Mini-problèmes

Problème 1 (théorème du point fixe de Brouwer)

On note B la boule unité ouverte euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de démontrer le **théorème de Brouwer** : *toute application continue* $f : \overline{B} \to \overline{B}$ *possède un point fixe.*

A1 Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'on a $g(\overline{B}) \subset \overline{B}$ et $g(\xi) = \xi$ pour tout $x \in \partial B$. Pour $t \in [0;1]$, on définit $v_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$v_t(x) = (1-t)x + tg(x)\,.$$

a Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $t \leq \varepsilon_0$, l'application v_t est injective sur $\overline{B}$ et vérifie $J_{v_t}(x) > 0$ sur $\overline{B}$, où la lettre J désigne le déterminant jacobien.
b Montrer qu'on a $v_t(B) \subset B$ pour tout $t \in [0;1[$, et que si $t \leq \varepsilon_0$, alors v_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de B sur B. On pourra vérifier que $v_t(B)$ est ouvert et fermé dans B.
c Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $t \mapsto \int_B J_{v_t}(x)\,dm(x)$ est polynomiale sur $\mathbb{R}$.
d Déduire des questions précédentes que pour tout $t \in [0;1]$, on a

$$\int_B J_{v_t(x)}\,dm(x) = m(B)\,.$$

A2 Montrer que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert tel que $g(V) \subset \partial B$, alors $J_g(x) \equiv 0$ dans V.
A3 Montrer qu'il n'existe pas d'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(\overline{B}) \subset \partial B$ et $g(\xi) = \xi$ pour tout $\xi \in \partial B$.

B Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $\|f(x)\| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
1 On suppose que f ne possède pas de point fixe. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $g(x)$ le point d'intersection de la demi-droite $\Delta_x = [f(x);x)$ avec ∂B. Justifier la définition, et montrer que l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
2 Montrer que f possède un point fixe.

C Montrer que si $f : \overline{B} \to \overline{B}$ est une application continue, alors il existe une suite (f_k) d'applications de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$ qui converge uniformément vers f sur $\overline{B}$, avec de plus $\|f_k(x)\| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et pour tout k.

D Conclure.

Problème 2 (Théorème du point fixe de Browder)

Dans tout le problème, K est une partie convexe fermée bornée non vide d'un espace de Hilbert réel H, et $T : K \to K$ est une application 1-lipschitzienne, c'est-à-dire vérifiant

$$\forall x, y \in K \qquad \|T(x) - T(y)\| \leq d(x, y)\,.$$

Le but du problème est de montrer que T possède un point fixe.

A Soit $a \in K$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $T_n : K \to E$ par $T_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) T(x) + \frac{1}{n} a$.
1 Montrer que T_n possède un unique point fixe $x_n \in K$.
2 Quelle est la limite de la suite $(x_n - T(x_n))$?

B Dans cette partie, $\varphi : H \to H$ une application continue vérifiant

$$\forall x, y \in H \quad \langle \varphi(y) - \varphi(x), y - x \rangle \geq 0\,.$$

1 Soit (x_n) une suite de points de H. On suppose que (x_n) converge faiblement vers un point $x \in H$, et que $(\varphi(x_n))$ converge en norme vers un point $l \in H$.
a Montrer que $\langle \varphi(x_n), x_n \rangle$ tend vers $\langle l, x \rangle$.
b En déduire qu'on a $\langle l - \varphi(y), x - y \rangle \geq 0$ pour tout $y \in H$, et par conséquent $\langle l - \varphi(x \pm \varepsilon h), \pm \varepsilon h \rangle \geq 0$ pour tout $h \in H$ et tout $\varepsilon > 0$.
c Montrer que $l = \varphi(x)$.
3 Déduire de **1** que $\varphi(K)$ est une partie fermée de H.

C On rappelle que pour tout $x \in H$, il existe un unique point $p(x) \in K$ tel que $||x - p(x)|| = d(x, K)$. De plus, $p(x)$ est caractérisé par la propriété suivante :

$$\forall z \in K \qquad \langle z - p(x), x - p(x) \rangle \leq 0\,.$$

1a Montrer que pour $x, y \in H$, on a $||p(x) - p(y)||^2 \leq \langle p(x) - p(y), x - y \rangle$. En déduire que l'application $p : H \to K$ est 1-lipschitzienne.
1b Montrer que $T \circ p$ est également 1-lipschitzienne.
2 En utilisant **B**, en déduire que l'ensemble $\{x - T(x);\ x \in K\}$ est une partie fermée de H.

D Conclure.

Problème 3 Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert complexe. On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des opérateurs linéaires continus sur H.

A (formule de Poisson)

1 Pour $S \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|S\| \ < 1$, on pose

$$P_S = \sum_1^\infty S^n + Id + \sum_1^\infty S^{*n}\,,$$

où S^* est l'adjoint de l'opérateur S. Justifier la définition de P_S en montrant que les deux séries convergent en norme dans $\mathcal{L}(H)$.
2 Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|T\| < 1$.
a Montrer que l'application $\theta \mapsto P_{e^{-i\theta}T}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(H)$.
b Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer l'intégrale (vectorielle) $\int_0^{2\pi} e^{in\theta} P_{e^{-i\theta}T}\, d\theta$.
c En déduire que pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$, on a la "formule de Poisson"

$$Q(T) = \int_0^{2\pi} Q(e^{i\theta}) P_{e^{-i\theta}T}\, \frac{d\theta}{2\pi}\,.$$

B (inégalité de von Neumann)
1 Montrer que si $S \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $\|S\| < 1$, alors on peut écrire

$$P_S = (Id - S^*)^{-1} - Id + (Id - S)^{-1} = (Id - S^*)^{-1}(Id - S^*S)\,(Id - S)^{-1}\,.$$

En déduire que P_S est un opérateur auto-adjoint et **positif**, c'est-à-dire vérifiant $\langle P_S x, x\rangle \geq 0$ pour tout $x \in H$.
2 Soit $[a\,;b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $u : [a\,;b] \to \mathcal{L}(H)$ continue. On suppose que pour tout $t \in [a\,;b]$, l'opérateur $u(t)$ est auto-adjoint positif. Soit également $\varphi : [a\,;b] \to \mathbb{C}$ continue.
a On note A l'opérateur $\int_a^b \varphi(t)u(t)\,dt$. Montrer que si $x, y \in H$, alors

$$|\langle Ax, y\rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \left[\int_a^b \langle u(t)x, x\rangle\, dt\right]^{1/2} \left[\int_a^b \langle u(t)y, y\rangle\, dt\right]^{1/2}\,.$$

b Déduire de **a** qu'on a

$$\left\|\int_a^b \varphi(t)u(t)\,dt\right\| \leq \|\varphi\|_\infty \left\|\int_a^b u(t)\,dt\right\|\,.$$

3 Pour $Q \in \mathbb{C}[X]$, on pose $\|Q\|_\infty = \sup\{|Q(\zeta)|;\ |\zeta| = 1\}$. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $\|T\| < 1$, alors

$$\|Q(T)\| \leq \|Q\|_\infty$$

pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$.
4 Montrer que l'inégalité précédente est encore valable si on suppose seulement $\|T\| \leq 1$. Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de von Neumann**.

Problème 4 (théorème ergodique de von Neumann)

Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert réel, et $T : H \to H$ une application linéaire continue vérifiant $\|T\| \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n = \frac{1}{n}(Id + T + \cdots + T^{n-1})\,.$$

1a Montrer que pour tout $x \in H$, on a

$$||T^*(x) - x||^2 \leq 2\left(||x||^2 - \langle x, T(x)\rangle\right).$$

1b En utilisant **a**, montrer qu'on a $\mathrm{Ker}(Id - T) = \mathrm{Ker}(Id - T^*)$. En déduire une décomposition de H à l'aide de $\mathrm{Ker}(Id - T)$ et de $\mathrm{Im}(Id - T)$.
2 Calculer $S_n(x)$ pour $x \in \mathrm{Ker}(Id - T)$, et déterminer $\lim_{n\to\infty} S_n(x)$ pour $x \in \mathrm{Im}(Id - T)$.
3 Montrer que pour tout $x \in H$, la suite $(S_n(x))$ converge vers $\pi(x)$, où π est la projection orthogonale sur $\mathrm{Ker}(Id - T)$.

Problème 5 (projections)

Dans tout l'exercice, Z est un espace vectoriel normé sur $\mathbb{R}$. On dit qu'une application linéaire $p : Z \to Z$ est une **projection** de Z si elle vérifie $p \circ p = p$. Si E est un sous-espace vectoriel de Z, on appelle **projection de Z sur E** toute projection p de Z vérifiant $\mathrm{Im}(p) = E$. Si p est une projection non continue, on pose $||p|| = \infty$.

A Montrer que pour tout sous-espace vectoriel $E \subset Z$, il existe une projection de Z sur E.

B1 Montrer que si p est une projection de Z, alors $\mathrm{Im}(p) = \mathrm{Ker}(Id - p)$ et $Z = \mathrm{Ker(p)} \oplus \mathrm{Im(p)}$.
B2 Soit p une projection de Z.
a Montrer que si p est continue, alors $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont fermés dans Z.
b On suppose que Z est un espace de Banach. Montrer que p est continue si et seulement si $\mathrm{Ker}(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$ sont fermés dans Z.
B3 Soit $p : Z \to Z$ une projection continue, avec $p \neq 0$.
a Montrer qu'on a $||p|| \geq 1$.
b On suppose que Z est un espace de Hilbert. Montrer qu'on a $||p|| = 1$ si et seulement si p est une projection orthogonale.

C Soit E un sous-espace vectoriel fermé de Z.
1 On suppose que E est de codimension finie. Montrer que toutes les projections de Z sur E sont continues.
2 On suppose que E est de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E.
a Montrer qu'on peut trouver des formes linéaires continues $x_1^*, \ldots, x_n^* \in Z^*$ vérifiant $\langle x_i^*, e_i\rangle = 1$ pour tout i et $\langle x_i^*, e_j\rangle = 0$ si $i \neq j$.
b Montrer qu'il existe une projection continue de Z sur E, de norme inférieure ou égale à $\sum_1^n \|x_i^*\|\,\|e_i\|$.

D Dans cette partie, E est un sous-espace fermé de Z. On pose

$$\pi(E,Z) = \inf\{||p||;\ p \text{ projection de } Z \text{ sur } E\}\,.$$

1 Combien vaut $\pi(E,Z)$ si Z est un espace de Hilbert?

2 Dans cette question, on prend $Z = (\mathbb{R}^n, ||\ .\ ||_\infty)$, et E est l'hyperplan d'équation $x_1 + \cdots + x_n = 0$.

a Soit $T \in \mathcal{L}(Z)$, et soit $M_T = (a_{ij})$ la matrice de T dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'on a

$$||T|| = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$$

b Soit $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$ vérifiant $\sum_1^n \alpha_i = 1$. On note p_α la projection de $\mathbb{R}^n$ sur E dans la direction de la droite $\mathbb{R}\alpha$.

(i) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose $\varphi(t) = |1-t| + (n-1)|t|$. Calculer $||p_\alpha||$ en fonction de $\varphi(\alpha_1), \ldots, \varphi(\alpha_n)$.

(ii) En déduire qu'on a $||p_\alpha|| \geq 2(1 - \frac{1}{n})$. On pourra par exemple observer que la fonction φ est convexe.

c Calculer $\pi(E,Z)$.

3 Dans cette question, Z est quelconque, et on suppose que E est de dimension finie. On pose $n = \dim(E)$.

a Soit $\mathbf{f}$ une base de E. On définit $\Phi : E^n \to \mathbb{R}$ par $\Phi(x_1, \ldots, x_n) = |\det(x_1, \ldots, x_n)|$, où le déterminant est pris dans la base $\mathbf{f}$. Montrer qu'il existe $(e_1, \ldots, e_n)$ vérifiant

$$\forall (x_1, \ldots x_n) \in B_E^n \qquad \Phi(e_1, \ldots, e_n) \geq \Phi(x_1, \ldots, x_n)\,,$$

où on a noté B_E la boule unité de E.

b Montrer que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, et qu'on a $||e_i|| = 1$ pour tout $i \in \{1; \ldots; n\}$.

c On note $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$ la base duale de $(e_1, \ldots, e_n)$ dans E^*.

(i) Pour $x \in E$ et $i \in \{1; \ldots; n\}$, exprimer $|\langle e_i^*, x\rangle|$ à l'aide de Φ.

(ii) Montrer que les formes linéaires e_i^* sont toutes de norme 1.

d Montrer qu'on a $\pi(E,Z) \leq \dim(E)$.

E On note ℓ^∞ l'ensemble des suites bornées de nombres réels. On considèrera les éléments de ℓ^∞ comme des fonctions $x : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$. On munit ℓ^∞ de la norme $\|\ .\ \|_\infty$, et on note c_0 le sous-espace (fermé) de ℓ^∞ constitué par les suites tendant vers 0 à l'infini. Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant: *il n'existe pas de projection continue de ℓ^∞ sur c_0.*

1 Soit $(f_i)_{i\in I}$ une famille non dénombrable d'éléments de ℓ^∞, avec $f_i \neq 0$ pour tout $i \in I$.

a Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon > 0$ tels que l'ensemble $\{i \in I;\ |f_i(n)| \geq \varepsilon\}$ est non dénombrable.

b En déduire que l'ensemble $\left\{\sum_{i\in J} f_i;\ J \subset I\,,\ J \text{ fini}\right\}$ n'est pas borné dans ℓ^∞.

2a Montrer qu'il existe une famille non dénombrable $(A_i)_{i\in I}$ de parties de $\mathbb{N}$ vérifiant les propriétés suivantes:

(1) tous les ensembles A_i sont infinis;
(2) $A_i \cap A_j$ est fini si $i \neq j$.

Pour $x \in \mathbb{R}$, on pourra considérer un ensemble du type $A_x = \{r_n(x);\ n \in \mathbb{N}\}$, où $(r_n(x))$ est une suite strictement croissante de rationnels tendant vers x.
2b Montrer que pour tout ensemble fini $J \subset I$, on a

$$\mathbf{1}_{\bigcup_{i\in J} A_i} - \sum_{i\in J} \mathbf{1}_{A_i} \in c_0\,.$$

Ici, bien sûr, on note $\mathbf{1}_A \in \ell^\infty$ la fonction indicatrice d'un ensemble $A \subset \mathbb{N}$.
3 Soit p une projection de l^∞ sur c_0, et soit $q = Id - p$. En utilisant **2b** et **1** avec $f_i = q(\mathbf{1}_{A_i})$, montrer que q n'est pas continue. Conclure.

Problème 6 Si K est un espace métrique compact, on note $\mathcal{C}(K)$ l'ensemble des fonctions continues sur K. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant. *Pour un espace de Banach X, les propriétés suivantes sont équivalentes:*

(1) *X est séparable;*
(2) *X est linéairement isométrique à un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K)$, pour un certain espace métrique compact K.*

A Soit (K, d) un espace métrique compact.
1 Montrer que K est séparable.
2 Soit $D = \{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable dense dans K. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : K \to \mathbb{R}$ par $f_n(x) = d(a_n, x)$. Montrer que si $x, y \in K$ et $x \neq y$, alors il existe un entier n tel que $f_n(x) \neq f_n(y)$.
3 Montrer que si $\mathcal{F} = \{f_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie dénombrable de $\mathcal{C}(K)$, alors la sous-algèbre de $\mathcal{C}(K)$ engendrée par $\mathcal{F}$ est séparable.
4 Montrer que l'espace de Banach $\mathcal{C}(K)$ est séparable.

B Soit X un espace de Banach séparable. On note K la boule unité de X^*.
1 Soit $D = \{a_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ un ensemble dénombrable et dense dans la boule unité de X. Pour $x^*, y^* \in K$, on pose

$$d(x^*, y^*) = \sum_0^\infty 2^{-i} |\langle x^*, a_i\rangle - \langle y^*, a_i\rangle|\,.$$

a Montrer que d est une distance sur K.
b Montrer qu'une suite $(x_n^*) \subset K$ converge dans K pour la distance d si et seulement si $\langle x_n^*, x\rangle$ converge pour tout $x \in X$, et qu'il revient encore au même de dire que (x_n^*) converge en tout point d'une partie dense de X.

2 Pour $x \in X$, on définit une fonction $f_x : K \to \mathbb{R}$ par $f_x(x^*) = \langle x^*, x\rangle$. Montrer que f_x est une fonction continue bornée sur (K, d), et qu'on a $||f_x||_\infty = ||x||$.

C Conclure.

Problème 7 (Adjoint Banachique)

Dans tout l'exercice, X et Y sont des espaces de Banach, et $T : X \to Y$ est une application linéaire continue.

A1 Montrer que si $y^* \in Y^*$, on définit une forme linéaire continue $T^*(y^*)$ sur X en posant

$$\langle T^*(y^*), x\rangle = \langle y^*, T(x)\rangle\,.$$

A2 Montrer que l'application $T^* : Y^* \to X^*$ est linéaire continue. On dit que T^* est l'**adjoint** de l'opérateur T.
A3 Montrer qu'on a $\|T^*\| = \|T\|$.
A4 Dans le cas où X et Y sont des espaces de Hilbert, quel rapport y a-t-il entre T^* et l'adjoint hilbertien de T?

B Montrer que T^* est injectif si et seulement si $\mathrm{Im}(T)$ est dense dans Y.

C Dans cette partie, on veut montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes:
(1) T est surjectif;
(2) il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall y^* \in Y^* \ ||T^*(y^*)|| \geq c\,||y^*||$;
(3) T^* est injectif et à image fermée.

1 Montrer que (1) entraîne (2) à l'aide du théorème de l'image ouverte.
2 Montrer que (2) et (3) sont équivalentes.
3a On suppose que (2) est vérifiée. En notant B la boule unité de X, montrer que $C = \overline{T(B)}$ contient la boule $\overline{B}(0, c)$. On pourra raisonner par l'absurde en remarquant que C est un convexe fermé de Y et en utilisant la forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.
3b Soit toujours B la boule unité de X, et soit $\alpha > 0$. On suppose que $\overline{T(\alpha B)}$ contient la boule $\overline{B}(0, 1)$. Montrer que pour tout $y \in Y$ vérifiant $\|y\| \leq 1$, on peut construire une suite $(x_n) \subset X$ telle que $\|x_n\| \leq \alpha$ et

$$\left\| y - T\left(\sum_{i=0}^{n} 2^{-i} x_i\right)\right\| \leq 2^{-n-1}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3c Montrer que (2) entraîne (1).

D On pose $Y_1 = \overline{\mathrm{Im}(T)}$, et on note T_1 l'opérateur T considéré comme application linéaire continue de X dans Y_1. Montrer qu'on a $\mathrm{Im}(T_1^*) = \mathrm{Im}(T^*)$.

E Montrer que $\mathrm{Im}(T)$ est fermé dans Y si et seulement si $\mathrm{Im}(T^*)$ est fermé dans X^*.

Problème 8 (quotients)

Dans tout l'exercice, X est un espace vectoriel normé, et F est un sous-espace vectoriel fermé de X. Pour $x \in X$, on note $[x]$ la classe de x dans l'espace vectoriel quotient X/F.
1 Montrer que si $x \in X$, alors $\operatorname{dist}(x, F) = \inf\{\|x - f\|;\ f \in F\}$ ne dépend que de $[x]$.
2 Montrer qu'on définit une norme sur X/F en posant $\|[x]\| = \operatorname{dist}(x, F)$. Cette norme s'appelle la **norme quotient** sur X/F.
3 On suppose que X est un espace de Banach. Montrer que X/F muni de la norme quotient est un espace de Banach. On pourra montrer que toute série absolument convergente à termes dans X/F est convergente.
4 Montrer que le dual de X/F s'identifie isométriquement à

$$F^{\perp} := \left\{x^* \in X^*;\ x^*_{|F} = 0\right\}\ .$$

5 Soit E un sous-espace vectoriel de X. Montrer que le dual de E s'identifie isométriquement à $X^*/E^{\perp}$.

Problème 9 Dans tout le problème, (K, d) est un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(K)$ l'espace des fonctions continues sur K, à valeurs complexes.

A Dans cette partie, N est un fermé de K. On veut établir le **théorème d'extension de Tietze**: *si $f : N \to \mathbb{C}$ est une fonction continue, alors il existe une fonction $\tilde{f} : K \to \mathbb{C}$ telle que $\tilde{f}_{|N} = f$ et $\|\tilde{f}\|_\infty = \|f\|_\infty$.*

1 Soit $T : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(N)$ l'application linéaire définie par $T(u) = u_{|N}$. Montrer que T est continue et calculer $\|T\|$.
2 Montrer que $\mathcal{A} = \operatorname{Im}(T)$ est dense dans $\mathcal{C}(N)$.
3a Montrer que pour toute fonction $g \in \operatorname{Im}(T)$, on peut trouver une fonction $\tilde{g} \in \mathcal{C}(K)$ telle que $T(\tilde{g}) = g$ et $\|\tilde{g}\|_\infty = \|g\|_\infty$. On pourra commencer par vérifier que pour tout réel $M \geq 0$, on peut trouver une fonction continue $\theta_M : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ telle que $\theta_M(z) = z$ si $|z| \leq M$ et $|\theta_M(z)| \leq M$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
3b Montrer que $\operatorname{Im}(T)$ est complet pour la norme $\|\ .\ \|_\infty$. On pourra vérifier, à l'aide de **a**, que toute série absolument convergente à termes dans $\operatorname{Im}(T)$ converge dans $\operatorname{Im}(T)$.
4 Démontrer le résultat souhaité.

B On dit qu'un point $x \in K$ est un **point isolé** de K si le singleton $\{x\}$ est un ouvert de K. De manière équivalente, x est isolé si on peut trouver $r > 0$ tel que la boule ouverte $B(x, r)$ ne contienne pas d'autre point que x. Dans toute la suite du problème, on notera $\operatorname{Isol}(K)$ l'ensemble des points isolés de K.

1 Dans cette question, on prend $K = [1\,;2] \cup \left\{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$. Quels sont les points isolés de K?
2 Montrer que si K est dénombrable, alors K possède au moins un point isolé. On pourra penser au théorème de Baire.
3 Que peut-on dire de K si tous les points de K sont isolés?
4 Montrer que $\mathrm{Isol}(K)$ est (au plus) dénombrable.
5 Montrer qu'un point $x \in K$ est isolé si et seulement si x possède un voisinage N de cardinalité finie.

D Dans cette partie, on fixe une fonction $\phi \in \mathcal{C}(K)$, et on considère l'opérateur $T_\phi : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(K)$ défini par $T_\phi(f) = \phi f$. On veut établir le résultat suivant : *l'opérateur T_ϕ est compact si et seulement si la fonction ϕ est nulle en tout point non isolé de K.*
1 Justifier la continuité de T_ϕ, et calculer $\|T_\phi\|$.
2 Dans cette question, on suppose que l'opérateur T_ϕ est compact.
a Soit $x_0 \in K$ tel que $\phi(x_0) \neq 0$.
(i) Justifier l'existence d'un nombre $r > 0$ tel que ϕ ne s'annule pas sur $N := \overline{B}(x_0, r)$, puis montrer que l'opérateur $T_{\phi_{|N}} : \mathcal{C}(N) \to \mathcal{C}(N)$ est inversible.
(ii) En utilisant **A**, montrer que l'opérateur $T_{\phi_{|N}}$ est également compact. Que peut-on en déduire sur la dimension de l'espace vectoriel $\mathcal{C}(N)$?
b En utilisant **a** et **C5**, montrer que ϕ est identiquement nulle sur $K \setminus \mathrm{Isol}(K)$.
3 Dans cette question, on suppose que ϕ est identiquement nulle sur $K \setminus \mathrm{Isol}(K)$. Montrer que l'opérateur T_ϕ est compact.

Problème 10 (procédés de sommation)

Soit Ω un espace topologique, et soit ω_0 un point non isolé de Ω. On dira qu'une suite (c_j) de fonctions à valeurs complexes définies sur $\Omega_0 := \Omega \setminus \{\omega_0\}$ est un *bon procédé de sommation* si elle vérifie la propriété suivante : pour toute suite numérique (x_j) admettant une limite l, toutes les séries $\sum c_j(\omega)\, x_j$ convergent, et $\lim_{\omega\to\omega_0} \sum_0^\infty c_j(\omega)\, x_j = l$.

1 On suppose que la suite (c_j) vérifie les conditions suivantes (**conditions de Toeplitz**) :

(1) $\displaystyle\sup_{\omega\in\Omega_0} \sum_{j=0}^{\infty} |c_j(\omega)| < +\infty\,;$

(2) $\displaystyle\lim_{\omega\to\omega_0} \sum_{j=0}^{\infty} c_j(\omega) = 1\,;$

(3) $\displaystyle\lim_{\omega\to\omega_0} c_j(\omega) = 0$ pour tout $j \geq 0$.

Montrer que (c_j) est un bon procédé de sommation.

2 Montrer que **1** permet de retrouver le théorème de Cesàro et le théorème d'Abel sur les séries entières.
3 Montrer que tout bon procédé de sommation vérifie les conditions (1), (2), (3). Pour (1), on pourra penser au théorème de Banach-Steinhaus.

Problème 11 (divergence de l'interpolation de Lagrange)
Le but du problème est de montrer que l'interpolation de Lagrange n'est pas un bon procédé d'approximation uniforme.

A On note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques sur $\mathbb{R}$ (à valeurs complexes) muni de la norme $\| \, . \, \|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $\mathcal{P}_n \subset \mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques de degré au plus n. Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on note $S_n f$ sa n-ième somme partielle de Fourier,

$$S_n f(x) = \sum_{-n}^{n} c_n(f) e^{ikx} \ .$$

1a Montrer que S_n est une projection linéaire continue de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur $\mathcal{P}_n$, de norme inférieure ou égale à $||D_n||_1$, où D_n est le noyau de Dirichlet :

$$D_n(t) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})t}{\sin \frac{t}{2}} \ .$$

1b Montrer qu'on a en fait $||S_n|| = ||D_n||_1$.
2 Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit L une projection linéaire continue de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur $\mathcal{P}_n$.
a Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit $\tau_\lambda : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathcal{C}_{2\pi}$ par $\tau_\lambda f(t) = f(t - \lambda)$. Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} \tau_\lambda \, L \, \tau_{-\lambda} f(x) \, d\lambda$ lorsque f est de la forme $f(t) = e^{imt}$, $m \in \mathbb{Z}$.
b Montrer que pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$S_n f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tau_\lambda \, L \, \tau_{-\lambda} f(x) \, d\lambda \ .$$

3 Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si L est une projection linéaire continue de $\mathcal{C}_{2\pi}$ sur $\mathcal{P}_n$, alors

$$||L|| \geq ||D_n||_1 \ .$$

4 On note $\mathcal{C}_{2\pi}^+$ le sous-espace de $\mathcal{C}_{2\pi}$ constitué par les fonctions paires, et $\mathcal{P}_n^+$ l'ensemble des polynômes trigonométriques pairs de degré au plus n. Établir le même résultat qu'en **3** pour une projection linéaire continue de $\mathcal{C}_{2\pi}^+$ sur $\mathcal{P}_n^+$.

B Si σ est une subdivision d'un intervalle $[a\,;b]$ et si $f \in \mathcal{C}([a\,;b])$, on note $L_\sigma f$ le polynôme d'interpolation de Lagrange de f aux points de σ. En notant $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$, le polynôme P_σ est par définition l'unique polynôme de degré inférieur ou égal à n vérifiant $P(a_i) = f(a_i)$ pour tout $i \in \{0; \ldots ; n\}$.

1 Soit σ une subdivision de $[-1;1]$, et soit $n+1$ le nombre de points de σ. Montrer que L_σ est une projection linéaire continue de $\mathcal{C}([-1;1])$ sur le sous-espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
2 On définit $J : \mathcal{C}([-1;1]) \to \mathcal{C}_{2\pi}$ par $Jf(t) = f(\cos t)$. Montrer que J est une isométrie linéaire de $\mathcal{C}([-1;1])$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}$. Quelle est l'image de J?
3 Soit σ une subdivision de $[-1;1]$ et soit $n+1$ le nombre de points de σ. Montrer qu'il existe une projection linéaire continue L de $\mathcal{C}_{2\pi}^+$ sur $\mathcal{P}_n^+$ telle que $||L|| \leq ||L_\sigma||$.

C Soit $[a\,;b]$ un intervalle compact (non trivial) de $\mathbb{R}$. Montrer que si (σ_k) est une suite de subdivisions de $[a\,;b]$ de pas tendant vers 0, alors il existe une fonction $f \in \mathcal{C}([a\,;b])$ telle que $L_{\sigma_k} f$ ne converge pas uniformément vers f quand k tend vers l'infini.

Problème 12 (opérateurs hypercycliques)

A Dans cette partie, X est un espace de Banach séparable, et $T : X \to X$ est une application linéaire continue. Pour tout $x \in X$, on pose

$$O_T(x) = \{T^n(x);\ n \in \mathbb{N}\},$$

où $T^n = T \circ \cdots \circ T$ (n fois), avec la convention $T^0 = Id$. On dit qu'un vecteur $x \in X$ est **hypercyclique pour** T si $O_T(x)$ est dense dans X. On note $HC(T)$ l'ensemble des vecteurs hypercycliques pour T, et on dit que l'opérateur T est **hypercyclique** si $HC(T) \neq \emptyset$.

1 Montrer qu'il existe une famille dénombrable de boules ouvertes $(B_i)_{i\in I}$ vérifiant la propriété suivante : pour tout ouvert non vide $V \subset X$, on peut trouver $i \in I$ tel que $B_i \subset V$.
2 Pour $i \in I$, on pose $G_i = \{x \in X;\ \exists n \in \mathbb{N}\ \ T^n(x) \in B_i\}$.
a Montrer que les G_i sont des ouverts de X.
b Montrer qu'on a $HC(T) = \bigcap_{i\in I} G_i$.
3 On suppose qu'il existe une partie dense $Z \subset X$ et une application $S : X \to X$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $T \circ S = Id$;
(2) pour tout $z \in Z$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} T^n(z) = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} S^n(z)$.

a Soient $u, v \in Z$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n = u + S^n(v)$. Quelles sont les limites des suites (x_n) et $(T^n(x_n))$?
b Déduire de **a** que la propriété suivante est vérifiée : pour tout couple (U, V) d'ouverts non vides de X, on peut trouver un point $x \in U$ et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $T^n(x) \in V$.
c En utilisant **2** et **b**, montrer que T est hypercyclique.

B Dans cette partie, on note ℓ^1 l'espace vectoriel constitué par toutes les suites $x = (x(n))_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $\sum_0^\infty |x(n)| < \infty$. On munit ℓ^1 de la norme $\| \ . \|_1$ définie par

$$\|x\|_1 = \sum_0^\infty |x(n)| \, .$$

1 Montrer que ℓ^1 est un espace de Banach.
2 Pour $i \in \mathbb{N}$, on note e_i l'élément de l^1 défini par $e_i(i) = 1$ et $e_i(n) = 0$ si $n \neq i$. Montrer que l'espace vectoriel Z engendré par la famille $\{e_i;\ i \in \mathbb{N}\}$ est dense dans l^1.
3 Soit $B : \ell^1 \to \ell^1$ l'application linéaire définie de la façon suivante : pour $x = (x(0), x(1), x(2), \dots) \in \ell^1$, on pose $B(x) = (x(1), x(2), \dots)$.
a Montrer que B est continue et calculer $\|B\|$.
b Montrer qu'il existe une application linéaire $\tilde{B} : \ell^1 \to l^1$ vérifiant $B\tilde{B} = Id$ et $\|\tilde{B}(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in \ell^1$.
4 Montrer que l'opérateur $T = 2B$ est hypercyclique.

Problème 13 (fonctions continues nulle-part dérivables)

Le but de cet exercice est de montrer qu'il existe "beaucoup" de fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ qui sont continues sur $[0;1]$, mais dérivables en aucun point. Pour tout réel $\lambda > 0$, on posera

$$\mathcal{U}_\lambda = \left\{ f \in \mathcal{C}([0;1]);\ \forall x \in [0;1]\ \sup_{y\neq x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} > \lambda \right\} .$$

Autrement dit:

$$\mathcal{U}_\lambda = \{ f \in \mathcal{C}([0;1]);\ \forall x \in [0;1]\ \exists y \quad |f(y) - f(x)| > \lambda |y - x| \} .$$

1 Montrer que pour tout $\lambda > 0$, l'ensemble $\mathcal{U}_\lambda$ est un ouvert de $\mathcal{C}([0;1])$.
2 Soit $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une fonction $\phi \in \mathcal{U}_\lambda$ telle que $\|\phi\|_\infty < \varepsilon$.
3 Soit $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. On note k la constante de Lipschitz de f. Soit également $\mu > 0$. Montrer que si $\phi \in \mathcal{U}_\mu$ et si $\mu > k$, alors $f + \phi \in \mathcal{U}_{\mu-k}$.
4 Déduire de **2** et **3** que pour tout $\lambda > 0$, l'ouvert $\mathcal{U}_\lambda$ est dense dans $\mathcal{C}([0;1])$.
5 Montrer que l'ensemble des fonctions $f : [0;1] \to \mathbb{R}$ continues et nulle part dérivables est dense dans $\mathcal{C}([0;1])$.

Problème 14 (théorème d'Ekeland)

Dans tout le problème, X est un espace de Banach réel. On note $\mathrm{Lip}(X)$ l'ensemble des fonctions $\varphi : X \to \mathbb{R}$ lipschitziennes bornées. Pour $\varphi \in \mathrm{Lip}(X)$, on pose

$$\|\varphi\|_{\mathrm{Lip}} = \|\varphi\|_\infty + \sup\left\{ \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{\|x-y\|} \;;\; x, y \in X,\ x \neq y \right\} .$$

1 Montrer que $(\mathrm{Lip}(X), \| \,.\, \|_{\mathrm{Lip}})$ est un espace de Banach.
2 Soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $b \in \mathrm{Lip}(X)$ vérifiant $b(0) > 0$, $\|b\|_{\mathrm{Lip}} < \varepsilon$ et $b(x) = 0$ si $\|x\| \geq \alpha$.
3 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ bornée inférieurement, et soit $\alpha > 0$. On pose

$$\mathcal{U}_\alpha = \{\varphi \in \mathrm{Lip}(X);\ \exists u \in X \ \ (f - \varphi)(u) < \inf\{(f - \varphi)(x);\ \|x - u\| \geq \alpha\}\} .$$

a Montrer que $\mathcal{U}_\alpha$ est un ouvert de $\mathrm{Lip}(X)$.
b En utilisant des fonctions du type $x \mapsto b(x - u)$, pour b et u bien choisis, montrer que $\mathcal{U}_\alpha$ est dense dans $\mathrm{Lip}(X)$.
4 Soit $g : X \to \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement. On suppose qu'il existe une suite $(u_n) \subset X$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait

$$g(u_n) < \inf\bigl\{g(x);\ \|x - u_n\| \geq 2^{-n}\bigr\} .$$

a Montrer par l'absurde que si $p \leq q$, alors $\|u_p - u_q\| < 2^{-p}$.
b Montrer que g atteint sa borne inférieure.
5 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ continue et bornée inférieurement. Montrer que l'ensemble

$$\{\varphi \in \mathrm{Lip}(X);\ f - \varphi \text{ atteint sa borne inférieure}\}$$

est dense dans $\mathrm{Lip}(X)$.
6 Démontrer le **théorème d'Ekeland** : *si $f : X \to \mathbb{R}$ est continue et bornée inférieurement, alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point $x_0 \in X$ tel que*

$$\forall x \in X \quad f(x_0) \leq f(x) + \varepsilon\|x - x_0\| .$$

7 Soit $f : X \to \mathbb{R}$ différentiable et bornée inférieurement.
a Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un point $x \in X$ tel que $\|Df(x)\| \leq \varepsilon$.
b Peut-on toujours trouver un point x tel que $Df(x) = 0$?

Problème 15 (théorème de Gleaser)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$. On note $Z(f)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0\}$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *la fonction $\sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f'' s'annule en tout point de $Z(f)$*. Dans toute la suite, on pose $g = \sqrt{f}$.

1a Constater que g est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}\backslash Z(f)$.
1b Si $x_0 \in Z(f)$, quelle est la valeur de $f'(x_0)$?
2 Soit $x_0 \in Z(f)$. A l'aide d'un développement limité, montrer que g est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$, et qu'on a alors $g'(x_0) = 0$.

3 Soit $x_0 \in Z(f)$ tel que $f''(x_0) = 0$. Soit également $\alpha > 0$. On pose $I_\alpha = [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ et $M_\alpha = \sup\{|f''(t)|;\ |t - x_0| \le 2\alpha\}$.
a A l'aide de la formule de Taylor, montrer que si $x \in I_\alpha$, alors

$$\forall h \in [-\alpha; \alpha] \qquad \frac{M_\alpha}{2}\, h^2 + f'(x)h + f(x) \ge 0\ .$$

b On suppose $M_\alpha > 0$. Montrer que pour $x \in I_\alpha$ fixé, le point où le trinôme $\frac{M_\alpha}{2} h^2 + f'(x)h + f(x)$ atteint son minimum appartient à l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.
c Déduire de **a** et **b** que si $x \in I_\alpha$, alors $|f'(x)| \le \sqrt{2M_\alpha f(x)}$.
4 Conclure.

Problème 16 (zéros des fonctions $\mathcal{C}^\infty$)

1 Soit (φ_k) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, à supports compacts. Montrer que si les $\lambda_k > 0$ sont choisis suffisamment petits, alors la formule

$$f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k \varphi_k(x)$$

définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2 Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de boules ouvertes euclidiennes.
3 Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ une boule ouverte euclidienne. Trouver une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ strictement positive en tout point de B et nulle en dehors de B.
4 Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $F = f^{-1}(0)$.

Problème 17 (un critère de surjectivité)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on note C_f l'ensemble des points critiques de f, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $Df(x)$ n'est pas inversible. L'ensemble $f(C_f)$ s'appelle l'ensemble des *valeurs critiques* de f. L'ensemble Reg(f) $:= \mathbb{R}^n \setminus f(C_f)$ est l'ensemble des *valeurs régulières* de f. La terminologie n'est pas très bonne, car une valeur régulière n'est pas nécessairement une valeur prise par f...

A Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\lim_{\|x\| \to \infty} \|f(x)\| = +\infty$. Pour simplifier les notations, on pose $X = \mathrm{Reg}(f)$.
1a Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(\{y\})$ est compact.
1b Montrer par l'absurde que si $y \in X$, alors $f^{-1}(\{y\})$ est fini. Dans la suite, on notera $n(y)$ le nombre d'éléments de $f^{-1}(\{y\})$.
2 Montrer que $\{y \in X;\ n(y) = 0\} = \mathbb{R}^n \setminus f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

a En utilisant le théorème d'inversion locale, montrer que si $y \in X$ et si $n(y) = k$, alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert V de y vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in U$;
(2) pour tout $y' \in V$, l'équation $f(x) = y'$ admet exactement k solutions dans U.

b Avec les notations de **a**, montrer par l'absurde que si y' est assez proche de y, alors toutes les solutions de l'équation $f(x) = y'$ appartiennent à U.
c Conclure que $\{y \in X;\ n(y) = k\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3 Montrer que si X est connexe, alors l'application n est constante sur X.

B Démontrer le résultat suivant. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *vérifiant* $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = +\infty$. *Si* $\mathrm{Reg}(f)$ *est connexe et* $\mathrm{Reg}(f) \cap f(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, *alors* f *est surjective.*

C Démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss.

Problème 18 (lemme de Morse)

A Soient X, Y, Z trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit également Ω un ouvert de Y, et soit $f : X \times \Omega \to Z$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Enfin, soit $x_0 \in X$. On suppose qu'il existe $y_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et que $\partial_2 f(x_0, y_0) : Y \to Z$ est surjective. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans X et une application $\phi : U_0 \to \Omega$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in U_0$.

B Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $p, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $p+q = n$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n, et $\mathcal{S}_{pq}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{S}$ possèdant p valeurs propres strictement positives et q valeurs propres strictement négatives. Enfin, on note I_{pq} la matrice diagonale dont les p premiers termes diagonaux sont égaux à 1 et les q derniers égaux à -1. On rappelle que pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_{pq}$, il existe une matrice $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tNMN = I_{pq}$.
1 Soit $F : \mathcal{S} \times GL_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}$ définie par $F(M, N) = {}^tNMN$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et déterminer la dimension du noyau de $\partial_2 F(M_0, N_0)$ pour $(M_0, N_0) \in \mathcal{S} \times GL_n(\mathbb{R})$.
2 Montrer que $\mathcal{S}_{pq}$ est un ouvert de $\mathcal{S}$ et que pour toute matrice $M_0 \in \mathcal{S}_{pq}$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_0$ de M_0 dans $\mathcal{S}$ et une application $\Phi : \mathcal{U}_0 \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que ${}^t\Phi(M)M\Phi(M) = I_{pq}$ dans l'ouvert $\mathcal{U}_0$.

C Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'on a $D\varphi(a) = 0$ et que $D^2\varphi(a)$ est non dégénérée, de signature (p, q).
1 On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n. En utilisant la formule de Taylor, montrer qu'il existe une application $M : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$\varphi(x) - \varphi(a) = \langle M(x)(x-a)\,, (x-a)\rangle$ et $M(a) = \frac{1}{2}H_\varphi(a)$ (matrice Hessienne de φ en a).
2a Montrer qu'au voisinage de a, on peut écrire $M(x) = {}^tA(x)I_{pq}A(x)$, où A est une application de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$.
2b On pose $\theta(x) = A(x)(x-a)$. Calculer $D\theta(a)$.
3 Montrer qu'il existe deux ouverts $W_a, W_0 \subset \mathbb{R}^n$, voisinages respectifs de a et 0, et un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme $u : W_a \to W_0$, avec $u(a) = 0$, vérifiant la propriété suivante : en posant $u(x) = (u_1, \dots, u_n)$, on a

$$\varphi(x) - \varphi(a) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$$

pour tout $x \in W_a$. Ce résultat s'appelle le **lemme de Morse**.

D Soit $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 + x^3y^5 = 0\}$.
1 Montrer que si $(x_0, y_0) \in \Gamma$ est différent de $(0,0)$, alors il existe W voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $W \cap \Gamma$ est une courbe simple de classe $\mathcal{C}^1$. Donner l'équation de la tangente à Γ en (x_0, y_0).
2a Montrer qu'il existe W voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $W \cap \Gamma$ est la réunion de 2 courbes simples de classe $\mathcal{C}^1$ se coupant en $(0,0)$.
2b On note T_1 et T_2 les tangentes à C_1 et C_2 au point $(0,0)$. Déterminer une équation de $T_1 \cup T_2$.
3 Dessiner Γ.

Problème 19 (intégrales oscillantes)

Dans ce problème, on étudie le comportement asymptotique (quand le paramètre $\tau \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$) d'intégrales du type

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau\varphi(x)} g(x)\, dx\ ,$$

où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

A Dans cette partie, on suppose que φ ne possède pas de points critiques sur le support de g; autrement dit, $D\varphi(x) \neq 0$ en tout point $x \in \mathrm{supp}(g)$.
1 On pose $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ D\varphi(x) \neq 0\}$, et on définit un opérateur différentiel $L : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ par la formule

$$L(f) = \frac{1}{\|\nabla\varphi\|^2} \sum_{1\leq j\leq n} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_j}\ ,$$

où $\| \, . \, \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla\varphi = (\partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi)$. Calculer $L(\varphi)$, puis montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$L(e^{i\tau\varphi}) = i\tau \, e^{i\tau\varphi} \, .$$

2 On définit maintenant l'opérateur ${}^tL : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ par la formule

$${}^tL(f) = - \sum_{1 \le j \le n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\|\nabla\varphi\|^2} \frac{\partial\varphi}{\partial x_j} \, f \right) \, .$$

Montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, alors les fonctions $L(f)g$ et $f \, {}^tL(g)$, prolongées par 0 en dehors de U, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et intégrables sur $\mathbb{R}^n$, et montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(f) \, g = \int_{\mathbb{R}^n} f \, {}^tL(g) \, .$$

3 Déduire de **1** et **2** que pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$I(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^k}\right)$$

quand τ tend vers $+\infty$.

B Dans cette partie, on établit un résultat préliminaire permettant de traiter **C**.
1 Soit $\varepsilon = \pm 1$ et soit $r > 0$.
a Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon u^2} du$, après avoir justifié son existence.
b Pour $\tau \in \mathbb{R}$, on pose $F(\tau) = \int_{-r}^{r} e^{i\varepsilon\tau s^2} ds$. Montrer que pour $\tau > 0$, on peut écrire

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \, e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}} + \Phi(\tau) \ ,$$

où la fonction Φ vérifie $|\Phi(\tau)| \leq \frac{2}{r\tau}$.
2 Soit $h : [-r \, ; r] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $\varepsilon = \pm 1$. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_1(\tau) = \int_{-r}^{r} e^{i\varepsilon\tau s^2} h(s) ds \ .$$

Montrer qu'on peut écrire (pour $\tau > 0$)

$$F_1(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}} \, e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}} h(0) + \Phi_1(h, \tau),$$

où la fonction Φ_1 vérifie

$$|\Phi_1(h, \tau)| \leq \frac{C_r \|h\|_{\mathcal{C}^2}}{\tau}$$

avec une constante C_r ne dépendant que de r et $||h||_{\mathcal{C}^2} = \mathrm{Max}\,(||h||_\infty, ||h'||_\infty, ||h''||_\infty)$.

3 Soit $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, et soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \in \{-1\,;1\}$. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_n(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau(\varepsilon_1 x_1^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2)} H(x)\, dx \ .$$

Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$F_n(\tau) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} e^{i\sigma_n \frac{\pi}{4}} H(0) + O\left(\tau^{-\frac{n+1}{2}}\right),$$

où $\sigma_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$.

C Dans cette partie, on suppose que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^3$ et possède exactement 1 point critique a sur le support de g, ce point critique étant de plus non dégénéré.

1 Montrer que pour tout W voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, on peut décomposer g sous la forme $g = g_1 + g_2$, où les g_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ à supports compacts, $a \in \mathrm{supp}(g_1) \subset W$ et φ ne possède aucun point critique sur le support de g_2.

2 On note $(p\,, q)$ la signature de la forme quadratique définie par $D^2\varphi(a)$, et Δ le déterminant de la matrice Hessienne $H_\varphi(a)$. En utilisant les question précédentes et le lemme de Morse (problème 18), montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$I(\tau) = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i(\tau\varphi(a) + \frac{\pi}{4}(p-q))}}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}\, g(a) + O(\tau^{-\frac{n+1}{2}})\ .$$

Problème 20 (théorème de Peano)

Dans tout l'exercice, X est un espace de Banach réel. On fixe un intervalle $I = [t_0; t_0 + \alpha] \subset \mathbb{R}$, un point $x_0 \in X$, et un nombre $r > 0$. On note B_r la boule $\overline{B}(x_0, r) \subset X$, et on considère une application continue bornée $f : I \times B_r \to X$. On s'intéresse au problème de Cauchy suivant, noté $(\mathcal{P})$:

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x(t)) \\ \quad x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

On rappelle qu'une fonction continue $x : I \to B_r$ est solution de $(\mathcal{P})$ si et seulement si elle vérifie

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, x(s))\, ds$$

pour tout $t \in I$.

A Dans cette partie, on suppose que X est de dimension finie. On posera $M = \|f\|_\infty$, et on supposera qu'on a $M\alpha \le r$. On veut montrer que le problème $(\mathcal{P})$ possède au moins une solution (théorème de Peano).

1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe une fonction continue $x_n : [t_0 - \frac{\alpha}{n}; t_0 + \alpha] \to B_r$ vérifiant les propriétés suivantes :

(a) $x_n(t) = x_0$ pour tout $t \in [t_0 - \frac{\alpha}{n}; t_0]$;

(b) $\forall t \in I \quad x_n(t) = x_0 + \displaystyle\int_{t_0}^{t} f\left(s, x_n(s - \tfrac{\alpha}{n})\right)\, ds\,.$

2 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction x_n est M-lipschitzienne sur $[t_0 - \frac{\alpha}{n}; t_0 + \alpha]$.
3 Démontrer le résultat souhaité.

B Y a-t-il toujours unicité au problème de Cauchy $(\mathcal{P})$?

C Dans cette question, on prend $X = c_0(\mathbb{N})$, l'espace des suites $(x_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0, muni de la norme $\|\ .\ \|_\infty$. Le point $x_0 \in X$ se notera plutôt $a = (a_n)$, pour éviter les confusions. Soit $f : [0\,;\alpha] \times B_r \to X$ définie par $f(t, (x_n)) = (\sqrt{|x_n|})$. Montrer que si $a_n > 0$ pour une infinité d'indices n, alors le problème de Cauchy $(\mathcal{P})$ ne possède aucune solution.

Problème 21 (inversion locale et équations différentielles)

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $p : I \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ strictement croissante et surjective. Le but du problème est de montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, 2π-périodique, alors il existe une fonction $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, 2π-périodique, à valeurs dans I, telle que $y' + p \circ y = g$.

Dans toute la suite, on notera $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'espace des fonctions continues 2π-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme $||\ .\ ||_\infty$, et $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ l'espace des fonctions 2π-périodiques de classe $\mathcal{C}^1$, muni de la norme définie par $||y|| = ||y||_\infty + ||y'||_\infty$.

0 Montrer que $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ et $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ sont des espaces de Banach.
1 Montrer que $\mathcal{U} = \{y \in \mathcal{C}^1_{2\pi};\ y(t) \in I$ pour tout $t \in \mathbb{R}\}$ est un ouvert de $\mathcal{C}^1_{2\pi}$. Dans la suite, on note $\Phi : \mathcal{U} \to \mathcal{C}^0_{2\pi}$ l'application définie par

$$\Phi(y) = y' + p \circ y\ .$$

2a Montrer que l'application Φ est différentiable en tout point et déterminer sa différentielle.
2b Soit $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue 2π-périodique vérifiant $\int_0^{2\pi} \alpha(t)\, dt \neq 0$. Montrer que pour toute fonction $v \in \mathcal{C}^0_{2\pi}$, il existe une unique fonction $u \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ vérifiant $u' + \alpha u = v$.
2c Déduire de **a** et **b** que $\Phi(\mathcal{U})$ est un ouvert de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.
3a Montrer que si $y \in \mathcal{U}$, alors $\|p \circ y\|_\infty \le \|\Phi(y)\|_\infty$.
3b Soit (y_n) une suite d'éléments de $\mathcal{U}$. On suppose que la suite $(\Phi(y_n))$ converge dans $\mathcal{C}^0_{2\pi}$ vers une fonction g. En utilisant **a**, montrer que les fonctions y_n prennent leurs valeurs dans un compact fixe $K \subset I$. En déduire que la suite (y'_n) est uniformément bornée.
3c Déduire de **b** que $\Phi(\mathcal{U})$ est une partie fermée de $\mathcal{C}^0_{2\pi}$.

4 Conclure.

Problème 22 (zéros des polynômes de Legendre)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit le n-ième **polynôme de Legendre** L_n par la formule

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right).$$

A Par définition, le polynôme L_n est de degré n. Le but de cette partie est de montrer que L_n possède n racines distinctes dans l'intervalle $]-1\,;1[$.
1 Montrer qu'on a $\int_{-1}^{1} P(t)\, L_n(t)\, dt = 0$ pour tout polynôme P de degré strictement inférieur à n.
2 Soit L un polynôme à coefficients réels, soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit k le nombre de points de I où L s'annule en changeant de signe. Montrer qu'il existe un polynôme P de degré k tel que $P(t)L(t) \geq 0$ pour tout $t \in I$.
3 Conclure à l'aide de **1** et **2**.

Dans la suite, on notera $x_{1,n} < \ldots < x_{n,n}$ les zéros du polynôme L_n. Pour tout intervalle $J \subset \mathbb{R}$, on notera $N_n(J)$ le nombre de zéros de L_n appartenant à J. Le but de la suite du problème est d'étudier le comportement asymptotique de $N_n(J)$ quand n tend vers l'infini.

B Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $q : I \to \mathbb{R}$ est une application continue, on note (E_q) l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0\,.$$

1 Soient $q_1, q_2 : I \to \mathbb{R}$ continues. Pour $i = 1, 2$, soit y_i une solution de (E_{q_i}).
a On pose $W = y_1 y_2' - y_2 y_1'$. Exprimer W' en fonction de q_1, q_2, y_1, y_2.
b Soient $\alpha\,, \beta \in I$, $\alpha < \beta$. On suppose qu'on a $y_1(\alpha) = y_1(\beta) = 0$ et que y_1 et y_2 sont strictement positives sur $]\alpha\,;\beta[$.
(i) Montrer qu'on a $W(\alpha) \leq 0 \leq W(\beta)$.
(ii) En déduire que si $q_1 \leq q_2$ sur $]\alpha\,;\beta[$, alors y_1 et y_2 sont proportionnelles sur $[\alpha\,;\beta]$.
c On suppose qu'on a $q_1(t) \leq q_2(t)$ pour tout $t \in I$. Montrer qu'entre deux zéros consécutifs de y_1, il y a au moins un zéro de y_2.
2 Soit $q : I \to \mathbb{R}$ continue vérifiant $m \leq q \leq M$, où m et M sont des constantes strictement positives. En utilisant **1c**, montrer que si y est une solution de (E_q) et si α, β sont deux zéros consécutifs de y, alors

$$\frac{\pi}{\sqrt{M}} \leq \beta - \alpha \leq \frac{\pi}{\sqrt{m}}\,.$$

C Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1 Montrer que L_n est solution de l'équation différentielle $(1-t^2)\,y''-2t\,y'+n(n+1)\,y=0$. On pourra commencer par observer que le polynôme $Q=(X^2-1)^n$ vérifie $(X^2-1)Q'=2nXQ$.
2 Pour $t\in]-1\,;1[$, on pose $\tilde{L}_n(t)=\sqrt{1-t^2}\,L_n(t)$. Montrer que $\tilde{L}_n$ est solution d'une équation différentielle du type (E_{q_n}), où la fonction q_n est à expliciter.

D Soit $J=[a\,;b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$.
1 Montrer qu'on a $q_n(t)\geq n(n+1)$ pour tout $t\in]-1\,;1[$ et pour tout n. En déduire, à l'aide de **B** et **C**, qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{Max}\{x_{k+1,n}-x_{k,n};\ 1\leq k\leq n-1\}=0\,.$$

2a Soit $\beta_0\in[0\,;1[$. Montrer qu'il existe un entier N vérifiant la propriété suivante : si $0\leq\alpha\leq\beta\leq\beta_0$, alors

$$\frac{n^2}{1-\alpha^2}\leq q_n(t)\leq\frac{(n+1)^2}{1-\beta^2}$$

pour tout $n\geq N$ et pour tout $t\in[\alpha\,;\beta]$.
2b On suppose que J est contenu dans $[0\,;1[$. Pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $\Lambda_n=\{k;\ x_{k,n}\in J\}$. Déduire de **a** que si n est assez grand, alors

$$\frac{\pi}{n}\,N_n(J)\geq\sum_{k\in\Lambda_n}\frac{x_{k+1,n}-x_{k,n}}{\sqrt{1-x_{k,n}^2}}\ ,$$

$$\frac{\pi}{n+1}\,N_n(J)\leq\sum_{k\in\Lambda_n}\frac{x_{k+1,n}-x_{k,n}}{\sqrt{1-x_{k+1,n}^2}}\ .$$

3 Montrer qu'on a

$$\lim_{n\to\infty}\frac{N_n(J)}{n}=\frac{1}{\pi}\left(\operatorname{Arcsin}(b)-\operatorname{Arcsin}(a)\right).$$

Problème 23 (problème de la chaleur “périodique”)

Si $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique, le **problème de la chaleur** associé à f, noté $(\mathcal{P})_f$, consiste à trouver une fonction $u:[0;+\infty[\times\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ vérifiant les propriétés suivantes :

(1) Pour tout $t\geq 0$, la fonction $x\mapsto u(t,x)$ est 2π-périodique;
(2) $u(t,x)$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[\times\mathbb{R}$ et y vérifie l'**équation de la chaleur**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,;$$

(3) u est continue sur $[0;+\infty[\times\mathbb{R}$;
(4) $u(0,x)=f(x)$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

On veut montrer ici que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique, le problème $(\mathcal{P})_f$ admet une unique solution.

1 Pour $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{i\lambda x} dx$.
2 Soit $\alpha > 0$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x-2n\pi)^2} .$$

a Justifier la définition, puis montrer que φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique.
b Calculer les coefficients de Fourier de φ.
3 Pour $t > 0$, on définit $G_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$G_t(x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} e^{inx} .$$

a En utilisant **2**, montrer qu'on a également

$$G_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}} .$$

b Montrer que la famille $(G_t)_{t>0}$ vérifie les propriétés suivantes :
(i) $G_t \geq 0$;
(ii) $\displaystyle\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_t(x)\, dx = 1$;
(iii) $\forall \delta > 0 \quad \displaystyle\lim_{t \to 0} \left(\sup_{\delta \leq |x| \leq \pi} G_t(x) \right) = 0$.

4 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique. On note $(c_n(f))$ la suite des coefficients de Fourier de f, et on définit $u : [0; +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par $u(0, x) = f(x)$ et

$$u(t, x) = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{-n^2 t} e^{inx} \text{ pour } t > 0.$$

a Justifier la définition, et montrer que pour $t > 0$, on a

$$u(t, x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_t(x - y) f(y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G_t(y) f(x - y)\, dy .$$

b Montrer que u est solution du problème de la chaleur associé à f.
5 Soit $v : [0; +\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (1), (2) et (3).
a Pour $t \geq 0$, on pose

$$E(t) = \int_0^{2\pi} v(t, x)^2 dx .$$

Montrer que la fonction E est décroissante sur $[0; +\infty[$.
b En déduire que si $v(0, x) = 0$ pour tout $x \in [0; 2\pi]$, alors $v = 0$.

6 Conclure.

Dans les trois problèmes qui suivent, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

Problème 24 (loi des grands nombres L^∞)

Soit X une variable aléatoire bornée, d'espérance nulle, et soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + ... + X_n$. On veut montrer que si $\alpha > 1/2$, alors $\frac{S_n}{n^\alpha}$ tend presque sûrement vers 0.

1 Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq e^{-\lambda a}\left(\mathbb{E}(e^{\lambda X})^n + \mathbb{E}(e^{-\lambda X})^n\right) .$$

2 Montrer qu'il existe une constante C telle que $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq 1 + Ct^2$ pour tout $t \in [-1; 1]$.

3 Soit $\alpha > 1/2$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, la série $\sum \mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n^\alpha} \geq \varepsilon\right)$ est convergente.

4 Conclure.

Problème 25 (séries de variables aléatoires)

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes. On suppose que les X_n sont centrées, de carrés intégrables, et qu'on a $\sum_0^\infty \sigma^2(X_j) < +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum X_n$ converge en norme L^2 *et* presque sûrement.

1 Montrer que la série $\sum X_n$ converge en norme L^2.

2 Soient $m, n \in \mathbb{N}$, avec $n \leq m$. Pour $j \in \{n; ...; m\}$, on pose $S_j = \sum\limits_{l=n}^{j} X_l$.

a Soit $\varepsilon > 0$. Pour $j \in \{n; ...; m\}$, on pose

$$B_j = \{\omega;\ |S_k(\omega)| < \varepsilon \ \text{ pour } \ n \leq k < j\} .$$

Montrer que les évènements $(\mathrm{Max}_{n \leq j \leq m}|S_j| \geq \varepsilon)$ et $(|\sum_n^m X_j \mathbf{1}_{B_j}| \geq \varepsilon)$ sont identiques.

b Démontrer l'**inégalité de Kolmogorov** : pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(\mathrm{Max}_{n \leq j \leq m}|S_j| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_n^m \sigma^2(X_j) .$$

3 Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $A_n^\varepsilon = \{\omega; \exists m \geq n \mid \sum_n^m X_j(\omega)| \geq \varepsilon\}$. Montrer qu'on a $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(A_n^\varepsilon) = 0$.

4 Montrer que la série $\sum X_n$ converge presque sûrement.

Problème 26 (inégalités de Khinchine)

Dans tout le problème, $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de variables indépendantes suivant chacune une **loi de Rademacher** : $\mathbb{P}(\varepsilon_i = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon_i = -1)$. On note $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel (réel) engendré par les fonctions ε_i. Le but du problème est d'établir le résultat suivant : *sur l'espace $\mathcal{E}$, toutes les normes $||\ .\ ||_p$, $1 \leq p < \infty$ sont équivalentes.*

1 Soient $(a_i)_{i\in I}$ une famille finie de nombres réels.
a Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}\left(e^{\pm\lambda\sum_i a_i\varepsilon_i}\right)$ et montrer qu'on a $\mathbb{E}\left(e^{\pm\lambda\sum_i a_i\varepsilon_i}\right) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2}\sum_i a_i^2}$.
b Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\Big|\sum_{i\in I} a_i\varepsilon_i\Big| > t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2\sum\limits_{i\in I} a_i^2}\right) .$$

2 Soit X une variable aléatoire positive, et soit $p \geq 1$. Montrer qu'on a

$$\mathbb{E}(X^p) = \int_0^\infty \mathbb{P}(X > t)\, pt^{p-1}dt .$$

3 Soit (a_i) une famille finie de nombres réels, et soit $p \geq 1$. En utilisant **1** et **2**, montrer que si $\sum_i a_i^2 = 1$, alors

$$\mathbb{E}\left(\Big|\sum_i a_i\varepsilon_i\Big|^p\right) \leq B_p ,$$

où B_p est une constante finie dépendant uniquement de p.
4 Soient toujours (a_i) une famille finie de nombres réels et $p \geq 1$.
a Comparer $\mathbb{E}\left(|\sum_i a_i\varepsilon_i|^p\right)$ et $\mathbb{E}\left(|\sum_i a_i\varepsilon_i|^2\right)$ lorsque $p \geq 2$.
b On suppose $p < 2$.
(i) Montrer que si X est une variable aléatoire positive, alors

$$\mathbb{E}(X^2) \leq \left(\mathbb{E}(X^p)\right)^{2/3} \times \left(\mathbb{E}(X^{6-2p})\right)^{1/3} .$$

(ii) Montrer que si $\sum_i a_i^2 = 1$, alors

$$\mathbb{E}\left(\Big|\sum_i a_i\varepsilon_i\Big||^p\right) \geq A_p ,$$

où A_p est une constante strictement positive dépendant uniquement de p.
5 Conclure.

Probleme 27 (théorème de dérivation de Lebesgue)

Le but du problème est de démontrer le **théorème de dérivation de Lebesgue** : *si f est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et si on pose $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, alors F est dérivable en presque tout point $x \in \mathbb{R}$ et $F' = f$ presque partout.* On notera m la mesure de Lebesgue.

1 Montrer que le théorème est vrai pour une fonction continue.
2 Pour toute fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit la fonction $M_\varphi : \mathbb{R} \to [0; +\infty]$ par

$$M_\varphi(x) = \sup \left\{ \frac{1}{m(I)} \int_I |\varphi(t)|\, dt \right\} ,$$

où la borne supérieure est prise sur tous les intervalles non triviaux contenant x.
Montrer que si f est intégrable sur $\mathbb{R}$ et si g est une fonction continue à support compact, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\overline{\lim}_{h\to 0} \left| \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, dt - f(x) \right| \leq |f(x) - g(x)| + M_{f-g}(x) .$$

3 Le but de cette question est d'établir le résultat suivant : *pour tout $\alpha > 0$, il existe une constante C_α telle que pour toute fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}$, on ait*

$$m(\{x;\ M_\varphi(x) > \alpha\}) \leq C_\alpha\, ||\varphi||_1 .$$

a Pour tout intervalle borné $I \subseteq \mathbb{R}$, on note $3I$ l'intervalle de même centre et de longueur triple.
(i) Montrer que si I, J sont deux intervalles bornés d'intersection non-vide et si $m(J) \geq m(I)$, alors $I \subset 3J$.
(ii) En déduire que si $\mathcal{I}$ est une famille finie d'intervalles bornés, alors on peut trouver une sous-famille $\mathcal{J} \subseteq \mathcal{I}$ formée d'intervalles deux à deux disjoints et telle que $\bigcup_{I\in\mathcal{I}} I \subseteq \bigcup_{J\in\mathcal{J}} 3J$.
b Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, et soit $\alpha > 0$. Montrer que si $J_1, \dots, J_N$ sont des intervalles bornés deux à deux disjoints tels que $\int_{J_k} |\varphi(t)|\, dt > \alpha m(J_k)$ pour tout k, alors $m(\cup_1^N J_k)) < \frac{1}{\alpha}\, ||\varphi||_1$.
c Soit φ une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout compact $K \subseteq \{x;\ M_\varphi(x) > \alpha\}$, on peut trouver des intervalles ouverts bornés $I_1, \dots, I_n$ tels que $K \subset \bigcup_1^n I_k$ et $\int_{I_k} |\varphi(t)|\, dt > \alpha m(I_k)$ pour tout k.
d Démontrer le résultat souhaité.
4 Déduire de **2** et **3** que le théorème de dérivation de Lebesgue est valable pour toute fonction f intégrable sur $\mathbb{R}$.
5 Conclure.

Problème 28 (longueur d'un chemin)

Dans tout l'exercice, (X, d) est un espace métrique. On appelle **chemin** dans X toute application continue $\gamma : J \to X$, où J est un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Si $\gamma : J \to X$ est un chemin dans X et si $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_N)$ est une subdividion de J, on pose

$$l(\gamma, \mathbf{s}) = \sum_{0}^{N-1} d(\gamma(s_i), \gamma(s_{i+1})) \ .$$

La **longueur** du chemin γ est alors définie par

$$l(\gamma) = \sup\{\ l(\gamma, \mathbf{s});\ \mathbf{s} \in \mathcal{S}\} \ ,$$

où on a noté $\mathcal{S}$ l'ensemble de toutes les subdivisions de J.

1 Dans cette question, on prend $X = \mathbb{R}^n$, et d est la distance associée à la norme euclidienne $|\ .\ |$.

a Montrer que si $\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ est une application continue par morceaux et si, pour $\mathbf{s} = (s_0, \dots, s_N) \in \mathcal{S}$, on pose $I(\varphi, \mathbf{s}) = \sum_0^{N-1} \left| \int_{s_i}^{s_{i+1}} \varphi(t)\, dt \right|$, alors

$$\sup \{I(\varphi, \mathbf{s});\ \mathbf{s} \in \mathcal{S}\} = \int_a^b |\varphi(t)|\, dt \ .$$

b Montrer que si $\gamma : [a; b] \to \mathbb{R}^n$ est une chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, alors

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt \ .$$

2 Soit $\gamma : J \to X$ un chemin de longueur finie. Montrer que si $\mathbf{t} = (t_0, \dots, t_N)$ est une subdivision de J et si $\mathbf{s}$ est une subdivision de J de pas δ inférieur à celui de $\mathbf{t}$, alors $l(\gamma, \mathbf{s}) \geq l(\gamma, \mathbf{t}) - 2N\omega(\delta)$, où $\omega(\delta) = \sup\{d(\gamma(u), \gamma(v));\ |u - v| \leq \delta\}$. En déduire que $l(\gamma, \mathbf{s})$ tend vers $l(\gamma)$ quand le pas de la subdivision $\mathbf{s}$ tend vers 0.

3 Soit $\gamma : J \to X$ un chemin de longueur finie l.

a Pour $t \in [a; b]$, on note $V(t)$ la longueur du chemin $\gamma_{|[a;t]}$. Montrer que la fonction V est croissante et *continue*.

b Déduire de **a** qu'il existe une unique application $\gamma_0 : [0; l] \to X$ vérifiant $\gamma = \gamma_0 \circ V$, et que γ_0 est un chemin 1-lipschitzien.

4 Soit $L > 0$. Montrer que pour tout chemin $\gamma : J \to X$ de longueur inférieure à L, il existe un chemin $\tilde{\gamma} : [0; L] \to X$vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $l(\tilde{\gamma}) \leq l(\gamma)$;
(2) $\tilde{\gamma}$ a même origine et même extrémité que γ;
(3) $\tilde{\gamma}$ est 1-lipschitzien.

5 Soit (γ_n) une suite de chemins dans X, définis sur un même intervalle I. Montrer que si la suite (γ_n) converge uniformément vers un chemin $\gamma : I \to X$, alors

$$l(\gamma) \leq \liminf_{n \to \infty} l(\gamma_n) \,.$$

6 Soient $p, q \in X$. On suppose qu'il existe un chemin joignant p et q dans X. Montrer que si X est compact, alors il existe un chemin de longueur minimale joignant p et q dans X.
7 Le résultat de **5** est-il valable si X n'est pas supposé compact?

Problème 29 Dans tout l'exercice, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne.
1a Montrer que si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact, alors

$$\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx = -\lim_{h\to 0}\int_{\mathbb{R}} \frac{F(x+h)-F(x)}{h}\,\varphi(x)\,dx\,.$$

1b En déduire qu'il existe une constante C telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}) \qquad \left|\int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx\right| \le C\int_{\mathbb{R}} |\varphi(x)|\,dx\,.$$

2 Montrer qu'il existe une fonction $f \in L^\infty(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R}) \qquad \int_{\mathbb{R}} F(x)\varphi'(x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} f(t)\varphi(t)\,dt\,.$$

3 Démontrer le résultat suivant : si u et v sont deux fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que $\int_{\mathbb{R}} u\varphi' = \int_{\mathbb{R}} v\varphi'$ pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1_c(\mathbb{R})$, alors $u - v$ est constante.
4 Conclure que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$F(x) = F(0) + \int_0^x f(t)\,dt\,.$$

Problème 30 (série de Fourier d'une fonction lipschitzienne)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et lipschitzienne. On note K la constante de Lipschitz de f, et (c_n) la suite de ses coefficients de Fourier.

1 Soit $h \in \mathbb{R}$. En considérant la fonction $x \mapsto f(x+h) - f(x-h)$, montrer qu'on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\sin(nh)|^2 |c_n|^2 \le K^2 h^2\ .$$

2 Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on a

$$\sum_{2^{p-1}\le |n| < 2^p} |c_n|^2 \le \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+2}}\ ,$$

et en déduire

$$\sum_{2^{p-1}\le |n| < 2^p} |c_n| \le \frac{K\pi}{2^{p/2}}\ .$$

3 Montrer que la série de Fourier de f converge normalement vers f.

4 Redémontrer ce résultat à l'aide du problème précédent.

Problème 31 (inégalité de Bernstein)

Le but de l'exercice est de démontrer l'**inégalité de Bernstein** : *si P est un polynôme trigonométrique de degré N, alors*

$$||P'||_\infty \leq N\,||P||_\infty\ .$$

1a Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire 2π-périodique telle que $f(x) = x$ pour $x \in [0; \pi/2]$ et $f(x) = \pi - x$ pour $x \in [\pi/2; \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f.
1b Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $x \in [-a; a]$, on peut écrire

$$x = \frac{4}{\pi^2}\, ia \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\, exp\left(\frac{i\pi}{2a}(2k-1)x\right)\ .$$

2 Montrer que si $P(t) = \sum_{-N}^{N} \lambda_j e^{ijt}$ est un polynôme trigonométrique de degré N, alors

$$P'(t) = \frac{-4N}{\pi^2} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k-1)^2}\, P\left(t + \frac{2k-1}{2N}\pi\right)\ .$$

3 Conclure.

Problème 32 (séries lacunaires nulle part dérivables)

Dans tout l'exercice, $\lambda = (\lambda_n)$ est une suite strictement croissante de réels positifs, et $\alpha = (\alpha_n)$ est une suite de nombres complexes vérifiant $\sum_0^\infty |\alpha_n| < +\infty$. On définit une fonction $W = W_{\lambda,\alpha} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$W(t) = \sum_0^\infty \alpha_n\, e^{i\lambda_n t}\ .$$

A1 Montrer que W est bien définie, et continue bornée sur $\mathbb{R}$.
A2 Donner une condition suffisante simple (portant sur λ et α) pour que W soit de classe $\mathcal{C}^1$.

B Dans cette question, on suppose que la suite λ est "lacunaire", ce qui signifie qu'il existe une constante $c > 1$ telle que

$$\frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} \geq c$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. On veut montrer que si $\lambda_n \alpha_n$ ne tend pas vers 0, alors la fonction W n'est dérivable en aucun point.

1 Montrer que si W est dérivable en un point $t_0 \in \mathbb{R}$, alors on peut écrire

$$W(t) = a + b(t - t_0) + (t - t_0)g(t - t_0) \ ,$$

où a, b sont des constantes et g est une fonction continue bornée vérifiant $g(0) = 0$.
2a Montrer qu'il existe une fonction φ intégrable sur $\mathbb{R}$ dont la transformée de Fourier est de classe $\mathcal{C}^\infty$, à support dans $]1/c; c[$, et vérifie $\hat{\varphi}(1) = 1$.
2b Calculer $\int_{\mathbb{R}} \varphi(t)\, dt$ et $\int_{\mathbb{R}} t\varphi(t)\, dt$ après avoir justifié l'existence de la deuxième intégrale.
3 Soit $t_0 \in \mathbb{R}$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_k = \int_{-\infty}^{+\infty} W(t)\, \varphi(\lambda_k(t_0 - t))\, dt \ .$$

a Justifier la définition de I_k et calculer I_k en fonction de α_k, λ_k et t_0.
b Montrer que si W est dérivable en t_0, alors $I_k = o(1/\lambda_k^2)$ quand k tend vers l'infini.
4 Conclure.

Problème 33 (produits infinis et applications)

A Dans cette partie, on démontre le théorème "standard" concernant les produits infinis de fonctions.
1 On note Log la détermination principale du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que si $h \in \mathbb{C}$ vérifie $|h| < 1$, alors $|\mathrm{Log}(1 + h)| \leq \frac{|h|}{1-|h|}$.
2 Soit (f_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un même ensemble X. On suppose que la série $\sum(1 - f_n)$ est normalement convergente.
a Montrer qu'il existe un entier N tel que $\mathrm{Log}(f_n)$ est bien définie pour $n > N$ et la série $\sum_{n>N} \mathrm{Log}(f_n)$ est normalement convergente.
b Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n = \prod_0^n f_j$. Montrer que la suite P_n converge uniformément sur X vers la fonction $P_N e^S$, où N est choisi comme en **a** et $S = \sum_{n>N} \mathrm{Log}(f_n)$.
3 Soit Ω ouvert de $\mathbb{C}$, et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la série $\sum(1 - f_n)$ converge normalement sur tout compact.
a Montrer que la fonction $f = \prod_0^\infty f_n$ est bien définie, et qu'elle est holomorphe sur Ω.
b On note $Z(g)$ l'ensemble des zéros d'une fonction $g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Montrer qu'on a $Z(f) = \bigcup_{n\geq 0} Z(f_n)$, la multiplicité d'un zéro $a \in Z(f)$ étant égale à la somme de ses multiplicités comme zéro des f_n.
c Montrer que si les f_n ne s'annulent pas, alors f ne s'annule pas et

$$\frac{f'}{f} = \sum_0^\infty \frac{f_n'}{f_n} \ ,$$

où la série converge uniformément sur les compacts de Ω.

B Le but de cette partie est de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\sin(\pi z) = \pi z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) .$$

1 Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on pose

$$g(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} .$$

a Justifier la définition et montrer que g est holomorphe et 1-périodique sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$.
b Montrer à l'aide d'un développement limité que $(\pi/\sin(\pi z))^2 - 1/z^2$ admet une limite en 0.
c Montrer que la fonction $z \mapsto g(z) - (\pi/\sin(\pi z))^2$ se prolonge en une fonction Φ holomorphe sur $\mathbb{C}$ et 1-périodique.
d Montrer que si $z = x + iy$, où x, y sont réels avec $|y| > 1$ et $0 \leq x \leq 1$, alors $|\sin(\pi z)| > |\operatorname{sh} \pi|$ et $|g(z)| \leq 2 \sum_0^\infty \frac{1}{1+n^2}$. En déduire que la fonction Φ est bornée sur la bande $\{0 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1\}$.
e Montrer que la fonction Φ est constante.
f Montrer qu'on a $\lim_{y \to +\infty} g(iy) = 0$ et $\lim_{y \to +\infty} |\sin(\pi iy)| = +\infty$.
g Conclure que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 .$$

2a Calculer la dérivée de la fonction $z \mapsto \pi \mathrm{cotan}(\pi z)$.
2b Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a

$$\pi \mathrm{cotan}(\pi z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{z^2 - n^2} .$$

3 Pour $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$f(z) = \pi z \prod_{1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right) .$$

a Justifier la définition, montrer que f est holomorphe sur $\mathbb{C}$, et déterminer les zéros de f ainsi que leurs multiplicités.
b Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on pose $u(z) = f(z)/\sin(\pi z)$. Montrer que u est holomorphe et calculer $u'(z)/u(z)$.
c Démontrer la formule souhaitée.

C Soit (λ_n) une suite de nombres complexes non nuls vérifiant $\lim_{n \to \infty} |\lambda_n| = +\infty$. Le but de cette partie est de montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont exactement les λ_n (**théorème de Weierstrass**).

1 On pose $W_0(z) = 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $W_p = \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$W_p(z) = (1-z)\exp\left(\sum_1^p \frac{z^k}{k}\right) .$$

a Calculer $W_p'(z)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.
b En utilisant la formule de Taylor, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on peut écrire

$$1 - W_p(z) = z^{p+1}\varphi_p(z) ,$$

où φ_p est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les coefficients de Taylor en 0 sont *positifs*.
c Déduire de **b** que si $|z| \leq 1$, alors

$$|1 - W_p(z)| \leq |z|^{p+1} .$$

2 Montrer que la série $\sum (\frac{z}{\lambda_n})^{n+1}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.
3 Démontrer le résultat souhaité.

Problème 34 (espace de Bergman)

A Dans cette partie, Ω est un ouvert borné de $\mathbb{C}$ et $p \in [1; \infty[$ est fixé.
1 Montrer que si f une fonction holomorphe sur Ω et si $\overline{D} = \overline{D}(z_0, r)$ est un disque fermé contenu dans Ω, alors

$$f(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \int_D f dm ,$$

où m est la mesure de Lebesgue. En déduire que pour tout point $z \in \Omega$ et pour toute fonction $f \in \mathcal{H}(\Omega)$, on a

$$|f(z)| \leq \frac{1}{(\pi d(z, \partial\Omega)^2)^{1/p}} \|f\|_p ,$$

où on a posé $||f||_p = \left(\int_\Omega |f|^p dm\right)^{1/p} \leq +\infty$.
2 On définit l'**espace de Bergman** $B^p(\Omega)$ par

$$B^p(\Omega) = \left\{ f \in \mathcal{H}(\Omega); \int_\Omega |f|^p dm < +\infty \right\} .$$

a En utilisant **1**, montrer que si (f_n) est une suite de Cauchy dans $(B^p(\Omega), \| \, . \, \|_p)$, alors (f_n) est uniformément de Cauchy sur tout compact.
b Montrer que $(B^p(\Omega), \| \, . \, \|_p)$ est un espace de Banach , et que la convergence dans $B^p(\Omega)$ entraîne la convergence uniforme sur les compacts.

B dans cette partie, on prend $\Omega = \mathbb{D}$ et $p = 2$. D'après **A**, $B^2(\mathbb{D})$ est un espace de Hilbert, le produit scalaire étant donné par

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{D}} f\overline{g}\, dm \ .$$

1 Montrer que si $f \in B^2(\mathbb{D})$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$, alors

$$\|f\|^2 = \sum_0^\infty \frac{\pi}{n+1} |c_n|^2 \ .$$

En déduire une autre expression du produit scalaire de $B^2(\mathbb{D})$.

2 On pose $e_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}\, z^n$. Montrer que la suite $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base hilbertienne de $B^2(\mathbb{D})$.

3 Montrer que si $a \in \mathbb{D}$, alors il existe une unique fonction $K_a \in B^2(\mathbb{D})$ telle que pour toute $f \in B^2(\mathbb{D})$, on ait

$$f(a) = \langle f, K_a\rangle \ .$$

4 Soit $a \in \mathbb{D}$. En utilisant **2**, déterminer explicitement la fonction K_a.

5 Conclure que si f est une fonction holomorphe au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors, pour tout point $a \in \mathbb{D}$, on a

$$f(a) = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{dm(z)}{(1-\overline{z}a)^2} \ .$$

C Dans cette partie, on veut retrouver par une autre méthode le résultat de **B5**.

1a Montrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ est localement intégrable sur $\mathbb{C}$.

1b On note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{C}$. En appliquant la formule de Green-Riemann dans des domaines du type $\{z \in \overline{\mathbb{D}};\ |z-a| \geq \varepsilon\}$, établir la **formule de Cauchy-Pompeiu** : si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors

$$\varphi(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\varphi(z)}{z-a}\, dz \ - \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}\, \frac{dm(z)}{z-a} \ .$$

pour tout point $a \in \mathbb{D}$.

2 Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage de $\overline{\mathbb{D}}$, alors, pour tout point $a \in \mathbb{D}$, on a

$$f(a) = -\frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} \frac{\partial f}{\partial\overline{z}}\, \frac{1-|z|^2}{1-\overline{z}a}\, \frac{dm(z)}{z-a} \ + \ \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} f(z) \frac{dm(z)}{(1-\overline{z}a)^2} \ .$$

3 Conclure.

Problème 35 (dynamique holomorphe)

Dans tout le problème, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est une fonction holomorphe sur Ω vérifiant $f(\Omega) \subset \Omega$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note f_n la n-ième itérée de f:

$$f_n = f \circ ... \circ f \ .$$

Les trois parties sont indépendantes. On rappelle que si U et V sont deux ouverts de $\mathbb{C}$, un *biholomorphisme* de U sur V est une bijection holomorphe $\varphi : U \to V$. On sait alors que φ^{-1} est également holomorphe.

A dans cette partie, on suppose Ω connexe et borné. On suppose également que f possède un point fixe $a \in \Omega$.
1 Calculer $f_n'(a)$ pour tout n, et en déduire qu'on a $|f'(a)| \leq 1$.
2 On suppose qu'on a $f'(a) = 1$.
a Montrer que si $f \neq id$, alors il existe une constante $c \neq 0$ et un entier $k \geq 2$ tels que, pour tout $n \geq 1$, on ait

$$f_n(z) = z + nc\,(z-a)^k + o[(z-a)^k]$$

au voisinage de a.
b Montrer qu'on a $f = id$.
3 Montrer que si $\lambda \in \mathbb{T}$, alors il existe une suite strictement croissante d'entiers (p_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \lambda^{p_n} = 1$. En déduire que si $|f'(a)| = 1$, alors (f_n) admet une sous-suite (g_n) qui converge vers id uniformément sur tout compact.
4 Montrer qu'on a $|f'(a)| = 1$ si et seulement si f est un biholomorphisme de Ω sur Ω.
5 On suppose qu'on a $|f'(a)| < 1$.
a Montrer qu'il existe un voisinage V de a tel que $f_n(z)$ tend vers a pour tout $z \in V$.
b Montrer que $f_n(z)$ tend vers a uniformément sur tout compact de Ω.
6 Étudier les deux cas suivants.

(1) $\Omega = \{z;\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$, et $f(z) = \alpha z + \frac{1-\alpha}{z}$, où $\alpha \in]0\,;1[$ est donné.
(2) $\Omega = \{z;\ |z| < 1,\ \mathrm{Re}(z) > 0,\ \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $f(z) = e^{i\frac{\pi}{2}z}$.

B Dans cette partie, on suppose que $0 \in \Omega$ et $f(0) = 0$. On suppose également que $\lambda = f'(0)$ vérifie $0 < |\lambda| < 1$.
1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varphi_n = \lambda^{-n} f_n$.
a Montrer qu'on peut trouver des constantes $\delta > 0$ et $\alpha < |\lambda|^{1/2}$ telles que $|f_n(z)| \leq \alpha^n |z|$ pour tout $z \in \overline{D}(0,\delta)$ et pour tout n.
b Montrer qu'il existe une constante C telle que $|\varphi_{n+1}(z) - \varphi_n(z)| \leq \frac{C}{|\lambda|^{n+1}}\,|f_n(z)|^2$ pour $|z| \leq \delta$ et pour tout n.
c Déduire de **a** et **b** que la suite (φ_n) converge uniformément sur $\overline{D}(0,\delta)$.
3 Montrer que f est biholomorphiquement conjuguée à l'homothétie $z \mapsto \lambda z$ au voisinage de 0. En d'autres termes, montrer qu'il existe un biholomorphisme $\varphi : U \to V$ entre deux voisinages de 0 tel que $\varphi \circ f \circ \varphi^{-1}(z) \equiv \lambda z$.

C Dans cette partie, on prend $\Omega = \mathbb{D}$.
1 Soit $a \in \mathbb{D}$. Pour $z \neq 1/\overline{a}$, on pose $\varphi_a(z) = \dfrac{a - z}{1 - \overline{a}z}$. Montrer que la restriction de φ_a à $\mathbb{D}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et déterminer sa réciproque.

2 En utilisant le lemme de Schwarz, montrer que si a et b sont deux points de $\mathbb{D}$, alors

$$\left|\frac{f(b)-f(a)}{1-\overline{f(b)}f(a)}\right| \leq \left|\frac{b-a}{1-\bar{b}a}\right| .$$

3 Pour $a, b \in \mathbb{D}$, on pose

$$\delta(a,b) = |\varphi_b(a)| = \left|\frac{b-a}{1-\bar{b}a}\right| .$$

a Montrer que si $a, b, c \in \mathbb{D}$, alors $\delta(\varphi_c(a), \varphi_c(b)) = \delta(a,b)$.
b En utilisant l'identité

$$1 - \left|\frac{b-a}{1-\bar{b}a}\right|^2 = \frac{\left(1-|b|^2\right)\left(1-|a|^2\right)}{\left|1-\bar{b}a\right|^2} ,$$

montrer que si $a, b \in \mathbb{D}$, alors

$$\delta(a,b) \leq \frac{|a|+|b|}{1+|a||b|} \leq |a|+|b| .$$

c Déduire de **a** et **b** que δ est une distance sur $\mathbb{D}$ et que les φ_c sont des isométries pour δ. On dit que δ est la **distance pseudo-hyperbolique** sur le disque $\mathbb{D}$.
4 D'après **2**, la fonction f est 1-lipschitzienne pour la distance δ. Que peut-on dire de plus si $f(\mathbb{D})$ est une partie relativement compacte de $\mathbb{D}$?
5 On suppose que $f(\mathbb{D})$ est relativement compact dans $\mathbb{D}$. Montrer que f admet un unique point fixe et que la suite des itérées de f converge vers ce point fixe uniformément sur tout compact.

Problème 36 (un théorème de Paley et Wiener)

A Soit $a > 0$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support dans $[-a; a]$. Montrer que la formule

$$F(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\,\varphi(t)\,dt$$

définit une fonction entière (i.e. holomorphe sur $\mathbb{C}$), et que pour tout entier $n \geq 0$, on a

$$|F(z)| = O\left(|z|^{-n}\, e^{a\,|\mathrm{Im}(z)|}\right)$$

quand $|z|$ tend vers l'infini.

B Soit F une fonction entière. On suppose qu'il existe un nombre $a > 0$ tel que pour tout entier $n \geq 0$, on a $|F(z)| = O\left(|z|^{-n}\, e^{a\,|\mathrm{Im}(z)|}\right)$ quand $|z|$ tend vers l'infini. On veut montrer qu'il existe une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ et à support dans $[-a;a]$, telle que

$$F(z) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itz}\,\varphi(t)\,dt\ .$$

1 Quel est le seul candidat possible pour φ? Montrer que ce candidat est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2 En utilisant convenablement le théorème de Cauchy, montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi(t) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\,(x+ib)}\,F(x+ib)\,dx\ .$$

3 Déduire de **2** qu'on a $\varphi(t) = 0$ si $|t| > a$.
4 Conclure.

Problème 37 (séries de Dirichlet)

Dans tout l'exercice, S est une **série de Dirichlet**, c'est à dire une série de fonctions de la forme

$$S(z) = \sum a_n e^{-\lambda_n z}\ ,$$

où les a_n sont des nombres complexes, et (λ_n) est une suite strictement croissantes de nombres positifs tendant vers $+\infty$. Si $z \in \mathbb{C}$ et si la série $S(z)$ converge, on note $f_S(z)$ la somme de cette série.

1a Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. Montrer que si la série $S(z_0)$ est absolument convergente, alors la série $S(z)$ converge normalement dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) \geq \mathrm{Re}(z_0)\}$.
1b Montrer qu'il existe un unique nombre $x_a \in [-\infty;+\infty]$ tel que la série $S(z)$ converge absolument pour $\mathrm{Re}(z) > x_a$ et ne converge pas absolument pour $\mathrm{Re}(z) < x_a$. On dit que x_a est l'**abscisse de convergence absolue** de la série S.
2a Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R},\ a < b$, et pour $w = x+iy \in \mathbb{C}$, avec $x \geq 0$, on a

$$\left| e^{-aw} - e^{-bw} \right| \leq \frac{|w|}{x}\left(e^{-ax} - e^{-bx} \right)\ .$$

2b Soit $z_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que la série $S(z_0)$ converge. En utilisant **a** et une transformation d'Abel bien choisie, montrer que la série $S(z)$ converge uniformément dans tout secteur angulaire du type $S_\alpha = \{z;\ |Arg(z-z_0)| \leq \alpha\},\ \alpha < \pi/2$.
2c Montrer qu'il existe un unique $x_c \in [-\infty;+\infty]$ tel que la série $S(z)$ converge pour $\mathrm{Re}(z) > x_c$ et diverge pour $\mathrm{Re}(z) < x_c$. On dit que x_c est l'**abscisse de convergence** de la série S.
3 Montrer que $f_S(z) = \sum_0^\infty a_n e^{-\lambda_n z}$ est holomorphe dans $\{\mathrm{Re}(z) > x_c\}$.
4 On prend $\lambda_n = n$ pour tout n. Montrer qu'on a $x_a = x_c = \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{Log\,|a_n|}{n}$. Quel résultat retrouve-t-on en appliquant **2b**?
5 Déterminer x_a et x_c dans les cas suivants.

a $a_n = e^{-n^\alpha}$, $\lambda_n = n^\beta$ $(\alpha \geq 0\,,\, \beta > 0)$.
b $a_n = (-1)^n$, $\lambda_n = \mathrm{Log}(n)$.
c $a_n = \frac{(-1)^n}{n}$, $\lambda_n = \sqrt{\mathrm{Log}(\mathrm{Log}\, n)}$.

Problème 38 (transformation de Laplace)

A Dans toute cette partie, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction localement intégrable sur $\mathbb{R}$ et nulle sur $]-\infty\,;0\,[$.
1a Soit $s_0 \in \mathbb{C}$, et soit $x_0 = \mathrm{Re}(s_0)$. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts_0}\, dt$ est absolument convergente. Montrer que si $s \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(s) > x_0$, alors l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$ est absolument convergente.
1b Montrer qu'il existe un unique nombre $x_a(f) \in [-\infty; +\infty]$ tel que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$ converge absolument pour $\mathrm{Re(s)} > x_a$ et ne converge pas absolument pour $\mathrm{Re(s)} < x_a$. On dit que x_a est l'**abscisse de convergence absolue de Laplace** de la fonction f.
1c Donner un exemple où $x_a = +\infty$.
2a Soit $s_0 \in \mathbb{C}$. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts_0}\, dt$ est convergente. En intégrant judicieusement par parties, montrer que si $s \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Re}(s_0)$, alors l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$ est convergente, la convergence étant de plus uniforme par rapport à s dans tout secteur angulaire du type $S_\alpha = \{s;\ |\mathrm{Arg}(s - s_0)| \leq \alpha\}$, où $\alpha \in [0\,; \pi/2[$ est fixé.
2b Montrer qu'il existe un unique nombre $x_c(f) \in [-\infty; +\infty]$ tel que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$ converge pour $\mathrm{Re(s)} > x_c$ et diverge pour $\mathrm{Re(s)} < x_c$. On dit que x_c est l'**abscisse de convergence de Laplace** de la fonction f.
2c Donner un exemple où $x_c = +\infty$.
3 Montrer qu'on a toujours $x_c \leq x_a$. Y a-t-il égalité en général?
4 On suppose $x_c < +\infty$. Montrer que la fonction $\mathcal{L}f$ définie par

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-ts}\, dt$$

est holomorphe dans le demi-plan $\{\mathrm{Re}(s) > x_c\}$. La fonction $\mathcal{L}f$ s'appelle la **transformée de Laplace** de la fonction f.
5a Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Montrer que si l'intégrale $\int_0^\infty f(t)\, e^{-tx_0}\, dt$ converge, alors on a

$$\lim_{x \to x_0^+} \mathcal{L}f(x) = \int_0^\infty f(t)\, e^{-tx}\, dt\ .$$

5b En utilisant **a**, déterminer la valeur de l'intégrale $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$.
6 Dans cette question, on veut prouver l'*injectivité* de la transformation de Laplace, autrement dit montrer que si $x_c < +\infty$ et si $\mathcal{L}f = 0$, alors $f = 0$ presque partout.
a Établir le résultat sous l'hypothèse $x_a(f) < +\infty$. On pourra faire intervenir la transformation de Fourier.

b On suppose $x_c(f) < +\infty$. Soit F la fonction définie par $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$. Montrer que si $s \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Max}(0, x_c(f))$, alors $e^{-sx}F(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$.
c Avec les notations de **b** montrer qu'on a $x_a(F) \leq \mathrm{Max}(0, x_c(f))$ et que si $\mathrm{Re}(s) > \mathrm{Max}(0, x_c(f))$, alors

$$\mathcal{L}F(s) = \frac{1}{s}\,\mathcal{L}f(s)\ .$$

d Conclure.
7 On suppose qu'on a $x_a < +\infty$ et qu'il existe un nombre réel $b > x_a$ tel que la fonction $y \mapsto \mathcal{L}f(b + iy)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. Montrer que pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, on peut écrire

$$f(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b+i\mathbb{R}} \mathcal{L}f(z)\, e^{tz}\, dz\ .$$

B Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ localement intégrable, nulle sur $]-\infty\,;0\,[$. On suppose qu'on a $x_a(f) < +\infty$. Montrer que pour tout $b > x_a$ fixé, $\mathcal{L}f(s)$ tend vers 0 quand $|s|$ tend vers $+\infty$ et $\mathrm{Re}(s) \geq b$. On pourra commencer par le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$ à support compact.

C Soit $x_0 \in \mathbb{R}$ donné, et soit F une fonction holomorphe dans le demi-plan $\Pi = \{\mathrm{Re}(s) > x_0\}$. On fait les hypothèses suivantes :

(1) pour tout $b > x_0$ fixé, $F(s)$ tend vers 0 quand $|s|$ tend vers $+\infty$ et $\mathrm{Re}(s) \geq b$;
(2) pour tout $b > x_0$, la fonction $y \mapsto F(b + iy)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On veut montrer qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue, nulle sur $]-\infty\,;0\,[$, vérifiant $x_a(f) \leq x_0$, et telle que $\mathcal{L}f \equiv F$ dans le demi-plan Π.
1a Soit $b > x_0$. Montrer que la formule

$$f_b(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{b+i\mathbb{R}} F(z)\, e^{tz}\, dz$$

définit une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
1b En utilisant le théorème de Cauchy, montrer que la fonction f_b ne dépend en fait pas de $b > x_0$. Dans la suite, on écrira donc f au lieu de f_b.
2a Soit $b > x_0$. Pour $R > 0$, on note $C_{R,b}$ le demi-cercle $\{b + Re^{i\theta};\ -\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2\}$. Pour $t < 0$, déterminer la limite de l'intégrale $\int_{C_{R,b}} F(z)\, e^{tz}\, dz$ quand R tend vers $+\infty$.
2b Montrer que la fonction f est nulle sur $]-\infty\,;0\,[$.
3 Montrer qu'on a $x_a(f) \leq x_0$ et que pour $x > b > x_0$, on peut écrire

$$\int_0^{\infty} f(t)\, e^{-tx}\, dt = -\frac{1}{2i\pi} \int_{b+i\mathbb{R}} \frac{F(z)}{z - x}\, dz\ .$$

4 Conclure.