prépa-agreg 2007-2008

Calcul différentiel

I Questions de cours

1 Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ différentiable, et soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = F(\cos(xy), y^2\mathrm{Log}(1+x^2), \arctan(x^4+y^2))\,.$$

Exprimer les dérivées partielles de f en fonction de celles de F.

2 Soit H un espace préhilbertien. Montrer que l'application $x \mapsto ||x||$ est différentiable en tout point $a \neq 0$ et trouver sa différentielle.

3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$. Déterminer les extrema locaux de la fonction f, en précisant s'il s'agit d'extrema globaux.

4 Soient $a, b, c > 0$ trois nombres strictement positifs. Quelle est l'équation du plan tangent à l'ellipsoïde d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1$ en un point (x_0, y_0, z_0)?

5 Soit $f : [a;b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Peut-on affirmer l'existence d'un point $c \in]a;b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)\,f'(c)$?

6 Que peut-on dire d'une fonction f différentiable sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et vérifiant $Df(x) = 0$ pour tout $x \in \Omega$?

7 Soient E, F deux evn, soit $a \in E$, et soit $f : E \to F$. On suppose que f est continue sur E, différentiable sur $E \setminus \{a\}$, et que $Df(x)$ admet une limite L dans $\mathcal{L}(E,F)$ quand x tend vers a. Montrer que f est différentiable en a et $Df(a) = L$.

8 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont bornées, avec $\|f^{(n)}\|_\infty \leq 5^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de chaque point $a \in \mathbb{R}$.

9 Montrer que pour tout $\lambda > 0$, il existe un unique réel $x(\lambda) > 0$ tel que $2 - e^{\lambda x} = \mathrm{Log} x$, et que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

10 Montrer que si $A \in M_n(\mathbb{R})$ est suffisament proche de Id, alors il existe une matrice M telle que $M^2 = A$.

II Exercices

Exercice 1 Étudier la continuité et la différentiabilité des fonctions $f_1, f_2, f_3 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définies par $f_i(0,0) = 0$ et, pour $(x,y) \neq (0,0)$:

$$f_1(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2} \;\; ; \;\; f_2(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} \;\; ; \;\; f_3(x,y) = \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}\;, \alpha > 0.$$

Exercice 2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(0,0) = 0$, $f(x,y) = 0$ si $y \neq x^2$, $f(x,y) = 1$ si $y = x^2$ et $(x,y) \neq (0,0)$.

1 La fonction f est-elle continue en $(0,0)$?
2 Montrer que f admet en $(0,0)$ des dérivées dans toutes les directions.

Exercice 3 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \arccos \frac{1-xy}{\sqrt{1+x^2+y^2+x^2y^2}}$.

1 Justifier la définition, et montrer que f est différentiable sur l'ouvert

$$U = \{(x,y);\ x + y \neq 0\}\,.$$

2 En s'armant de courage et de patience, calculer $Df(x,y)$ pour $(x,y) \in U$.

Exercice 4 Soit $f : \mathbb{R}\times]0;\infty[\to \mathbb{R}^2$ définie par $f(0,y) = 0$ et

$$f(x,y) = \left(x^2\sqrt{y}\cos\frac{1}{x^3}, x^2\sqrt{y}\sin\frac{1}{x^3}\right)$$

pour $x \neq 0$. Montrer que f est différentiable en tout point, et que son déterminant Jacobien prend exactement deux valeurs.

Exercice 5 (coordonnées polaires)

Soit $U =]0\,;+\infty[\times]-\pi\,;\pi[$, et soit $\varphi : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$.

1 Déterminer $\varphi(U)$, et montrer que φ est un $\mathcal{C}^\infty$- difféomorphisme de U sur $\varphi(U)$.
2 Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

a Exprimer les dérivées partielles de f en coordonnées polaires. Autrement dit, exprimer $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ à l'aide des dérivées partielles de la fonction $\tilde{f} = f \circ \varphi$.

b Exprimer $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en coordonnées polaires.

c Dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^2$, exprimer $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en coordonnées polaires.

Exercice 6 (fonctions radiales)

A Soit $\varphi :]0;\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. On définit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \varphi(\|x\|)\,,$$

où $\|\ .\ \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1 Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et exprimer sa différentielle et sa différentielle seconde en fonction des dérivées de φ.
2 Exprimer $\Delta f = \sum_1^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ en fonction des dérivées de φ.

B Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer toutes les fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ vérifiant $\Delta f = 0$ et telles que $f(x)$ ne dépend que de $\|x\|$.

Exercice 7 (changements de variables)

A On note Ω le carré $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x < 1\,,\, 0 < y < 1\}$.

1 Soit $\varphi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = (xy, y)$. Montrer que φ est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme de Ω sur un ouvert Ω' à préciser.
2 Déterminer toutes les fonctions $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant l'équation aux dérivées partielle $y\,\frac{\partial f}{\partial y} - x\,\frac{\partial f}{\partial x} = y$.

B Soient $\alpha, \beta, c \in \mathbb{R}$, avec $(\alpha, \beta) \neq (0,0)$. En utilisant un changement de variables linéaire, déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiables vérifiant l'équation $\alpha\frac{\partial f}{\partial x} + \beta\frac{\partial f}{\partial y} = c$.

C Soit c un réel non nul. Résoudre l''équation des ondes $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = c^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$.

Exercice 8 (construction de fonctions plateau)

1 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, avec $\alpha < \beta$. On définit $\phi_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$\phi_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t \leq \alpha \\ 1 & \text{si} \quad t \geq \beta \\ e^{-\frac{1}{t-\alpha}}\left(e^{\frac{1}{\beta-\alpha}} - e^{-\frac{1}{\beta-t}}\right) & \text{si} \quad \alpha < t < \beta \end{cases}$$

Montrer que $\phi_{\alpha,\beta}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et strictement croissante sur $[\alpha;\beta]$.
2 Soient $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, avec $a < a' < b' < b$. Montrer qu'il existe une fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ possédant les propriétés suivantes: ϕ est nulle hors de $[a;b]$, strictement croissante sur $[a;a']$, strictement décroissante sur $[b';b]$, et vaut 1 sur $[a';b']$.
3 Soit H un espace de Hilbert, et soit $B = B(a,r)$ une boule ouverte de H. Montrer qu'il existe une fonction $\Phi : H \to \mathbb{R}^+$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ nulle en dehors de B, strictement positive sur B, et valant 1 sur $B(a, r/2)$.

Exercice 9 Soit $(E, ||\ .\ ||)$ un espace vectoriel normé.

1 Soient $a, b \in E$. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = ||a + tb||$ est dérivable à droite en tout point, avec $||\varphi'_d(t)|| \leq ||b||$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2 Montrer que si $f : \mathbb{R} \to E$ est dérivable en un point t_0, alors $\Phi = ||f||$ est dérivable à droite en t_0 et $\Phi'_d(t_0) \leq ||f'(t_0)||$.

Exercice 10 (fonctions homogènes)

A Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable et soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) $\forall x \in \mathbb{R}^n\ \forall t > 0\ :\ f(tx) = t^\lambda f(x)$;
(ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n\ :\ Df(x) \cdot x = \lambda f(x)$;
(iii) $\forall x \in \mathbb{R}^n\ :\ \sum_1^n x_i \partial_i f(x) = \lambda f(x)$.

Si ces propriétés sont vérifiées, on dit que f est λ-*homogène*.

B Soit $k \in \mathbb{N}$. Montrer que si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^k$ et k-homogène, alors f est un polynôme homogène de degré k.

C Déterminer toutes les fonctions f différentiables sur $\mathbb{R}^2$ et vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = (x^4 + y^4)^{1/2}\,.$$

On pourra remarquer que le second membre de cette équation est 2-homogène.

Exercice 11 Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ deux fois différentiable. On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la différentielle $Df(x)$ est une isométrie (pour la norme euclidienne).

1 Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Pour $h, k, l \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$A(h,k,l) = \langle Df(x)\cdot h, D^2f(x)\cdot(k,l)\rangle\,,$$

où $\langle\ ,\ \rangle$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.

a Montrer qu'on a $A(h,k,l) = -A(k,h,l)$ et $A(h,k,l) = A(h,l,k)$.

b En déduire que la forme trilinéaire A est identiquement nulle.

2 Montrer que f est une isométrie linéaire.

Exercice 12 Soit k un entier positif. Montrer que l'application $A \mapsto A^k$ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et trouver sa différentielle.

Exercice 13 Soit $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ définie par $\Phi(A) = \det A$. Montrer que Φ est différentiable sur $M_n(\mathbb{R})$ et que sa différentielle en $A \in M_n(\mathbb{R})$ est donnée par $D\Phi(A)\cdot H = \mathrm{Tr}\,(\tilde{A}H)$, où $\tilde{A}$ est la comatrice de A. On pourra commencer par le cas où $A = Id$.

Exercice 14 Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et que l'application $A \mapsto A^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $GL_n(\mathbb{R})$. Déterminer se différentielle et sa différentielle seconde.

Exercice 15 On note $||\ .\ ||$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$. Soit $I : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^n$ l'application définie par $I(x) = \frac{x}{||x||^2}$. Montrer que I est différentiable en tout point, et que si $||a|| = 1$, alors $DI(a)$ est la symétrie orthogonale par rapport à $\langle a\rangle^{\perp}$.

Exercice 16 Soit E un evn et soit $f : [a;b] \to E$ une fonction continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a;b[$ tel que

$$||f(b) - f(a)|| \leq (b-a)\,||f'(c)||\,.$$

On pourra raisonner par l'absurde en posant $K = \frac{||f(b)-f(a)||}{b-a}$.

Exercice 17 Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On définit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$, et $g(x,x) = f'(x)$.

1 Montrer que la fonction g est continue.
2 Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^2$, alors g est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 18 Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^2$, et soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$. Peut-on affirmer que $f(x,y)$ ne dépend que de y?

Exercice 19 Soit $f : E \to F$ une application différentiable vérifiant $\lim_{||x|| \to \infty} ||Df(x)|| = 0$. Montrer qu'on a $\lim_{||x|| \to \infty} \frac{||f(x)||}{||x||} = 0$.

Exercice 20 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que f admet des dérivées partielles en tout point et que les deux fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont bornées. Montrer que f est continue.

Exercice 21 Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : U \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si K est un compact de U, alors la restriction de f à K est lipschitzienne.

Exercice 22 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe en tout point et est continue sur $\mathbb{R}^2$.

1 On définit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ par $F(u,v,w) = \int_u^v f(t,w)\,dt$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ et trouver ses dérivées partielles.
2 Soient $a, b, c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ trois fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(t, c(x))\,dt$. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ et trouver sa dérivée.

Exercice 23 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On définit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$g(x) = \int_0^x \sin(x-t)\,\varphi(t)\,dt\,.$$

Montrer que g est solution de l'équation différentielle $y'' + y = \varphi$.

Exercice 24 (théorème de Rolle dans $\mathbb{R}^n$)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et différentiable dans Ω. On suppose que f est constante sur la frontière de Ω. Montrer qu'il existe un point $x_0 \in \Omega$ tel que $Df(x_0) = 0$.

Exercice 25 (théorème de Darboux)

Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dérivable en tout point, alors f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires.

Exercice 26 Soit H un espace préhilbertien et soit F un sous-espace vectoriel de H. Soient également $a \in H$ et $p \in F$. Montrer qu'on a $\|p-a\| = d(a,F)$ si et seulement si $p-a$ est orthogonal à F.

Exercice 27 Soit H un espace de Hilbert, et soient $a_1, \dots, a_n \in H$. Montrer qu'il existe un unique point $x \in H$ minimisant $\sum_1^n ||x-a_i||^2$ et déterminer ce point.

Exercice 28 Soit $\Omega = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x>0,\, y>0,\, z>0\}$, et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y,z) = x+y+z+\frac{a}{xyz}$, où $a>0$ est fixé. Montrer que f atteint sa borne inférieure en un unique point et déterminer ce point.

Exercice 29 Déterminer $\mathrm{Max}\,\{|\sin z|;\ z \in \overline{\mathbb{D}}\}$, où $\overline{\mathbb{D}} \subset \mathbb{C}$ est le disque unité fermé.

Exercice 30 Soit $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que f n'est pas minorée, mais admet un minimum local.
1 Montrer que si $d=1$, alors f' s'annule au moins deux fois.
2 Montrer que cela n'est plus vrai pour $d=2$. On pourra considérer $f(x,y) = x^2+(1-x)^3y^2$.

Exercice 31 (principe du maximum)

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $f : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω.

1 Montrer que f est majorée et atteint sa borne supérieure.
2 On suppose qu'on a $\Delta f(x) > 0$ pour tout $x \in \Omega$, où $\Delta = \sum_1^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$. Montrer que le maximum de f sur $\overline{\Omega}$ ne peut pas être atteint en un point de Ω.
3 On suppose qu'on a $\Delta f \geq 0$ sur Ω. En considérant $f_\varepsilon(x) = f(x) + \varepsilon\|x\|^2$, montrer qu'on a

$$\mathrm{Max}_{\overline{\Omega}}\, f = \mathrm{Max}_{\partial\Omega}\, f\,.$$

4 Montrer que si f vérifie $\Delta f \equiv 0$ dans Ω et $f \equiv 0$ sur $\partial\Omega$, alors $f=0$.

Exercice 32 Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0)=0$ et $f(x) = x + x^2 \sin\frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est pas un difféomorphisme local en 0. Cela contredit-il le théorème d'inversion locale?

Exercice 33 Dans cet exercice, H est un espace de Hilbert.

1a Trouver un $\mathcal{C}^\infty$- difféomorphisme φ de $\mathbb{R}$ sur $]-1\,;1[$, avec φ impaire.

1b Montrer qu'on peut écrire $\varphi(t) = t\, g(t)$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
2 On définit $\Phi : H \longrightarrow H$ par $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(x) = \varphi(||x||)\, \frac{x}{||x||}$ pour $x \neq 0$. Montrer que Φ est un $\mathcal{C}^\infty$- difféomorphisme de H sur sa boule unité ouverte.

Exercice 34 On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n, $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques définies positives, et $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales.

1a Montrer que $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ est un ouvert de $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$.
1b Montrer que l'application $A \longmapsto A^2$ est un $\mathcal{C}^\infty$- difféomorphisme de $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sur $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$.
2 Montrer que l'application $(O, S) \longrightarrow OS$ est un homéomorphisme de $O_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ sur $GL_n(\mathbb{R})$.

Exercice 35 Soit $f : \Omega \to \Omega'$ un homéomorphisme, où Ω et Ω' sont des ouverts dans des espaces de Banach E et F. On suppose que f est différentiable en un point $a \in \Omega$, et que $Df(a)$ est un isomorphisme de E sur F. Montrer que f^{-1} est différentiable en $b = f(a)$.

Exercice 36 Soit X un espace de Banach, et soit $g : X \longrightarrow X$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $k < 1$ telle que $||Dg(x)|| \leq k$ pour tout $x \in X$. Montrer que $f = Id + g$ est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de X sur X.

Exercice 37 Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $C > 0$ telle que $||f(x) - f(y)|| \geq C||x - y||$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$.

1 Montrer que f est injective et que $f(\mathbb{R}^n)$ est fermé dans $\mathbb{R}^n$.
2 En utilisant le théorème d'inversion locale, montrer que $f(\mathbb{R}^n)$ est également un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3 Montrer que f est un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme de $\mathbb{R}^n$ sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 38 (théorème de d'Alembert)

Soit P un polynôme non constant à coefficients complexes. Le but de l'exercice est de montrer que P possède au moins une racine.

1 On note P' le polynôme dérivé de P et on pose $Z = \{z \in \mathbb{C};\ P'(z) = 0\}$. En utilisant le théorème d'inversion locale, montrer que $\Omega = P(\mathbb{C}) \setminus P(Z)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.
2 Montrer que $|P(z)|$ tend vers $+\infty$ quand $|z|$ tend vers $+\infty$, et en déduire que $P(\mathbb{C})$ est une partie fermée de $\mathbb{C}$.
3 Déduire de **1** et **2** que $P(\mathbb{C})$ contient $\mathbb{C} \setminus P(Z)$, et conclure.

Exercice 39 Soient $E = \mathcal{C}([0; 1])$ et $F = \mathcal{C}^1([0; 1])$, munis de leurs normes naturelles.

1 On définit $\Phi : F \longrightarrow E \times \mathbb{R}$ par $\Phi(x) = (x' + x^3, x(0))$. Montrer que Φ est de classe $\mathcal{C}^1$ et déterminer $D\Phi(0)$.
2 Déduire de **1** qu'il existe $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction $g \in \mathcal{C}([0;1])$ telle que $||g||_\infty < \varepsilon$, il existe une fonction $x \in \mathcal{C}^1([0;1])$ vérifiant $x(0) = 0$ et $x' + x^3 = g$.

Exercice 40 On note f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \frac{\mathrm{Log}(x)}{x}$.

1 Étudier succintement la fonction f.
2 Montrer que pour tout nombre réel $x \in]1\,;+\infty[$ différent de e l'équation $x^y = y^x$ admet exactement 2 solutions, toutes les deux strictement supérieures à 1, dont l'une est x. On note $\psi(x)$ la seconde solution, et on pose $\psi(e) = e$.
3 Montrer que la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,;e[\bigcup]e\,;+\infty[$.
4a Montrer qu'on peut écrire $f(x) = f(e) - [(x-e)g(x)]^2$, où g est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de e.
4b Montrer que la fonction ψ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1\,;+\infty[$.

Exercice 41 Montrer que pour tout $t \in]\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}[$, il existe un unique $x \in \mathbb{R}$ vérifiant $\cos(tx) + \sin(tx) = x$. En notant $\varphi(t)$ ce réel x, montrer que l'application φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]\frac{-1}{\sqrt{2}}\,;\frac{1}{\sqrt{2}}[$, et déterminer son développement limité à l'ordre 3 en 0.

Exercice 42 Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixés, $a < b$. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$P_\varepsilon(x) = (x-a)(x-b) + \varepsilon x^3\,.$$

Montrer que si ε est assez petit, alors P_ε admet 3 racines réelles distinctes $x_1(\varepsilon) < x_2(\varepsilon) < x_3(\varepsilon)$, et déterminer un développement asymptotique de $x_i(\varepsilon)$ la forme $x_i(\varepsilon) = \frac{\alpha_i}{\varepsilon} + \beta_i + \gamma_i\varepsilon + o(\varepsilon)$ quand ε tend vers 0.

Exercice 43 Montrer que la relation $(x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{Log}(x + y + z) + e^{x+y} = 1$ définit implicitement une fonction $z = \varphi(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de $(0, 0)$. Déterminer $D\varphi(0, 0)$ et $D^2\varphi(0, 0)$.

Exercice 44 On note $\mathcal{U}$ l'ensemble des matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ possèdant n valeurs propres réelles distinctes, notées $\lambda_1(M) < ... < \lambda_n(M)$.

1 En utilisant le théorème des fonctions implicites, montrer que $\mathcal{U}$ est un ouvert de $M_n(\mathbb{R})$ et que l'application $M \longmapsto (\lambda_1(M), \dots, \lambda_n(M))$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathcal{U}$.
2 Soit $M : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application de classe $\mathcal{C}^k$, $k \geq 1$ telle que $M(t) \in \mathcal{U}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe des applications $f_1, \dots, f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^{k-1}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ est une base de vecteurs propres de $M(t)$. Peut-on a priori trouver des applications f_i de classe $\mathcal{C}^k$?

3 Étudier le cas où $M : \mathbb{R} \to M_2(\mathbb{R})$ est définie par

$$M(t) = \begin{pmatrix} 1+t^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } t < 0 \ , \ M(t) = \begin{pmatrix} 1 & t^2 \\ t^2 & 1 \end{pmatrix} \text{ si } t > 0.$$

Exercice 45 Montrer que $\Gamma = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,, y > 0\,, x \operatorname{Log} y + y \operatorname{Log} x = \operatorname{Log} 2\}$ est (en un sens à préciser) une courbe de classe $\mathcal{C}^\infty$. Déterminer la tangente à Γ au point $(1,2)$, et préciser la position de Γ par rapport à cette tangente.

Exercice 46 Soit $R > 0$ un nombre différent de 2.

1 Dessiner $\mathbf{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 = R^2\}$ et $\mathbf{C} = \{(x,y,z);\ x^2+y^2-2x = 0\}$.
2 Soit $\Gamma = \mathbf{S} \cap \mathbf{C}$. Montrer que Γ est (en un sens à préciser) une courbe de classe $\mathcal{C}^\infty$, et déterminer la tangente à Γ en un point $p = (a,b,c)$.

Exercice 47 Dans tout l'exercice, E est un espace vectoriel normé et Ω est un ouvert de E.

1 Soit $\Phi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ et soit $a \in \Omega$. On suppose que $D\Phi(a) : E \longrightarrow \mathbb{R}^p$ est surjective. Montrer que pour tout V voisinage ouvert de a, $\Phi(a)$ est intérieur à $\Phi(V)$.
2 Utiliser **1** pour démontrer la version suivante du théorème des extrema liés : *Soient $g_1, \dots, g_n : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ des applications de classe $\mathcal{C}^1$ et soit*

$$\Sigma = \{x \in \Omega;\ g_1(x) = 0\,, \dots, g_n(x) = 0\}\,.$$

Si $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si la restriction de f à Σ présente un extrémum local en un point a tel que les formes linéaires $Dg_1(a), \dots, Dg_n(a)$ sont linéairement indépendantes, alors $Df(a)$ est combinaison linéaire des $Dg_i(a)$.

Exercice 48 Trouver les dimensions de la boite en carton parallèlépipèdique sans couvercle de volume 3 litres qui minimise la consommation de carton.

Exercice 49 Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + y^2 - xy + x + y$, et soit Δ le triangle $\{x \leq 0\,, y \leq 0\,, y \geq -3 - x\} \subset \mathbb{R}^2$. Déterminer $\sup_\Delta f$ et $\inf_\Delta f$.

Exercice 50 Soient $a, b, c > 0$ fixés et soit $\Sigma = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^4}{a^4} + \frac{y^4}{b^4} + \frac{z^4}{c^4} = 1\right\}$. Déterminer la distance (euclidienne) maximale d'un point de Σ à l'origine de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 51 Dans tout l'exercice p et q sont des réels > 1 tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

1 Soient $b_1\,,\dots,b_n$ des réels strictement positifs, et soit

$$\Sigma = \left\{ x \in \mathbb{R}^n;\ x_i \geq 0 \ \ \sum_{i=1}^n x_i^p = 1 \right\}.$$

Déterminer sup $\{\sum_1^n b_i x_i;\ x \in \Sigma\}$.

2 Démontrer l'inégalité de Hölder : si $a_1\,,\dots,a_n\,,b_1\,,\dots,b_n$ sont des réels positifs, alors

$$\sum_{i=1}^n a_i b_i \leq \left(\sum_1^n a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_1^n b_i^q\right)^{1/q} .$$

Exercice 52 Soient $\alpha_1\,,\dots,\alpha_n$ des nombres strictement positifs de somme 1.

1 En maximisant $\prod_1^n x_i^{\alpha_i}$ sur l'ensemble $\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n; x_i \geq 0\,, \sum_1^n \alpha_i x_i = 1\}$, démontrer l'*inégalité arithmético-géométrique* : si $x_1,\dots,x_n$ sont des nombres positifs, alors

$$\prod_1^n x_i^{\alpha_i} \leq \sum_1^n \alpha_i x_i \ .$$

2 Y a-t-il une démonstration plus courte?

Exercice 53 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique définie positive, et soit $p \in \mathbb{R}^n$, $p \neq 0$. Déterminer inf $\{\langle Ax\,,x\rangle;\ x \in H\}$, où $H = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \langle x\,,p\rangle = 1\}$.

Exercice 54 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. Montrer à l'aide du théorème des extrema liés que si un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\langle Ax_0\,,x_0\rangle = \mathrm{Max}\,\{\langle Ax\,,x\rangle;\ ||x||_2 = 1\}$, alors x_0 est vecteur propre de A. En déduire que tout matrice symétrique réelle est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 55 On rappelle que la distance entre deux parties A et B d'un espace métrique (X,d) est définie par $d(A,B) = \inf\{d(x,y);\ x \in A\,, y \in B\}$. Déterminer la distance euclidienne entre l'ellipse d'équation $x^2 + 4y^2 = 4$ et la droite d'équation $x + y = 4$.

Exercice 56 Parmi tous les triangles de périmètre p donné, quel est celui dont l'aire est maximale?

Exercice 57 Soit $\mathcal{H}$ l'hyperbole $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ xy = 1\}$.

1 On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Montrer que si $a = (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et si $u = (x,y) \in \mathcal{H}$ vérifie $||a - u|| = d(a,\mathcal{H})$, alors $x^4 - \alpha x^3 + \beta x - 1 = 0$.

2 Déterminer la distance du point $a = (2,2)$ à l'hyperbole $\mathcal{H}$.

Exercice 58 Montrer que si a, b, c sont des nombres positifs, alors $abc^3 \leq 27 \left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5$.

Exercice 59 On note $\Phi : (\mathbb{R}^n)^n \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application "déterminant", et $\mathbf{S}$ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$. Enfin, on note $\| \, . \, \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

1 Montrer que la restriction de Φ à $\mathbf{S}^n$ atteint son maximum, et que si ce maximum est atteint en un point $(u_1, \dots, u_n)$, alors $(u_1, \dots, u_n)$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}^n$.
2 Montrer que si $v_1, \dots, v_n$ sont n vecteurs de $\mathbb{R}^n$, alors

$$|\det(v_1, \dots, v_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} ||v_i|| \ .$$

Exercice 60 Soit E un evn et soit $f : E \to E$ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit également $a \in E$. On suppose qu'on a $f(a) = a$ et $||Df(a)|| < 1$.

1 Montrer qu'on peut trouver $r > 0$ et $k \in [0; 1[$ tels que la boule $B(a, r)$ est stable par f et $\forall x, y \in B(a, r) \ : \ ||f(x) - f(y)|| \leq k \, ||x - y||$.
2 Montrer que pour tout point $x_0 \in B(a, r)$, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers a avec $\|x_n - a\| \leq C \, k^n$, où C est une constante.
3 On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^2$, et qu'on a $Df(a) = 0$. Avec les notations de **2**, montrer qu'on a une majoration du type $\|x_n - a\| \leq C \, k^{2^n}$, où C est une constante.

Exercice 61 (méthode de Newton)

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $g : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que g possède un unique zéro $\alpha \in I$, et qu'on a $g'(\alpha) \neq 0$.
1 Montrer qu'il existe un intervalle fermé (non trivial) $J \subset I$ contenant α, tel que

$$f(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$$

est bien défini sur J, l'intervalle J étant de plus stable par f.
2 Soit $u_0 \in J$, et soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$.
  a Interpréter géométriquement la définition de u_{n+1}.
  b Montrer que si u_0 est suffisament proche de α, alors la suite (u_n) converge vers α, et estimer la vitesse de convergence.
3 Étudier le cas où $g(x) = x^2 - 2$ et $I = [\sqrt{2}; \infty[$.

Exercice 62 Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0; 1]$. On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\sup_n \|f_n^{(k)}\|_\infty < \infty$. Montrer que (f_n) admet une sous-suite (g_n) qui converge uniformément vers une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty([0; 1])$, et dont toutes les dérivées convergent uniformément vers les dérivées correspondantes de f.

Exercice 63 (méthode des trapèzes).

Dans tout l'exercice, $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$T_n(f) = \frac{b-a}{2}\left(f(a) + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(a + k\,\frac{b-a}{n}\right) + f(b)\right).$$

1 Soit $[\alpha;\beta] \subset [a;b]$, et soit $\varphi : [\alpha;\beta] \to \mathbb{R}$ la fonction affine interpolant f aux points α et β.

a Calculer $\int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt$ en fonction de $\alpha, \beta, f(\alpha), f(\beta)$.

b Montrer qu'on a $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt - \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \frac{(t-\alpha)(t-\beta)}{2} f''(t)\,dt$.

2 Interpréter géométriquement la définition des $T_n(f)$.

3 Montrer que $T_n(f) \to \int_a^b f(t)\,dt$ quand $n \to \infty$, avec

$$\left|T_n(f) - \int_a^b f(t)\,dt\right| \le \frac{(b-a)^3}{12n^2}\,\|f''\|_\infty\,.$$

Exercice 64 Soit $f : [a;b] \to E$, où E est un espace vectoriel normé.

1 On suppose que f est dérivable en tout point. Montrer que si $c \in [a;b]$ est un point d'accumulation de l'ensemble des zéros de f, alors $f'(c) = 0$.

2 On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et possède une infinité de zéros. Montrer qu'il existe un point $c \in [a;b]$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pourra commencer par le cas $E = \mathbb{R}$.

Exercice 65 Soit $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, avec $f'(a) = 0 = f'(b)$. Montrer qu'on a

$$|f(b) - f(a)| \le \frac{(b-a)^2}{4}\,\|f''\|_\infty\,.$$

Exercice 66 Dans tout l'exercice, I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$.

A Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que f possède la propriété suivante : pour tout point $a \in I$, on peut trouver $\varepsilon > 0$ et des constantes $M, R < \infty$ tels que $[a-\varepsilon; a+\varepsilon] \subset I$ et

$$\forall x \in [a-\varepsilon; a+\varepsilon]\ \ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ \frac{|f^n(x)|}{n!} \le M\,R^n\,.$$

Montrer que f est développable en série entière au voisinage de chaque point de I.

B Soit $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que f et toutes ses dérivées sont positives sur I. Montrer que f est développable en série entière au voisinage de chaque point de I.

Exercice 67 Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert convexe d'un espace normé E.

1 On suppose que f est différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si
$$\forall x, y \in \Omega \ : \ f(y) \geq f(x) + Df(x) \cdot (y - x)\,.$$
2 On suppose que f est deux fois différentiable. Montrer que f est convexe si et seulement si
$$\forall (x, h) \in \Omega \times E \ : \ D^2 f(x) \cdot (h, h) \geq 0$$

Exercice 68 Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, où Ω est un ouvert convexe d'un espace normé E. On suppose que f est convexe et différentiable. Montrer que si $a \in \Omega$ et si $Df(a) = 0$, alors $f(a)$ est un minimum global de f sur Ω.

Exercice 69 (différentiabilité des fonctions convexes)

Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe.

1 On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$, et $\|\ .\|_1$ la norme sur $\mathbb{R}^n$ définie par $\|x\|_1 = \sum_1^n |x_i|$. Montrer que si $a \in \mathbb{R}^n$ et si $u \in \mathbb{R}^n$ vérifie $\|u\|_1 = 1$, alors
$$\forall t \in [0; 1] \ : \ |f(a + tu) - f(a)| \leq \mathrm{Max}_{1 \leq i \leq n} |f(a \pm t e_i) - f(a)|\,.$$
2 Montrer que si f admet des dérivées partielles en un point $a \in \mathbb{R}^n$, alors f est différentiable en a. On pourra se ramener au cas où $\partial_i f(a) = 0$ pour tout $i \in \{1; \dots; n\}$ et utiliser **1**.
3 Soit A un borélien de $\mathbb{R}^n$. On suppose que pour tout $b \in \mathbb{R}^{n-1}$, l'ensemble
$$A_b = \{s \in \mathbb{R};\ (s, b) \in A\}$$
est de mesure nulle dans $\mathbb{R}$. Montrer que A est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^n$.
4 Montrer que f est différentiable en presque tout point $a \in \mathbb{R}^n$.

III Problèmes

Problème 1 (calcul des variations)

Dans tout le problème, $\mathcal{L} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$.

1 Soit $E = \mathcal{C}^1([0; 1])$, muni de sa norme naturelle. On définit $\Phi : E \longrightarrow \mathbb{R}$ par
$$\Phi(f) = \int_0^1 \mathcal{L}(t, f(t), f'(t))\, dt\ .$$
Montrer que Φ est différentiable et déterminer sa différentielle.
2 Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On pose
$$\mathcal{E}_{\alpha\beta} = \{f \in E;\ f(0) = \alpha\,, f(1) = \beta\}\,,\ \text{et}$$
$$E_0 = \{h \in E;\ h(0) = 0 = h(1)\}\,.$$

a Montrer que si une fonction $f \in \mathcal{E}_{\alpha\beta}$ minimise la restriction de Φ à $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$, alors $D\Phi(f) \cdot h = 0$ pour toute fonction $h \in E_0$.
b Que peut-on dire si $\mathcal{L}(t, u, v)$ est convexe par rapport à (u, v)?
3 On garde les notations de **2**.
a Montrer que si $u : [0; 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue et vérifie $\int_0^1 u(t)h'(t)\, dt = 0$ pour toute fonction $h \in E_0$, alors u est nécessairement constante.
b En déduire que si une fonction $f \in \mathcal{E}_{\alpha\beta}$ minimise la restriction de Φ à $\mathcal{E}_{\alpha\beta}$, alors f doit vérifier l'équation différentielle

$$\frac{d}{dt}\Big[\partial_3\mathcal{L}\left(t, f(t), f'(t)\right)\Big] = \partial_2\mathcal{L}\left(t, f(t), f'(t)\right) .$$

4 Étudier le cas où $\mathcal{L}(t, u, v) = \sqrt{1 + v^2}$. Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

Problème 2 (exponentielles)

Dans tout le problème, on note $\Phi : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ l'application exponentielle.

A Montrer que l'application Φ est de classe $\mathcal{C}^1$, et que si on munit $M_n(\mathbb{R})$ d'une norme opératorielle, alors $||D\Phi(A)|| \leq e^{||A||}$ pour toute matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

B1 Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$ fixée, calculer la dérivée de l'appplication $t \mapsto e^{tA}$.
B2 Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ vérifiant $AB = BA$. Dériver l'application $t \mapsto e^{A+tB}e^{-tB}$, et en déduire qu'on a $e^{A+B} = e^A e^B$.
B3 Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$.
a On définit $w : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $w(t) = \det\left(e^{tA}\right)$. Montrer que w est solution de l'équation différentielle $y' = \operatorname{Tr}(A)\, y$, et en déduire la formule $\det(e^A) = e^{\operatorname{Tr} A}$.
b Pouvait-on obtenir cette formule différemment?

C Montrer que si $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, alors

$$e^B - e^A = \int_0^1 e^{(1-s)B}(B - A)e^{sA} ds\,.$$

En déduire que la différentielle de l'application Φ est donnée par

$$D\Phi(A) \cdot H = \int_0^1 e^{(1-s)A} H e^{sA} ds\,.$$

D Soit $M : \mathbb{R} \to M_n(\mathbb{R})$ une application continue vérifiant $M(0) = Id$ et $M(s+t) = M(s)M(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$. Le but de cette partie est de montrer que M est nécessairement de la forme $M(t) = e^{tA}$, pour une certaine matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$.

1 Montrer que $M(t)$ est inversible pour tout $t \in \mathbb{R}$.
2 Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$, on a $\int_t^{t+\delta} M(u)\, du = M(t) \int_0^\delta M(s)\, ds$. En déduire que M est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3 Montrer qu'on a $M'(t) = A\, M(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, où $A = M'(0)$.

4 Conclure en considérant $N(t) = e^{-tA}M(t)$.

Problème 3 (lemme de Morse)

A Soient X, Y, Z trois espaces vectoriels de dimension finie. Soit également Ω un ouvert de Y, et soit $f : X \times \Omega \to Z$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Enfin, soit $x_0 \in X$. On suppose qu'il existe $y_0 \in \Omega$ tel que $f(x_0, y_0) = 0$ et que $\partial_2 f(x_0, y_0) : Y \to Z$ est surjective. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert U_0 de x_0 dans X et une application $\phi : U_0 \to \Omega$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que $f(x, \phi(x)) = 0$ pour tout $x \in U_0$.

B Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soient $p, q \in \mathbb{N}$ vérifiant $p+q = n$. On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques réelles de taille n, et $\mathcal{S}_{pq}$ l'ensemble des matrices $M \in \mathcal{S}$ possèdant p valeurs propres strictement positives et q valeurs propres strictement négatives. Enfin, on note I_{pq} la matrice diagonale dont les p premiers termes diagonaux sont égaux à 1 et les q derniers égaux à -1. On rappelle que pour toute matrice $M \in \mathcal{S}_{pq}$, il existe une matrice $N \in GL_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tNMN = I_{pq}$.
1 Soit $F : \mathcal{S} \times GL_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}$ définie par $F(M, N) = {}^tNMN$. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^\infty$, et déterminer la dimension du noyau de $\partial_2 F(M_0, N_0)$ pour $(M_0, N_0) \in \mathcal{S} \times GL_n(\mathbb{R})$.
2 Montrer que $\mathcal{S}_{pq}$ est un ouvert de $\mathcal{S}$ et que pour toute matrice $M_0 \in \mathcal{S}_{pq}$, il existe un voisinage ouvert $\mathcal{U}_0$ de M_0 dans $\mathcal{S}$ et une application $\Phi : \mathcal{U}_0 \to GL_n(\mathbb{R})$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ tels que ${}^t\Phi(M)M\Phi(M) = I_{pq}$ dans l'ouvert $\mathcal{U}_0$.

C Soit $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^3$, et soit $a \in \mathbb{R}^n$. On suppose qu'on a $D\varphi(a) = 0$ et que $D^2\varphi(a)$ est non dégénérée, de signature (p, q).
1 On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n. En utilisant la formule de Taylor, montrer qu'il existe une application $M : \mathbb{R}^n \to \mathcal{S}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(x) - \varphi(a) = \langle M(x)(x-a)\,, (x-a)\rangle$ et $M(a) = \frac{1}{2}H_\varphi(a)$ (matrice Hessienne de φ en a).
2a Montrer qu'au voisinage de a, on peut écrire $M(x) = {}^tA(x)I_{pq}A(x)$, où A est une application de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $GL_n(\mathbb{R})$.
2b On pose $\theta(x) = A(x)(x-a)$. Calculer $D\theta(a)$.
3 Montrer qu'il existe deux ouverts $W_a, W_0 \subset \mathbb{R}^n$, voisinages respectifs de a et 0, et un $\mathcal{C}^1$- difféomorphisme $u : W_a \to W_0$, avec $u(a) = 0$, vérifiant la propriété suivante : en posant $u(x) = (u_1, \ldots, u_n)$, on a

$$\varphi(x) - \varphi(a) = u_1^2 + \cdots + u_p^2 - u_{p+1}^2 - \cdots - u_n^2$$

pour tout $x \in W_a$. Ce résultat s'appelle le *lemme de Morse.*

D Soit $\Gamma = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 - y^2 + x^3y^5 = 0\}$.
1 Montrer que si $(x_0, y_0) \in \Gamma$ est différent de $(0, 0)$, alors il existe W voisinage de (x_0, y_0) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $W \cap \Gamma$ est une courbe simple de classe $\mathcal{C}^1$. Donner l'équation de la tangente à Γ en (x_0, y_0).

2a Montrer qu'il existe W voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$ tel que $W \cap \Gamma$ est la réunion de 2 courbes simples de classe $\mathcal{C}^1$ se coupant en $(0,0)$.
2b On note T_1 et T_2 les tangentes à C_1 et C_2 au point $(0,0)$. Déterminer une équation de $T_1 \cup T_2$.
3 Dessiner Γ.

Problème 4 (intégrales oscillantes)

Dans ce problème, on étudie le comportement asymptotique (quand le paramètre $\tau \in \mathbb{R}$ tend vers $+\infty$) d'intégrales du type

$$I(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau\varphi(x)} g(x)\, dx \ ,$$

où $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact.

A Dans cette partie, on suppose que φ ne possède pas de points critiques sur le support de g; autrement dit, $D\varphi(x) \neq 0$ en tout point $x \in \mathrm{supp}(g)$.
1 On pose $U = \{x \in \mathbb{R}^n;\ D\varphi(x) \neq 0\}$, et on définit un opérateur différentiel $L : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ par la formule

$$L(f) = \frac{1}{\|\nabla\varphi\|^2} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j} \ ,$$

où $\| \,.\, \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ et $\nabla\varphi = (\partial_1\varphi, \ldots, \partial_n\varphi)$. Calculer $L(\varphi)$, puis montrer que pour tout $\tau \in \mathbb{R}$, on a

$$L(e^{i\tau\varphi}) = i\tau\, e^{i\tau\varphi} \,.$$

2 On définit maintenant l'opérateur ${}^tL : \mathcal{C}^\infty(U) \to \mathcal{C}^\infty(U)$ par la formule

$${}^tL(f) = - \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{\|\nabla\varphi\|^2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\, f \right) \ .$$

Montrer que si $f \in \mathcal{C}^\infty(U)$, alors les fonctions $L(f)g$ et $f\,{}^tL(g)$, prolongées par 0 en dehors de U, sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ et intégrables sur $\mathbb{R}^n$, et montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} L(f)\; g = \int_{\mathbb{R}^n} f\;{}^tL(g) \,.$$

3 Déduire de **1** et **2** que pour tout entier $k \geq 0$, on a

$$I(\tau) = O\left(\frac{1}{\tau^k}\right)$$

quand τ tend vers $+\infty$.

B Dans cette partie, on établit un résultat préliminaire permettant de traiter **C**.
1 Soit $\varepsilon = \pm 1$ et soit $r > 0$.

a Calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\varepsilon u^2} du$, après avoir justifié son existence.
b Pour $\tau \in \mathbb{R}$, on pose $F(\tau) = \int_{-r}^{r} e^{i\varepsilon\tau s^2} ds$. Montrer que pour $\tau > 0$, on peut écrire

$$F(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\, e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}} + \Phi(\tau) \ ,$$

où la fonction Φ vérifie $|\Phi(\tau)| \le \frac{2}{r\tau}$.
2 Soit $h : [-r\,;r] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit $\varepsilon = \pm 1$. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_1(\tau) = \int_{-r}^{r} e^{i\varepsilon\tau s^2} h(s) ds \ .$$

Montrer qu'on peut écrire (pour $\tau > 0$)

$$F_1(\tau) = \sqrt{\frac{\pi}{\tau}}\, e^{i\varepsilon\frac{\pi}{4}} h(0) + \Phi_1(h,\tau),$$

où la fonction Φ_1 vérifie

$$|\Phi_1(h,\tau)| \le \frac{C_r \|h\|_{\mathcal{C}^2}}{\tau}$$

avec une constante C_r ne dépendant que de r et $||h||_{\mathcal{C}^2} = \mathrm{Max}\,(||h||_\infty, ||h'||_\infty, ||h''||_\infty)$.

3 Soit $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact, et soient $\varepsilon_1\,, \ldots, \varepsilon_n \in \{-1\,;1\}$. Pour $\tau \in \mathbb{R}$, on pose

$$F_n(\tau) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\tau(\varepsilon_1 x_1^2 + \cdots + \varepsilon_n x_n^2)}\, H(x)\, dx \ .$$

Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$F_n(\tau) = \left(\frac{\pi}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} e^{i\sigma_n\frac{\pi}{4}} H(0) + O\left(\tau^{-\frac{n+1}{2}}\right),$$

où $\sigma_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$.

C Dans cette partie, on suppose que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^3$ et possède exactement 1 point critique a sur le support de g, ce point critique étant de plus non dégénéré.
1 Montrer que pour tout W voisinage de a dans $\mathbb{R}^n$, on peut décomposer g sous la forme $g = g_1 + g_2$, où les g_i sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ à supports compacts, $a \in \mathrm{supp}(g_1) \subset W$ et φ ne possède aucun point critique sur le support de g_2.
2 On note $(p\,,q)$ la signature de la forme quadratique définie par $D^2\varphi(a)$, et Δ le déterminant de la matrice Hessienne $H_\varphi(a)$. En utilisant les question précédentes et le lemme de Morse, montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a

$$I(\tau) = \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{e^{i(\tau\varphi(a) + \frac{\pi}{4}(p-q))}}{|\Delta|^{\frac{1}{2}}}\, g(a) + O(\tau^{-\frac{n+1}{2}}) \ .$$

Problème 5 (un critère de surjectivité)

Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, on note C_f l'ensemble des points critiques de f, c'est-à-dire l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que $Df(x)$ n'est pas inversible. L'ensemble $f(C_f)$ s'appelle l'ensemble des *valeurs critiques* de f. L'ensemble $\mathrm{Reg}(f) := \mathbb{R}^n \setminus f(C_f)$ est l'ensemble des *valeurs régulières* de f. La terminologie n'est pas très bonne, car une valeur régulière n'est pas nécessairement une valeur prise par f...

A Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = +\infty$. Pour simplifier les notations, on pose $X = \mathrm{Reg}(f)$.
1a Montrer que pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, $f^{-1}(\{y\})$ est compact.
1b Montrer par l'absurde que si $y \in X$, alors $f^{-1}(\{y\})$ est fini. Dans la suite, on notera $n(y)$ le nombre d'éléments de $f^{-1}(\{y\})$.
2 Montrer que $\{y \in X;\ n(y) = 0\} = \mathbb{R}^n \backslash f(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3 Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
a En utilisant le théorème d'inversion locale, montrer que si $y \in X$ et si $n(y) = k$, alors il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^n$ et un voisinage ouvert V de y vérifiant les propriétés suivantes :

(1) $Df(x)$ est inversible pour tout $x \in U$;
(2) pour tout $y' \in V$, l'équation $f(x) = y'$ admet exactement k solutions dans U.

b Avec les notations de **a**, montrer par l'absurde que si y' est assez proche de y, alors toutes les solutions de l'équation $f(x) = y'$ appartiennent à U.
c Conclure que $\{y \in X;\ n(y) = k\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.
3 Montrer que si X est connexe, alors l'application n est constante sur X.

B Démontrer le résultat suivant. *Soit* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *une application de classe* $\mathcal{C}^1$ *vérifiant* $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = +\infty$. *Si* $\mathrm{Reg}(f)$ *est connexe et* $\mathrm{Reg}(f) \cap f(\mathbb{R}^n) \neq \emptyset$, *alors* f *est surjective.*

C Démontrer le théorème de d'Alembert-Gauss.

Problème 6 (théorème du point fixe de Brouwer)

On note B la boule unité ouverte euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Le but de l'exercice est de démontrer le théorème de Brouwer : *toute application continue* $f : \overline{B} \to \overline{B}$ *possède un point fixe.*

A1 Soit $f : \overline{B} \to \overline{B}$ continue. En utilisant le théorème de Stone-Weierestrass, montrer que pour tout $\varepsilon >$, il existe une fonction polynomiale $Q_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ telle que $Q_\varepsilon(\overline{B}) \subset B$ et

$$\sup_{x\in B} \|f(x) - Q_\varepsilon(x)\| \leq \varepsilon\,.$$

A2 En déduire que le théorème de Brouwer est équivalent à l'énoncé suivant: *toute application* $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ *telle que* $f(\overline{B}) \subset B$ *possède un point fixe dans* $\overline{B}$.

B1 Soit $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'on a $g(\overline{B}) \subset \overline{B}$ et $g(\xi) = \xi$ pour tout $\xi \in \partial B$. Pour $t \in [0; 1]$, on définit $v_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par

$$v_t(x) = (1-t)x + tg(x)\,.$$

a Montrer qu'on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $t \leq \varepsilon_0$, l'application v_t est injective sur $\overline{B}$ et vérifie $J_{v_t}(x) > 0$ sur $\overline{B}$, où la lettre J désigne le déterminant jacobien.
b Montrer qu'on a $v_t(B) \subset B$ pour tout $t \in [0; 1[$, et que si $t \leq \varepsilon_0$, alors v_t est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de B sur B. On pourra vérifier que $v_t(B)$ est ouvert et fermé dans B.
c Soit m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$. Montrer que la fonction $t \mapsto \int_B J_{v_t}(x)\, dm(x)$ est polynomiale sur $\mathbb{R}$.
d Déduire des questions précédentes que pour tout $t \in [0; 1]$, on a

$$\int_B J_{v_t(x)}\, dm(x) = m(B)\,.$$

B2 Montrer que si $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $V \subset \mathbb{R}^n$ est un ouvert tel que $g(V) \subset \partial B$, alors $J_g(x) \equiv 0$ dans V.
B3 Montrer qu'il n'existe pas d'application $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ vérifiant $g(\overline{B}) \subset \partial B$ et $g(\xi) = \xi$ pour tout $\xi \in \partial B$.

B Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifiant $\|f(x)\| < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
1 On suppose que f ne possède pas de point fixe. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note $g(x)$ le point d'intersection de la demi-droite $\Delta_x = [f(x); x)$ avec ∂B. Justifier la définition, et montrer que l'application g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^n$.
2 Montrer que f possède un point fixe.

C Conclure.

Problème 7 (théorème de Borel)

1 Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, à support contenu dans $[-1; 1]$ et identiquement égale à 1 au voisinage de 0. Soient également n, i deux entiers positifs tels que $n \geq 2i$, et soit $\varepsilon \in]0\,; 1]$. On pose $\psi(x) = \dfrac{x^n}{n!}\,\varphi(x/\varepsilon)$.
a Calculer $\psi^k(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
b Montrer qu'il existe une constante C_i, dépendant de i mais indépendante de n et ε, telle que $\|\psi^{(i)}\|_\infty \leq C_i\, \varepsilon^{n/2}$.
2 Soit (a_n) une suite de nombres complexes. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ telle que $f^{(n)}(0) = a_n$ pour tout $n \geq 0$.

Problème 8 (zéros des fonctions $\mathcal{C}^\infty$)

1 Soit (φ_k) une suite de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^n$, à supports compacts. Montrer que si les $\lambda_k > 0$ sont choisis suffisamment petits, alors la formule $f(x) = \sum_0^\infty \lambda_k \varphi_k(x)$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2 Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}^n$ est réunion dénombrable de boules ouvertes.
3 Montrer que si $B \subset \mathbb{R}^n$ est une boule ouverte, alors on peut trouver une fonction positive $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\varphi(x) > 0$ pour tout $x \in B$ et $\varphi \equiv 0$ en dehors de B.
4 Soit F un fermé de $\mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe une fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $F = f^{-1}(0)$.

Problème 9 (splines)

Dans tout le problème, $\sigma = (x_0, \ldots, x_N)$ est une subdivision d'un intervalle $[a; b]$. On note $\mathcal{S}_\sigma$ l'ensemble des fonctions $\varphi : [a; b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ dont la restriction à chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$ est polynomiales de degré au plus 3.

A1 Montrer que $\mathcal{S}_\sigma$ est un espace vectoriel de degré $N + 3$.
A2 Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}_\sigma$ vérifie $\varphi(x_i) = 0$ pour tout $i \in \{0; \ldots n\}$, alors

$$\int_a^b \varphi''(t)^2 dt = \varphi'(b)\varphi''(b) - \varphi'(a)\varphi''(a)\,.$$

On pourra commencer par vérifier qu'on a $\int_{x_i}^{x_{i+1}} \varphi'(t)\varphi'''(t)\,dt = 0$ pour tout $i < N$.
A3 Déduire des questions précédentes que si $y_0, \ldots, y_N, y'_0, y'_N$ sont $N+3$ réels donnés, alors il existe une unique $\varphi \in \mathcal{S}_\sigma$ vérifiant $\varphi(x_i) = y_i$ pour tout $i \in \{0; \ldots; N\}$, $\varphi'(a) = y'_0$ et $\varphi'(b) = y'_N$.

B Soit $g : [0; 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $g(0) = 0 = g(1)$. Montrer qu'on a $\|g\|_\infty \leq \|g''\|_{L^1}$.

C Soit $f : [a; b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, et soit φ l'unique fonction de $\mathcal{S}_\sigma$ vérifiant $\varphi(x_i) = f(x_i)$ pour tout i, $\varphi'(a) = f'(a)$ et $\varphi'(b) = b$.
a Montrer qu'on a

$$\|f''\|_{L^2}^2 = \|(f - \varphi)''\|_{L^2}^2 + \|\varphi''\|_{L^2}^2\,.$$

On pourra intégrer $(f'' - \varphi'')\varphi''$ par parties sur chaque intervalle $[x_i; x_{i+1}]$.
b Montrer que pour tout $i \in \{0; \ldots; n-1\}$, on a

$$\sup_{t \in [x_i; x_{i+1}]} |(f - \varphi)(t)| \leq \|(f - \varphi)''\|_{L^2}\, h_i^{3/2}\,.$$

c Conclure qu'on a

$$\|f - \varphi\|_\infty \leq \|f''\|_{L^2}\, h_\sigma^{3/2},$$

où $h_\sigma = \max\{x_{i+1} - x_i;\ 0 \leq i < N\}$ est le pas de la subdivision σ.

Problème 10(théorème de Gleaser)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^2$. On note $Z(f)$ l'ensemble $\{x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0\}$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *la fonction $\sqrt{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f'' s'annule en tout point de $Z(f)$*. Dans toute la suite, on pose $g = \sqrt{f}$.

1a Constater que g est continue sur $\mathbb{R}$, et de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}\backslash Z(f)$.
1b Si $x_0 \in Z(f)$, quelle est la valeur de $f'(x_0)$?
2 Soit $x_0 \in Z(f)$. A l'aide d'un développement limité, montrer que g est dérivable en x_0 si et seulement si $f''(x_0) = 0$, et qu'on a alors $g'(x_0) = 0$.
3 Soit $x_0 \in Z(f)$ tel que $f''(x_0) = 0$. Soit également $\alpha > 0$. On pose $I_\alpha = [x_0 - \alpha; x_0 + \alpha]$ et $M_\alpha = \sup\{|f''(t)|;\ |t - x_0| \leq 2\alpha\}$.
a A l'aide de la formule de Taylor, montrer que si $x \in I_\alpha$, alors

$$\forall h \in [-\alpha; \alpha] \qquad \frac{M_\alpha}{2}\, h^2 + f'(x)h + f(x) \geq 0\ .$$

b On suppose $M_\alpha > 0$. Montrer que pour $x \in I_\alpha$ fixé, le point où le trinôme $\frac{M_\alpha}{2}h^2 + f'(x)h + f(x)$ atteint son minimum appartient à l'intervalle $[-\alpha; \alpha]$.
c Déduire de **a** et **b** que si $x \in I_\alpha$, alors $|f'(x)| \leq \sqrt{2M_\alpha f(x)}$.
4 Conclure.

Problème 11 (extrema liés sans fonctions implicites)

Le but du problème est de démontrer le théorème des extrema liés sans utiliser le théorème des fonctions implicites.

A Soit E un espace vectoriel normé, et soient $u_1, \ldots, u_k \in E$ linéairement indépendants. Soient également $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E^k ($u^n = (u_1^n, \ldots, u_k^n)$) et soit (x^n) une suite d'éléments de E, avec $x_n \in \text{Vect}\,\{u_1^n; \ldots; u_k^n\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que la suite (x^n) converge vers $x \in E$, et que $u_i^n \to u_i$ pour tout $i \in \{1; \ldots; k\}$. Montrer que $x \in \text{Vect}\,\{u_1; \ldots; u_k\}$.

B Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^d$, et soient $g_1, \ldots, g_k$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, à valeurs réelles. On pose

$$\Sigma = \{x \in \Omega;\ g_1(x) = \cdots = g_k(x) = 0\}\ .$$

Enfin, soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que la restriction de f à Σ admet un minimum local en un point $a \in \Sigma$, autrement dit qu'il existe $r_0 > 0$ tel que $B(a, r_0) \subset \Omega$ et $f(a) \leq f(x)$ pour tout $x \in \Sigma \cap B(a, r_0)$.

1 Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = f(x) + n \sum_{i=1}^{k} g_i(x)^2 + \|x - a\|^2$$

où $\|\ .\ \|$ est la norme euclidienne.

a Soit $r \in]0; r_0[$. Montrer que la restriction de f à $\overline{B}(a,r)$ atteint sa borne inférieure en un point a_n.

b Montrer que la suite (a_n) converge vers a, et qu'on a $\nabla f_n(a_n) = 0$ pour tout n assez grand.

2 On supppose que les vecteurs $\nabla g_1(a), \ldots, \nabla g_k(a)$ sont linéairement indépendants. Montrer que $\nabla f(a)$ est combinaison linéaire de $\nabla g_1(a), \ldots, \nabla g_k(a)$.

Problème 12 (inégalités de Kolmogorov)

Dans tout le problème, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$M_n = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f^n(x)| \, .$$

A1 Montrer que pour tous $x, h \in \mathbb{R}$, on a $|f(x+h) - f(x-h) - 2hf'(x)| \leq M_2 h^2$ et, si $h > 0$:

$$|f'(x)| \leq \frac{M_2 h}{2} + \frac{M_0}{h} \, .$$

A2 Montrer qu'on a $M_1 \leq \sqrt{2 M_0 M_2}$.

B Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall k \in \{0; \ldots ; n\} \quad : \quad M_k \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \, M_0^{1-\frac{k}{n}} \, M_n^{\frac{k}{n}} \, .$$

Problème 13 (differentiabilite de la distance à un fermé)

Dans tout le problème, F est un fermé de $\mathbb{R}^n$ et on pose $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus F$. On définit $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}$ par

$$\Phi(x) = d(x,F)^2 = \inf\{\|x - f\|^2; \ f \in F\} \, ,$$

où $\| \, . \, \|$ est la norme euclidienne.

1 Montrer que pour tout $x \in \Omega$, il existe au moins un $f \in F$ tel que $\|x - f\| = d(x, F)$. Dans la suite, on pose

$$A(x) = \{f \in F; \ \|x - f\| = d(x,F)\} \, .$$

2 Soient $x \in \Omega$ et h tel que $x + h \in \Omega$. Montrer que pour tout $f \in A(x)$, on a

$$\Phi(x+h) - \Phi(x) \leq 2\langle x - f, h\rangle + \|h\|^2 \, .$$

3 Soit $x_0 \in \Omega$. Montrer que pour tout $f \in A(x_0)$ et pour tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a

$$\limsup_{t \to 0^+} \frac{\Phi(x_0 + tu) - \Phi(x_0)}{t} \leq 2\langle x_0 - f, u\rangle \, .$$

En déduire que si Φ est différentiable au point x_0, alors $A(x_0)$ est un singleton $\{f_0\}$, et on a $\nabla\Phi(x_0) = 2(x_0 - f_0)$.

4 Soit $x \in \Omega$. On suppose que $A(x_0)$ est un singleton f_0.

a Montrer qu'on peut choisir pour tout h vérifiant $x_0 + h \in \Omega$, un point $f_h \in A(x_0 + h)$ de sorte que $\|f_h - f_0\| \to 0$ quand $h \to 0$. On pourra commencer par observer que si on pose $F_\delta = \{f \in F;\ \|f - f_0\| \geq \delta\}$, alors $\Phi(x_0) < d(x_0, F_\delta)^2$ pour tout $\delta > 0$, puis raisonner par l'absurde.
b Montrer que Φ est différentiable en x_0.

Problème 14 (méthode du gradient)

Soit $J : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall u, v \in \mathbb{R}^n \quad : \quad \langle \nabla J(v) - \nabla J(u), v - u \rangle \geq c\, \|v - u\|^2 .$$

1 Montrer que pour $u, v \in \mathbb{R}^n$, on a

$$J(v) \geq J(u) + \langle \nabla J(u), v - u \rangle + \frac{c}{2}\, \|v - u\|^2 .$$

2 Montrer que J atteint sa borne inférieure en un unique point $a \in \mathbb{R}^n$, et que a est le seul point critique de J.

3 Soit $u_0 \in \mathbb{R}^n$. On définit par récurrence une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ en posant

$$u_{k+1} = u_k - \rho_k\, \nabla J(u_k)\,,$$

où ρ_k est défini par

$$J(u_k - \rho_k\, \nabla J(u_k)) = \inf\{J(u_k - \rho\, \nabla J(u_k));\ \rho \in \mathbb{R}\}\,.$$

a Justifier la définition.
b Montrer qu'on a $\langle \nabla J(u_{k+1}), \nabla J(u_k) \rangle = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et

$$J(u_k) - J(u_{k+1}) \geq \frac{c}{2}\, \|u_{k+1} - u_k\|^2 .$$

c Déduire de **b** qu'on a $\lim_{k\to\infty} \|u_{k+1} - u_k\| = 0$ et que la suite (u_k) est bornée. En déduire qu'on a $\lim_{k\to\infty} \|\nabla J(u_k) - \nabla J(u_{k+1})\| = 0$, puis montrer que $\|\nabla J(u_k)\| \to 0$.
d Montrer que la suite (u_k) converge vers a.

Problème 15 (une caractérisation des polynômes)

A Soit $g : [A; B] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que g n'est pas polynomiale.

1 Soit $I \subset [A; B]$ un intervalle compact non trivial. On suppose que $g_{|I}$ est polynomiale.

a Montrer qu'il existe un intervalle fermé $J \subset [A; B]$ contenant I tel que $g_{|J}$ est polynomiale, et g n'est polynomiale sur aucun intervalle strictement plus grand que J.

b On suppose par exemple que $b = \sup J < B$. Montrer que pour tout $\beta \in]b; B]$, on peut trouver α tel que $b < \alpha < \beta$ et $g_{|[\alpha;\beta]}$ n'est pas polynomiale.

2 Montrer qu'il existe un intervalle compact non trivial $K \subset [A; B]$ tel que g ne s'annule pas sur K et $g_{|K}$ n'est pas polynomiale.

B Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que si f n'est pas polynomiale, alors on peut trouver $x \in \mathbb{R}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ f^{(n)}(x) \neq 0$. Autrement dit, si pour tout $x \in \mathbb{R}$ on peut trouver n tel que $f^{(n)}(x) \neq 0$, alors f est polynomiale.

Problème 16 Dans tout le problème, Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$

A Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que pour tout point $p = (p_1, \dots, p_n) \in \Omega$, il existe des fonctions $g_1, \dots, g_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telles que

$$f(x) \equiv f(p) + \sum_1^n (x_i - p_i) g_i(x)$$

au voisinage de p. Pour $i \leq n$, exprimer $g_i(p)$ à l'aide de $\partial_i f(p)$.

B On dit qu'une application linéaire $L : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est un *opérateur de dérivation* s'il existe des fonction $a_1, \dots, a_n \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ telles que

$$L(f) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

1 Montrer que si $L : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est un opérateur de dérivation, alors

$$L(fg) = L(f)g + fL(g) \tag{1}$$

pour toutes $f, g \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$.

2 Le but de cette question est d'établir la réciproque de **1**. On fixe donc une application linéaire $L : \mathcal{C}^\infty(\Omega) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ vérifiant (1), et on cherche $a_1, \dots, a_n$ telles que $L = \sum a_i \, \partial_i$.

a Montrer qu'on a $L(\mathbf{c}) = 0$ pour toute fonction constante $\mathbf{c}$.

b En utilisant une fonction-plateau bien choisie, montrer que si $h \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ est identiquement nulle sur un ouvert $W \subset \Omega$, alors $L(h) \equiv 0$ dans W.

c Conclure en utilisant **A**.

Problème 17 (point de Toricelli)

Dans tout le problème, ABC est un triangle (dans le plan euclidien) dont les trois angles sont de mesure $< 2\pi/3$. Si M est un point du plan, on pose $f(M) = MA + MB + MC$.

1 Montrer que la fonction f atteint sa borne inférieure.

2a On note 2α la mesure de l'angle $\widehat{A}$ dans le triangle ABC. Si M est un point de la bissectrice intérieure de $\widehat{A}$, exprimer MB en fonction de AB et AM, et MC en fonction de AC et AM.
2b En déduire, à l'aide d'un développement limité, que le point A ne minimise pas la fonction f.
3 Montrer qu'il existe un unique point M minimisant $MA+MB+MC$, caractérisé par la propriété suivante : les 3 angles $\widehat{AMB}$, $\widehat{BMC}$ et $\widehat{CMA}$ ont pour mesure $2\pi/3$.