient $A,B \in \mathcal{G}_f$, et soit $M=(x,y)$ un point quelconque du segment $[A,B]$. Écrivons $A=(u,f(u))$ et $B=(v,f(v))$ avec $u,v \in I$. Par le Lemme 1.1, on a

$$x=(1-\lambda)u+\lambda v \qquad \text{et} \qquad y=(1-\lambda)f(u)+\lambda f(v)$$

pour un certain $\lambda \in [0,1]$. D'après (2.1), on a donc $y \geqslant f(x)$; autrement dit M est au dessus de $\mathcal{G}_f$. □

Corollaire 2.3. *Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est concave si et seulement si*

$$\forall u,v \in I\ \forall \lambda \in [0,1]\ :\ f\big((1-\lambda)u+\lambda v\big) \geqslant (1-\lambda)f(u)+\lambda f(v).$$

Démonstration. C'est évident puisque (f concave) $\iff$ ($-f$ convexe). □

Remarque 1. Pour montrer qu'une fonction f est convexe, il suffit de vérifier (2.1) pour u,v tels que $u<v$ et pour $0<\lambda<1$.

Démonstration. Si $u=v$ ou $\lambda=0$ ou $\lambda=1$, alors (2.1) est satisfaite, avec même *égalité* (exo). Donc il suffit de vérifier (2.1) pour $0<\lambda<1$ et $u \neq v$; et par symétrie ($u \leftrightarrow v$ et $\lambda \leftrightarrow 1-\lambda$) on peut supposer que $u<v$. □

Remarque 2. On dit qu'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est **strictement convexe** si

$$\forall u \neq v \text{ dans } I\ \ \forall \lambda \in\,]0,1[\ : f\big((1-\lambda)u+\lambda v\big) < (1-\lambda)f(u)+\lambda f(v).$$

Exemple. Montrons que les fonctions $t \mapsto |t|$ et $t \mapsto t^2$ sont convexes.

• Pour $t \mapsto |t|$: si $u, v \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, alors
$$\begin{aligned}|(1-\lambda)u + \lambda v| &\leqslant |(1-\lambda)u| + |\lambda v| \\ &= (1-\lambda)\,|u| + \lambda\,|v| \quad \text{car } \lambda \geqslant 0 \text{ et } 1-\lambda \geqslant 0.\end{aligned}$$

• Pour $t \mapsto t^2$: si $u, v \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in [0,1]$, alors
$$\begin{aligned}&\Big((1-\lambda)u + \lambda v\Big)^2 - \Big((1-\lambda)u^2 + \lambda v^2\Big) \\ &\qquad = (1-\lambda)^2u^2 + 2\lambda(1-\lambda)uv + \lambda^2v^2 - \Big((1-\lambda)u^2 + \lambda v^2\Big) \\ &\qquad = (1-\lambda)((1-\lambda)-1)u^2 + 2\lambda(1-\lambda)uv + \lambda(\lambda-1)v^2 \\ &\qquad = -\lambda(1-\lambda)\big(u^2 - 2uv + v^2\big) \\ &\qquad = -\lambda(1-\lambda)(u-v)^2 \\ &\qquad \leqslant 0.\end{aligned}$$

Donc on a l'inégalité souhaitée : $\big((1-\lambda)u + \lambda v\big)^2 \leqslant (1-\lambda)u^2 + \lambda v^2$.

Corollaire 2.4. (propriétés de stabilité)

(i) *Si $f_1, \dots, f_n$ sont des fonctions convexes sur I et si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}^+$, alors la fonction $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_n f_n$ est convexe.*

(ii) *Si $(f_k)_{k \in K}$ est une famille de fonctions convexes sur I telle que $f(t) := \sup_{k\in K} f_k(t)$ est bien défini pour tout $t \in I$, alors la fonction $f = \sup_{k\in K} f_k$ est convexe.*

(iii) *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe et si ϕ est une fonction convexe croissante sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors la fonction g définie par $g(t) = \phi(f(t))$ est convexe.*

Démonstration. (i) Exo.

(ii) Si $u, v \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, alors
$$\forall k \in K \;:\; f_k\big((1-\lambda)u + \lambda v\big) \leqslant (1-\lambda)f_k(u) + \lambda f_k(v) \quad \text{car les } f_k \text{ sont convexes.}$$
Comme $f \geqslant f_k$ pour tout k et comme λ et $1-\lambda$ sont $\geqslant 0$, on en déduit
$$\forall k \in K \;:\; f_k\big((1-\lambda)u + \lambda v\big) \leqslant (1-\lambda)f(u) + \lambda f(v);$$
et donc
$$f\big((1-\lambda)u + \lambda v\big) = \sup_{k\in K} f_k\big((1-\lambda)u + \lambda v\big) \leqslant (1-\lambda)f(u) + \lambda f(v).$$

(iii) Si $u, v \in I$ et $\lambda \in [0,1]$, alors
$$\begin{aligned}g\big((1-\lambda)u + \lambda v\big) &= \phi\Big(f\big((1-\lambda)u + \lambda v\big)\Big) \\ &\leqslant \phi\Big((1-\lambda)f(u) + \lambda f(v)\Big) \quad \text{car } f \text{ est convexe et } \phi \text{ est croissante} \\ &\leqslant (1-\lambda)\phi(f(u)) + \lambda\phi(f(v)) \quad \text{car } \phi \text{ est convexe} \\ &= (1-\lambda)g(u) + \lambda g(v).\end{aligned}$$
□

Exercice. Montrer que la fonction $t \mapsto t^4$ est convexe sur $\mathbb{R}$. Plus généralement, montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^{2^k}$ est convexe.

2.3. Inégalité de Jensen discrète.

Remarque. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $x_1, \ldots, x_n \in I$ et si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sont des nombres $\geqslant 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, alors $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in I$.

Démonstration. Supposons par exemple que I soit de la forme $[a, b]$. On a ainsi $a \leqslant x_i \leqslant b$ pour tout i, et donc $\lambda_i a \leqslant \lambda_i x_i \leqslant \lambda_i b$ car $\lambda_i \geqslant 0$. En sommant ces inégalités on obtient

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i a \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i b.$$

Comme $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, cela signifie que $a \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \leqslant b$, *i.e.* $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in [a, b] = I$. □

Proposition 2.5. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est convexe, alors elle possède la propriété suivante : pour tous $x_1, \ldots, x_n \in I$ et pour tous $\lambda_1 \ldots \lambda_n \geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$, on a*

$$f\Big(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i).$$

Remarque. Si $n = 2$, on a $\lambda_1 = 1 - \lambda_2$; donc l'inégalité s'écrit

$$f((1 - \lambda_2)x_1 + \lambda_2 x_2) \leqslant (1 - \lambda_2) f(x_1) + \lambda_2 f(x_2),$$

ce qui est la formulation analytique de la convexité.

Preuve de la proposition. On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, le résultat est clair : si $x_1 \in I$ et $\lambda_1 = 1$, alors $f(\lambda_1 x_1) = f(x_1) = \lambda_1 f(x_1)$!

Supposons le résultat établi pour un certain $n \geqslant 1$, et montrons le pour $n + 1$. Soient $x_1, \ldots, x_{n+1} \in I$ et $\lambda_1 \ldots \lambda_{n+1} \geqslant 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$: il s'agit de voir que

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).$$

Si $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$, alors $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ car les λ_i sont $\geqslant 0$, et $\lambda_{n+1} = 1$. Donc $f(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i) = f(x_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i)$.

Suposons que $\sum_{i=1}^n \lambda_i > 0$, et posons $s := \sum_{i=1}^n \lambda_i$. On a ainsi

$$0 < s \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1 \quad \text{et} \quad \lambda_{n+1} = 1 - s.$$

Posons également

$$\mu_i = \frac{\lambda_i}{s} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$

Alors $\mu_i \geqslant 0$, et

$$\sum_{i=1}^n \mu_i = \frac{1}{s} \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1.$$

Par hypothèse de récurrence, on a donc

$$f\left(\sum_{i=1}^n \mu_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \mu_i f(x_i).$$

De plus,

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i &= \sum_{i=1}^{n} s\mu_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} \\ &= s \sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i + (1-s)\, x_{n+1}.\end{aligned}$$

Comme f est convexe, on en déduit

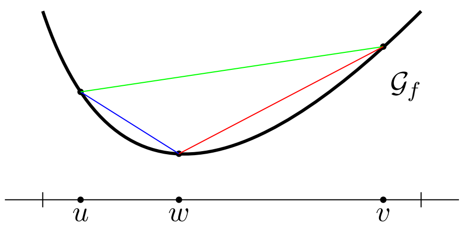
$$\begin{aligned} f\left(\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i\right) &\leqslant s\, f\left(\sum_{i=1}^{n} \mu_i x_i\right) + (1-s)\, f(x_{n+1}) \\ &\leqslant s \sum_{i=1}^{n} \mu_i f(x_i) + (1-s) f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(s\mu_i)}_{\lambda_i} f(x_i) + \lambda_{n+1} f(x_{n+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i f(x_i).\end{aligned}$$

□

2.4. Inégalité des 3 pentes. Le lemme suivant joue un rôle essentiel dans toutes les preuves à venir.

LEMME 2.6. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tous $u, v, w \in I$ vérifiant $u < w < v$, on a*

$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leqslant \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(v)-f(w)}{v-w}.$$



pente bleue $\leqslant$ *pente verte* $\leqslant$ *pente rouge*

Démonstration. Soient $A = (u, f(u))$, $B = (v, f(v))$ et $M = (w, f(w))$ les points de $\mathcal{G}_f$ d'abscisses u, v et w. Comme f est convexe, le point M est en dessous du segment $[A, B]$. Donc, le segment $[A, M]$ joint un point situé sur $[A, B]$ à un point situé en dessous de $[A, B]$. Comme on se déplace vers la droite pour aller de A à M, on en déduit que la pente du segment $[A, M]$ est inférieure à celle du segment $[A, B]$; autrement dit $\frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leqslant \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$. De même, le segment $[M, B]$ joint un point situé en dessous de $[A, B]$ à un point situé sur $[A, B]$, et on se déplace vers la droite pour aller de M ver B ; donc la pente de $[M, B]$ est supérieure à celle de $[A, B]$, *i.e.* $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(v)-f(w)}{v-w}$. □

Corollaire 2.7. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est concave et si $u < w < v$, alors*
$$\frac{f(w)-f(u)}{w-u} \geqslant \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \geqslant \frac{f(v)-f(w)}{v-w}.$$

Remarque. Si f est strictement convexe ou strictement concave, les inégalités précédentes sont strictes.

3. Cas des fonctions dérivables

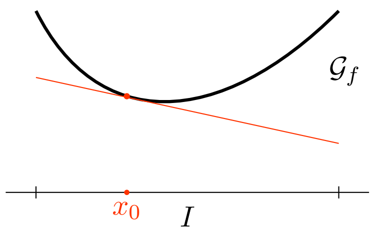
Notation. Si I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on note $\mathring{I}$ l'intervalle ouvert ayant les mêmes extrémités que I. On dit que $\mathring{I}$ est l'**intérieur** de I.

Exemples. Si $I = [0, 1]$, alors $\mathring{I} =]0, 1[$. Si $I = [0, \infty[$, alors $\mathring{I} =]0, \infty[$. Si $I = \mathbb{R}$, alors $\mathring{I} = \mathbb{R}$.

Théorème 3.1. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est convexe sur I ;*

(ii) *Le graphe de f est "au dessus de toutes ses tangentes", autrement dit*
$$\forall x_0 \in \mathring{I}\ \forall x \in I\ :\ f(x) \geqslant f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0);$$



(iii) *f' est croissante sur $\mathring{I}$.*

Démonstration. (i) $\Longrightarrow$ (iii). Supposons f convexe, et montrons que f' est croissante sur $\mathring{I}$. Soient $u, v \in \mathring{I}$ avec $u < v$. Par l'inégalité des 3 pentes, on a
$$\forall w \in]u, v[\ :\ \frac{f(w)-f(u)}{w-u} \leqslant \frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant \frac{f(v)-f(w)}{v-w}.$$
En faisant $w \to u^+$, on obtient $f'(u) \leqslant \frac{f(v)-f(u)}{v-u}$; et en faisant $w \to v^-$, on obtient $\frac{f(v)-f(u)}{v-u} \leqslant f'(v)$. Donc $f'(u) \leqslant f'(v)$, ce qui prouve que f' est croissante.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii). Supposons que f' soit croissante sur $\mathring{I}$ et fixons $x_0 \in \mathring{I}$ et $x \in I$. Par le Théorème des accroissements finis, on peut trouver $c \in \mathring{I}$ entre x_0 et x tel que
$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$
On distingue alors 2 cas :

- Si $x_0 \leqslant x$, alors $x_0 \leqslant c \leqslant x$, donc $f'(c) \geqslant f'(x_0)$ car f' est croissante, et donc $f'(c)(x - x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0)$ car $x - x_0 \geqslant 0$.
- Si $x_0 \geqslant x$, alors $x \leqslant c \leqslant x_0$, donc $f'(c) \leqslant f'(x_0)$, et donc $f'(c)(x - x_0) \geqslant f'(x_0)(x - x_0)$ à nouveau, car cette fois $x - x_0 \leqslant 0$.

Dans les 2 cas on obtient $f(x)-f(x_0)=f'(c)(x-x_0)\geqslant f'(x_0)(x-x_0)$, ce qui prouve (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i). Supposons (ii) vérifiée, et montrons que f est convexe. Soient A,B,M trois points de $\mathcal{G}_f$ tels que $x_A\leqslant x_M\leqslant x_B$. Il s'agit de montrer que M est en dessous du segment $[A,B]$. C'est évident si $x_M=x_A$ ou x_B (car alors $M=A$ ou B) ; donc on peut supposer que $x_A<x_M<x_B$, ce qui entraine que $x_M\in\mathring{I}$. Notons Δ la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point M (qui est bien définie puisque $x_M\in\mathring{I}$). Par (ii), les points A et B sont situés au dessus de Δ. Donc tout le segment $[A,B]$ est au dessus de Δ d'après le Lemme 1.3 ; et donc M est en dessous de $[A,B]$ puisque M appartient à Δ. □

Corollaire 3.2. *Sous les mêmes hypothèses (f continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$), la fonction f est* concave *sur I si et seulement si f' est* décroissante *sur $\mathring{I}$.*

Corollaire 3.3. *Supposons f continue sur I et 2 fois dérivable sur $\mathring{I}$. Alors*

$$f \text{ convexe sur } I \iff f''\geqslant 0 \text{ sur } \mathring{I} \quad \text{et}$$
$$f \text{ concave sur } I \iff f''\leqslant 0 \text{ sur } \mathring{I}.$$

Remarque. On montre de même que f est strictement convexe sur I si et seulement si f' est strictement croissante sur $\mathring{I}$. En particulier, si f est 2 fois dérivable sur I, alors

$$f''>0 \text{ sur } \mathring{I} \implies f \text{ strictement convexe.}$$

Exercice. La réciproque est-elle vraie ?

Exemples.

(1) Soit $\alpha\geqslant 0$. La fonction $f(t):=t^\alpha$ est convexe sur $I=[0,\infty[$ si $\alpha\geqslant 1$, et concave si $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ (car $f''(t)=\alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}$ est du signe de $\alpha-1$ sur $\mathring{I}=]0,\infty[$).
(2) La fonction $f(t):=e^t$ est convexe sur $\mathbb{R}$ (car $f'(t)=e^t$ est croissante).
(3) La fonction $f(t):=\ln(t)$ est concave sur $]0,\infty[$ (car $f'(t)=1/t$ est décroissante).
(4) La fonction $f(t):=1/t$ est convexe sur $]0,\infty[$ et concave sur $]-\infty,0[$ (car $f''(t)=2/t^3$ est du signe de t).

Corollaire 3.4. *Si f est une fonction convexe sur I, alors e^f est convexe, et f^α est convexe pour tout $\alpha\geqslant 1$ si $f\geqslant 0$.*

Démonstration. Les fonctions $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto x^\alpha$ sont convexes croissantes, respectivement sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{R}^+$; donc le résultat découle des propriétés de stabilité des fonctions convexes (Corollaire 2.4). □

Exercice. Montrer que la fonction f définie par

$$f(t):=\max\left(5e^{t^2}+3|t-6|,|t-1|^{3/2}+6(e^{2t}+e^{t/2})^{4/3}\right)$$

est convexe sur $\mathbb{R}$.

4. Régularité des fonctions convexes ; droites d'appui

Proposition 4.1. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors f est dérivable à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$. De plus, les fonctions f'_g et f'_d sont croissantes sur $\mathring{I}$, et on a $f'_g(t) \leqslant f'_d(t)$ pour tout $t \in \mathring{I}$.*

Exemple. Pour $f(t) = |t|$, on a

$$f'_g(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t < 0 \\ -1 & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases} \qquad \text{et} \qquad f'_d(t) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad t < 0 \\ 1 & \text{si} \quad t = 0 \\ 1 & \text{si} \quad t > 0 \end{cases}$$

Donc, en effet, f'_g et f'_d sont croissantes avec $f'_g \leqslant f'_d$.

Preuve de la proposition. (i) Soit $t_0 \in \mathring{I}$ fixé. Montrons que f est dérivable à gauche et à droite en t_0, avec $f'_g(t_0) \leqslant f'_d(t_0)$.

Par l'inégalité des 3 pentes, on a

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \leqslant \frac{f(t') - f(t_0)}{t' - t_0} \qquad \text{si } t_0 \leqslant t < t'.$$

Donc $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ décroit quand t décroit vers t_0, et donc $\frac{f(t)-f(t_0)}{t-t_0}$ admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ quand $t \to t_0^+$. De plus, si on choisit $\alpha \in I$ tel que $\alpha < t_0$ (ce qui est possible car $t_0 \in \mathring{I}$), alors, toujours par l'inégalité des 3 pentes, on a

$$\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geqslant \frac{f(t_0) - f(\alpha)}{t_0 - \alpha} \qquad \text{pour tout } t > t_0,$$

et donc

$$\lim_{t \to t_0^+} \frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0} \geqslant \frac{f(t_0) - f(\alpha)}{t_0 - \alpha} > -\infty.$$

Ainsi, f est dérivable à droite en t_0, avec

$$f'_d(t_0) \geqslant \frac{f(t_0) - f(\alpha)}{t_0 - \alpha} \qquad \text{pour tout } \alpha < t_0.$$

On montre de même que f est dérivable à gauche en t_0, avec

$$f'_g(t_0) \leqslant \frac{f(\beta) - f(t_0)}{\beta - t_0} \qquad \text{pour tout } \beta > t_0.$$

Enfin, en faisant $\beta \to t_0^+$ dans la dernière inégalité (ou $\alpha \to t_0^-$ dans la précédente), on obtient $f'_g(t_0) \leqslant f'_d(t_0)$.

(ii) Montrons maintenant que les fonction f'_d et f'_g sont croissantes. Soient $u, v \in \mathring{I}$ tels que $u < v$. Par l'inégalité des 3 pentes, on a

$$\frac{f(w) - f(u)}{w - u} \leqslant \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leqslant \frac{f(v) - f(w)}{v - w} \qquad \text{pour tout } w \in \,]u, v[.$$

En faisant $w \to u^+$ et $w \to v^-$ dans ces inégalités, on obtient

$$f'_d(u) \leqslant \frac{f(v) - f(u)}{v - u} \leqslant f'_g(v).$$

Donc *a fortiori* $f'_d(u) \leqslant f'_d(v)$ et $f'_g(u) \leqslant f'_g(v)$ puisque $f'_g \leqslant f'_d$. □

COROLLAIRE 4.2. *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe (ou concave), alors f est continue en tout point de $\mathring{I}$. En particulier, toute fonction convexe (ou concave) sur un intervalle ouvert est continue.*

Démonstration. Par la proposition, f est dérivable à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$, donc continue à gauche et à droite en tout point de $\mathring{I}$. □

COROLLAIRE 4.3. *Toute fonction convexe sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est réglée, et donc intégrable au sens de Riemann sur $[a, b]$.*

Démonstration. Si f est convexe sur $[a, b]$, alors f est continue sur $]a, b[$ par le corollaire précédent. Donc il suffit de montrer que f admet une limite à droite en a et une limite à gauche en b.

Par l'inégalité des 3 pentes, la fonction $x \mapsto \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ est croissante sur $]a, b]$ (exo). Donc $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite l quand $x \to b^-$, et donc $f(x) \to f(a) + l(b-a)$ quand $x \to b^-$. De même, f admet une limite à droite en a. □

COROLLAIRE 4.4. *Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction convexe. Pour tout point $x_0 \in \mathring{I}$, on peut trouver une fonction affine α telle que*

$$\alpha(x_0) = f(x_0) \qquad \text{et} \qquad \alpha(x) \leqslant f(x) \text{ pour tout } x \in I.$$

Démonstration. Fixons $x_0 \in \mathring{I}$. Tout repose sur le fait suivant.

FAIT. On a

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'_d(x_0) \qquad \text{pour tout } x > x_0, \quad \text{et}$$
$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant f'_g(x_0) \qquad \text{pour tout } x < x_0.$$

Faire un dessin

Preuve du Fait. Si $x > x_0$, l'inégalité des trois pentes donne

$$\frac{f(w) - f(x_0)}{w - x_0} \leqslant \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \qquad \text{pour tout } x_0 < w < x;$$

et en faisant $w \to x_0^+$, on en déduit

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'_d(x_0).$$

L'autre inégalité se démontre de la même façon (exo). □

Soit maintenant c n'importe quel nombre tel que

$$f'_g(x_0) \leqslant c \leqslant f'_d(x_0),$$

et soit α la fonction affine telle que $\alpha(x_0) = f(x_0)$ et de "coefficient directeur" c :

$$\alpha(x) = f(x_0) + c(x - x_0).$$

Il s'agit de montrer qu'on a $\alpha(x) \leqslant f(x)$ pour tout $x \neq x_0$ dans I (on sait déjà que $\alpha(x_0) = f(x_0)$).

Si $x > x_0$, on a par le Fait :

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'_d(x_0) \geqslant c;$$

et donc $f(x) \geqslant c(x - x_0) + f(x_0) = \alpha(x)$ puisque $x - x_0 > 0$.

De même, si $x < x_0$ alors $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \leqslant f'_g(x_0) \leqslant c$, et donc $f(x) \geqslant c(x-x_0)+f(x_0) = \alpha(x)$ puisque $x - x_0 < 0$. $\square$

Remarque 1. On dit que la droite d'équation $y = \alpha(x)$ est une **droite d'appui** pour le graphe de f au point $M_f(x_0) = (x_0, f(x_0))$.

Remarque 2. Si f est dérivable en x_0, la seule droite d'appui pour $\mathcal{G}_f$ au point $M_f(x_0)$ est la tangente à $\mathcal{G}_f$ en $M_f(x_0)$.

Démonstration. Si $\alpha(x) = cx + d$ est une fonction affine vérifiant $\alpha(x_0) = f(x_0)$ et $\alpha \leqslant f$, alors

$$\forall x > x_0 \ : \ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant \frac{\alpha(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{\alpha(x) - \alpha(x_0)}{x - x_0} = c.$$

En faisant $x \to x_0^+$, on obtient donc

$$c \leqslant f'_d(x_0).$$

On montre de même (exo) que

$$c \geqslant f'_g(x_0).$$

Donc, si f est dérivable en x_0, alors nécessairement $c = f'(x_0)$. Et comme on impose $\alpha(x_0) = f(x_0)$, on voit qu'il n'y a qu'une seule fonction α possible, qui correspond à la tangente à $\mathcal{G}_f$ au point $M_f(x_0)$. $\square$

Remarque 3. Si f n'est *pas* dérivable en x_0, il y a une infinité de droites d'appui pour $\mathcal{G}_f$ au point $M_f(x_0)$: n'importe quelle droite d'équation $y = f(x_0) + c(x - x_0)$ avec $f'_g(x_0) \leqslant c \leqslant f'_d(x_0)$ convient. Faire un dessin pour $f(t) = |t|$.

5. Fonctions convexes et fonctions croissantes

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si on fixe $x_0 \in I$, alors

$$\forall x \in I \ : \ f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} f'(t)\, dt.$$

Donc, toute fonction convexe de classe $\mathcal{C}^1$ est de la forme "constante + intégrale indéfinie d'une fonction croissante". Inversement, si une fonction f est de la forme $f(x) = c + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt$ où φ est une fonction croissante *continue*, alors f est convexe car elle est de classe $\mathcal{C}^1$ et $f' = \varphi$ est croissante. Le résultat suivant généralise ces remarques.

Proposition 5.1. *Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$. Soit également $x_0 \in I$. Alors f est convexe sur I si et seulement si elle est de la forme*

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\, dt,$$

où c est une constante et φ est une fonction croissante.

La preuve de ce résultat n'est pas immédiate. Pour une des deux implications, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 5.2. *Soit $\Phi : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose qu'il existe un ensemble* dénombrable *$D \subseteq I$ tel que Φ est dérivable à droite en tout point $x \in I \backslash D$ avec $\Phi'_d(x) \leqslant 0$. Alors Φ est décroissante sur I.*

Démonstration. Il s'agit de montrer qu'on a $\Phi(b) \leqslant \Phi(a)$ pour tous $a, b \in I$ vérifiant $a < b$. On fixe donc a et b.

FAIT 1. Il existe une fonction croissante $S : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est continue à droite en aucun point de D, *i.e.* $\forall z \in D\ :\ S(z^+) > S(z)$.

Preuve du Fait 1. Comme D est dénombrable, on peut écrire $D = \{z_i;\ i \in \mathbb{N}\}$. On pose alors

$$S(x) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\mathbf{1}_{]z_i,\infty[}(x) = \sum_{\{i\in\mathbb{N}\,:\,z_i<x\}} 2^{-i}.$$

La fonction S est visiblement croissante. Par définition, si $z = z_{i_0} \in D$, alors $\forall x > z\ :$ $S(x) \geqslant S(z) + 2^{-i_0}$ (exo) ; donc $S(z^+) \geqslant S(z) + 2^{-i_0}$. □

Dans la suite, on note $\theta : [a, b] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\theta(x) := x + S(x).$$

FAIT 2. Pour tout $u \in [a, b[$ et pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point v tel que $u < v < b$ et $\Phi(v) \leqslant \Phi(u) + \varepsilon\big(\theta(v) - \theta(u)\big)$.

Preuve du Fait 2. Si $u \notin D$, alors Φ est dérivable à droite en u avec $\Phi'_d(u) \leqslant 0$; donc on a $\Phi(v) \leqslant \Phi(u) + \varepsilon(v - u)$ pour tout $v > u$ assez proche de u, et donc $\Phi(v) \leqslant \Phi(u) + \varepsilon(v - u) + \varepsilon\big(S(v) - S(u)\big) = \Phi(u) + \varepsilon\big(\theta(v) - \theta(u)\big)$ car $S(v) - S(u) \geqslant 0$. Si $u \in D$, alors $S(u^+) - S(u) > 0$ par définition de S. Comme Φ est continue au point u, on a donc $\Phi(v) \leqslant \Phi(u) + \varepsilon(S(u^+) - S(u))$ pour tout v assez proche de u. Si de plus $v > u$, alors $S(v) \geqslant S(u^+)$ et donc $\Phi(v) \leqslant \Phi(u) + \varepsilon(S(v) - S(u)) \leqslant \Phi(u) + \varepsilon(v - u) + \varepsilon\big(S(v) - S(u)\big) = \Phi(u) + \varepsilon\big(\theta(v) - \theta(u)\big)$. □

Soit maintenant $\varepsilon > 0$, et posons

$$E := \big\{x \in [a, b];\ \Phi(x) \leqslant \Phi(a) + \varepsilon\,\big(\theta(x) - S(a)\big)\big\}.$$

L'ensemble E est non vide car $a \in E$; et E est majoré par b. On peut donc définir

$$c := \sup E.$$

FAIT 3. Le point c appartient à E.

Preuve du Fait 3. Par définition de c, on peut trouver une suite (x_n) de points de E telle que ($x_n \leqslant c$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et) $x_n \to c$. Comme la fonction θ est croissante, on a $\Phi(x_n) \leqslant \Phi(a) + \varepsilon\,\big(\theta(x_n) - \theta(a)\big) \leqslant \Phi(a) + \varepsilon\,\big(\theta(c) - \theta(a)\big)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$; et comme Φ est continue, on en déduit $\Phi(c) \leqslant \Phi(a) + \varepsilon\,\big(\theta(c) - \theta(a)\big)$ en faisant $n \to \infty$. □

FAIT 4. On a $c = b$.

Preuve du Fait 4. Supposons que $c < b$. Alors, par le Fait 2, on peut trouver un point v tel que $c < v < b$ et $\Phi(v) \leqslant \Phi(c) + \varepsilon\big(\theta(v) - \theta(c)\big)$. Comme $c \in E$ d'après le Fait 3, on en déduit

$$\Phi(v) \leqslant \Phi(a) + \varepsilon\,\big(\theta(c) - \theta(a)\big) + \varepsilon\big(\theta(v) - \theta(c)\big) = \Phi(a) + \varepsilon\,\big(\theta(v) - \theta(a)\big).$$

On voit ainsi que $v \in E$, ce qui contredit la définition de c puisque $v > c$. □

La preuve du lemme est maintenant terminée : Par les Faits 3 et 4, on a $b \in E$; donc $\Phi(b) \leqslant \Phi(a) + \varepsilon\,\big(\theta(b) - \theta(a)\big)$ pour tout $\varepsilon > 0$, et donc $\Phi(b) \leqslant \Phi(a)$. □

Preuve de la Proposition 5.1. (i) Supposons que f soit convexe sur I. Comme I est un intervalle ouvert, la fonction f est alors dérivable à droite en tout point, et la fonction $\varphi := f'_d$ est croissante sur I. Pour montrer que f est de la forme souhaitée, il suffit donc de prouver que la fonction Φ définie par

$$\Phi(x) := f(x) - \int_{x_0}^{x} f'_d(t)\,dt$$

est constante sur I. Et d'après le Lemme 5.2 appliqué à Φ et à $-\Phi$, il suffit pour cela de montrer qu'il existe un ensemble dénombrable $D \subseteq I$ tel que Φ et dérivable à droite en tout point $x \in I\backslash D$ avec $\Phi'_d(x) = 0$.

On prend pour D l'ensemble des points de discontinuité de la fonction f'_d ; comme f'_d est croissante, l'ensemble D est bien dénombrable. Par définition de D, si $x \in I\backslash D$, alors la fonction f'_d est continue au point x et donc, par la preuve du Théorème fondamental de l'analyse, la fonction $\widetilde{f}$ définie par $\widetilde{f}(u) := \int_{x_0}^{u} f'_d(t)\,dt$ est dérivable au point x avec $\widetilde{f}'(x) = f'_d(x)$. Ainsi, $\Phi = f - \widetilde{f}$ est dérivable à droite en tout point $x \in I\backslash D$, avec $\Phi'_d(x) = f'_d(x) - f'_d(x) = 0$.

(ii) Inversement, supposons que f soit de la forme $f(x) = c + \int_{x_0}^{x} \varphi(t)\,dt$ où φ est une fonction croissante, et montrons que f est convexe.

Soient $u, v \in I$ avec $u < v$, et soit $\lambda \in [0,1]$. Posons $x_\lambda := (1-\lambda)u + \lambda v$. On a

$$\begin{aligned}
f\big((1-\lambda)u+\lambda v\big) &- \Big((1-\lambda)f(u)+\lambda f(v)\Big)\\
&= (1-\lambda)\Big(f(x_\lambda)-f(u)\Big) + \lambda\Big(f(x_\lambda)-f(v)\Big)\\
&= (1-\lambda)\int_u^{x_\lambda}\varphi(t)\,dt + \lambda\int_v^{x_\lambda}\varphi(t)\,dt\\
&= (1-\lambda)\int_u^{x_\lambda}\varphi(t)\,dt - \lambda\int_{x_\lambda}^{v}\varphi(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Comme la fonction φ est croissante et $u \leqslant x_\lambda \leqslant v$, on en déduit

$$\begin{aligned}
f\big((1-\lambda)u+\lambda v\big)-&\Big((1-\lambda)f(u)+\lambda f(v)\Big)\\
&\leqslant (1-\lambda)\times(x_\lambda-u)\varphi(x_\lambda) - \lambda\times(v-x_\lambda)\varphi(x_\lambda);
\end{aligned}$$

et comme $x_\lambda - u = \lambda(v-u)$ et $v - x_\lambda = (1-\lambda)(v-u)$ (micro-exo), on obtient ainsi

$$\begin{aligned}
f\big((1-\lambda)u+\lambda v\big)-&\Big((1-\lambda)f(u)+\lambda f(v)\Big)\\
&\leqslant (1-\lambda)\lambda(v-u)\varphi(x_\lambda) - \lambda(1-\lambda)(v-u)\varphi(x_\lambda) = 0.
\end{aligned}$$

Donc la fonction f est en effet convexe. □

6. Exemples d'inégalités de convexité

6.1. Minoration du sinus et du cosinus.

LEMME 6.1. *Pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a*

$$\sin(x) \geqslant \frac{2}{\pi}\,x \qquad \text{et} \qquad \cos(x) \geqslant 1 - \frac{2}{\pi}\,x.$$

Démonstration. La fonction sin est concave sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ car $\sin''(x) = -\sin(x) \leqslant 0$ sur $[0, \frac{\pi}{2}]$. Donc le graphe de sin est au dessus de la corde joignant les points $A =$

$(0, \sin(0)) = (0,1)$ et $B = (\frac{\pi}{2}, \sin(\frac{\pi}{2})) = (\frac{\pi}{2}, 0)$, ce qui donne la première inégalité. La deuxième se démontre de la même façon (exo). ☐

Exercice. Montrer que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\lambda \sin(x)} dx \to 0 \qquad \text{quand } \lambda \to +\infty.$$

6.2. Fonctions sous-additives.

PROPOSITION 6.2. *Si $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction* concave, *alors*

$$\forall x, y \in [0, \infty[: \; f(x+y) + f(0) \leqslant f(x) + f(y).$$

En particulier, si $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ est concave avec de plus $f(0) \geqslant 0$, alors f est ***sous-additive*** *:*

$$\forall x, y \in [0, \infty[: \; f(x+y) \leqslant f(x) + f(y).$$

Démonstration. Fixons $x, y \in [0, \infty[$. Si $x = 0 = y$, alors l'inégalité est évidente ; donc on peut supposer que $x + y > 0$.

L'idée est d'écrire que $x \in [0, x+y]$ et $y \in [0, x+y]$ et d'utiliser la concavité de f. De façon précise, on a

$$x = (1-\lambda) \times 0 + \lambda \times (x+y) \qquad \text{avec } \lambda := \tfrac{x}{x+y};$$

donc, par concavité de f :

$$f(x) \geqslant (1-\lambda) f(0) + \lambda f(x+y) = \frac{y}{x+y} f(0) + \frac{x}{x+y} f(x+y).$$

De même,

$$f(y) \geqslant \frac{x}{x+y} f(0) + \frac{y}{x+y} f(x+y);$$

et donc

$$\begin{aligned} f(x) + f(y) &\geqslant \frac{y}{x+y} f(0) + \frac{x}{x+y} f(x+y) + \frac{x}{x+y} f(0) + \frac{y}{x+y} f(x+y) \\ &= f(0) + f(x+y). \end{aligned}$$

☐

COROLLAIRE 6.3. *Si $\alpha \in [0,1]$, alors*

$$\forall x, y \geqslant 0 \; : \; (x+y)^\alpha \leqslant x^\alpha + y^\alpha.$$

Démonstration. La fonction $t \mapsto t^\alpha$ est concave sur $[0, \infty[$ et vaut 0 en 0, donc elle est sous-additive. ☐

Exercice. Démontrer directement que $\sqrt{x+y} \leqslant \sqrt{x} + \sqrt{y}$ pour tous $x, y \geqslant 0$.

6.3. Inégalité arithmético-géométrique.

PROPOSITION 6.4. *Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n > 0$ vérifiant $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Pour tous nombres $x_1, \dots, x_n \geqslant 0$, on a*

$$\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda_i} \leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i.$$

Démonstration. Le résultat est évident si l'un des x_i vaut 0 (le produit de gauche vaut alors 0) ; donc on peut supposer que tous les x_i sont > 0. On peut alors prendre le logarithme : l'inégalité à démontrer est équivalente à

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \ln(x_i) \leqslant \ln\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right),$$

ce qui est vrai par concavité de la fonction ln. □

COROLLAIRE 6.5. *Pour tous $x_1, \ldots, x_n$, on a*

$$\left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{1/n} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i.$$

*Cette inégalité s'appelle l'**inégalité arithmético-géométrique**.*

Démonstration. On applique la proposition avec $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n := \frac{1}{n}$. □

6.4. Inégalité de Hermite-Hadamard.

PROPOSITION 6.6. *Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe, alors*

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big).$$

Démonstration. On a besoin du fait suivant.

FAIT. Si α est une fonction *affine*, alors

$$\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha(t)\,dt = \frac{1}{2}\big(\alpha(a) + \alpha(b)\big).$$

Preuve du Fait. C'est "juste un calcul" : si $\alpha(t) = c\,t + d$, les trois quantités sont égales à $c \times \frac{a+b}{2} + d$ (exo). □

Par la Proposition 4.4, on peut trouver une fonction affine α telle que

$$\alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \alpha(t) \leqslant f(t) \text{ pour tout } t \in [a, b].$$

Donc, en utilisant le Fait :

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \alpha\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha(t)\,dt \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Si on note α la fonction affine telle que $\alpha(a) = f(a)$ et $\alpha(b) = f(b)$, alors $\alpha(t) \geqslant f(t)$ pour tout $t \in [a, b]$ par convexité de f (faire le dessin). Donc, en utilisant à nouveau le Fait :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \alpha(t)\,dt = \frac{1}{2}\big(\alpha(a) + \alpha(b)\big) = \frac{1}{2}\big(f(a) + f(b)\big).$$

□

6.5. Inégalité de Jensen "continue".

PROPOSITION 6.7. *Soit* $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{R}$ *une fonction continue, et soit* f *une fonction convexe continue sur un intervalle* I *contenant* $\mathbf{x}([a,b])$. *Si* $\lambda : [a,b] \to \mathbb{R}$ *est une fonction continue* $\geqslant 0$ *telle que* $\int_a^b \lambda(t)\,dt = 1$, *alors* $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt \in I$ *et*

$$f\left(\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt\right) \leqslant \int_a^b \lambda(t) f(\mathbf{x}(t))\,dt.$$

En particulier : $\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathbf{x}(t)\,dt \in I$ *et*

$$f\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \mathbf{x}(t)\,dt\right) \leqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b f(\mathbf{x}(t))\,dt.$$

Démonstration. La 2ème partie de la proposition découle de la 1ère en prenant pour λ la fonction constante définie par $\lambda(t) := \frac{1}{b-a}$, qui vérifie bien que $\int_a^b \lambda(t)\,dt = 1$. Donc on se concentre sur la 1ère partie.

Comme la fonction $\mathbf{x}$ est continue, $\mathbf{x}([a,b])$ est un intervalle fermé borné $[m,M]$. On a $m \leqslant \mathbf{x}(t) \leqslant M$ pour tout $t \in [a,b]$, donc

$$m = \int_a^b m\,\lambda(t)\,dt \leqslant \int_a^b \mathbf{x}(t)\,\lambda(t)\,dt \leqslant \int_a^b M\,\lambda(t)\,dt = M.$$

Ainsi $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt \in [m,M] = \mathbf{x}([a,b])$, et donc $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt \in I$. Pour l'inégalité, on distingue 2 cas.

CAS 1. $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt \notin \mathring{I}$.

Dans ce cas, $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt \notin \,]m,M[$ puisque $[m,M] \subseteq I$, donc $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt$ vaut m ou M puisqu'on sait déjà que $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt \in [m,M]$. Si par exemple $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt = M = \int_a^b \lambda(t)\,M\,dt$, alors $\int_a^b \lambda(t)\,(M - \mathbf{x}(t))\,dt = 0$. Comme la fonction $t \mapsto \lambda(t)(M - f(t))$ est continue et $\geqslant 0$, elle est donc identiquement nulle (*cf* l'Exercice 2.17 du Chapitre 2). On a donc $\mathbf{x}(t) = M$ pour tout $t \in [a,b]$ tel que $\lambda(t) \neq 0$. Mais alors $\lambda(t)f(\mathbf{x}(t)) = \lambda(t)f(M)$ pour tout $t \in [a,b]$ (qu'on ait ou non $\lambda(t) \neq 0$), donc $\int_a^b \lambda(t)\,f(\mathbf{x}(t))\,dt = \int_a^b \lambda(t)\,f(M)\,dt = f(M)$. Comme $\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt = M$, on obtient ainsi $f\left(\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt\right) = \int_a^b \lambda(t)\,f(\mathbf{x}(t))\,dt$; autrement dit, l'inégalité de Jensen est vraie avec même *égalité*.

CAS 2. $x_0 := \int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt \in \mathring{I}$.

Dans ce cas, la Proposition 4.4 permet trouver une fonction affine $\alpha(x) = cx + d$ telle que

$$\alpha(x_0) = f(x_0) \qquad \text{et} \qquad \alpha(x) \leqslant f(x) \quad \text{pour tout } x \in I.$$

On peut donc écrire

$$\begin{aligned}
f\left(\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt\right) &= \alpha\left(\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt\right)\\
&= c\times\int_a^b \lambda(t)\,\mathbf{x}(t)\,dt + d\\
&= \int_a^b \lambda(t)\,\big(c\mathbf{x}(t)+d\big)\,dt \qquad \text{car } \textstyle\int_a^b \lambda(t)\,dt = 1\\
&= \int_a^b \alpha(\mathbf{x}(t))\,dt\\
&\leqslant \int_a^b f(\mathbf{x}(t))\,dt.
\end{aligned}$$

□

Exercice. Utiliser la même méthode (basée sur la Proposition 4.4) pour démontrer l'inégalité de Jensen discrète.

6.6. Inégalité de Hölder.

THÉORÈME 6.8. *Soient p,q verifiant $p,q>1$ et $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.*

(1) *Pour tous $u_1,\dots,u_n,v_1,\dots,v_n\in\mathbb{C}$, on a*

$$\sum_{i=1}^n |u_iv_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{1/q}.$$

(2) *Si u et v sont des fonctions continues sur un intervalle $[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, alors*

$$\int_a^b |u(t)v(t)|\,dt \leqslant \left(\int_a^b |u(t)|^p\right)^{1/p}\left(\int_a^b |v(t)|^q\right)^{1/q}.$$

Démonstration. La preuve repose sur le fait suivant.

FAIT. Pour tous $x,y\geqslant 0$, on a $xy\leqslant \frac{1}{p}\,x^p+\frac{1}{q}\,y^q$.

Preuve du Fait. Le résultat est évident si $x=0$ ou $y=0$ (car $xy=0$ dans ce cas). Donc on peut supposer que $x>0$ et $y>0$, et dans ce cas le résultat découle de la concavité du logarithme : on a

$$\ln\Big(\frac{1}{p}\,x^p+\frac{1}{q}\,y^q\Big) \geqslant \frac{1}{p}\,\ln(x^p)+\frac{1}{q}\,\ln(y^q) = \ln(x)+\ln(y) = \ln(xy),$$

d'où la conclusion. □

Pour montrer (1), posons

$$A := \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p} \qquad \text{et} \qquad B := \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{1/q}.$$

Si $A=0$ ou $B=0$, alors tous les u_i valent 0 ou tous les v_i valent 0, donc l'inégalité à démontrer est évidente. On peut donc supposer que $A>0$ et $B>0$, ce qui permet de poser

$$x_i := \frac{|u_i|}{A} \qquad \text{et} \qquad y_i := \frac{|v_i|}{B}.$$

Si on applique le Fait à x_i et y_i, on obtient

$$\frac{|u_i v_i|}{AB} \leqslant \frac{1}{p}\,\frac{|u_i|^p}{A^p} + \frac{1}{q}\,\frac{|v_i|^q}{B^q} \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$

Donc, en sommant ces inégalités :

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB}\sum_{i=1}^{n}|u_i v_i| &\leqslant \frac{1}{p} \times \frac{1}{A^p}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p}_{A^p} + \frac{1}{q} \times \frac{1}{B^q}\underbrace{\sum_{i=1}^{n}|v_i|^q}_{B^q}\\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Donc $\sum_{i=1}^{n}|u_i v_i| \leqslant AB$, ce qui est la conclusion souhaitée.

Pour démontrer (2), on pose cette fois

$$A := \left(\int_a^b |u(t)|^p\right)^{1/p} \qquad \text{et} \qquad B := \left(\int_a^b |v(t)|^q\right)^{1/q}.$$

Si $A = 0$ ou $B = 0$, alors $u = 0$ ou $v = 0$ car les fonctions $|u|^p$ et $|v|^q$ sont continues $\geqslant 0$ (*cf* l'Exercice 2.17 du Chapitre 2) ; donc le résultat est évident. On peut donc supposer que $A > 0$ et $B > 0$, ce qui permet de poser

$$\mathbf{x}(t) := \frac{|u(t)|}{A} \qquad \text{et} \qquad \mathbf{y}(t) := \frac{|v(t)|}{B}.$$

Si on applique le fait à $\mathbf{x}(t)$ et $\mathbf{y}(t)$ pour tout $t \in [a, b]$ et qu'on intégre entre a et b, on obtient comme précédemment

$$\begin{aligned}\frac{1}{AB}\int_a^b |u(t)v(t)|\,dt &\leqslant \frac{1}{p} \times \frac{1}{A^p}\int_a^b |u(t)|^p dt + \frac{1}{q} \times \frac{1}{B^q}\int_a^b |v(t)|^q dt\\ &= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1;\end{aligned}$$

donc $\int_a^b |u(t)v(t)|\,dt \leqslant AB$, ce qu'on voulait montrer. □

Autre preuve. (1) On pose comme plus haut

$$A = \left(\sum_{i=1}^{n}|u_i|^p\right)^{1/p},$$

et on écrit

$$|u_i v_i| = \lambda_i x_i, \qquad \text{où} \quad \lambda_i = \frac{|u_i|^p}{A^p} \quad \text{et} \quad x_i = A^p\,|u_i|^{1-p}|v_i|.$$

Les λ_i sont $\geqslant 0$ et $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ par définition de A. Comme la fonction $x \mapsto x^q$ est convexe sur $[0, \infty[$, on en déduit, d'après l'*inégalité de Jensen* discrète :

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n |u_i v_i|\right)^q = \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right)^q &\leqslant \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^q \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{|u_i|^p}{A^p} \times A^{pq}\, |u_i|^{q(1-p)} |v_i|^q \\ &= A^{pq-p} \sum_{i=1}^n |u_i|^{p+q-pq} |v_i|^q \\ &= A^q \sum_{i=1}^n |v_i|^q \qquad \text{car } p+q = pq.\end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leqslant A \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{1/q} = \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^q\right)^{1/q}.$$

(2) La preuve est très semblable en posant $A = \left(\int_a^b |u(t)|^p\right)^{1/p}$, en écrivant

$$|u(t)v(t)| = \lambda(t)\, \mathbf{x}(t) \qquad \text{où} \quad \lambda(t) = \frac{|u(t)|^p}{A^p} \quad \text{et} \quad \mathbf{x}(t) = A^p\, |u(t)|^{1-p} |v(t)|,$$

et en utilisant cette fois l'inégalité de Jensen *continue*. Les détails sont laissés en exo. □

Remarque. Pour $p = 2 = q$, l'inégalité de Hölder s'appelle l'**inégalité de Cauchy-Schwarz** (déjà rencontrée au Chapitre 2). Elle s'écrit

$$\sum_{i=1}^n |u_i v_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^2\right)^{1/2} \qquad \text{dans le cas "discret"},$$

$$\int_a^b |u(t)v(t)|\, dt \leqslant \left(\int_a^b |u(t)|^2\right)^{1/2} \left(\int_a^b |v(t)|^2\right)^{1/2} \qquad \text{dans le cas "continu"}.$$

Exercice. Soit $f = \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe $p > 1$ et une constante C tels que

$$\int_I |f'(t)|^p dt \leqslant C \qquad \text{pour tout intervalle fermé borné } I \subseteq \mathbb{R}.$$

Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$. (*Suggestion* : utiliser le Théorème fondamental de l'analyse et l'inégalité de Hölder pour majorer $|f(v) - f(u)|$ pour $u, v \in \mathbb{R}$.)

6.7. Inégalité de Minkowski.

Théorème 6.9. *Soit* $p \in [1, \infty[$.

(1) *Pour tous* $u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{C}$, *on a*

$$\left(\sum_{i=1}^n |u_i + v_i|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n |u_i|^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p\right)^{1/p}.$$

(2) *Pour toutes fonctions continues* $u, v : [a, b] \to \mathbb{C}$, *on a*

$$\left(\int_a^b |u(t) + v(t)|^p dt\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |u(t)|^p dt\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |v(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Démonstration. (1) Pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{C}^n$, on posera

$$\|x\|_p := \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{1/p}.$$

Avec cette notation, il s'agit de montrer que

$$\|u + v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p \qquad \text{pour tous } u, v \in \mathbb{C}^n.$$

FAIT 1. Si $x \in \mathbb{C}^n$, alors $\|\alpha x\|_p = |\alpha|\, \|x\|_p$ pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$.

Preuve du Fait 1. Exo. □

FAIT 2. Si $x, y \in \mathbb{C}^n$ vérifient $\|x\|_p \leqslant 1$ et $\|y\|_p \leqslant 1$, alors $\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_p \leqslant 1$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Preuve du Fait 2. Si on écrit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, \cdots, y_n)$, alors

$$\begin{aligned}
\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_p^p &= \sum_{i=1}^n \big|(1-\lambda)x_i + \lambda y_i\big|^p \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \big(|(1-\lambda)x_i| + |\lambda y_i|\big)^p \\
&= \sum_{i=1}^n \big((1-\lambda)|x_i| + \lambda |y_i|\big)^p \\
&\leqslant \sum_{i=1}^n \big((1-\lambda)|x_i|^p + \lambda |y_i|^p\big) \qquad \text{car la fonction } t \mapsto t^p \text{ est convexe} \\
&= (1-\lambda)\underbrace{\sum_{i=1}^n |x_i|^p}_{\leqslant 1} + \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^n |y_i|^p}_{\leqslant 1} \\
&\leqslant (1-\lambda) + \lambda = 1.
\end{aligned}$$

Donc $\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_p \leqslant 1$. □

Remarque. Le Fait 2 signifie que l'ensemble $C = \{x \in \mathbb{C}^n;\ \|x\|_p \leqslant 1\}$ est un **ensemble convexe** :

$$\forall x, y \in C\ \forall \lambda \in [0, 1]\ :\ (1-\lambda)x + \lambda y \in C.$$

On peut maintenant démontrer (1). Soient $u, v \in \mathbb{C}^n$. Si $\|u\|_p = 0$ ou $\|v\|_p = 0$, alors $u = 0$ ou $v = 0$, donc $\|u + v\|_p = \|u\|_p + \|v\|_p$ (micro-exo). On peut donc supposer que $\|u\|_p > 0$ et $\|v\|_p > 0$, ce qui permet de poser

$$x := \frac{u}{\|u\|_p} \qquad \text{et} \qquad y := \frac{v}{\|v\|_p}.$$

Par le Fait 1, on a (exo)

$$\|x\|_p = 1 = \|y\|_p.$$

Donc, par le Fait 2 :

$$\|(1-\lambda)x + \lambda y\|_p \leqslant 1 \qquad \text{pour tout } \lambda \in [0,1].$$

FAIT 3. Il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que $\frac{u+v}{\|u\|_p + \|v\|_p} = (1-\lambda)x + \lambda y$.

Preuve du Fait 3. On a

$$\begin{aligned} \frac{u+v}{\|u\|_p + \|v\|_p} &= \frac{\|u\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p}\, x + \frac{\|v\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p}\, y \\ &= (1-\lambda)x + \lambda y \qquad \text{avec } \lambda = \tfrac{\|v\|_p}{\|u\|_p + \|v\|_p}\ ; \end{aligned}$$

et en effet $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. □

La preuve est maintenant terminée : par le Fait 3, on a

$$\left\| \frac{u+v}{\|u\|_p + \|v\|_p} \right\|_p \leqslant 1,$$

et donc $\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p$ par le Fait 1.

(2) La preuve est très semblable. Notons $\mathcal{C}([a,b])$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $\mathbf{x} : [a,b] \to \mathbb{C}$. Pour $\mathbf{x} \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose

$$\|\mathbf{x}\|_p := \left(\int_a^b |\mathbf{x}(t)|^p \right)^{1/p} ;$$

et il s'agit de montrer que

$$\|u+v\|_p \leqslant \|u\|_p + \|v\|_p \qquad \text{pour toutes } u, v \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Pour cela, on recopie purement et simplement la preuve de (1), en remplaçant les sommes par des intégrales. Les détails sont laissés en exo. □