

Espaces vectoriels normés et topologie

Licence de Mathématiques, 3ème année

Table des matières

Chapitre 1. Espaces métriques et espaces vectoriels normés	5
1. Distances et normes	5
2. Normes équivalentes	12
3. Convergence, continuité	15
4. Application linéaires continues	21
Chapitre 2. Vocabulaire topologique	27
1. Ouverts et fermés	27
2. Intérieur, adhérence, frontière	33
3. Sous-espaces et produits	38
4. Propriétés de “séparation”	40
5. Parties denses	41
Chapitre 3. Compacité	45
1. Sous-suites et valeurs d’adhérence	45
2. Espaces métriques compacts	47
3. Image continue d’un compact	51
4. Continuité uniforme	53
5. Propriété de Borel-Lebesgue	54
6. Produits infinis de compacts ; procédé diagonal	56
Chapitre 4. Espaces complets	57
1. Définitions et exemples	57
2. Fermés emboîtés	61
3. Séries normalement convergentes	62
4. Prolongement des applications uniformément continues	65
5. Complété d’un espace métrique	66
6. Complétude et compacité	67
7. Théorème du point fixe	68
8. Théorème de Baire	70
9. Trois applications “non triviales”	72
Chapitre 5. Connexité	77
1. Espaces métriques connexes	77
2. Connexité et applications continues	80
3. Connexité par arcs	81
4. Petites propriétés de stabilité	86
5. Composantes connexes	88
6. Quelques “petites” applications	90

Espaces métriques et espaces vectoriels normés

1. Distances et normes

1.1. Distances, espaces métriques. Étant donné deux objets mathématiques u et v de même nature (deux nombres, deux matrices, deux fonctions, ...), il est très naturel de se demander si u et v sont “proches” ou “éloignés” l’un de l’autre en un certain sens, et de vouloir mesurer leur degré de proximité par un nombre $d(u, v)$ qu’on appellerait la “distance entre u et v ”. Cela conduit à la définition très générale suivante.

DÉFINITION 1.1. Soit E un ensemble non-vide. Une **distance** sur E est une fonction $d : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant les propriétés suivantes :

- (o) $d(u, v) \geq 0$ pour tous $u, v \in E$, et $d(u, u) = 0$;
- (i) $d(u, v) = 0$ seulement pour $u = v$ (**séparation des points**) ;
- (ii) $d(u, v) = d(v, u)$ pour tous $u, v \in E$ (**symétrie**) ;
- (iii) $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$ pour tous $u, v, w \in E$ (**inégalité triangulaire**).

EXEMPLE 1. On définit une distance sur \mathbb{R} en posant $d(u, v) := |v - u|$. Cette distance s’appelle la *distance usuelle* sur \mathbb{R} .

Démonstration. La propriété (o) est évidente. La séparation des points (i) vient du fait que $|x| = 0$ seulement pour $x = 0$. La symétrie vient du fait que $|x| = |-x|$ pour tout $x \in \mathbb{R}$: $d(v, u) = |u - v| = |-(v - u)| = |v - u| = d(u, v)$. Et l’inégalité triangulaire vient du fait que $|x + y| \leq |x| + |y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $d(u, w) = |w - u| = |(w - v) + (v - u)| \leq |v - u| + |v - u| = d(u, v) + d(v, w)$. \square

Exercice. Soit E un ensemble quelconque, et soit $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$. À quelle condition sur ϕ définit-on une distance sur E en posant $d(u, v) := |\phi(v) - \phi(u)|$?

EXEMPLE 2. Soit $E := \mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire usuel. On définit une distance sur E en notant $d(u, v)$ la longueur du segment $[u, v]$. L’inégalité triangulaire pour cette distance signifie que “le plus court chemin entre deux points est la ligne droite”.

EXEMPLE 2’. On définit une distance sur \mathbb{C} en posant $d(u, v) := |v - u|$, où $|z|$ est le module du nombre complexe z . Cette distance s’appelle la *distance usuelle* sur \mathbb{C} .

Démonstration. En identifiant \mathbb{C} à \mathbb{R}^2 , c’est la distance de l’Exemple 2. \square

EXEMPLE 3. Soit E un ensemble quelconque (non-vide). On définit une distance sur E en posant

$$d(u, v) := \begin{cases} 0 & \text{si } u = v \\ 1 & \text{si } u \neq v \end{cases}$$

On dit que d est la **distance discrète** sur E .

Démonstration. Seule l'inégalité triangulaire demande une preuve; soient donc $u, v, w \in E$. Si $u = w$, alors $d(u, w) = 0 \leq d(u, v) + d(v, w)$. Si $u \neq w$, alors ou bien $u \neq v$ et donc $d(u, v) = 1$, ou bien $v \neq w$ et donc $d(v, w) = 1$. Dans les 2 cas, $d(u, w) = 1 \leq \max(d(u, v), d(v, w)) \leq d(u, v) + d(v, w)$. \square

Remarque. La distance discrète est importante car elle fournit souvent un contre-exemple facile lorsqu'on se demande si une propriété générale est vraie pour n'importe quelle distance.

La remarque suivante est très souvent utile.

REMARQUE 1.2. Si d est une distance sur un ensemble E , alors on a pour tous $u, v, w \in E$:

$$d(u, v) \geq |d(u, w) - d(w, v)|.$$

Cette inégalité est parfois appelée l'**inégalité triangulaire réarrangée**.

Démonstration. On a $d(u, w) - d(w, v) = d(u, w) - d(v, w) \leq d(u, v)$ d'après l'inégalité triangulaire; et échangeant les rôles de u et v , on obtient $d(v, w) - d(w, u) \leq d(v, u) = d(u, v)$. D'où le résultat. \square

DÉFINITION 1.3. Un **espace métrique** est un ensemble non-vide E muni d'une distance d .

CONVENTION. "Par défaut", toutes les distances s'appelleront d , même quand on considérera plusieurs espaces métriques E, F, G, \dots en même temps. S'il y a vraiment lieu de distinguer les distances sur des espaces métriques différents, on écrira par exemple d_E, d_F, d_G, \dots

1.2. Normes, espaces vectoriels normés.

DÉFINITION 1.4. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Une **norme** sur E est une fonction de E dans \mathbb{R} , notée en général $u \mapsto \|u\|$, vérifiant les propriétés suivantes.

- (o) $\|u\| \geq 0$ pour tout $u \in E$, et $\|0\| = 0$;
- (i) $\|u\| = 0$ seulement pour $u = 0$;
- (ii) $\|\lambda u\| = |\lambda| \|u\|$ pour tout $u \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (**homogénéité**);
- (iii) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ pour tous $u, v \in E$ (**inégalité triangulaire**).

Il y a une similarité évidente entre la définition d'une norme et celle d'une distance. Le lien entre les deux notions est donné par le fait suivant.

FAIT 1.5. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur un espace vectoriel E , on définit une distance sur E en posant $d(u, v) := \|v - u\|$. On dit que d est la **distance associée à la norme** $\|\cdot\|$.

Démonstration. C'est exactement la même que celle donnée pour la distance usuelle $d(u, v) = |v - u|$ sur \mathbb{R} . (Pour la symétrie de d , on n'a pas besoin de toute la force de la propriété d'homogénéité (ii) : il suffit de savoir que $\|-u\| = \|u\|$ pour tout $u \in E$.) \square

EXEMPLE 1. La valeur absolue est une norme sur \mathbb{R} , et le module est une norme sur \mathbb{C} . Les distances associées sont les distances usuelles.

EXEMPLE 2. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un *produit scalaire* sur E (cf le cours “PSFQ” de 2ème année). On définit une norme sur E en posant pour $u \in E$:

$$\|u\| := \sqrt{\langle u, u \rangle};$$

autrement dit

$$\|u\|^2 = \langle u, u \rangle.$$

La norme $\|\cdot\|$ et le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sont reliés par la très importante **inégalité de Cauchy-Schwarz** : si $u, v \in E$, alors

$$|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \|v\|.$$

CAS PARTICULIER. Soit $N \in \mathbb{N}^*$. La **norme euclidienne** sur $E := \mathbb{R}^N$ est la norme associée au produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^N , qui est défini par

$$\langle u, v \rangle = u_1 v_1 + \cdots + u_N v_N.$$

Pour $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$, on a donc

$$\|u\| = \sqrt{u_1^2 + \cdots + u_N^2} = \left(\sum_{j=1}^N u_j^2 \right)^{1/2};$$

et l’inégalité de Cauchy-Schwarz s’écrit

$$\sum_{j=1}^N |u_j v_j| \leq \left(\sum_{j=1}^N u_j^2 \right)^{1/2}.$$

Pour $N = 1$, on retrouve la valeur absolue sur $\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$. Pour $N = 2$, on retrouve le module sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

Remarque. Dans la suite, la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N sera souvent notée $\|\cdot\|_2$.

EXEMPLE 3. On définit des normes sur \mathbb{K}^N en posant, pour $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{K}^N$:

$$\|u\|_1 := \sum_{j=1}^N |u_j| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty := \max(|u_1|, \dots, |u_N|).$$

Démonstration. C’est un **exo** à savoir faire instantanément. □

EXEMPLE 4. Soit I un ensemble quelconque. On note $\ell^\infty(I, \mathbb{K})$, ou simplement $\ell^\infty(I)$, l’espace vectoriel constitué par toutes les fonctions *bornées* $u : I \rightarrow \mathbb{K}$. On définit une norme sur $\ell^\infty(I)$ en posant

$$\|u\|_\infty := \sup \{|u(t)|; t \in I\}.$$

Démonstration. C’est à nouveau un **exo** à savoir faire les yeux fermés. (Être un peu soigneux pour l’inégalité triangulaire.) □

Remarque. Les cas particuliers suivants sont importants :

- si $I = \llbracket 1, N \rrbracket$, alors $\ell^\infty(I)$ s’identifie à \mathbb{K}^N (une fonction $u : \llbracket 1, N \rrbracket \rightarrow \mathbb{K}$ s’identifie au vecteur $(u(1), \dots, u(N)) \in \mathbb{K}^N$), et $\|u\|_\infty = \max(|u_1|, \dots, |u_N|)$ pour $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{K}^N$;
- si $I = \mathbb{N}$, alors $\ell^\infty(I)$ est l’ensemble de toutes les *suites* bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d’éléments de \mathbb{K} ; et pour $u = (u_n) \in \ell^\infty(\mathbb{N})$ on a $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

EXEMPLE 5. Si E est un espace vectoriel non réduit à $\{0\}$, la distance discrète sur E n'est pas associée à une norme.

Démonstration. Notons d la distance discrète sur E . Soit e un vecteur non nul de E . Alors $d(e, 0) = 1$, et aussi $d(2e, 0) = 1$ puisque $2e \neq 0$; mais si d était associée à une norme $\|\cdot\|$, on devrait avoir $d(2e, 0) = \|2e - 0\| = \|2e\| = 2\|e\| = 2d(e, 0) = 2$. \square

Les deux inégalités suivantes sont importantes.

REMARQUE 1. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur un espace vectoriel E , alors on a pour tous $u, v \in E$:

$$\|u - v\| \leq \|u\| + \|v\| \quad \text{et} \quad \|v - u\| \geq \left| \|v\| - \|u\| \right|.$$

Démonstration. En notant d la distance associée à $\|\cdot\|$, la première inégalité est simplement l'inégalité triangulaire $d(v, u) = d(u, v) \leq d(u, 0) + d(0, v)$; et la deuxième est l'inégalité triangulaire réarrangée $d(u, v) \geq |d(u, 0) - d(0, v)|$. \square

Il est également très important de retenir qu'on peut toujours "normaliser" un vecteur non nul de E :

REMARQUE 2. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur E , on a pour tout $u \neq 0$ dans E :

$$\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1.$$

DÉFINITION 1.6. Un **espace vectoriel normé** est un espace vectoriel E muni d'une norme $\|\cdot\|$. On écrira souvent "evn" au lieu de "espace vectoriel normé".

Remarque. Un espace vectoriel normé sera toujours implicitement muni de la distance associée à sa norme. Un evn est donc en particulier un espace métrique!

CONVENTION. "Par défaut", toutes les normes s'appelleront $\|\cdot\|$; et s'il y a lieu de différencier explicitement les normes sur des evn E, F, G, \dots , on écrira par exemple $\|\cdot\|_E, \|\cdot\|_F, \|\cdot\|_G, \dots$.

1.3. Sous-espaces et produits. Les remarques qui suivent sont à peu près évidentes, mais cependant très importantes.

REMARQUE 1. Si (E, d) est un espace métrique et si $A \subseteq E$, alors la restriction de d à $A \times A$ est une distance sur A , qu'on appelle la distance **induite** par d sur A . Donc, A est lui même un espace métrique pour son propre compte.

REMARQUE 1'. De même, si E est un espace vectoriel normé, alors tout sous-espace vectoriel $F \subseteq E$ devient un espace vectoriel normé lorsqu'on le munit de la norme induite par celle de E .

Exemple. Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , avec $a < b$. Notons $\mathcal{C}([a, b])$ l'ensemble des fonctions continues $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$. Comme toute fonction continue sur $[a, b]$ est bornée, $\mathcal{C}([a, b])$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty([a, b])$, et donc un espace vectoriel normé quand on le munit de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

REMARQUE 2. Soient $(E_1, \|\cdot\|_{E_1}), \dots, (E_N, \|\cdot\|_{E_N})$ des espaces vectoriels normés, et soit $E := E_1 \times \dots \times E_N$. On définit une norme sur E en posant, pour $u = (u_1, \dots, u_N) \in E = E_1 \times \dots \times E_N$:

$$\|u\| := \max(\|u_1\|_{E_1}, \dots, \|u_N\|_{E_N}).$$

On dit que cette norme est la **norme produit** associée aux normes $\|\cdot\|_{E_1}, \dots, \|\cdot\|_{E_N}$.

Exemple. La norme produit sur $\mathbb{R}^N = \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ est la norme $\| \cdot \|_\infty$.

REMARQUE 2'. De même, si $(E_1, d_{E_1}), \dots, (E_N, d_{E_N})$ sont des espaces métriques, on définit une distance sur $E := E_1 \times \cdots \times E_N$ en posant pour $u = (u_1, \dots, u_N)$ et $v = (v_1, \dots, v_N)$ dans E :

$$d(u, v) := \max(d_{E_1}(u_1, v_1), \dots, d_{E_N}(u_N, v_N)).$$

Cette distance est la **distance produit** associée aux distances d_{E_1}, \dots, d_{E_N} . Si les E_i sont des espaces vectoriels et si les distances d_{E_i} proviennent de normes, alors d provient de la norme produit associée (**exo**).

CONVENTION. Chaque fois qu'on manipulera un produit d'espaces métriques ou d'evn, on supposera implicitement qu'il est muni de la distance produit ou de la norme produit.

1.4. Vocabulaire géométrique. Dans ce qui suit, (E, d) est un espace métrique.

1.4.1. **Boules.** Si $a \in E$ et $r \geq 0$, on pose

$$B(a, r) := \{u \in E; d(u, a) < r\} \quad \text{et} \quad \overline{B}(a, r) := \{u \in E; d(u, a) \leq r\}.$$

On dit que $B(a, r)$ est la **boule ouverte** de centre a et de rayon r , et que $\overline{B}(a, r)$ est la **boule fermée** de centre a et de rayon r .

Remarque. Le cas $r = 0$ est un peu particulier : on a $B(a, 0) = \emptyset$ et $\overline{B}(a, 0) = \{a\}$.

EXEMPLE 1. Si $E = \mathbb{R}$ muni de la distance usuelle, alors $B(a, r)$ est l'intervalle ouvert $]a - r, a + r[$, et $\overline{B}(a, r)$ est l'intervalle fermé $[a - r, a + r]$.

EXEMPLE 2. Si $E = \mathbb{C}$ muni de la distance usuelle, alors $B(a, r)$ et $\overline{B}(a, r)$ sont des *disques* centrés en a et de rayon r . Plus précisément, $B(a, r)$ est le disque sans sa circonférence, et $\overline{B}(a, r)$ est le disque avec sa circonférence.

RAPPEL. Soit E un espace vectoriel. Un ensemble $C \subseteq E$ est dit **convexe** si, pour tous $u, v \in C$, le segment $[u, v]$ est entièrement contenu dans C ; autrement dit, si

$$\forall u, v \in C : \forall \lambda \in [0, 1] : (1 - \lambda)u + \lambda v \in C.$$

PROPOSITION 1.7. *Si E est un espace vectoriel normé, alors toute boule de E est un ensemble convexe.*

Démonstration. Montrons le pour une boule fermée $B = \overline{B}(a, r)$. Soient $u, v \in B$ et soit $\lambda \in [0, 1]$. On a

$$\begin{aligned} \|(1 - \lambda)u + \lambda v - a\| &= \|(1 - \lambda)(u - a) + \lambda(v - a)\| && \text{car } a = (1 - \lambda)a + \lambda a \\ &\leq \|(1 - \lambda)(u - a)\| + \|\lambda(v - a)\| \\ &= (1 - \lambda)\|u - a\| + \lambda\|v - a\| && \text{car } 1 - \lambda \geq 0 \text{ et } \lambda \geq 0 \\ &\leq (1 - \lambda)r + \lambda r = r. \end{aligned}$$

Donc $(1 - \lambda)u + \lambda v \in B$. □

Exercice. Dessiner la boule $B(0, r)$ dans $E = \mathbb{R}^2$ muni de la norme $\| \cdot \|_\infty$. Même question avec la norme $\| \cdot \|_1$.

1.4.2. **Distance à un ensemble.** Si A est une partie non-vide de E , on pose pour tout $x \in E$:

$$\text{dist}(x, A) := \inf \{d(x, u); u \in A\}.$$

On dit que $\text{dist}(x, A)$ est la **distance de x à l'ensemble A** .

Remarque 1. Il est évident que si $x \in A$, alors $\text{dist}(x, A) = 0$ (prendre $u := x$) ; mais la réciproque est fautive en général.

Remarque 2. La distance de x n'est pas nécessairement "atteinte" : il n'y a aucune raison *a priori* pour qu'il existe un point $a \in A$ tel que $\text{dist}(x, A) = d(x, a)$.

Exemple. Dans $E = \mathbb{R}$, on a $\text{dist}(2,]-1, 1[) = 1$ et $\text{dist}(1,]-1, 1[) = 0$. Dans les 2 cas, la distance n'est pas atteinte.

1.4.3. **Diamètre.** Pour toute partie non-vide A de E , on pose

$$\text{diam}(A) := \sup \{d(u, v); u, v \in A\}.$$

On dit que $\text{diam}(A)$ est le **diamètre** de l'ensemble A . La borne supérieure est ici prise dans $[0, \infty]$: on peut très bien avoir $\text{diam}(A) = \infty$. Moralement, $\text{diam}(A)$ est "la plus grande distance possible entre deux points de A " ; mais cette plus grande distance peut très bien ne pas exister.

Exemple 1. Soit $E := \mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne. Si A est un disque de rayon r , alors $\text{diam}(A) = 2r$. Si $A \subseteq E$ est un carré de côté a , alors $\text{diam}(A) = \sqrt{2}a$.

Exemple 2. Dans $E = \mathbb{R}$, on a $\text{diam}(]-2, 3[) = 5$ et $\text{diam}(]0, \infty[) = \infty$.

EXERCICE. Montrer que pour tout ensemble non-vide $A \subseteq \mathbb{R}$, on a

$$\text{diam}(A) = \sup A - \inf A.$$

(Avec les conventions évidentes lorsque $\sup A = \infty$ ou $\inf A = -\infty$.)

1.4.4. **Ensembles bornés.** Supposons que E soit un espace vectoriel normé. On dit qu'un ensemble $A \subseteq E$ est **borné** s'il existe une constante $M < \infty$ telle que $\forall u \in A : \|u\| \leq M$.

Exercice 1. Montrer les équivalences suivantes :

$$A \text{ borné} \iff \text{diam}(A) < \infty \iff A \text{ est contenu dans une boule.}$$

Remarque. L'intérêt du résultat de cet exercice est qu'il permet de définir les ensembles bornés dans un espace métrique (E, d) quelconque : un ensemble $A \subseteq E$ peut être déclaré *borné* si $\text{diam}(A) < \infty$. Cependant, on ne parlera jamais d'ensembles bornés dans un espace métrique qui n'est pas un evn.

Exercice 2. Une application $u : I \rightarrow F$ d'un ensemble I dans un evn F est dite **bornée** si l'ensemble $u(I)$ est borné dans F ; autrement dit s'il existe une constante M telle que $\forall t \in I : \|u(t)\| \leq M$. L'ensemble de toutes les applications bornées $u : I \rightarrow F$ se note $\ell^\infty(I, F)$. Montrer que $\ell^\infty(I, F)$ est un espace vectoriel, et qu'on définit une norme sur $\ell^\infty(I, F)$ en posant $\|u\|_\infty := \sup \{\|u(t)\|; t \in I\}$.

1.5. Isométries.

DÉFINITION 1.8. Soient (E, d) et (E', d') deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \rightarrow E'$ est une **isométrie** si elle préserve les distances :

$$d'(f(u), f(v)) = d(u, v) \quad \text{pour tous } u, v \in E.$$

Exemple 1. Dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 , les translations, les rotations et les symétries orthogonales sont des isométries.

Exemple 2. L'injection canonique de \mathbb{R} dans \mathbb{C} est une isométrie (pour les distances usuelles).

Exemple 3. L'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f(x) = (x, 0)$ est une isométrie de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^2 muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

EXERCICE. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $T : E \rightarrow F$ une application *linéaire*. Montrer que T est une isométrie si et seulement si $\|T(x)\| = \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Remarque 1. Une isométrie est toujours *injective* (mais elle n'a pas de raison d'être surjective).

Démonstration. C'est évident : si $f(u) = f(v)$, alors $d(u, v) = d'(f(u), f(v)) = 0$ et donc $u = v$. \square

Remarque 2. Si $f : E \rightarrow E'$ est une isométrie *bijective*, alors $f^{-1} : E' \rightarrow E$ est aussi une isométrie.

Démonstration. C'est un **exo** très facile. \square

DÉFINITION 1.9. On dit que deux espaces métriques E et E' sont **isométriques** s'il existe une isométrie bijective entre E et E' ; autrement dit, si E et E' sont "indistinguables" en tant qu'espaces métriques.

Exemple 1. \mathbb{R}^2 muni de la distance euclidienne est isométrique à \mathbb{C} muni de la distance usuelle, via l'application $(x, y) \mapsto x + iy$.

Exemple 2. \mathbb{R} muni de la distance usuelle est isométrique à $\{(x, 0); x \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$ muni de la distance associée à la norme $\|\cdot\|_\infty$, via l'application $x \mapsto (x, 0)$.

Exemple 3. Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie N sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , alors E est linéairement isométrique à \mathbb{K}^N muni d'une certaine norme.

Démonstration. Soit $J : E \rightarrow \mathbb{K}^N$ un isomorphisme linéaire. Alors la formule $\|x\|_J := \|J^{-1}(x)\|$ définit une norme sur \mathbb{K}^N (**exo**) ; et par définition, J est une isométrie (linéaire!) de E sur $(\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_J)$. \square

Le résultat suivant est *a priori* surprenant ; et il est "philosophiquement" très intéressant car il signifie que les espaces vectoriels normés ne sont d'une certaine façon pas moins généraux que les espaces métriques généraux.

THÉOREME 1.10. *Tout espace métrique est isométrique à une partie d'un espace vectoriel normé.*

Démonstration. On la verra **en TD**. \square

2. Normes équivalentes

DÉFINITION 2.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . On dit que deux normes $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sur E sont **équivalentes** s'il existe deux constantes $C, C' < \infty$ telles que $\|x\| \leq C \|x\|'$ et $\|x\|' \leq C' \|x\|$ pour tout $x \in E$.

Remarque. Comme le nom le suggère fortement, la relation “être équivalentes” est une relation d'équivalence sur l'ensemble des normes sur E . (La preuve est laissée en **exo**.)

Exemple 1. Sur \mathbb{R}^N , les normes $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes.

Démonstration. Soit $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$. On a

$$|u_j| = (u_j^2)^{1/2} \leq (u_1^2 + \dots + u_N^2)^{1/2} = \|u\|_2$$

pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, donc $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2$. De plus,

$$\|u\|_1^2 = \left(\sum_{j=1}^N |u_j| \right)^2 = \sum_{j=1}^N u_j^2 + \sum_{\{(k,k'); k \neq k'\}} |u_k| |u_{k'}| \geq \sum_{j=1}^N u_j^2 = \|u\|_2^2;$$

donc $\|u\|_1 \geq \|u\|_2$. Enfin, $\|u\|_1 = \sum_{j=1}^N |u_j| \leq N \|u\|_\infty$.

Ainsi, on a obtenu $\|u\|_\infty \leq \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq N \|u\|_\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}^N$; d'où l'équivalence des trois normes. \square

Exemple 2. Soit $\|\cdot\|_1$ la norme sur $E := \mathcal{C}([a, b])$ définie par $\|u\|_1 := \int_a^b |u(t)| dt$. (Vérifier qu'il s'agit bien d'une norme.) On a $\|\cdot\|_1 \leq (b-a) \|\cdot\|_\infty$, mais les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes.

Démonstration. L'inégalité $\|\cdot\|_1 \leq (b-a) \|\cdot\|_\infty$ est laissée en **exo** (très facile).

Notons m le milieu de l'intervalle $[a, b]$. Pour $k \in \mathbb{N}$ assez grand, soit $u_k \in \mathcal{C}([a, b])$ la fonction définie comme suit : u_k est nulle en dehors de $[m - \frac{1}{k}, m + \frac{1}{k}]$, $u_k(m) = k$ et u_k est affine sur les intervalles $[m - \frac{1}{k}, m]$ et $[m, m + \frac{1}{k}]$. (Dessiner le graphe de u_k .) On a $\|u_k\|_\infty = k$, et $\|u_k\|_1 = \frac{1}{2} \times \frac{2}{k} \times k = 1$. Ainsi, on a trouvé une suite de fonctions (u_k) telle que $\|u_k\|_1 = 1$ pour tout k et $\|u_k\|_\infty \rightarrow \infty$; ce qui montre qu'il ne peut pas exister de constante C telle que $\|\cdot\|_\infty \leq C \|\cdot\|_1$. \square

Exercice. Soit E un espace vectoriel, et soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E . Montrer que si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ ne sont pas équivalentes, alors ou bien il existe une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $\|u_k\| \rightarrow 0$ et $\|u_k\|' \rightarrow \infty$, ou bien il existe une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $\|u_k\| \rightarrow \infty$ et $\|u_k\|' \rightarrow 0$.

Le résultat suivant est très important et très facile à utiliser. La preuve, en revanche, est un peu délicate.

THÉORÈME 2.2. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, alors toutes les normes sur E sont équivalentes.

Démonstration. Dans ce qui suit, on supposera que $E \neq \{0\}$ (il n'y a rien à démontrer si $E = \{0\}$). On commence par se simplifier un peu la vie :

FAIT 0. Il suffit de montrer que toutes les normes sur \mathbb{R}^N , $N \geq 1$ sont équivalentes.

Preuve du Fait 0. En tant que \mathbb{R} -espace vectoriel, E est isomorphe à \mathbb{R}^N pour un certain entier $N \geq 1$. Si on fixe un isomorphisme \mathbb{R} -linéaire $J : E \rightarrow \mathbb{R}^N$, alors à toute norme $\|\cdot\|$ sur E correspond une norme $\|\cdot\|_J$ sur \mathbb{R}^N , donnée par la formule $\|u\|_J := \|J^{-1}(u)\|$. On a ainsi $\|x\| = \|J(x)\|_J$; donc il est clair que si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes sur E et si les normes $\|\cdot\|_J$ et $\|\cdot\|'_J$ sont équivalentes, alors $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont équivalentes. Ceci démontre le Fait. \square

On va maintenant montrer que toutes les normes sur \mathbb{R}^N sont équivalentes à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

FAIT 1. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^N , il existe une constante $C < \infty$ telle que $\|\cdot\| \leq C \|\cdot\|_\infty$.

Preuve du Fait 1. Si $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{R}^N$ et si on note (e_1, \dots, e_N) la base canonique de \mathbb{R}^N , alors

$$\begin{aligned} \|u\| &= \left\| \sum_{j=1}^N u_j e_j \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \|u_j e_j\| \\ &= \sum_{j=1}^N |u_j| \|e_j\| \leq \|u\|_\infty \times \sum_{j=1}^N \|e_j\|, \end{aligned}$$

puisque $|u_j| \leq \|u\|_\infty$ pour tout j . On obtient donc le résultat souhaité avec $C := \sum_{j=1}^N \|e_j\|$ (qui est bien une constante indépendante de $u \in \mathbb{K}^N$). \square

FAIT 2. Si $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^N , il existe une constante $c > 0$ telle que $\|\cdot\| \geq c \|\cdot\|_\infty$.

Preuve du Fait 2. C'est la partie "difficile". On va procéder *par récurrence* sur la dimension N .

Pour $N = 1$, ce n'est pas compliqué : si $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$, alors $\|u\| = \|u \times 1\| = |u| \times \|1\| = c \|u\|_\infty$ pour tout $u \in \mathbb{R}^1$, où $c := \|1\|$ est bien *strictement* positif car $1 \neq 0$.

Supposons le résultat vrai pour un certain $N \geq 1$, et démontrons le pour $N+1$. Soit donc $\|\cdot\|$ une norme sur \mathbb{R}^{N+1} . On va raisonner par l'absurde en supposant qu'il *n'existe pas* de constante $c > 0$ telle que $\|\cdot\| \geq c \|\cdot\|_\infty$. Il s'agit d'obtenir une contradiction. Dans ce qui suit, on écrira les vecteurs de \mathbb{R}^{N+1} sous la forme $u = (u(1), \dots, u(N+1))$.

ÉTAPE 1. On peut trouver une suite $(v_k) \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ et un indice $j_0 \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$ tels que $v_k(j_0) = 1$ pour tout k et $\|v_k\| \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

Démonstration. Par hypothèse, on peut pour tout $c > 0$ trouver un vecteur $u^c \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $\|u^c\| < c \|u^c\|_\infty$. On a $\|u^c\|_\infty \neq 0$ (d'après l'inégalité stricte), donc on peut définir $w^c := \frac{u^c}{\|u^c\|_\infty}$. Alors $\|w^c\|_\infty = 1$ et

$$\|w^c\| = \frac{1}{\|u^c\|_\infty} \times \|u^c\| < c.$$

En prenant $c := 1/k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et en posant $w_k := w^{1/k}$, on obtient ainsi une suite $(w_k) \subseteq \mathbb{R}^{N+1}$ telle que $\|w_k\|_\infty = 1$ pour tout k et $\|w_k\| \rightarrow 0$.

Par définition de $\|\cdot\|_\infty$, on peut choisir pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ un indice $i_k \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$ tel que $|w_k(i_k)| = \|w_k\|_\infty = 1$. Comme il y a une infinité d'entiers k et un nombre fini d'indices $i \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$, il existe au moins un $j_0 \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$ tel que $i_k = j_0$ pour une infinité de k . Il existe donc une sous-suite (w'_k) de (w_k) telle que $|w'_k(j_0)| = 1$ pour tout k , autrement dit $w'_k(j_0) = \pm 1$. En notant ε_k le signe de $w'_k(j_0)$ et en posant $v_k := \varepsilon_k w'_k$, on a alors $v_k(j_0) = 1$ pour tout k , et $\|v_k\| = \|w'_k\| \rightarrow 0$ puisque (w'_k) est une sous-suite de (w_k) . Donc la suite (v_k) convient. \square

ÉTAPE 2. Il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^{N+1}$ tel que $v \neq 0$ et $\|v_k - v\|_\infty \rightarrow 0$.

Démonstration. Le point clé est le suivant : si $p, q \in \mathbb{N}$, alors $(v_q - v_p)(j_0) = 0$. Donc, on peut considérer les $v_q - v_p$ comme des vecteur de \mathbb{R}^N en identifiant \mathbb{R}^N au sous-espace

$$E_{j_0} := \{u \in \mathbb{R}^{N+1}; u(j_0) = 0\} \subseteq \mathbb{R}^{N+1},$$

qui est de dimension N . Par hypothèse de récurrence, il existe une constante $c' > 0$ telle que $\|u\| \geq c' \|u\|_\infty$ pour tout $u \in E_{j_0}$. En prenant $u := v_q - v_p$, on en déduit qu'on a

$$|v_q(j) - v_p(j)| \leq (1/c') \|v_q - v_p\| \leq (1/c') (\|v_q\| + \|v_p\|)$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ et pour tout $j \neq j_0$. Comme $\|v_p\| + \|v_q\| \rightarrow 0$ quand $p, q \rightarrow \infty$, on voit ainsi que pour tout $j \neq j_0$, la suite de nombres réels $(v_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$ vérifie le *critère de Cauchy*, et donc est convergente. Pour chaque $j \neq j_0$, il existe ainsi un nombre réel $v(j)$ tel que $v_k(j) \rightarrow v(j)$ quand $k \rightarrow \infty$.

Si maintenant on pose $v = (v(1), \dots, 1, \dots, v(N+1)) \in \mathbb{R}^{N+1}$, où le "1" est à la place j_0 , alors $v_k(j) \rightarrow v(j)$ pour tout $j \in \llbracket 1, N+1 \rrbracket$ puisque $v_k(j_0) \equiv 1$. Par définition de la norme $\|\cdot\|_\infty$, cela entraîne que $\|v_k - v\|_\infty \rightarrow 0$ (**exo**); et on a $v \neq 0$ puisque $v(j_0) = 1$. \square

On peut maintenant obtenir la contradiction cherchée. Comme $\|\cdot\| \leq C \|\cdot\|_\infty$ pour une certaine constante C (d'après l'étape 1) et comme $\|v_k - v\|_\infty \rightarrow 0$, on voit que $\|v_k - v\| \rightarrow 0$. Comme de plus $\|v\| \leq \|v - v_k\| + \|v_k\|$ et que $\|v_k\| \rightarrow 0$, on en déduit $\|v\| \leq 0$ en faisant tendre k vers l'infini; donc $\|v\| = 0$. Mais ceci est absurde puisque $\|\cdot\|$ est une norme et $v \neq 0$. Ainsi, on a bien montré le Fait 2 par récurrence. \square

Par les Faits 1 et 2, la preuve du théorème est maintenant terminée. \square

REMARQUE. Le Théorème 2.2 *caractérise* les espaces de dimension finie : si E est un espace vectoriel de dimension infinie, alors il existe des normes non équivalentes sur E .

Démonstration. Soit $(e_i)_{i \in I}$ une base de l'espace vectoriel E (on admet que tout espace vectoriel possède une base...). Comme $\dim E = \infty$, l'ensemble I est infini. Pour $u = \sum_{i \in I} u_i e_i$, posons

$$\|u\|_1 := \sum_{i \in I} |u_i| \quad \text{et} \quad \|u\|_\infty := \sup_{i \in I} |u_i|.$$

Ces expressions ont un sens car tous les u_i sont nuls sauf un nombre fini; et on vérifie sans difficulté qu'on définit ainsi deux normes sur E (**exo**). Montrons que ces normes ne sont pas équivalentes.

Comme I est un ensemble infini, on peut choisir pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ un ensemble $I^k \subseteq I$ de cardinalité k . Si on pose $u^k := \sum_{i \in I^k} e_i$, alors $\|u^k\|_\infty = 1$ et $\|u^k\|_1 = k$.

Comme k peut être arbitrairement grand, on voit ainsi qu'il n'existe pas de constante C telle que $\| \cdot \|_1 \leq C \| \cdot \|_\infty$. \square

Dans le cadre des espaces métriques, la notion d'équivalence pour les normes se généralise comme suit :

DÉFINITION 2.3. *On dit que deux distances d et d' sur un ensemble non-vide E sont **Lipschitz-équivalentes** s'il existe deux constantes $C, C' < \infty$ telles que $d(u, v) \leq C d'(u, v)$ et $d'(u, v) \leq C' d(u, v)$ pour tous $u, v \in E$.*

Exercice. Montrer que deux normes sur un espace vectoriel E sont équivalentes si et seulement si les distances associées sont Lipschitz-équivalentes.

3. Convergence, continuité

3.1. Suites convergentes.

DÉFINITION 3.1. *Soit (E, d) un espace métrique, soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E , et soit $a \in E$. On dit que la suite (u_k) **converge vers a pour la distance d** si $d(u_k, a) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. On écrit alors $u_k \rightarrow a$. Avec des quantificateurs, cela s'écrit ainsi :*

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \forall k \geq K : d(u_k, a) < \varepsilon.$$

Formellement, il s'agit donc exactement de la même définition que pour la convergence d'une suite de nombres réels, en écrivant $d(u_k, a)$ au lieu de $|u_k - a|$.

Voici d'abord quelques remarques "idiotes", et donc importantes :

- dans la définition, on peut remplacer " $< \varepsilon$ " par " $\leq \varepsilon$ " (jouer avec des $\varepsilon/2$) ;
- au lieu de " $d(u_k, a) < \varepsilon$ ", on peut écrire " $u_k \in B(a, \varepsilon)$ " ;
- la définition *dépend de la distance d* . (Par exemple, la suite $u_k := 2^{-k}$ converge vers 0 dans \mathbb{R} pour la distance usuelle, mais pas pour la distance discrète.)

Passons maintenant à des remarques un peu moins "idiotes".

REMARQUE 1. On a *unicité de la limite* : une suite (u_k) ne peut pas converger vers deux points différents. Par conséquent, si $u_k \rightarrow a$, on peut parfaitement dire que a est la limite de la suite (u_k) et écrire $a = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$, ou simplement $a = \lim u_k$.

Démonstration. Si $u_k \rightarrow a$ et $u_k \rightarrow b$ alors, comme $0 \leq d(a, b) \leq d(a, u_k) + d(u_k, b)$ qui tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$, on a $d(a, b) = 0$ et donc $a = b$. \square

REMARQUE 2. Si d et d' sont deux distances Lipschitz-équivalentes sur un ensemble E , alors la convergence pour d est équivalente à la convergence pour d' .

Démonstration. C'est un **exo** très facile. \square

CONSÉQUENCE. Si E est un *espace vectoriel de dimension finie*, on peut parler de "suites convergentes" dans E sans faire explicitement référence à une norme : par définition, une suite $(u_k) \subseteq E$ converge vers $a \in E$ si elle converge vers a pour n'importe quelle norme.

Exercice. Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E . On suppose que toute suite $(u_k) \subseteq E$ convergeant pour d converge également pour d' . Montrer que toute suite (u_k) convergeant pour d converge nécessairement *vers la même limite* pour d' .

REMARQUE 3. Dans un espace vectoriel normé, toute suite convergente (u_k) est **bornée** : il existe une constante M telle que $\forall k : \|u_k\| \leq M$.

Démonstration. Si $u_k \rightarrow a$, on peut trouver un entier K tel que $\|u_k - a\| \leq 6$ pour tout $k \geq K$. Alors $\|u_k\| \leq 6 + \|a\|$ si $k \geq K$ d'après l'inégalité triangulaire; et donc $\|u_k\| \leq M := \max(6 + \|a\|, \|u_0\|, \dots, \|u_{K-1}\|)$ pour toute $k \in \mathbb{N}$. \square

EXEMPLE 1. Dans \mathbb{R} ou dans \mathbb{C} , une suite converge (pour la distance usuelle) si et seulement si elle converge au sens usuel.

EXEMPLE 2. Dans \mathbb{K}^N , une suite converge (pour n'importe quelle norme) si et seulement si elle converge "coordonnée par coordonnée" : $u_k = (u_k(1), \dots, u_k(N))$ tend vers $a = (a(1), \dots, a(N))$ si et seulement si $u_k(j) \rightarrow a(j)$ pour $j = 1, \dots, N$.

Démonstration. Par équivalence des normes, on peut considérer uniquement la convergence pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Si $\|u_k - a\|_\infty \rightarrow 0$, alors $u_k(j) \rightarrow a(j)$ pour tout j car $|u_k(j) - a(j)| \leq \|u_k - a\|_\infty$.

Inversement, supposons que u_k tende vers a coordonnée par coordonnée. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $j = 1, \dots, N$, on peut trouver un entier K_j tel que $\forall k \geq K_j : |u_k(j) - a(j)| \leq \varepsilon$. Si on pose $K := \max(K_1, \dots, K_N)$ on a alors $\|u_k - a\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq K$, par définition de $\|\cdot\|_\infty$. \square

EXEMPLE 2'. Si E_1, \dots, E_N sont des espaces métriques et si $E = E_1 \times \dots \times E_N$, alors la convergence dans E (pour la distance produit) est équivalente à la convergence coordonnée par coordonnée.

Démonstration. C'est exactement la même que pour l'Exemple 2. \square

EXEMPLE 3. Prenons $E := \ell^\infty(I)$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Une suite $(f_n) \subseteq \ell^\infty(I)$ converge vers $f \in \ell^\infty(I)$ si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall t \in I : |f_n(t) - f(t)| \leq \varepsilon.$$

Cela signifie que :

- (i) (f_n) converge *simplement* vers f , i.e. $f_n(t) \rightarrow f(t)$ pour tout $t \in I$;
- (ii) pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut "prendre le même N " pour tous les t de I .

Dans ce cas, on dit que la suite (f_n) converge **uniformément** vers f . Pour cette raison, la norme $\|\cdot\|_\infty$ s'appelle la **norme de la convergence uniforme**.

Démonstration. C'est assez clair par définition de $\|\cdot\|_\infty$ (**exo**). \square

Exercice. Soit I un ensemble infini, et soit (t_k) une suite d'éléments de I deux à deux distincts. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : I \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(t) = 0$ si $t \neq t_k$ et $f_k(t_k) = 1$. Montrer que pour toute suite de scalaires (λ_k) , la suite $(\lambda_k f_k)$ converge simplement vers 0; et en déduire qu'il n'existe pas de norme sur $\ell^\infty(I)$ telle que la convergence pour cette norme soit équivalente à la convergence simple.

La proposition suivante est d'usage constant.

PROPOSITION 3.2. Soient E un espace vectoriel normé, et soient $(u_k), (v_k), u, v$ dans E et $(\lambda_k), \lambda$ dans \mathbb{K} .

- (1) Si $u_k \rightarrow u$ et $v_k \rightarrow v$, alors $u_k + v_k \rightarrow u + v$.
- (2) Si $u_k \rightarrow u$ et $\lambda_k \rightarrow \lambda$, alors $\lambda_k u_k \rightarrow \lambda u$.

Démonstration. (1) est très facile : par l'inégalité triangulaire, on a

$$\|(u_k + v_k) - (u + v)\| = \|(u_k - u) + (v_k - v)\| \leq \|u_k - u\| + \|v_k - v\|,$$

qui tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

Pour (2), on écrit

$$\|\lambda_k u_k - \lambda u\| = \|\lambda_k(u_k - u) + (\lambda_k - \lambda)u\| \leq \underbrace{|\lambda_k|}_{\text{borné}} \underbrace{\|u_k - u\|}_{\rightarrow 0} + \underbrace{|\lambda_k - \lambda|}_{\rightarrow 0} \|u\|.$$

□

3.2. Applications continues.

DÉFINITION 3.3. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$.

(1) Étant donné $a \in E$, on dit que f est **continue au point** a , ou encore **continue en** a , si “ $f(u)$ tend vers $f(a)$ quand u tend vers a ; ce qui s'écrit ainsi :

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ tel que : $\forall u \in E$ vérifiant $d(u, a) < \delta$, on a $d(f(u), f(a)) < \varepsilon$.

(2) On dit que f est **continue sur** E si elle est continue en tout point $a \in E$.

Voici quelques remarques “idiotes”.

- La continuité dépend des distances données sur E et F .
- Dans (1), le “ δ de continuité” dépend évidemment de ε , mais *a priori* aussi du point a .
- Au lieu des inégalités strictes $<$, on peut mettre des inégalités larges \leq : cela ne change rien à la définition. (Jouer avec des $\varepsilon/2$ et des $\delta/2$.)
- On peut écrire (1) comme suit :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que : } \forall u \in B(a, \delta), \text{ on a } f(u) \in B(f(a), \varepsilon);$$

autrement dit :

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tel que } f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon).$$

Voici un exemple important.

EXEMPLE. Soient E_1, \dots, E_N des espaces métriques, et soit $E := E_1 \times \dots \times E_N$. Pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la j -ième “application coordonnée $\pi_j : E \rightarrow E_j$ est continue.

Démonstration. On rappelle que $E = E_1 \times \dots \times E_N$ est muni de la “distance produit”, notée d_∞ . Soit $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$. Pour $a = (a_1, \dots, a_N)$ et $u = (u_1, \dots, u_N)$ dans E , on a $d_{E_j}(\pi_j(u), \pi_j(a)) = d_{E_j}(u_j, a_j) \leq d_\infty(u, a)$, ce qui prouve la continuité de π_j en tout point $a \in E$: on peut prendre $\delta = \varepsilon$ dans la définition de la continuité. □

La proposition suivante est ce qu'on appelle parfois la “caractérisation séquentielle de la continuité”. Aux notations près, sa preuve est exactement la même que dans le cas des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

PROPOSITION 3.4. Soit $f : E \rightarrow F$ et soit $a \in E$, où E et F sont des espaces métriques. Alors f est continue au point a si et seulement si la propriété suivante a lieu : pour toute suite $(u_k) \subseteq E$ tendant vers a , la suite $(f(u_k))$ tend vers $f(a)$.

Démonstration. Supposons f continue au point a . Soit (u_k) une suite quelconque tendant vers a . Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un “ δ de continuité” tel que $f(u) \in B(f(a), \varepsilon)$ pour tout $u \in B(a, \delta)$. Comme $u_k \rightarrow a$, on peut ensuite trouver un entier K tel que $\forall k \geq K : u_k \in B(a, \delta)$. Alors $f(u_k) \in B(f(a), \varepsilon)$ pour tout $k \geq K$; ce qui prouve que $f(u_k) \rightarrow f(a)$ puisqu’on est parti d’un $\varepsilon > 0$ arbitraire.

Supposons maintenant que f ne soit *pas* continue au point a . Il existe alors un $\varepsilon_0 > 0$ tel que la propriété suivante ait lieu : pour tout $\delta > 0$, on peut trouver $u \in E$ vérifiant $d(u, a) < \delta$ tel que $d(f(u), f(a)) \geq \varepsilon_0$. En prenant $\delta := 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient ainsi une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $d(u_k, a) < 2^{-k}$ et $d(f(u_k), f(a)) \geq \varepsilon_0$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, on a trouvé une suite (u_k) tendant vers a pour laquelle $f(u_k)$ ne tend pas vers $f(a)$. \square

COROLLAIRE 3.5. *Les applications continues restent les mêmes si on remplace les distances par des distances Lipschitz-équivalentes.*

Démonstration. Les suites convergentes restent les mêmes. \square

CONVENTION. Au vu de ce résultat et comme toutes les normes sont équivalentes en dimension finie, on conviendra que pour une application $f : E \rightarrow F$ où E et F sont des espaces vectoriels de dimension finie, “continue” veut dire “continue pour n’importe quelles normes sur E et F ”.

COROLLAIRE 3.6. *Si E est un evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , les applications $(u, v) \mapsto u + v$ et $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ sont continues de $E \times E$ dans E et de $\mathbb{K} \times E$ dans E respectivement.*

Démonstration. C’est une conséquence immédiate de la caractérisation séquentielle de la continuité et de la Proposition 3.2 \square

COROLLAIRE 3.7. *Soient E, F_1, \dots, F_N des espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F_1 \times \dots \times F_N$. On écrit $f(u) = (f_1(u), \dots, f_N(u))$. Alors f est continue si et seulement si ses “composantes” f_1, \dots, f_N le sont.*

Démonstration. C’est à nouveau évident par la caractérisation séquentielle de la continuité, car la convergence dans $F_1 \times \dots \times F_N$ est la convergence coordonnée par coordonnée. \square

Exercice. Montrer que si (E, d) est un espace métrique, alors l’application $(u, v) \mapsto d(u, v)$ est continue de $E \times E$ dans \mathbb{R} .

Voici maintenant les propriétés habituelles de “stabilité”.

PROPOSITION 3.8. *La composée de deux applications continues est continue : si $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ sont continues, alors $g \circ f : E \rightarrow G$ est continue.*

Démonstration. La preuve est immédiate par la caractérisation séquentielle de la continuité (on peut aussi faire sans) : si $u_k \rightarrow a$, alors $f(u_k) \rightarrow f(a)$, donc $(g \circ f)(u_k) = g(f(u_k)) \rightarrow g(f(a)) = (g \circ f)(a)$ et donc $g \circ f$ est continue. \square

COROLLAIRE 3.9. *La continuité est préservée par somme, produit et passage à l’inverse. De façon précise :*

- (i) *La somme de deux applications continues à valeurs dans un evn est continue.*
- (ii) *Le produit de deux fonctions continues à valeurs scalaires est une fonction continue.*
- (iii) *L’inverse d’une fonction continue à valeurs scalaires ne s’annulant pas est une fonction continue.*

Démonstration. (i) Soient $f, g : E \rightarrow F$ deux applications continues, où F est un evn. En notant $S : F \times F \rightarrow F$ l'application "somme" et $\Phi : E \rightarrow F \times F$ l'application définie par $\Phi(u) := (f(u), g(u))$, on a $f + g = S \circ \Phi$. Comme S et Φ sont continues (par les Corollaires 3.6 et 3.7), on en déduit que $f + g$ est continue "par composition".

On peut démontrer (ii) et (iii) en suivant le même schéma que pour (i), *i.e.* en écrivant le produit et l'inverse comme composées de deux applications continues. Les détails sont laissés en **exo**. \square

COROLLAIRE 3.10. *Toute fonction polynomiale à coefficients complexes est continue sur \mathbb{C} , et toute fonction rationnelle est continue sur son domaine de définition.*

Démonstration. **Exo.** \square

COROLLAIRE 3.11. *Toute fonction d'une ou plusieurs variables réelles définie par une "formule explicite" est continue sur son domaine de définition.*

Démonstration. L'énoncé n'étant pas précis mathématiquement, la preuve ne le sera pas non plus. On se contentera de dire que toute "formule explicite" est construite à partir de fonctions usuelles (dont on sait qu'elles sont continues) en prenant des sommes, des produits, des inverses et des compositions. (En étant un peu plus formel, cela constituerait une *définition par induction* de la notion de "formule explicite".) \square

Exemple. La formule $f(x, y) := \frac{\sqrt{x^2 - y^3}}{\log(2xy - 3)}$ définit une fonction continue. Sur quel domaine ?

3.3. Applications lipschitziennes.

DÉFINITION 3.12. *Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **lipschitzienne** s'il existe une constante $k < \infty$ telle que*

$$\forall u, v \in E : d(f(u), f(v)) \leq k d(u, v).$$

On dit alors que f est k -lipschitzienne. Si E et F sont des espaces vectoriels normés, l'inégalité précédente s'écrit

$$\forall u, v \in E : \|f(v) - f(u)\| \leq k \|v - u\|.$$

REMARQUE 0. Toute application lipschitzienne est continue.

REMARQUE 1. Si $f : E \rightarrow F$ est lipschitzienne, il existe une *plus petite* constante $k < \infty$ telle que f soit k -lipschitzienne. Cette constante s'appelle la **constante de Lipschitz** de f , et se note $\text{Lip}(f)$.

Démonstration. Posons $\kappa := \inf \{k \in \mathbb{R}^+; f \text{ est } k\text{-lipschitzienne}\}$. La définition a un sens car l'ensemble dont on prend la borne inférieure est non-vide et minoré par 0. Par définition de κ , on peut trouver une suite $(k_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^+$ telle que f est k_n -lipschitzienne pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $k_n \rightarrow \kappa$. On a ainsi $\forall n \forall u, v \in E : d(f(u), f(v)) \leq k_n d(u, v)$. En faisant $n \rightarrow \infty$, on en déduit que f est κ -lipschitzienne; et il est clair par définition que κ est la plus petite constante k telle que f soit k -lipschitzienne. \square

Exercice. Montrer que $\text{Lip}(f) = \sup \left\{ \frac{d(f(u), f(v))}{d(u, v)}; u, v \in E, u \neq v \right\}$.

REMARQUE 2. Les applications lipschitziennes restent les mêmes si on remplace les distances de E et de F par des distances Lipschitz-équivalentes (mais les constantes de Lipschitz peuvent changer).

Démonstration. **Exo.** □

Exercice. Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E . Montrer que d et d' sont Lipschitz-équivalentes si et seulement si les applications $id : (E, d) \rightarrow (E, d')$ et $id : (E, d') \rightarrow (E, d)$ sont lipschitziennes.

EXEMPLE 1. Soit (E, d) un espace métrique. Si $A \subseteq E$ est un ensemble non-vide (quelconque), alors l'application $u \mapsto \text{dist}(u, A)$ est 1-lipschitzienne.

Démonstration. Soient $u, v \in E$ quelconques. Par définition de $\text{dist}(u, A)$, on a

$$\forall z \in A : \text{dist}(u, A) \leq d(u, z) \leq d(u, v) + d(v, z).$$

En prenant "l'inf en $z \in A$ ", on en déduit $\text{dist}(u, A) \leq d(u, v) + \text{dist}(v, A)$, i.e. $\text{dist}(u, A) - \text{dist}(v, A) \leq d(u, v)$. D'où $|\text{dist}(v, A) - \text{dist}(u, A)| \leq d(u, v)$ en échangeant les rôles de u et v . □

EXEMPLE 2. Si I est un intervalle de \mathbb{R} et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en tout point, alors on a l'équivalence suivante : f est lipschitzienne si et seulement si f' est bornée sur I ; et dans ce cas, on a $\text{Lip}(f) = \|f'\|_\infty$. En particulier, toute fonction f de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est lipschitzienne.

Démonstration. Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable.

Supposons d'abord que f soit lipschitzienne. Alors

$$\forall x \in I \forall y \neq x : \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| \leq \text{Lip}(f).$$

En fixant x et en faisant $y \rightarrow x$, on en déduit $|f'(x)| \leq \text{Lip}(f)$, pour tout $x \in I$. Donc f' est bornée et $\|f'\|_\infty \leq \text{Lip}(f)$.

Supposons maintenant que f' soit bornée sur I , et posons $k := \|f'\|_\infty$. Si $x, y \in I$ alors, par le Théorème des accroissements finis, on peut trouver $c_{x,y}$ entre x et y tel que $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$; donc $|f(y) - f(x)| = |f'(c_{x,y})| |y - x| \leq k |y - x|$, pour tous $x, y \in I$; et donc f est lipschitzienne avec $\text{Lip}(f) \leq k = \|f'\|_\infty$.

Si f est \mathcal{C}^1 sur $[a, b]$, alors f' est continue sur $[a, b]$, donc bornée; et donc f est lipschitzienne. □

Exercice. Soit E un espace métrique. Montrer que la somme de deux fonctions lipschitziennes sur E à valeurs réelles est une fonction lipschitzienne, et que le produit de deux fonctions lipschitziennes bornées est une fonction lipschitzienne.

3.4. Homéomorphismes.

DÉFINITION 3.13. Soient E et E' deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \rightarrow E'$ est un **homéomorphisme** de E sur E' si f est bijective et si f et f^{-1} sont continues.

REMARQUE. Si $f : E \rightarrow E'$ est un homéomorphisme de E sur E' , alors $f^{-1} : E' \rightarrow E$ est un homéomorphisme de E' sur E . Donc il revient au même de dire qu'il existe un homéomorphisme de E sur E' ou bien qu'il existe un homéomorphisme de E' sur E . Dans ce cas, on dit que E et E' sont **homéomorphes**.

EXEMPLE 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors f est injective si et seulement si f elle est strictement monotone; et dans ce cas f est un homéomorphisme de I sur l'intervalle $I' := f(I)$.

Démonstration. Cela a été vu en 1ère année (bien entendu, sans utiliser le mot “homéomorphisme”). \square

EXEMPLE 2. L’application $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{T}$ définie par $f(t) := e^{it}$ est une bijection continue, mais f n’est pas un homéomorphisme.

Démonstration. Il est clair que f est continue et bijective; mais f^{-1} n’est pas continue au point $z := 1 \in \mathbb{T}$: en effet, si on pose $z_k := e^{it_k} = f(t_k)$ où $t_k := 2\pi - \frac{1}{k}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$, alors la suite (z_k) tend vers $e^{i2\pi} = 1 = f(0)$, mais $f^{-1}(z_k) = t_k$ ne tend pas vers $f^{-1}(1) = 0$. \square

Exercice. Montrer qu’il n’existe pas de surjection continue de \mathbb{T} sur $[0, 2\pi[$. En particulier, \mathbb{T} et $[0, 2\pi[$ ne sont pas homéomorphes.

4. Application linéaires continues

4.1. Critère de continuité. Le théorème suivant est d’une très grande utilité, à la fois théorique et pratique. Il signifie en particulier que pour établir la continuité d’une application *linéaire* (entre deux espaces vectoriels normés), il n’y a pas lieu d’utiliser des ε et des δ .

THÉORÈME 4.1. *Soient E et F deux evn sur le même corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Pour une application linéaire $T : E \rightarrow F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) T est continue ;
- (2) il existe une constante $C < \infty$ telle que $\forall u \in E : \|T(u)\| \leq C \|u\|$.

De plus, si C est comme dans (2), alors T est C -lipschitzienne.

Démonstration. Supposons que (2) soit vérifiée avec une certaine constante C . Pour tous $u, v \in E$ on a alors

$$\|T(v) - T(u)\| = \|T(v - u)\| \leq C \|v - u\|.$$

Par conséquent T est C -lipschitzienne, et donc continue.

Inversement, supposons que T soit continue. Alors T est en particulier continue en 0. En prenant $\varepsilon := 6$ dans la définition de la continuité, on peut donc trouver $\delta > 0$ tel que

$$\|u\| \leq \delta \implies \|T(u)\| = \|T(u) - T(0)\| \leq 6.$$

Soit maintenant $u \in E$ quelconque, $u \neq 0$. Si on pose $\tilde{u} := \delta \frac{u}{\|u\|}$, alors $\|\tilde{u}\| = \delta$ car $\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1$. Donc $\|T(\tilde{u})\| \leq 6$; autrement dit

$$\left\| T \left(\delta \frac{u}{\|u\|} \right) \right\| \leq 6.$$

Mais $T \left(\delta \frac{u}{\|u\|} \right) = \frac{\delta}{\|u\|} T(u)$ par linéarité; donc $\left\| T \left(\delta \frac{u}{\|u\|} \right) \right\| = \frac{\delta}{\|u\|} \|T(u)\|$. On obtient ainsi $\frac{\delta}{\|u\|} \|T(u)\| \leq 6$, autrement dit

$$\|T(u)\| \leq \frac{6}{\delta} \|u\| \quad \text{pour tout } u \neq 0.$$

Cette inégalité est encore valable pour $u = 0$ puisque $T(0) = 0$; donc (2) est vérifiée avec $C := \frac{6}{\delta}$. \square

Exercice. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que si T est bornée sur une boule B non triviale (*i.e.* de rayon $r > 0$), alors T est continue. En déduire que si T est continue en au moins 1 point x_0 , alors T est continue.

COROLLAIRE 4.2. *Si l'espace de départ E est un evn de dimension finie et si F est un evn quelconque, alors toute application linéaire $T : E \rightarrow F$ est continue.*

Démonstration. Par équivalence des normes en dimension finie et comme E est linéairement isométrique à \mathbb{K}^N muni d'une certaine norme (*cf* un exemple de la Section 1.5), on peut supposer que $E = (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_\infty)$. Dans ce qui suit, on note (e_1, \dots, e_N) la base canonique de \mathbb{K}^N .

Soit $T : \mathbb{K}^N \rightarrow F$ une application linéaire. Si $u = (u_1, \dots, u_N) \in E = \mathbb{K}^N$, alors

$$\begin{aligned} \|T(u)\| &= \left\| T \left(\sum_{j=1}^N u_j e_j \right) \right\| = \left\| \sum_{j=1}^N u_j T(e_j) \right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^N \|u_j T(e_j)\| \\ &= \sum_{j=1}^N |u_j| \|T(e_j)\| \\ &\leq \|u\|_\infty \times \sum_{j=1}^N \|T(e_j)\|. \end{aligned}$$

Donc le critère de continuité est vérifié avec $C := \sum_{j=1}^N \|T(e_j)\|$ (qui est bien une constante indépendante de $u \in E$). \square

Exercice. Un calcul presque identique a déjà été fait dans ce chapitre. À quel moment ?

4.2. Norme d'une application linéaire continue. Si E et F sont des evn sur le même corps \mathbb{K} , on notera $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble de toutes les applications linéaires continues de E dans F . Il est évident que $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel. Si $E = F$, on écrit $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$.

DÉFINITION 4.3. *Soient E et F des evn. Pour $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on pose*

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} := \sup \left\{ \frac{\|T(u)\|}{\|u\|}; u \in E, u \neq 0 \right\}.$$

REMARQUE 1. Par le critère de continuité, si $T \in \mathcal{L}(E, F)$ alors $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ est un nombre réel bien défini. En fait, $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ est la *plus petite* constante C telle que $\forall u \in E : \|T(u)\| \leq C \|u\|$. Donc, pour une application linéaire $T : E \rightarrow F$ et pour $C \in \mathbb{R}^+$, l'équivalence suivante a lieu :

$$(4.1) \quad T \text{ est continue et } \|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \leq C \iff \forall u \in E : \|T(u)\| \leq C \|u\|.$$

Exercice. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ est la constante de Lipschitz de T .

Remarque 2. On a aussi

$$\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup \{ \|T(u)\|; \|u\| \leq 1 \} = \sup \{ \|T(u)\|; \|u\| = 1 \}.$$

Démonstration. Notons C_{\leq} et $C_{=}$ les deux nouveaux “sup” considérés, $C_{\leq} := \sup \{\|T(u)\|; \|u\| \leq 1\}$ et $C_{=} := \sup \{\|T(u)\|; \|u\| = 1\}$. Par définition, on a évidemment $C_{=} \leq C_{\leq}$.

Si $u \in E$ vérifie $\|u\| \leq 1$, alors $\|T(u)\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \|u\| \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$. Ceci étant vrai pour tout u vérifiant $\|u\| \leq 1$, on en déduit $C_{\leq} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ par définition de C_{\leq} .

Par ailleurs, pour $u \neq 0$ quelconque, on a $\left\| \frac{u}{\|u\|} \right\| = 1$, donc $\left\| T \left(\frac{u}{\|u\|} \right) \right\| \leq C_{=}$ par définition de $C_{=}$; autrement dit $\frac{\|T(u)\|}{\|u\|} \leq C_{=}$. Ainsi, $\|T(u)\| \leq C_{=} \|u\|$ pour tout $u \neq 0$. Ceci est vrai aussi pour $u = 0$, donc $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C_{=}$ par définition de $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Au total, on voit que $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)} \leq C_{=} \leq C_{\leq} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$, donc les trois constantes sont égales. \square

Remarque 3. Pour tout evn E , on a $\|Id_E\|_{\mathcal{L}(E)} = 1$.

Démonstration. C'est évident. \square

La proposition suivante dit que la notation $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ n'est pas délirante.

PROPOSITION 4.4. *Si E et F sont des evn, alors $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est une norme sur $\mathcal{L}(E,F)$.*

Démonstration. Pour économiser de la place, on écrira $\|T\|$ au lieu de $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

Il est évident que $\|T\| \geq 0$ pour tout $T \in \mathcal{L}(E,F)$ et que $\|0\| = 0$.

Si $\|T\| = 0$, alors $\|T(u)\| = 0$ pour tout $u \neq 0$, i.e. $T(u) = 0$. Comme $T(0) = 0$ également, on a donc $T = 0$.

Si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $\|\lambda T\| = \sup\{\|\lambda T(u)\|; \|u\| \leq 1\}$, et comme $\|\lambda T(u)\| = |\lambda| \|T(u)\|$, on en déduit immédiatement que $\|\lambda T\| = |\lambda| \|T\|$.

Si $T, S \in \mathcal{L}(E,F)$, alors

$$\|(T+S)(u)\| \leq \|T(u)\| + \|S(u)\| \leq (\|T\| + \|S\|) \|u\| \quad \text{pour tout } u \in E,$$

et donc $\|T+S\| \leq \|T\| + \|S\|$ d'après (4.1). \square

Remarque 1. La norme $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ dépend des normes $\|\cdot\|_E$ et $\|\cdot\|_F$ données sur E et F ; on dit que cette norme est **subordonnée** aux normes de E et F . Cependant, si on remplace les normes de E et de F par des normes équivalentes, on obtient une norme équivalente sur $\mathcal{L}(E,F)$.

Démonstration. C'est un **exo** de compréhension des définitions. \square

Remarque 2. Lorsque $E = \mathbb{K}^N$, alors $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(\mathbb{K}^N)$ s'identifie à $M_N(\mathbb{K})$. Donc, à toute norme $\|\cdot\|$ sur \mathbb{K}^N est associée une norme subordonnée sur $M_N(\mathbb{K})$. Si $A \in M_N(\mathbb{K})$, on a ainsi

$$\|A\|_{M_N(\mathbb{K})} = \sup \{ \|Au\|; u \in \mathbb{K}^N, \|u\| \leq 1 \}.$$

CONVENTION. On écrira désormais $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E,F)}$.

EXEMPLE 1. Soit $E := (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$, et soit $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_N(\mathbb{K})$. Pour toute matrice $A = (a_{i,j}) \in M_N(\mathbb{K})$, on a

$$\begin{aligned} \|A\| &= \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^N |a_{i,j}| \\ &= \max (\|Ae_1\|_1, \dots, \|Ae_N\|_1). \end{aligned}$$

Démonstration. Posons $C := \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^N |a_{i,j}|$.

Si $u = \sum_{i=1}^N u_j e_j \in \mathbb{K}^N$, alors

$$Au = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N a_{i,j} u_j \right) e_i.$$

Donc

$$\begin{aligned} \|Au\|_1 &= \sum_{i=1}^N \left| \sum_{j=1}^N a_{i,j} u_j \right| \leq \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |a_{i,j}| |u_j| \\ &= \sum_{j=1}^N |u_j| \sum_{i=1}^N |a_{i,j}| \leq C \times \sum_{j=1}^N |u_j| = C \|u\|_1; \end{aligned}$$

et donc $\|A\| \leq C$.

Pour montrer l'inégalité inverse $\|A\| \geq C$, il suffit de trouver un vecteur $u \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|u\|_1 = 1$ et $\|Au\|_1 = C$: en effet, on aura alors $C = \|Au\|_1 \leq \|A\| \|u\|_1 = \|A\|$.

Choisissons $j_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $\sum_{i=1}^N |a_{i,j_0}| = C$, et soit $u := e_{j_0}$. Alors $\|u\|_1 = 1$; et comme $Au = Ae_{j_0} = \sum_{i=1}^N a_{i,j_0} e_i$, on a $\|Au\|_1 = 1$ par définition de j_0 . Donc u convient. \square

Exercice 1. Trouver la norme sur $M_N(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 2. Soit $E := (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$, et soit F un evn quelconque. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|T\| = \max(\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_N)\|)$.

EXEMPLE 2. Soit $E := (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_2)$. Pour tout $a \in E$, notons $\Phi_a : E \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Phi_a(u) := \langle u, a \rangle$. Alors Φ_a est continue et $\|\Phi_a\| = \|a\|_2$.

Démonstration. Le résultat est évident si $a = 0$, donc on suppose $a \neq 0$. On a $|\Phi_a(u)| \leq \|a\| \|u\|$ pour tout $u \in E$ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc $\|\Phi_a\| \leq \|a\|$. Pour montrer l'inégalité inverse $\|\Phi_a\| \geq \|a\|$, il suffit de trouver $u \in \mathbb{R}^N$ tel que $\|u\| = 1$ et $|\Phi_a(u)| = \|a\|$. On prend $u := \frac{a}{\|a\|}$. Par définition, on a $\|u\| = 1$ et $\Phi_a(u) = \frac{1}{\|a\|} \langle a, a \rangle = \|a\|$. \square

EXERCICE. Pour $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, soit $\Phi_a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\Phi_a(u) := \sum_{j=1}^N a_j u_j.$$

Déterminer $\|\Phi_a\|$ lorsqu'on munit \mathbb{R}^N de la norme $\|\cdot\|_1$; de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Dans la proposition suivante, on note AB au lieu de $A \circ B$ la composée de deux applications linéaires A et B . La proposition dit que les normes d'applications linéaires possèdent une (très importante) propriété de **sous-multiplicativité**.

PROPOSITION 4.5. Soient E, F, G des evn. Si $B \in \mathcal{L}(E, F)$ et $A \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.

Démonstration. On a $\|AB(u)\| = \|A(B(u))\| \leq \|A\| \|B(u)\| \leq \|A\| \|B\| \|u\|$ pour tout $u \in E$. \square

COROLLAIRE 4.6. Soit E un evn. Si $T \in \mathcal{L}(E)$, on pose $T^0 := Id$ et $T^k := T \circ \dots \circ T$ pour tout entier $k \geq 1$. Alors $\|T^k\| \leq \|T\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Démonstration. C'est vrai pour $k = 0$ car $\|Id\| = 1$. Ensuite, on procède par récurrence en utilisant la proposition. \square

COROLLAIRE 4.7. Si E est un evn, alors "le produit est continu sur $\mathcal{L}(E)$ "; autrement dit, l'application $(A, B) \mapsto AB$ est continue de $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$ dans $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. Soit (A_k, B_k) une suite tendant vers (A, B) dans $\mathcal{L}(E) \times \mathcal{L}(E)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} \|A_k B_k - AB\| &= \|A_k(B_k - B) + (A_k - A)B\| \\ &\leq \|A_k(B_k - B)\| + \|(A_k - A)B\| \\ &\leq \|A_k\| \|B_k - B\| + \|A_k - A\| \|B\|; \end{aligned}$$

donc $A_k B_k \rightarrow AB$ car $\|A_k - A\|$ et $\|B_k - B\|$ tendent tous les deux vers 0 et $\|A_k\|$ reste borné. \square

EXERCICE. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_N(\mathbb{K})$ subordonnée à une certaine norme sur \mathbb{K}^N . Montrer que si $H \in M_N(\mathbb{K})$ vérifie $\|H\| < 1$, alors $Id - H$ est inversible et $(Id - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k$, où la série converge dans $M_N(\mathbb{K})$.

Vocabulaire topologique

1. Ouverts et fermés

1.1. Ensembles ouverts ; voisinages d'un point.

DÉFINITION 1.1. Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'un ensemble $O \subseteq E$ est un **ouvert de** (E, d) si, pour tout point $a \in O$, on peut trouver $r = r_a > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O$.

Remarque 0. Au lieu de “ouvert de (E, d) ”, on peut aussi dire “ouvert pour d ”, ou simplement “ouvert de E ” si la distance d est clairement spécifiée.

Remarque 1. On obtient une définition équivalente en remplaçant la boule ouverte $B(a, r)$ par la boule fermée $\overline{B}(a, r)$ (si $B(a, r) \subseteq O$, alors $\overline{B}(a, r/2) \subseteq O$...)

Remarque 2. Si d et d' sont deux distances Lipschitz-équivalentes sur un même ensemble E , alors elles définissent les mêmes ouverts.

Démonstration. Choisissons des constantes C et C' telles que $d(u, v) \leq C d'(u, v)$ et $d'(u, v) \leq C' d(u, v)$ pour tous $u, v \in E$. Dans ce qui suit, on note B_d les boules pour la distances d et $B_{d'}$ les boules pour d' .

Soit O un ouvert de (E, d) . Pour $a \in O$ donné, on peut trouver $r > 0$ tel que $B_d(a, r) \subseteq O$. Si on pose $r' := r/C$, alors $B_{d'}(a, r') \subseteq B_d(a, r)$ car $d(u, a) \leq C d'(u, a)$ pour tout $u \in E$; donc $B_{d'}(a, r') \subseteq O$. Ceci étant vrai pour tout $a \in O$, on en déduit que O est un ouvert de (E, d') . On montre de même que tout ouvert pour d' est ouvert pour d . \square

CONVENTION. Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on dira qu'un ensemble $O \subseteq E$ est un *ouvert de* E si c'est un ouvert pour n'importe quelle norme sur E . Ceci a un sens d'après la Remarque 2, puisque toutes les normes sur E sont équivalentes.

EXEMPLE 1. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Alors I est un ouvert de \mathbb{R} si et seulement si c'est un *intervalle ouvert*, i.e. de la forme $] \alpha, \beta [$ avec $-\infty \leq \alpha \leq \beta \leq \infty$.

Démonstration. Supposons que I soit de la forme $] \alpha, \beta [$, et soit $a \in I$ quelconque. Comme $\alpha < a < \beta$, on peut trouver $r > 0$ tel que $\alpha \leq a - r$ et $a + r \leq \beta$. Alors $] a - r, a + r [\subseteq] \alpha, \beta [= I$, autrement dit $B(a, r) \subseteq I$. Ceci étant vrai pour tout $a \in I$, on en déduit que I est un ouvert.

Inversement, supposons que I ne soit pas un intervalle ouvert. Alors I est par exemple de la forme $[\alpha, \beta [$. Le point $a := \alpha$ est dans I , mais pour tout $r > 0$, la boule $B(a, r) =] \alpha - r, \alpha + r [$ déborde de I (sur la gauche); donc I n'est pas un ouvert de \mathbb{R} . \square

EXEMPLE 2. Si (E, d) est un espace métrique quelconque, alors toute *boule ouverte* $B(x_0, r)$ est un ouvert de E .

Démonstration. Soit $a \in B(x_0, r)$ quelconque. Comme $d(a, x_0) < r$, on peut choisir $r_a > 0$ tel que $r_a + d(a, x_0) \leq r$ (par exemple $r_a := r - d(a, x_0)$!). D'après l'inégalité triangulaire, on a alors $B(a, r_a) \subseteq B(x_0, r)$ (**exo**). Ainsi, pour tout $a \in B(x_0, r)$ on a trouvé $r_a > 0$ tel que $B(a, r_a) \subseteq B(x_0, r)$, donc $B(x_0, r)$ est un ouvert de E . \square

EXEMPLE 3. Si d est la distance discrète sur un ensemble E , alors tout ensemble $A \subseteq E$ est ouvert pour d .

Démonstration. Si $a \in A$, alors $B(a, 1) = \{a\} \subseteq A$. \square

REMARQUE. Pour une raison qui apparaîtra clairement dans quelques lignes, on dit qu'un espace métrique E est **topologiquement discret** si toutes les parties de E sont des ensembles ouverts.

PROPOSITION 1.2. Soit (E, d) un espace métrique, et notons \mathfrak{T}_d la famille de tous les ouverts de (E, d) . La famille \mathfrak{T}_d possède les propriétés suivantes :

- (T0) \mathfrak{T}_d contient \emptyset et E (autrement dit : \emptyset et E sont des ouverts) ;
- (T1) \mathfrak{T}_d est **stable par réunions quelconques** (si $(O_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque d'ouverts, alors $O = \bigcup_i O_i$ est encore un ouvert) ;
- (T2) \mathfrak{T}_d est **stable par intersections finies** (si O_1, \dots, O_N sont ouverts, alors $O = O_1 \cap \dots \cap O_N$ est encore ouvert).

Démonstration. La propriété (T0) est évidente.

(T1) Soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille quelconque d'ouverts de E et soit $O := \bigcup_i O_i$. Si $a \in O$, on peut trouver un indice i tel que a appartienne à l'ouvert O_i , puis $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O_i$. Alors $B(a, r) \subseteq O$; et ceci étant vrai pour tout $a \in O$, on en déduit que O est un ouvert.

(T2) Soient O_1, \dots, O_N des ouverts de E , et soit $O := O_1 \cap \dots \cap O_N$. Si $a \in O$, on peut, pour $i = 1, \dots, N$, trouver $r_i > 0$ tel que $B(a, r_i) \subseteq O_i$. Si on pose $r := \min(r_1, \dots, r_N)$, alors $B(a, r) \subseteq B(a, r_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, donc $B(a, r) \subseteq O_1 \cap \dots \cap O_N = O$. Comme $a \in O$ est quelconque, cela montre que O est un ouvert de E . \square

COROLLAIRE 1.3. Dans un espace métrique, un ensemble O est ouvert si et seulement si c'est une réunion de boules ouvertes.

Démonstration. D'après la proposition, une réunion de boules ouvertes est un ouvert (car les boules ouvertes sont des ouverts). Inversement, si $O \subseteq E$ est ouvert, alors O est *par définition* la réunion de toutes les boules ouvertes de E contenues dans O . \square

Exercice. Montrer qu'en général, une intersection quelconque d'ouverts n'est pas un ouvert.

REMARQUE. Si E est un ensemble abstrait, une famille \mathfrak{T} de parties de E vérifiant les propriétés (T0), (T1), (T2) ci-dessus s'appelle une **topologie sur E** . Si d est une distance sur E , la topologie \mathfrak{T}_d s'appelle la *topologie définie par d* . Un **espace topologique** est un ensemble E muni d'une topologie. Ainsi, tout espace métrique est en particulier un espace topologique.

Exercice. Soit E un ensemble contenant au moins 2 points, et soit $\mathfrak{T} := \{\emptyset, E\}$. Montrer que \mathfrak{T} est une topologie sur E , et que \mathfrak{T} ne peut pas être définie par une distance.

DÉFINITION 1.4. Soit E un espace métrique, et soit $a \in E$. On dit qu'un ensemble $V \subseteq E$ est un **voisinage de a dans E** s'il existe un ouvert O tel que $a \in O$ et $O \subseteq V$.

Remarque 1. Il revient au même de dire qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq V$.

Démonstration. C'est un **exo** facile. \square

Remarque 2. Par définition, si V est un voisinage de a , alors tout ensemble V' contenant V est encore un voisinage de a .

Remarque 3. Un voisinage de a n'a aucune raison d'être un ouvert. Par exemple, $[0, 1]$ est un voisinage de $1/2$ dans \mathbb{R} (et en fait un voisinage de tout point $a \in]0, 1[$). De même, dans un espace métrique quelconque, toute boule fermée $\overline{B}(a, r)$ est un voisinage de a (car la boule fermée contient la boule ouverte).

REMARQUE 4. Pour tout ensemble $W \subseteq E$, on a l'équivalence suivante :

$$(W \text{ est ouvert}) \iff (W \text{ est un voisinage de chacun de ses points}).$$

Démonstration. C'est évident d'après la Remarque 1. \square

1.2. Ensembles fermés.

DÉFINITION 1.5. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $C \subseteq E$. On dit que C est un **fermé de (E, d)** s'il "contient tous ses points limites" ; autrement dit si, à chaque fois qu'une suite de points de C converge vers un point de E , sa limite appartient encore à C . Avec plus de symboles mathématiques : C est fermé si, pour toute suite $(u_k) \subseteq C$ telle que $u_k \rightarrow a \in E$, on a que $a \in C$.

Remarque. Deux distances Lipschitz-équivalentes définissent les mêmes fermés (c'est évident puisqu'elles définissent les mêmes suites convergentes). On conviendra donc que si E est un espace vectoriel de dimension finie, l'expression "fermé de E " signifiera "fermé pour la distance associée n'importe quelle norme".

EXEMPLE 1. Dans \mathbb{R} , un intervalle est un ensemble fermé si et seulement $I = \mathbb{R}$ ou bien I est de la forme $[\alpha, \beta]$, $[\alpha, \infty[$ ou $]-\infty, \beta]$.

Démonstration. Montrons par exemple que tout intervalle de la forme $[\alpha, \infty[$ est fermé dans \mathbb{R} . Soit $(u_k) \subseteq [\alpha, \infty[$ convergeant vers $a \in \mathbb{R}$. On a $u_k \geq \alpha$ pour tout k , donc $a = \lim u_k \geq \alpha$ car les inégalités *larges* se conservent à la limite.

Inversement, soit $I = (\alpha, \beta)$ un intervalle qui est un fermé de \mathbb{R} . Il s'agit de voir que I contient α si $\alpha > -\infty$ et contient β si $\beta < \infty$. Supposons $\alpha > -\infty$. Choisissons une suite (u_k) telle que $u_k > \alpha$ pour tout k et $u_k \rightarrow \alpha$. Alors $u_k \in]\alpha, \beta[\subseteq I$ pour k assez grand ; et comme I est supposé être un fermé de \mathbb{R} , cela montre que $\alpha \in I$. La preuve que $\beta \in I$ si $\beta < \infty$ est la même. \square

EXEMPLE 2. Dans un espace métrique quelconque, toute *boule fermée* $\overline{B}(x_0, r)$ est un ensemble fermé. En particulier, tout *singleton* $\{a\}$ est un ensemble fermé (puisque $\{a\} = \overline{B}(a, 0)$).

Démonstration. Soit (u_k) une suite d'éléments de $\overline{B}(x_0, r)$ convergeant vers $a \in E$. Alors $d(u_k, x_0) \rightarrow d(a, x_0)$ car la fonction $u \mapsto d(u, x_0)$ est continue sur E . Comme $d(u_k, x_0) \leq r$ pour tout k , on obtient donc $d(a, x_0) \leq r$ en passant à la limite ; donc $a \in \overline{B}(x_0, r)$. \square

EXEMPLE 3. Si (E, d) est un espace métrique discret (*i.e.* d est la distance discrète), alors tout ensemble $A \subseteq E$ est fermé.

Démonstration. Soit $A \subseteq E$ quelconque, et soit (u_k) une suite de points de A convergeant vers un point $a \in E$. Comme $u_k \rightarrow a$, on peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_k, a) < 1$ pour tout $k \geq K$. Par définition de la distance discrète, on a donc $u_k = a$ pour tout $k \geq K$, et en particulier $a \in A$. \square

La (très importante) proposition suivante montre que les notions d'ouvert et de fermé sont "duales" l'une de l'autre.

PROPOSITION 1.6. *Dans un espace métrique E , un ensemble $C \subseteq E$ est fermé si et seulement si son complémentaire $E \setminus C$ est ouvert.*

Démonstration. (i) Supposons que C soit fermé. Soit $a \in O := E \setminus C$ quelconque. Par l'absurde, supposons qu'on ne puisse pas trouver $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O$. Cela signifie que pour tout $r > 0$, il existe un point $u^r \in E$ tel que $d(u^r, a) < r$ et $u^r \notin O$, *i.e.* $u^r \in C$. En prenant $r := \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}^*$ et en posant $u_k := u^{1/k}$, on obtient une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $d(u_k, a) < \frac{1}{k}$ et $u_k \in C$ pour tout k . Alors $u_k \rightarrow a$; donc $a \in C$ puisque C est supposé fermé, ce qui est absurde puisque $a \in O = E \setminus C$. Ainsi, on a bien montré qu'il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O$.

(ii) Supposons maintenant que $O = E \setminus C$ soit ouvert. Soit (u_k) une suite quelconque d'éléments de C convergeant vers un point $a \in E$. Par l'absurde, supposons que $a \notin C$, *i.e.* $a \in O$. Comme O est ouvert, on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O$; et comme $u_k \rightarrow a$, on peut trouver k tel que $u_k \in B(a, r)$. Alors $u_k \in O = E \setminus C$, ce qui est absurde. Ainsi $a \in C$, ce qui prouve que C est fermé. \square

COROLLAIRE 1.7. *Si E est un espace métrique, la famille des fermés de E possède les propriétés suivantes : \emptyset et E sont des fermés ; toute intersection de fermés est un fermé ; et toute réunion finie de fermés est un fermé.*

Démonstration. C'est évident d'après la proposition 1.6 et la Proposition 1.2, en "passant aux complémentaires". \square

Exercice. Donner un exemple d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ qui ne soit ni ouvert ni fermé.

1.3. Convergence et continuité (bis). Les deux remarques suivantes montrent que la convergence et la continuité peuvent se reformuler sans faire explicitement appel aux distances, mais uniquement en termes de voisinages (et donc uniquement en termes d'ouverts). Cela signifie que la convergence et la continuité sont des notions *topologiques* et pas réellement "métriques".

REMARQUE 1.8. Soit E un espace métrique, (u_k) une suite de points de E et $a \in E$. Alors

$$(u_k \rightarrow a) \iff (\forall V \text{ voisinage de } a, \exists K \text{ tel que } \forall k \geq K : u_k \in V).$$

Démonstration. C'est "évident" ; ce qui signifie qu'il faut écrire les deux lignes de preuve pour s'en convaincre tout à fait. \square

REMARQUE 1.9. Soient E, F des espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ et $a \in E$. Alors (f continue en a) \iff ($\forall W$ voisinage de $f(a)$, $\exists V$ voisinage de a tel que $f(V) \subseteq W$).

Démonstration. C'est à nouveau "évident" (écrire les détails). \square

La proposition qui suit est importante car elle ouvre la porte à une “autre façon de penser” ; et elle est aussi très utile en pratique. Rappelons que pour toute application $f : E \rightarrow F$, on note $f^{-1}(A)$ l’**image réciproque par f** d’un ensemble $A \subseteq F$:

$$f^{-1}(A) := \{u \in E; f(u) \in A\}.$$

Rappelons aussi que les images réciproques se comporte bien par rapport aux opérations ensemblistes :

$$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c, \quad f^{-1}\left(\bigcup_{i \in I} A_i\right) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(A_i), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(A_i).$$

PROPOSITION 1.10. *Soient E et F deux espaces métriques. Pour une application $f : E \rightarrow F$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) f est continue ;
- (2) pour tout ouvert $O \subseteq F$, $f^{-1}(O)$ est ouvert dans E ;
- (3) pour tout fermé $C \subseteq F$, $f^{-1}(C)$ est fermé dans E .

Démonstration. L’équivalence de (2) et (3) est claire par la Proposition 1.6 en “passant aux complémentaires”, car $f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ pour tout ensemble $A \subseteq F$.

Supposons f continue, et montrons que (2) est vérifiée. Soit $O \subseteq F$ un ouvert quelconque, et soit $a \in f^{-1}(O)$. Alors $f(a)$ appartient à l’ouvert O , donc on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(f(a), \varepsilon) \subseteq O$. Comme f est continue en a , on peut ensuite trouver $\delta > 0$ tel que $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Alors $f(B(a, \delta)) \subseteq O$, autrement dit $B(a, \delta) \subseteq f^{-1}(O)$. Comme on est parti d’un point quelconque $a \in f^{-1}(O)$, cela montre que $f^{-1}(O)$ est un ouvert de E .

Supposons maintenant (2) vérifiée, et montrons que f est continue. Soit $a \in E$ quelconque, et soit $\varepsilon > 0$. Alors $B(f(a), \varepsilon)$ est un ouvert de F , donc $O := f^{-1}(B(f(a), \varepsilon))$ est un ouvert de E . Comme $a \in O$ (puisque $f(a) = \dots f(a)$), on peut donc trouver $\delta > 0$ tel que $B(a, \delta) \subseteq O$, autrement dit $f(B(a, \delta)) \subseteq B(f(a), \varepsilon)$. Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, cela montre que f est continue en tout point $a \in E$. \square

Remarque. Par la Proposition 1.10, on voit que deux espaces métriques E et F sont homéomorphes si et seulement si il existe une bijection $f : E \rightarrow F$ telle que $f^{-1}(U)$ est ouvert dans E pour tout ouvert $V \subseteq F$ et $f(U)$ est ouvert dans F pour tout ouvert $U \subseteq E$. Cela signifie que E et F sont “indistinguables en tant qu’espaces topologiques”.

Exercice 1. Soient E, F des espaces métriques, $f : E \rightarrow F$ et $a \in E$. Montrer que f est continue au point a si et seulement si la propriété suivante a lieu : pour tout voisinage W de $f(a)$ dans F , l’ensemble $f^{-1}(W)$ est un voisinage de a .

Exercice 2. Donner un exemple d’une fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et d’un ouvert $O \subseteq \mathbb{R}$ tels que $f(O)$ ne soit pas ouvert.

EXEMPLE 1. Soit E un espace métrique, soit $a \in E$ et soit $r \geq 0$. Si on note $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction $u \mapsto d(u, a)$, alors $B(a, r) = \{u; f(u) < r\} = f^{-1}(]-\infty, r[)$. Comme $]-\infty, r[$ est un ouvert de \mathbb{R} et comme f est continue, cela “explique pourquoi” $B(a, r)$ est un ouvert de E . De même, $\overline{B}(a, r) = f^{-1}(]-\infty, r])$, donc $\overline{B}(a, r)$ est un fermé de E car $]-\infty, r]$ est un fermé de \mathbb{R} .

EXEMPLE 2. Soit E un espace métrique, soit $a \in E$ et soit $r \geq 0$. Notons $S(a, r) := \{u \in E; d(u, a) = r\}$ la **sphère** de centre a et de rayon r . Alors $S(a, r)$ est un fermé de E .

Démonstration. On a $S(a, r) = f^{-1}(\{r\})$, où $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction continue $u \mapsto d(u, a)$; d'où le résultat car le singleton $\{r\}$ est un fermé de \mathbb{R} . \square

Exemple 3. L'ensemble $V := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0 \text{ et } y < 1/x\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 , et l'ensemble $C := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x \geq 0, y^3 + 5z^2 \leq 6 \text{ et } x^5 - y^2 + z^4 = 1\}$ est un fermé de \mathbb{R}^3 .

Démonstration. On a $V = \{(x, y); x > 0\} \cap \{(x, y); y > 0\} \cap \{(x, y); xy < 1\}$. Autrement dit, $V = f^{-1}(]0, \infty[) \cap g^{-1}(]0, \infty[) \cap h^{-1}(]-\infty, 1[)$, où $f, g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sont les fonctions définies par $f(x, y) := x$, $g(x, y) := y$ et $h(x, y) := xy$. Comme $]0, \infty[$ et $]-\infty, 1[$ sont des ouverts de \mathbb{R} et comme les fonctions f, g, h sont continues, on voit ainsi que V apparaît comme l'intersection de 3 ouverts de \mathbb{R}^2 , et par conséquent V est ouvert. De même, on a $C = f^{-1}([0, \infty[) \cap g^{-1}(]-\infty, 6]) \cap h^{-1}(\{1\})$, où $f(x, y, z) := x$, $g(x, y, z) := y^3 + 5z^2$ et $h(x, y, z) := x^5 - y^2 + z^4$. Ainsi, C apparaît comme l'intersection de 3 fermés de \mathbb{R}^3 (car $[0, \infty[$, $]-\infty, 6]$ et $\{1\}$ sont des fermés de \mathbb{R} et les fonctions f, g, h sont continues), et donc C est un fermé. \square

EXEMPLE 4. $GL_N(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_N(\mathbb{K})$.

Démonstration. On a $GL_N(\mathbb{K}) = \{M \in M_N(\mathbb{K}); \det(M) \neq 0\} = \Phi^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\})$, où Φ est l'application continue $M \mapsto \det(M)$. Comme $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ est un ouvert de \mathbb{K} (car $\{0\}$ est fermé), on en déduit le résultat souhaité. \square

REMARQUE. Il y a un principe général à retenir des exemples précédents : les *inégalités strictes* et les “*non égalités*” définissent des *ouverts*, tandis que les *inégalités larges* et les *égalités* définissent des *fermés*.

1.4. Distances topologiquement équivalentes.

DÉFINITION 1.11. Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E . On dit que d et d' sont **topologiquement équivalentes** si elles définissent la même topologie; autrement dit, si tout ouvert pour d est ouvert pour d' et vice versa.

Cette définition peut se traduire en termes de suites :

LEMME 1.12. Deux distances d et d' sur E sont topologiquement équivalentes si et seulement si elles possèdent les mêmes suites convergentes; autrement dit, si toute suite convergeant pour d converge aussi pour d' (vers la même limite) et vice versa.

Démonstration. Si d et d' possèdent les mêmes suites convergentes, alors elles définissent les mêmes *fermés* par définition d'un fermé; donc elles définissent les mêmes ouverts (*i.e.* sont topologiquement équivalentes) d'après la Proposition 1.6. Inversement, si d et d' sont topologiquement équivalentes, alors elles possèdent les mêmes suites convergentes car la convergence des suites est une “notion topologique” (*cf* la Remarque 1.8). \square

Remarque. Comme deux distances Lipschitz-équivalentes définissent les mêmes suites convergentes, on voit ainsi que deux distances Lipschitz-équivalentes sont topologiquement équivalentes... ce qu'on savait déjà.

Exercice 1. Soient E et F des espaces métriques. Montrer que les applications continues entre E et F restent les mêmes si on remplace les distances de E et F par des distances topologiquement équivalentes.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel. Montrer que deux normes sur E définissent des distances topologiquement équivalentes si et seulement elles sont équivalentes en tant que normes.

Exercice 3. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que la formule $\delta(u, v) := \min(1, d(u, v))$ définit une distance topologiquement équivalente à d .

Exercice 4. Soit E un evn, $E \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe sur E une distance topologiquement équivalente à la distance définie par la norme de E , mais qui ne peut pas être définie par une norme.

2. Intérieur, adhérence, frontière

2.1. Intérieur d'un ensemble.

DÉFINITION 2.1. Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. On dit qu'un point $a \in E$ est **intérieur à A** s'il existe un ouvert V tel que $a \in V$ et $V \subseteq A$; autrement dit, si A est un voisinage de a . On note $\overset{\circ}{A}$ l'ensemble des points de E intérieurs à A .

Remarque 0. La définition se reformule somme suit : a est intérieur à A si et seulement si on peut trouver $r > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq A$.

Remarque 1. On a évidemment $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} \subseteq A$.

Remarque 2. L'opération de prise d'intérieur est *croissante* : si $A \subseteq B$, alors $\overset{\circ}{A} \subseteq \overset{\circ}{B}$.

EXEMPLE 1. Prenons $E = \mathbb{R}$. Si $A \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle (a, b) de nature quelconque, alors $\overset{\circ}{A}$ est l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Démonstration. **Exo.** □

EXEMPLE 2. Dans $E = \mathbb{R}$, on a $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$ et $\overset{\circ}{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \emptyset$.

Démonstration. Soit $a \in \mathbb{R}$ quelconque. Tout ouvert V contenant a contient un intervalle ouvert non-vidé, et donc contient des points de \mathbb{Q} et des points de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Donc a ne peut être intérieur ni à $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ni à \mathbb{Q} . □

EXEMPLE 3. Soit E un *espace vectoriel normé*. Si $x_0 \in E$ et $r > 0$, alors l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(x_0, r)$ est la boule ouverte $B(x_0, r)$.

Démonstration. Si a est un point quelconque de $B(x_0, r)$, alors $\overline{B}(x_0, r)$ est un voisinage de a car $B(x_0, r)$ est un ouvert de E ; donc tout point de $B(x_0, r)$ est intérieur à $\overline{B}(x_0, r)$.

Inversement, soit a un point intérieur à $\overline{B}(x_0, r)$. Alors a appartient en particulier à $\overline{B}(x_0, r)$, i.e. $\|a - x_0\| \leq r$. Il s'agit de voir qu'en fait $\|a - x_0\| < r$.

Par l'absurde, supposons que $\|a - x_0\| = r$. Pour $\varepsilon > 0$, posons $u_\varepsilon := a + \varepsilon(a - x_0)$. On a $u_\varepsilon - x_0 = (1 + \varepsilon)(a - x_0)$, donc $\|u_\varepsilon - x_0\| = (1 + \varepsilon)\|a - x_0\| = (1 + \varepsilon)r > r$. Ainsi, $u_\varepsilon \notin \overline{B}(x_0, r)$. (Faire un dessin pour se convaincre que cela est évident, même sans calcul.) Cependant, comme a est intérieur à $\overline{B}(x_0, r)$, on peut trouver $r_a > 0$ tel que $\overline{B}(a, r_a) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$. Comme $u_\varepsilon \rightarrow a$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$, on peut ensuite trouver $\varepsilon > 0$ tel que $u_\varepsilon \in \overline{B}(a, r_a)$; et ainsi $u_\varepsilon \in \overline{B}(x_0, r)$, ce qui est la contradiction cherchée. □

Exercice. Montrer que dans un espace métrique quelconque, une boule ouverte $B(a, r)$ est toujours *contenue* dans l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a, r)$, mais qu'on n'a pas forcément égalité.

PROPOSITION 2.2. *Soit E un espace métrique. Si $A \subseteq E$, alors $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert de E , et c'est le **plus grand** ouvert de E contenu dans A .*

Démonstration. Par définition, $\overset{\circ}{A}$ est la réunion de tous les ouverts de E contenus dans A . Donc $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert par la Proposition 1.2, et c'est visiblement le plus grand ouvert contenu dans A . \square

COROLLAIRE 2.3. *Si $A \subseteq E$, alors $(A \text{ ouvert}) \iff (\overset{\circ}{A} = A) \iff (A \subseteq \overset{\circ}{A})$.*

Démonstration. Il suffit de remarquer d'une part que A est ouvert si et seulement si A est le plus grand ouvert de E contenu dans A (!), et d'autre part que $A = \overset{\circ}{A}$ si et seulement si $A \subseteq \overset{\circ}{A}$ car l'inclusion $\overset{\circ}{A} \subseteq A$ est toujours vraie. \square

COROLLAIRE 2.4. *L'opération de prise d'intérieur est idempotente : pour tout $A \subseteq E$, on a $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$.*

Démonstration. C'est évident par le corollaire précédent puisque $\overset{\circ}{A}$ est un ouvert. \square

COROLLAIRE 2.5. *Si $A, B \subseteq E$ alors $\overset{\circ}{A \cap B} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.*

Démonstration. Comme $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ est un ouvert contenu dans $A \cap B$, on a $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{A \cap B}$. Inversement, $\overset{\circ}{A \cap B} \subseteq \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A \cap B} \subseteq \overset{\circ}{B}$ par croissance de l'opération de prise d'intérieur, donc $\overset{\circ}{A \cap B} \subseteq \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. \square

Exercice. Quelle relation y a-t-il entre $\overset{\circ}{A \cup B}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$? Plus généralement, si $(A_i)_{i \in I}$ est une famille de parties de E , quelle relation y a-t-il entre l'intérieur de $\bigcup_{i \in I} A_i$ et $\bigcup_{i \in I} \overset{\circ}{A}_i$?

2.2. Adhérence d'un ensemble.

DÉFINITION 2.6. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. On dit qu'un point $u \in E$ est **adhérent** à A si tout voisinage V de u rencontre A (i.e. $V \cap A \neq \emptyset$ pour tout voisinage V de u). On note \overline{A} l'ensemble des points de E adhérents à A .*

Remarque 0. La définition se reformule comme suit : u est adhérent à A si et seulement si $\forall \varepsilon > 0 \exists a \in A$ tel que $d(u, a) < \varepsilon$.

Remarque 1. On a évidemment $A \subseteq \overline{A}$.

Remarque 2. L'opération de prise d'adhérence est croissante : si $A \subseteq B$, alors $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

REMARQUE 3. Les notions d'intérieur et d'adhérence sont "duales" au sens suivant : pour tout $A \subseteq E$, on a

$$(2.1) \quad \overline{A} = E \setminus (\overset{\circ}{E \setminus A}), \quad \text{autrement dit} \quad E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}.$$

En remplaçant A par $E \setminus A$, on en déduit

$$(2.2) \quad \overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Démonstration. C'est "évident par définition" : pour $u \in E$, on a les équivalences

$$\begin{aligned} u \notin \overline{A} &\iff \exists V \text{ voisinage de } u \text{ tel que } V \cap A = \emptyset \\ &\iff \exists V \text{ voisinage de } u \text{ tel que } V \subseteq E \setminus A \\ &\iff E \setminus A \text{ est un voisinage de } u \\ &\iff u \in \overset{\circ}{E \setminus A}. \end{aligned}$$

□

EXEMPLE 1. Prenons $E = \mathbb{R}$. Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, alors $\overline{]a, b[} = [a, b]$.

Démonstration. **Exo.**

□

EXEMPLE 2. Dans \mathbb{R} , on a $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}}$.

Démonstration. C'est clair d'après (2.1) ou (2.2) puisque $\overset{\circ}{\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}} = \emptyset = \overset{\circ}{\mathbb{Q}}$.

□

EXEMPLE 3. Si A est une partie (non-vide) majorée de \mathbb{R} , alors $\sup A \in \overline{A}$; si A est minorée, alors $\inf A \in \overline{A}$.

Démonstration. Supposons A majorée, et soit $\beta := \sup A$. Par définition, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $a \in A$ tel que $\beta - \varepsilon < a \leq \beta$, et donc $|\beta - a| < \varepsilon$. Donc $\beta \in \overline{A}$ par définition de \overline{A} .

□

EXEMPLE 4. Dans un *espace vectoriel normé*, l'adhérence d'une boule ouverte non triviale est la boule fermée correspondante.

Démonstration. Soit $B = B(x_0, r)$ une boule ouverte de E , avec $r > 0$.

Si $u \in \overline{B}$, on peut pour tout $\varepsilon > 0$ trouver un point $a \in B$ tel que $\|u - a\| < \varepsilon$, ce qui entraîne $\|u - x_0\| \leq \|u - a\| + \|a - x_0\| < \varepsilon + r$. Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on a donc $\|u - x_0\| \leq r$ pour tout $u \in \overline{B}$, i.e. $\overline{B} \subseteq \overline{B}(x_0, r)$.

Inversement, soit $u \in \overline{B}(x_0, r)$. Pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, le point $a_\varepsilon := u - \varepsilon(u - x_0) = \varepsilon x_0 + (1 - \varepsilon)u$ vérifie $\|a_\varepsilon - x_0\| = (1 - \varepsilon)\|u - x_0\| < r$ (donc $a_\varepsilon \in B$), et $\|a_\varepsilon - u\| = \varepsilon\|u - x_0\|$. Comme ε est arbitraire, on voit ainsi qu'on peut trouver des points de $B(x_0, r)$ arbitrairement proches de u , autrement dit que u est adhérent à $B(x_0, r)$. Ainsi, $\overline{B}(x_0, r) \subseteq \overline{B}$.

□

Exercice. Montrer que dans un espace métrique quelconque, l'adhérence d'une boule ouverte $B(a, r)$ est toujours *contenue* dans la boule fermée $\overline{B}(a, r)$, mais qu'on n'a pas forcément égalité.

PROPOSITION 2.7. Soit E un espace métrique. Si $A \subseteq E$, alors \overline{A} est un fermé de E , et c'est le **plus petit** fermé de E contenant A .

Démonstration. Comme $E \setminus \overline{A} = \overset{\circ}{E \setminus A}$ est ouvert, \overline{A} est un fermé de E . Si C est un fermé contenant A , alors $V := E \setminus C$ est un ouvert contenu dans $E \setminus A$, donc $E \setminus C \subseteq \overset{\circ}{E \setminus A} = E \setminus \overline{A}$ et donc $C \supseteq \overline{A}$. Ainsi, \overline{A} est bien le plus petit fermé de E contenant A .

□

COROLLAIRE 2.8. Si $A \subseteq E$, alors $(A \text{ fermé}) \iff (\overline{A} = A) \iff (\overline{A} \subseteq A)$.

Démonstration. **Exo.**

□

COROLLAIRE 2.9. *l'opération de prise d'adhérence est idempotente : pour tout $A \subseteq E$, on a $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.*

Démonstration. C'est clair puisque \overline{A} est fermé. □

COROLLAIRE 2.10. *Si $A, B \subseteq E$, alors $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.*

Démonstration. Comme $\overline{A} \cup \overline{B}$ est fermé et contient $A \cup B$, on a $\overline{A \cup B} \subseteq \overline{A} \cup \overline{B}$. Inversement, $\overline{A} \subseteq \overline{A \cup B}$ et $\overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$ par croissance de l'opération de prise d'adhérence, donc $\overline{A} \cup \overline{B} \subseteq \overline{A \cup B}$. □

Exercice. Quel lien y a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$?

COROLLAIRE 2.11. *Si E est un espace métrique quelconque, alors l'adhérence d'une boule ouverte $B(x_0, r)$ est toujours contenue dans la boule fermée $\overline{B}(x_0, r)$.*

Démonstration. On le savait déjà (cf un exo posé un peu plus haut)... et on peut le déduire comme suit de la proposition : on a $B(x_0, r) \subseteq \overline{B}(x_0, r)$, et on sait que $\overline{B}(x_0, r)$ est un fermé de E ; donc $\overline{B(x_0, r)} \subseteq \overline{\overline{B}(x_0, r)}$. □

La proposition suivante montre que l'adhérence d'un ensemble A est exactement l'ensemble de ses "points limites".

PROPOSITION 2.12. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. Pour un point $u \in E$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) $u \in \overline{A}$;
- (2) il existe une suite (a_k) de points de A telle que $a_k \rightarrow u$;
- (3) $\text{dist}(u, A) = 0$.

Démonstration. (1) \implies (2). Si $u \in \overline{A}$, alors $B(u, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ pour tout $\varepsilon > 0$, autrement dit on peut trouver $a = a^\varepsilon \in A$ tel que $d(a, u) < \varepsilon$. En prenant $\varepsilon := 1/k$, $k \in \mathbb{N}^*$, on obtient une suite $(a_k) \subseteq A$ telle que $d(a_k, u) < 1/k$ pour tout k , ce qui prouve (2).

(2) \implies (3). Si $a_k \rightarrow u$ avec $a_k \in A$, alors $0 \leq \text{dist}(u, A) \leq d(u, a_k)$ pour tout k et donc $\text{dist}(u, A) = 0$ en faisant tendre k vers l'infini.

(3) \implies (1). Si $\text{dist}(u, A) = 0$ alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $a = a_\varepsilon \in A$ tel que $d(u, a) < \varepsilon$; donc $u \in \overline{A}$. □

COROLLAIRE 2.13. *Si C est un fermé de E et si $u \in E \setminus C$, alors $\text{dist}(u, C) > 0$.*

Démonstration. **Exo.** □

Exercice 1. Soient $A, B \subseteq E$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ en utilisant la "caractérisation séquentielle de l'adhérence".

EXERCICE 2. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $M \subseteq E$ un sous-espace vectoriel fermé. Pour tout $x \in E$, on note $[x]$ la classe de x dans l'espace vectoriel quotient E/M . Montrer qu'on définit une norme sur E/M en posant

$$\|[x]\|_{E/M} := \text{dist}(x, M) \quad \text{pour tout } x \in E.$$

On dit que cette norme est la **norme quotient** sur E/M .

Voici pour finir un dernier résultat utile.

PROPOSITION 2.14. *Soient E, F deux espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$. Alors f est continue si et seulement si $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ pour tout ensemble $A \subseteq E$.*

Démonstration. Supposons f continue. Soit $A \subseteq E$, et soit $u \in \overline{A}$. Par la Proposition 2.12, on peut trouver une suite $(a_k) \subseteq A$ telle que $a_k \rightarrow u$. Alors $f(a_k) \rightarrow f(u)$, et donc $f(u) \in \overline{f(A)}$ puisque les $f(a_k)$ appartiennent à $f(A)$. Ceci étant vrai pour tout $u \in \overline{A}$, on a donc $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Inversement, supposons qu'on ait $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$ pour tout ensemble $A \subseteq E$. Pour montrer que f est continue, il suffit de montrer que l'image réciproque par f de tout fermé $C \subseteq F$ est un fermé de E . Soit donc C un fermé quelconque de F , et soit $A := f^{-1}(C)$. Par hypothèse, on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. Comme $f(A) \subseteq C$ et C est fermé, on en déduit $f(\overline{A}) \subseteq \overline{C} = C$, i.e. $\overline{A} \subseteq f^{-1}(C) = A$. Ainsi, $A = f^{-1}(C)$ est fermé dans E pour tout fermé $C \subseteq F$, ce qui prouve que f est continue. \square

2.3. Frontière d'un ensemble.

DÉFINITION 2.15. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. On dit qu'un point $u \in E$ est un **point frontière** de A si u appartient à la fois à \overline{A} et à $\overline{E \setminus A}$. On note ∂A l'ensemble des points frontières de A , qu'on appelle la **frontière de A dans E** :*

$$\partial A = \overline{A} \cap \overline{E \setminus A}.$$

Remarque 1. Dans la définition A et $E \setminus A$ jouent des rôles symétriques. Donc

$$\partial A = \partial(E \setminus A).$$

Remarque 2. Comme $\overline{E \setminus A} = E \setminus \overset{\circ}{A}$, on a aussi

$$\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}.$$

Remarque 3. Par définition, ∂A est toujours un ensemble fermé.

EXEMPLE 1. Prenons $E := \mathbb{R}$. Si $I = (a, b)$ est un intervalle borné, alors $\partial I = \{a, b\}$. Si $I = (a, \infty[$ avec $a > -\infty$, alors $\partial I = \{a\}$. Si $I =]-\infty, b)$ avec $b < \infty$, alors $\partial I = \{b\}$.

Démonstration. Si par exemple $I = (a, b)$ est borné, alors $\overline{I} = [a, b]$ et $\overset{\circ}{I} =]a, b[$; donc $\partial I = [a, b] \setminus]a, b[= \{a, b\}$. \square

EXEMPLE 2. Dans \mathbb{R} , on a $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} = \partial(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.

Démonstration. On a vu que $\overline{\mathbb{Q}} = \mathbb{R}$ et $\overset{\circ}{\mathbb{Q}} = \emptyset$; donc $\partial \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \emptyset = \mathbb{R}$. \square

EXEMPLE 3. Dans un espace vectoriel normé, la frontière d'une boule ouverte non-vide est la sphère correspondante : $\partial B(a, r) = S(a, r) = \{u \in E; \|u - a\| = r\}$.

Démonstration. On a vu que l'adhérence de la boule ouverte $B = B(a, r)$ est la boule fermée $\overline{B}(a, r)$. Comme de plus B est un ouvert de E , on a donc $\partial B = \overline{B} \setminus \overset{\circ}{B} = \overline{B}(a, r) \setminus B(a, r) = S(a, r)$. \square

EXEMPLE 4. Si E est un espace métrique topologiquement discret, alors $\partial A = \emptyset$ pour tout $A \subseteq E$.

Démonstration. C'est évident puisque tout ensemble $A \subseteq E$ est à la fois ouvert et fermé : $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A} = A \setminus A = \emptyset$. \square

Exemple 5. Soit $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0 \text{ et } y \leq 1/x\}$. La frontière de A dans \mathbb{R}^2 est la réunion de la branche d'hyperbole $\Gamma := \{(x, y); x > 0, y > 0 \text{ et } xy = 1\}$ et des deux demi-droites $\{(x, 0); x \geq 0\}$ et $\{(0, y); y \geq 0\}$.

Démonstration. **Exo.** \square

3. Sous-espaces et produits

3.1. Ouverts et fermés d'un sous-espace. Dans cette section, E est un espace métrique et M est une partie de E .

L'ensemble M est lui même un espace métrique quand on le munit de la distance induite. Cependant, il faut être très prudent : les ouverts de M n'ont *a priori* aucune raison d'être ouverts dans E : par exemple, M est toujours ouvert dans M , mais pas forcément dans E . Plus généralement, les notions d'adhérence, d'intérieur, de frontière ont un sens *dans* M qui n'est en général pas du tout le même que *dans* E ; et ceci peut parfois être source de regrettables confusions.

La proposition suivante dit précisément ce que sont les ouverts *de* M .

PROPOSITION 3.1. *Un ensemble $A \subseteq M$ est ouvert dans M si et seulement si il est de la forme $A = O \cap M$, où O est un ouvert de E .*

Démonstration. Pour $a \in M$ et $r > 0$, notons $B_M(a, r)$ la boule ouverte de centre a et de rayon r dans M : par définition,

$$B_M(a, r) = \{u \in M; d(u, a) < r\} = B(a, r) \cap M.$$

Supposons que A soit ouvert dans M . Alors A est réunion de boules ouvertes de M :

$$A = \bigcup_{i \in I} B_M(a_i, r_i) = \bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i) \cap M.$$

Si on pose $O := \bigcup_{i \in I} B(a_i, r_i)$, alors O est un ouvert *de* E (réunion de boules ouvertes), et $A = O \cap M$.

Inversement, supposons que $A = O \cap M$ pour un certain ouvert $O \subseteq E$. Pour tout point $a \in A \subseteq O$, on peut trouver $r = r_a > 0$ tel que $B(a, r) \subseteq O$; et on a alors $B_M(a, r) = B(a, r) \cap M \subseteq O \cap M = A$. Ceci étant vrai pour tout $a \in A$, on voit ainsi que A est un ouvert de M . \square

Remarque. On voit en particulier que la topologie de M ne dépend que de la topologie du "gros" espace métrique E le contenant. Pour cette raison, il est légitime de dire que la topologie de M est la **topologie induite sur M par celle de E** .

COROLLAIRE 3.2. *Si $A \subseteq M$ est ouvert dans E , alors A est ouvert dans M .*

Démonstration. C'est évident par la proposition puisque $A = A \cap M$. \square

COROLLAIRE 3.3. *Si M est ouvert dans E et si $A \subseteq M$, alors*

$$(A \text{ ouvert dans } M) \iff (A \text{ ouvert dans } E).$$

Démonstration. C'est à nouveau évident : pour tout ouvert $O \subseteq E$, $O \cap M$ est ouvert dans E (intersection de deux ouverts), donc tout ouvert de M est ouvert dans sE ; et l'autre implication vient du corollaire précédent. \square

Les fermés du sous-espace M se décrivent de la même façon que les ouverts :

PROPOSITION 3.4. *Un ensemble $A \subseteq M$ est fermé dans M si et seulement si il est de la forme $A = C \cap M$, où C est un fermé de E .*

Démonstration. C'est "automatique par dualité" maintenant qu'on sait décrire les ouverts de M :

$$\begin{aligned}
A \text{ fermé dans } M &\iff M \setminus A \text{ ouvert dans } M \\
&\iff M \setminus A = O \cap M \quad \text{avec } O \text{ ouvert de } E \\
&\iff A = M \setminus (O \cap M) \quad \text{avec } O \text{ ouvert de } E \\
&\iff A = M \cap (E \setminus O) \quad \text{avec } O \text{ ouvert de } E \\
&\iff A = C \cap M \quad \text{avec } C \text{ fermé de } E.
\end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 3.5. *Si $A \subseteq M$, alors (A fermé dans E) \implies (A fermé dans M). La réciproque est vraie si M est fermé dans E .*

Démonstration. **Exo.**

□

COROLLAIRE 3.6. *Pour $A \subseteq M$, notons \overline{A}^M l'adhérence de A dans M . Alors*

$$\overline{A}^M = \overline{A} \cap M$$

Démonstration. Par la proposition, $\overline{A} \cap M$ est un fermé de M , qui contient A puisque $A \subseteq M$; donc $\overline{A} \cap M \supseteq \overline{A}^M$. Inversement, \overline{A}^M est fermé dans M , donc de la forme $\overline{A}^M = C \cap M$ où C est un fermé de E . Alors C contient A puisque $A \subseteq \overline{A}^M$, donc C contient \overline{A} puisque C est fermé dans E , et donc $\overline{A}^M = C \cap M \supseteq \overline{A} \cap M$. □

Exercice. Démontrer *directement* que $\overline{A}^M = \overline{A} \cap M$, en utilisant la "caractérisation séquentielle de l'adhérence".

3.2. Topologie produit. Dans cette section, $(E_1, d_1), \dots, (E_N, d_N)$ sont des espaces métriques et $E = E_1 \times \dots \times E_N$. On munit E de la distance produit. On va décrire précisément les ouverts de l'espace produit E .

FAIT 3.7. *Si O_1, \dots, O_N sont des ouverts de E_1, \dots, E_N respectivement, alors $O := O_1 \times \dots \times O_N$ est un ouvert de $E = E_1 \times \dots \times E_N$.*

Démonstration. Pour $j = 1, \dots, N$, notons $\pi_j : E \rightarrow E_j$ la j -ième "application coordonnée", $\pi_j(u_1, \dots, u_N) := u_j$. Comme la convergence dans E entraîne la convergence coordonnée par coordonnée, on voit que les π_j sont continues (**exo**). De plus, on a par définition

$$\begin{aligned}
O &= \{u = (u_1, \dots, u_N) \in E; u_j \in O_j \text{ pour } j = 1, \dots, N\} \\
&= \bigcap_{j=1}^N \pi_j^{-1}(O_j).
\end{aligned}$$

Donc O est ouvert dans E (intersection finie d'ouverts). □

DÉFINITION 3.8. *On appellera **ouvert élémentaire** de $E = E_1 \times \dots \times E_N$, tout ouvert $O \subseteq E$ de la forme $O = O_1 \times \dots \times O_N = \{u \in E; u_1 \in O_1, \dots, u_N \in O_N\}$, où O_1, \dots, O_N sont des ouverts de E_1, \dots, E_N respectivement.*

Remarque. Un O_j a éventuellement le droit d'être égal à E_j , et dans ce cas il ne "sert à rien". En d'autres termes, pour tout $J \subseteq \{1, \dots, N\}$, si on se donne un ouvert $O_j \subseteq E_j$ pour $j \in J$, alors l'ensemble $O := \{u \in E; u_j \in O_j \text{ pour } j \in J\}$ est un ouvert élémentaire.

PROPOSITION 3.9. *Un ensemble $A \subseteq E = E_1 \times \cdots \times E_N$ est ouvert dans E si et seulement si il est réunion d'ouverts élémentaires.*

Démonstration. Comme la famille des ouverts est stable par réunions, toute réunion d'ouverts élémentaires est un ouvert de E .

Pour la réciproque, comme tout ouvert de E est réunion de boules ouvertes, il suffit de montrer que toute boule ouverte de E (pour la distance produit) est en fait un ouvert élémentaire.

Notons d la distance produit sur E . Par définition, on a pour $u = (u_1, \dots, u_N)$ et $v = (v_1, \dots, v_N)$ dans E :

$$d(u, v) = \max(d_1(u_1, v_1), \dots, d_N(u_N, v_N)).$$

Soit $B = B(a, r)$ un boule ouverte de E , et écrivons $a = (a_1, \dots, a_N)$. Si $u = (u_1, \dots, u_N) \in E$, alors

$$\begin{aligned} u \in E &\iff \max(d(u_1, a_1), \dots, d_N(u_N, a_N)) < r \\ &\iff \forall j \in \{1, \dots, N\} : d_j(u_j, a_j) < r \\ &\iff \forall j \in \{1, \dots, N\} : u_j \in B(a_j, r). \end{aligned}$$

Ainsi, on voit que $B(a, r) = B(a_1, r) \times \cdots \times B(a_N, r)$; donc $B(a, r)$ est en effet un ouvert élémentaire. \square

REMARQUE. La proposition montre que la topologie de $E = E_1 \times \cdots \times E_N$ ne dépend que des topologies de E_1, \dots, E_N , et pas spécifiquement des distances choisies sur E_1, \dots, E_N . On dit que la topologie de E est la **topologie produit** des topologies de E_1, \dots, E_N .

4. Propriétés de “séparation”

Cette section contient un certain nombre de petites remarques souvent utiles.

FAIT 4.1. *Soit E un espace métrique. Si $a, b \in E$ et $a \neq b$, alors on peut **séparer** a et b par des ouverts : il existe des ouverts U, V tels que $a \in U$, $b \in V$ et $U \cap V = \emptyset$, et même $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Démonstration. Posons $\delta := d(a, b)$. Alors $\delta > 0$ car $a \neq b$. Montrons que $U := B(a, \delta/3)$ et $V := B(b, \delta/3)$ conviennent.

Supposons que $\overline{U} \cap \overline{V} \neq \emptyset$, et choisissons un point $x \in \overline{U} \cap \overline{V}$. Alors $x \in \overline{B(a, \delta/3)} \cap \overline{B(b, \delta/3)}$ d'après le Corollaire 2.11; donc $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq \delta/3 + \delta/3 = 2\delta/3 < \delta$, ce qui est absurde. \square

REMARQUE. Un espace topologique E dans lequel le Fait 4.1 est vrai est dit **séparé**.

Exercice. Montrer que dans un espace topologique séparé, on a *unicité de la limite* : une suite ne peut pas converger vers 2 points différents.

FAIT 4.2. *Soit E un espace métrique, et soit $a \in E$. Pour tout ouvert O contenant a , on peut trouver un ouvert U tel que $a \in U$ et $\overline{U} \subseteq O$.*

Démonstration. Comme O est ouvert et $a \in O$, on peut trouver $r > 0$ tel que $\overline{B(a, r)} \subseteq O$. Donc $U := B(a, r)$ convient (on a bien $\overline{U} \subseteq O$ car $\overline{U} \subseteq \overline{B(a, r)}$ d'après le Corollaire 2.11). \square

PROPOSITION 4.3. *Soit E un espace métrique. Si A, B sont des fermés de E tels que $A \cap B = \emptyset$, alors on peut trouver une fonction continue $f : E \rightarrow [0, 1]$ telle que $f \equiv 0$ sur A et $f \equiv 1$ sur B .*

Démonstration. Le point clé est l'observation suivante : pour tout $u \in E$, on a $\text{dist}(u, A) > 0$ ou $\text{dist}(u, B) > 0$. En effet, comme $A \cap B = \emptyset$, on a $u \notin A$ ou $u \notin B$, d'où le résultat car A et B sont des fermés de E .

Comme $\text{dist}(u, A)$ et $\text{dist}(u, B)$ sont par ailleurs toujours ≥ 0 , on en déduit que $\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B) > 0$ pour tout $u \in E$. On peut donc définir $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$f(u) := \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A) + \text{dist}(u, B)}.$$

La fonction f est continue en tant que quotient de fonctions continues (avec un dénominateur ne s'annulant pas) ; et il est évident qu'on a $0 \leq f(u) \leq 1$ pour tout $u \in E$. Enfin, si $u \in A$ alors $\text{dist}(u, A) = 0$ et donc $f(u) = 0$; et si $u \in B$, alors $\text{dist}(u, B) = 0$ et donc $f(u) = \frac{\text{dist}(u, A)}{\text{dist}(u, A)} = 1$. \square

COROLLAIRE 4.4. *Si A et B sont des fermés de E tels que $A \cap B = \emptyset$, alors on peut séparer A et B par des ouverts : il existe des ouverts U et V tels que $A \subseteq U$, $B \subseteq V$ et $U \cap V = \emptyset$, et même $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$.*

Démonstration. Si $f : E \rightarrow [0, 1]$ est comme dans la proposition, il suffit de poser $U := \{u \in E; f(u) < 1/3\}$ et $V := \{u \in E; f(u) > 2/3\}$. Les détails sont laissés en **exo**. \square

5. Parties denses

DÉFINITION 5.1. *Soit E un espace métrique, et soit $Z \subseteq E$. On dit que Z est **dense dans E** si on a $\overline{Z} = E$.*

REFORMULATIONS. Les choses suivantes sont équivalentes.

- (1) A est dense dans E .
- (2) Tout point $x \in E$ est limite d'une suite d'éléments de Z .
- (3) $\forall x \in E \forall \varepsilon > 0 \exists z \in Z : d(z, x) < \varepsilon$.
- (4) $Z \cap V \neq \emptyset$ pour tout ouvert non-vide $V \subseteq E$.
- (5) $E \setminus Z$ est d'intérieur vide dans E .

Démonstration. Il est clair que (1) \iff (2) \iff (3).

Supposons (2) vérifiée, et montrons (4). Soit V un ouvert non-vide de E , et choisissons un point $x \in V$. Par (2), on peut trouver une suite (z_k) de points de Z telle que $z_k \rightarrow x$. Comme V est un ouvert de E , c'est un voisinage de x , donc on peut trouver un indice k tel que $z_k \in V$. Alors $z_k \in V \cap Z$, et donc $V \cap Z \neq \emptyset$.

En y réfléchissant calmement, il est évident que (4) \iff (5) (**exo**). Enfin, (1) \iff (5) car l'intérieur de $E \setminus Z$ est égal à $E \setminus \overline{Z}$. \square

Remarque 1. La condition (3) signifie que $B \cap Z \neq \emptyset$ pour toute boule ouvert $B \subseteq E$.

Remarque 2. Soit E un espace métrique, soit $M \subseteq E$, et soit $Z \subseteq M$. Alors Z est dense dans M si et seulement si $\overline{Z} \supseteq M$.

Démonstration. Par définition, Z est dense dans M si et seulement $\overline{Z}^M = M$, où \overline{Z}^M est l'adhérence de Z dans M . Comme $\overline{Z}^M = \overline{Z} \cap M$, on a donc bien l'équivalence souhaitée (**micro-exo**). \square

EXEMPLE 1. \mathbb{Q} et $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ sont tous les deux denses dans \mathbb{R} .

Démonstration. On l'a déjà vu. \square

EXEMPLE 2. $GL_N(\mathbb{K})$ est dense dans $M_N(\mathbb{K})$, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} .

Démonstration. Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$ quelconque : il s'agit de trouver une suite $(A_k) \subseteq GL_N(\mathbb{K})$ telle que $A_k \rightarrow A$. Notons χ_A le polynôme caractéristique de A . Le polynôme χ_A n'a qu'un nombre fini de racines, donc on peut certainement trouver une suite $(\lambda_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{K}$ telle que $\lambda_k \rightarrow 0$ et $\chi_A(\lambda_k) \neq 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Si on pose $A_k := A - \lambda_k I$, alors $\det(A_k) = \chi_A(\lambda_k) \neq 0$, donc $A_k \in GL_N(\mathbb{K})$; et $A_k \rightarrow A$. \square

EXEMPLE 3. Si $[a, b]$ est un intervalle fermé borné de \mathbb{R} , les fonctions polynomiales sont denses dans $(\mathcal{C}([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Démonstration. C'est la traduction du **théorème de Weierstrass** (vu en L2, en principe), d'après lequel toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ est limite uniforme d'une suite de fonctions polynomiales. \square

Voici maintenant un exemple important pour la "culture générale". Rappelons qu'un ensemble $G \subseteq \mathbb{R}$ est un *sous-groupe* de \mathbb{R} si $0 \in G$ et si $\forall x, y \in G : x + y \in G$ et $-x \in G$. Par exemple, \mathbb{Z} et \mathbb{Q} sont des sous-groupes de \mathbb{R} .

PROPOSITION 5.2. (sous-groupes de \mathbb{R})

Si G est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$, alors G est ou bien dense dans \mathbb{R} , ou bien de la forme $G = a\mathbb{Z}$ pour un certain $a \geq 0$.

Démonstration. On supposera que $G \neq \{0\}$. Alors G contient au moins un élément strictement positif (car si $x \in G$, alors $-x \in G$). On peut donc poser

$$a := \inf \{x \in G; x > 0\}.$$

On va montrer que si $a = 0$, alors G est dense dans \mathbb{R} , et que si $a > 0$, alors $G = a\mathbb{Z}$.

Supposons que $a = 0$. Soit $V \subseteq \mathbb{R}$ un ouvert non-vidé : on veut montrer que $G \cap V \neq \emptyset$. On a certainement $V \cap]0, \infty[\neq \emptyset$ ou $V \cap]-\infty, 0[\neq \emptyset$; et comme $G = -G$, on peut supposer que $V \cap]0, \infty[\neq \emptyset$ (si on sait montrer que $G \cap V \neq \emptyset$ dans ce cas là, on saura aussi le montrer dans l'autre cas en appliquant cela à l'ouvert $-V$). Soit $v_0 \in V$ tel que $v_0 > 0$. Comme V est ouvert, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $[v_0, v_0 + \varepsilon] \subseteq V$. Ensuite, comme $a = 0$, on peut trouver $x \in G$ tel que $0 < x < \varepsilon$. Soit n le plus petit entier tel que $nx > v_0$. Alors $n \geq 1$, et $nx = x + \dots + x \in G$ car G est stable par addition. De plus, on a $(n-1)x \leq v_0$ par définition de n , donc $nx = (n-1)x + x \leq v_0 + x \leq v_0 + \varepsilon$. Ainsi $nx \in]v_0, v_0 + \varepsilon]$, et donc $nx \in V$. On a donc bien montré que $G \cap V \neq \emptyset$.

Supposons maintenant que $a > 0$. Alors $a \in G$. En effet, par définition de a et comme $2a > a$, on peut trouver $x \in G$ tel que $a \leq x < 2a$. Si on avait $x > a$, on pourrait trouver $x' \in G$ tel que $a \leq x' < a + (x - a) = x$. On aurait alors $x - x' \in G$ et $0 < x - x' < 2a - a = a$, ce qui contredirait la définition de a . Ainsi on a bien $a \in G$, et donc $a\mathbb{Z} \subseteq G$ puisque G est un sous-groupe de \mathbb{R} . Pour montrer qu'inversement $G \subseteq a\mathbb{Z}$, il suffit de montrer que $G \cap]0, \infty[\subseteq a\mathbb{Z}$ car $G = -G$. Soit $x \in G \cap]0, \infty[$ quelconque,

et soit n le plus grand entier tel que $na \leq x$. Alors $na \leq x < (n+1)a = na + a$, donc on peut écrire $x = na + r$ avec $0 \leq r < a$. Comme $r = x - na$ appartient à G (car $x \in G$ et $a \in G$), on a nécessairement $r = 0$ par définition de a . Ainsi $x = na$, et donc $x \in a\mathbb{Z}$. \square

COROLLAIRE 5.3. *Si $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Q}$, alors l'ensemble $\{e^{in\theta}; n \in \mathbb{Z}\}$ est dense dans le cercle unité \mathbb{T} .*

Démonstration. Soit $G := 2\pi\mathbb{Z} + \theta\mathbb{Z} = \{2\pi m + n\theta; m, n \in \mathbb{Z}\}$. Il est assez clair que G est un sous-groupe de \mathbb{R} (**exo**). Comme $\theta \notin 2\pi\mathbb{Q}$, on voit que G n'est pas de la forme $a\mathbb{Z}$ (s'il existait $a > 0$ et $p, q \in \mathbb{Z}$ tels que $2\pi = ap$ et $\theta = aq$, on obtiendrait $\theta = 2\pi \frac{p}{q}$). Donc G est dense dans \mathbb{R} .

Soit alors $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$ définie par $f(t) := e^{it}$. L'application f est continue et surjective, donc $\mathbb{T} = f(\mathbb{R}) = \overline{f(G)} \subseteq \overline{f(G)}$. Ainsi, $f(G)$ est dense dans \mathbb{T} . Mais comme $e^{i2\pi m} = 1$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, on voit que $f(G) = \{e^{in\theta}; n \in \mathbb{Z}\}$; ce qui termine la preuve. \square

Le résultat suivant est essentiellement évident; mais très utile.

PROPOSITION 5.4. (prolongement des identités)

Soient E et F deux espaces métriques, et soient $f, g : E \rightarrow F$ deux applications continues. S'il existe une partie dense $Z \subseteq E$ telle que $\forall z \in Z : f(z) = g(z)$, alors $f = g$.

Démonstration. Soit $x \in E$ quelconque. Comme Z est dense dans E , on peut trouver une suite (z_k) d'éléments de Z telle que $z_k \rightarrow x$. Alors $f(z_k) \rightarrow f(x)$ et $g(z_k) \rightarrow g(x)$ par continuité de f et g ; et donc $f(x) = g(x)$ puisque $f(z_k) = g(z_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. \square

EXEMPLE. Les seuls homomorphismes continus de \mathbb{R} dans \mathbb{R} sont les applications linéaires : si f est une application continue telle que $\forall u, v \in \mathbb{R} : f(u+v) = f(u) + f(v)$, alors f est de la forme $f(x) = ax$, pour une certaine constante a .

Démonstration. On observe d'abord que $f(0) = 0$ car $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$; et on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} : f(-x) = -f(x)$, car $0 = f(0) = f(x + (-x)) = f(x) + f(-x)$. Ensuite, si $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, alors $f(nx) = f(x + \dots + x) = f(x) + \dots + f(x) = nf(x)$; et comme on vient de voir que f est impaire, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{Z} : f(nx) = nf(x)$. De là, on déduit que si $r \in \mathbb{Q}$, alors $\forall x \in \mathbb{R} : f(rx) = rf(x)$: en effet, si on écrit $r = \frac{p}{q}$ avec $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{Z}$, alors $qrx = px$, donc $qf(rx) = f(qrx) = f(px) = pf(x)$.

Posons maintenant $a := f(1)$. Par ce qui précède, on a $\forall r \in \mathbb{Q} : f(r) = f(r \cdot 1) = ar$. Comme f et la fonction $g(x) := ax$ sont continues, et comme \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , on en déduit qu'on a $f(x) = ax$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. \square

Compacité

1. Sous-suites et valeurs d'adhérence

1.1. Généralités.

DÉFINITION 1.1. Soit E un ensemble, et soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E . Une **sous-suite** de (u_k) est une suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la forme $u'_n = u_{k_n}$, où $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite strictement croissante d'entiers.

Remarque 1. On écrit parfois une sous-suite sous la forme $u'_n = u_{\phi(n)}$, où $\phi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ est strictement croissante.

Remarque 2. Si (k_n) est une suite strictement croissante d'entiers, alors $k_n \geq n$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ (exo); mais ce n'est pas très important. Ce qui est très important est que $k_n \rightarrow \infty$ quand $n \rightarrow \infty$.

DÉFINITION 1.2. Soit E un espace métrique et soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E . On dit qu'un point $a \in E$ est une **valeur d'adhérence** de la suite (u_k) s'il existe une sous-suite (u'_n) de (u_k) telle que $u'_n \rightarrow a$. On note $\text{vad}((u_k))$ l'ensemble des valeurs d'adhérences de la suite (u_k) .

Exemple. Si $E := \mathbb{R}$ et $u_k := (-1)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\text{vad}((u_k)) = \{-1, 1\}$.

REMARQUE. Si la suite (u_k) converge, $u_k \rightarrow a \in E$, alors $\text{vad}((u_k)) = \{a\}$.

PROPOSITION 1.3. Soit (E, d) un espace métrique, soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E , et soit $a \in E$. Les choses suivantes sont équivalentes.

- (i) a est une valeur d'adhérence de (u_k) .
- (ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'entiers k tels que $d(u_k, a) < \varepsilon$.
- (ii') $\forall \varepsilon > 0 \forall K \in \mathbb{N} \exists k \geq K : d(u_k, a) < \varepsilon$.

Démonstration. Il est assez clair que (ii) \iff (ii').

Supposons (i) vérifiée. Soit $(u'_n) = (u_{k_n})$ une sous-suite de (u_k) telle que $u'_n \rightarrow a$. Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0 : d(u'_n, a) < \varepsilon$. Alors $I := \{k_n; n \geq n_0\}$ est infini et $\forall k \in I : d(u_k, a) < \varepsilon$; donc (ii) est vérifiée.

Inversement, supposons (ii) vérifiée. Pour $\varepsilon_0 := 2^{-0}$, on peut (grâce à (ii)) trouver $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_{k_0}, a) < \varepsilon_0$. Puis, pour $\varepsilon_1 := 2^{-1}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}; d(u_k, a) < \varepsilon_1\}$ est infini par (ii), donc on peut trouver $k_1 > k_0$ tel que $d(u_{k_1}, a) < \varepsilon_1$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : d(u_{k_n}, a) < 2^{-n}$. Alors $u_{k_n} \rightarrow a$, donc (i) est vérifiée. \square

COROLLAIRE 1.4. Si E est un espace métrique alors, pour toute suite (u_k) de points de E , on a

$$\text{vad}((u_k)) = \bigcap_{K \in \mathbb{N}} \overline{\{u_k; k \geq K\}}.$$

En particulier, $\text{vad}((u_k))$ est toujours un fermé de E .

Démonstration. Par (ii'), si $a \in E$, alors

$$\begin{aligned} a \in \text{vad}((u_k)) &\iff \forall \varepsilon > 0 \forall K \in \mathbb{N} \exists k \geq K : d(u_k, a) < \varepsilon \\ &\iff \forall K \in \mathbb{N} \left[\forall \varepsilon > 0 \exists k \geq K : d(u_k, a) < \varepsilon \right] \\ &\iff \forall K \in \mathbb{N} : a \in \overline{\{u_k; k \geq K\}}. \end{aligned}$$

□

Le lemme suivant est souvent utile.

LEMME 1.5. *Soit E un espace métrique, soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E , et soit $a \in E$. Si $u_k \not\rightarrow a$, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ et une sous-suite $(u'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de (u_k) tels que $\forall n \in \mathbb{N} : d(u'_n, a) \geq \varepsilon$.*

Démonstration. Supposons que (u_k) ne tende pas vers a . Alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $\forall K \in \mathbb{N} \exists k \geq K : d(u_k, a) \geq \varepsilon$; autrement dit $d(u_k, a) \geq \varepsilon$ pour une infinité d'entiers k . Donc il existe une sous-suite (u'_n) de (u_k) telle que $\forall n \in \mathbb{N} : d(u'_n, a) \geq \varepsilon$. □

COROLLAIRE 1.6. *Si toute sous-suite de (u_k) possède une sous-suite qui tend vers a , alors $u_k \rightarrow a$.*

Démonstration. Si $u_k \not\rightarrow a$, alors la sous-suite (u'_n) donnée par le lemme n'admet aucune sous-suite qui tende vers a (**micro-exo**); donc on a prouvé le corollaire "par contraposée". □

1.2. Bolzano-Weierstrass en dimension finie. Le théorème suivant est une généralisation du Théorème de Bolzano-Weierstrass sur les suites bornées de nombres réels. Comme on s'en doute, c'est un résultat *très* important.

THÉORÈME 1.7. (Bolzano-Weierstrass)

Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors toute suite bornée $(u_k) \subseteq E$ possède une sous-suite convergente.

Démonstration. En tant que \mathbb{R} -espace vectoriel, E est isomorphe à \mathbb{R}^N pour un certain entier N . Si on choisit un isomorphisme $J : E \rightarrow \mathbb{R}^N$ et si on pose $\|x\| := \|J(x)\|$ pour $x \in \mathbb{R}^N$, alors $\|\cdot\|$ est une norme sur \mathbb{R}^N et E est isométrique à $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|)$ (**exo**). De plus, par équivalence des normes sur \mathbb{R}^N , la norme $\|\cdot\|$ est équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$. On voit donc qu'on peut se ramener au cas où $E = (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$.

Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. On écrit $u_k = (u_k(1), \dots, u_k(N))$. La suite $(u_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{R} ; donc elle possède une sous-suite convergente par le Théorème de Bolzano-Weierstrass classique. On a donc une sous-suite (u'_n) de (u_k) et un nombre réel $a(1)$ tels que $u'_n(1) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} a(1)$. Maintenant, la suite $(u'_n(2))_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{R} , donc on a une sous-suite (u''_n) de (u'_n) telle que $u''_n(2) \rightarrow a(2) \in \mathbb{R}$. Alors (u''_n) est une sous-suite de (u_k) telle que $u''_n(1) \rightarrow a(1)$ et $u''_n(2) \rightarrow a(2)$. En répétant N fois ce raisonnement, on obtient une sous-suite $(v_n) = (u_n^{(N)})_{n \in \mathbb{N}}$ de (u_k) et des nombres réels $a(1), a(2), \dots, a(N)$ tels que $v_n(j) \rightarrow a(j)$ quand $n \rightarrow \infty$ pour $j = 1, 2, \dots, N$. Si on pose $a := (a(1), \dots, a(N)) \in \mathbb{R}^N$, alors $v_n \rightarrow a$ coordonnée par coordonnée, donc pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. □

REMARQUE. Le résultat précédent est *faux* en dimension infinie.

2. Espaces métriques compacts

2.1. Définition et exemples “immédiats”.

DÉFINITION 2.1. Soit (K, d) un espace métrique. On dit que K est **compact** si toute suite de points de K possède au moins une valeur d'adhérence dans K . Autrement dit, K est compact si toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq K$ possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a \in K$.

Remarque 1. La compacité est une “propriété topologique” : si (K, d) est compact, alors (K, d') est compact pour toute distance d' topologiquement équivalente à d .

REMARQUE 2. Soit K un espace métrique compact, et soit (u_k) une suite de points de K . Alors (u_k) est convergente si et seulement si elle possède exactement une valeur d'adhérence.

Démonstration. Une implication est évidente. Inversement, supposons que (u_k) possède exactement une valeur d'adhérence, et notons a cette valeur d'adhérence. Comme K est compact, toute sous-suite (u'_n) de (u_k) possède une sous-suite convergente (u''_n) , et on a nécessairement $\lim u''_n = a$ puisque a est la seule valeur d'adhérence de (u_k) . Donc $u_k \rightarrow a$ d'après le Lemme 1.5. \square

Remarque 3. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $K \subseteq E$. On dit que K est un **compact de E** si K est compact pour la distance induite, *i.e.* si l'espace métrique $(K, d|_{K \times K})$ est compact.

EXEMPLE 1. Tout intervalle fermé borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ est compact.

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $[a, b]$. Comme (u_k) est bornée, elle possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $x \in \mathbb{R}$, d'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass ; et comme les u'_n sont dans $[a, b]$ et que $[a, b]$ est un fermé de \mathbb{R} , on a $x \in [a, b]$. Ainsi, toute suite $(u_k) \subseteq [a, b]$ possède une valeur d'adhérence dans $[a, b]$; autrement dit $[a, b]$ est compact. \square

EXEMPLE 2. \mathbb{R} n'est pas compact.

Démonstration. la suite $u_k := k$ ne possède aucune valeur d'adhérence dans \mathbb{R} car $u_k \rightarrow \infty$. \square

EXEMPLE 3. Tout espace métrique *fini* est compact.

Démonstration. Soit K un espace métrique fini. Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de K alors, comme K est fini et que \mathbb{N} est infini, il existe un point $a \in K$ tel que $u_k = a$ pour une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$. On a ainsi une sous-suite (u'_n) de (u_k) telle que $\forall n \in \mathbb{N} : u'_n = a$, et il est difficile de faire plus convergente que cette sous-suite (u'_n) . \square

EXEMPLE 4. Soit E un espace métrique. Si $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de E qui converge vers un point $x_\infty \in E$, alors $K := \{x_\infty\} \cup \{x_l ; l \in \mathbb{N}\}$ est un compact de E .

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de K . On veut montrer que (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a \in K$; et pour cela, on va distinguer 2 cas.

Supposons d'abord qu'il existe un entier L tel que $u_k = x_L$ pour une infinité de $k \in \mathbb{N}$. Alors, (u_k) possède une sous-suite (u'_n) constamment égale à x_L , qui converge assurément vers $a := x_L \in K$.

Supposons maintenant que pour tout $l \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}; u_k = x_l\}$ soit fini. On va construire par récurrence une sous-suite $(u'_n) = (u_{k_n})$ qui convient. Pour commencer, on choisit un entier k_0 tel que $u_{k_0} \neq x_0$. Ensuite, l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}; u_k = x_0 \text{ ou } x_1\}$ est fini, donc l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}; u_k \neq x_0 \text{ et } u_k \neq x_1\}$ est infini, et donc on peut trouver un entier $k_1 > k_0$ tel que $u_{k_1} \neq x_0$ et $u_{k_1} \neq x_1$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite strictement croissante d'entiers $(k_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N} : u_{k_n} \neq x_0, \dots, x_n$. Comme les u_{k_n} sont dans K , on voit donc que pour tout $n \in \mathbb{N} : u_{k_n} = x_\infty$, ou bien $u_{k_n} = x_{l_n}$ pour un certain entier $l_n > n$. Comme $x_l \rightarrow x_\infty$ quand $l \rightarrow \infty$, on en déduit que la sous-suite (u_{k_n}) tend vers $a := x_\infty \in K$. \square

La remarque suivants montre qu'il faut lire attentivement la définition d'un compact ; et accessoirement, il est bon de connaître la définition à laquelle cette remarque donne lieu.

REMARQUE 2.2. Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. Les choses suivantes sont équivalentes.

- (1) Toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq A$ possède une sous-suite qui converge dans E .
- (2) \overline{A} est un compact de E .

Dans ce cas, on dit que A est **relativement compact** dans E .

Démonstration. L'implication (2) \implies (1) est claire (**micro-exo**). Inversement, supposons (1) vérifiée et montrons que \overline{A} est compact.

Soit (u_k) une suite de points de \overline{A} . Par définition de \overline{A} , on peut, pour tout $k \in \mathbb{N}$, choisir un point $\tilde{u}_k \in A$ tel que $d(\tilde{u}_k, u_k) < 2^{-k}$. On obtient ainsi une suite (\tilde{u}_k) de points de A . Par (1), cette suite possède une sous-suite $(\tilde{u}_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in E$. Comme les \tilde{u}_{k_n} sont dans A , le point a appartient à \overline{A} . Et comme $d(u_{k_n}, a) \leq d(u_{k_n}, \tilde{u}_{k_n}) + d(\tilde{u}_{k_n}, a) \leq 2^{-k_n} + d(\tilde{u}_{k_n}, a)$, on voit que $u_{k_n} \rightarrow a$. Ainsi, toute suite $(u_k) \subseteq \overline{A}$ possède une sous-suite $(u'_n) = (u_{k_n})$ qui converge vers un point de \overline{A} . \square

2.2. Compacts et fermés.

PROPOSITION 2.3. Soit E un espace métrique.

- (1) Tout compact de E est fermé dans E .
- (2) Si E est un espace vectoriel normé, alors tout compact de E est à la fois fermé et borné.

Démonstration. (1) Soit K un compact de E . On veut montrer que si (u_k) est une suite de points de K qui converge vers un point $a \in E$, alors $a \in K$. Comme K est compact, la suite (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a' \in K$. Mais $u'_n \rightarrow a$ puisque (u'_n) est une sous-suite de (u_k) . Donc $a' = a$ par unicité de la limite ; et donc $a \in K$.

(2) Soit K un compact de l'evn E . On sait déjà que K est fermé. Si K n'était pas borné, on pourrait trouver, pour tout $k \in \mathbb{N}$, un point $u_k \in K$ tel que $\|u_k\| > k$. La suite (u_k) ainsi construite ne possède aucune sous-suite convergente puisque $\|u_k\| \rightarrow \infty$; ce qui contredit la compacité de K . \square

COROLLAIRE 2.4. *Tout compact $K \subseteq \mathbb{R}$ possède un plus petit et un plus grand élément.*

Démonstration. Comme K est borné, $m := \inf(K)$ et $M := \sup(K)$ sont des nombres réels bien définis ; et comme K est fermé, m et M appartiennent à K (puisque la borne supérieure et la borne inférieure de tout ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ appartiennent à \overline{A}). \square

PROPOSITION 2.5. *Si E est un espace métrique compact, alors tout fermé de E est compact.*

Démonstration. Soit C un fermé de E , et soit (u_k) une suite quelconque de points de C . Comme E est compact, la suite (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a \in E$; et comme C est fermé dans E , le point a appartient en fait à C . Ainsi, toute suite $(u_k) \subseteq C$ possède une sous-suite qui converge dans C ; donc C est compact. \square

2.3. Compacts en dimension finie. Le théorème suivant (particulièrement facile à appliquer) donne une caractérisation constamment utilisée des compacts dans un evn de dimension finie.

THÉORÈME 2.6. *Si E est un espace vectoriel normé de dimension finie, alors les compacts de E sont exactement les ensembles fermés bornés.*

Démonstration. On a déjà vu que tout compact de E est fermé borné. Inversement, soit $K \subseteq E$ un ensemble fermé borné, et soit (u_k) une suite quelconque de points de E . Comme K est bornée, la suite (u_k) est bornée. D'après le Théorème de Bolzano-Weierstrass (applicable car $\dim(E) < \infty$), la suite (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge vers un point $a \in E$; et le point a appartient à K car K est fermé dans E . Donc K est compact. \square

REMARQUE. Ce résultat n'est valable qu'en dimension finie.

COROLLAIRE 2.7. *Soit E un evn de dimension finie. Pour tout ensemble $A \subseteq E$, on a l'équivalence suivante : A est relativement compact dans $E \iff A$ est borné.*

Démonstration. Si \overline{A} est compact, alors \overline{A} est borné, donc A aussi puisque $A \subseteq \overline{A}$. Inversement, si A est borné, alors \overline{A} aussi (**exo**), donc \overline{A} est compact car fermé borné en dimension finie. \square

EXEMPLE. L'intervalle $[0, 2\pi[$ et le cercle \mathbb{T} ne sont pas homéomorphes.

Démonstration. Le cercle \mathbb{T} est compact car fermé borné dans $E := \mathbb{C}$, et l'intervalle $[0, 2\pi[$ n'est pas compact car il n'est pas fermé dans \mathbb{R} . \square

2.4. Produits finis. Le résultat suivant, facile à démontrer, est un cas très particulier du **Théorème de Tikhonov**.

PROPOSITION 2.8. *Si E_1, \dots, E_N sont des espaces métriques compacts, alors $E := E_1 \times \dots \times E_N$ est compact.*

Démonstration. Aux notations près, la preuve est identique à celle du Théorème de Bolzano-Weierstrass dans un espace vectoriel normé de dimension finie. On la laisse donc en **exo**. \square

2.5. Unions, intersection. la proposition suivante *doit* faire penser aux propriétés de stabilité de la famille des fermés d'un espace métrique.

PROPOSITION 2.9. *Soit E un espace métrique.*

- (1) *Si K_1, \dots, K_N sont des compacts de E , alors $K := K_1 \cup \dots \cup K_N$ est compact.*
- (2) *Si $(K_i)_{i \in I}$ est une famille quelconque de compacts de E , alors $K := \bigcap_{i \in I} K_i$ est compact.*

Démonstration. (1) Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $K = K_1 \cup \dots \cup K_N$. Comme il y a une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$ et un nombre fini de K_j , il existe au moins un $j_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que K_{j_0} contient u_k pour une infinité d'entiers k . Donc (u_k) possède une sous-suite (u'_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N} : u'_n \in K_{j_0}$. Comme K_{j_0} est compact, la suite (u'_n) possède une sous-suite (u''_n) qui converge vers un point $a \in K_{j_0}$. Alors (u''_n) est une sous-suite de (u_k) qui converge vers un point de K .

(2) Fixons un $i_0 \in I$. On peut écrire $K = \bigcap_{i \in I} C_i$, où $C_i := K_i \cap K_{i_0}$. Chaque C_i est un fermé de K_{i_0} , car le compact K_i est fermé dans E . Donc $K = \bigcap_{i \in I} C_i$ est un fermé de K_{i_0} ; et donc K est compact puisque K_{i_0} est compact. \square

2.6. Compacts emboîtés. Le résultat suivant est très utile.

LEMME 2.10. (Théorème des compacts emboîtés)

Soit E un espace métrique. Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts non-vides de E , alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. De manière équivalente : si (K_n) est une suite décroissante de compacts de E telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \emptyset$, alors il existe un n_0 tel que $K_{n_0} = \emptyset$.

Démonstration. Soit $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts *non-vides* de E . Pour tout $m \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_m \in K_m$. Comme la suite (K_m) est décroissante, tous les x_m appartiennent à K_0 , qui est compact. Donc la suite (x_m) possède une sous-suite $(x_{\phi(l)})_{l \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in K_0$. Si on fixe $n \in \mathbb{N}$, alors $\phi(l) \geq n$ pour tout l assez grand (en fait, pour tout $l \geq n$). Donc $x_{\phi(l)} \in K_n$ pour tout l assez grand; et donc $a = \lim x_{\phi(l)} \in K_n$ car K_n , étant compact, est un fermé de E . Ainsi, le point a appartient à K_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n \neq \emptyset$. \square

COROLLAIRE 2.11. *Soit E un espace métrique compact. Si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non-vides de E , alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$.*

REMARQUE 2.12. Le Corollaire 2.11 est une *caractérisation* de la compacité : si E est un espace métrique ayant la propriété que toute suite décroissante de fermés non-vides de E a une intersection non-vide, alors E est compact.

Démonstration. Soit E un espace métrique possédant cette propriété, et soit (u_k) une suite quelconque de points de E . On a vu que

$$\text{vad}((u_k)) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n, \quad \text{où } C_n := \overline{\{u_k; k \geq n\}}.$$

Par définition, les C_n sont des fermés non-vides de E ; et la suite (C_n) est visiblement décroissante. Donc $\text{vad}((u_k)) \neq \emptyset$, pour toute suite $(u_k) \subseteq E$. \square

3. Image continue d'un compact

Le théorème suivant est très général, très important, et ... très facile à démontrer.

THÉORÈME 3.1. *Soient E et F deux espaces métriques. Si $f : E \rightarrow F$ est une application continue alors, pour tout compact $K \subseteq E$, l'ensemble $f(K)$ est un compact de F . Autrement dit : l'image continue d'un compact est un compact.*

Démonstration. Soit (u_k) une suite de points de $f(K)$. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, choisissons un point $x_k \in K$ tel que $u_k = f(x_k)$. Comme K est compact ; la suite (x_k) possède une sous-suite (x'_n) qui converge vers un point $x \in K$. Alors $u'_n := f(x'_n) \rightarrow f(x) := a$ par continuité de f . Ainsi, toute suite $(u_k) \subseteq f(K)$ possède une sous-suite qui converge vers un point $a \in f(K)$. \square

Du Théorème 3.1, on déduit immédiatement le résultat suivant, qui généralise un théorème bien connu pour les fonctions continues sur un segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

COROLLAIRE 3.2. *Soit E un espace métrique, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si K est un compact de E , alors $f|_K$ possède un maximum et un minimum.*

Démonstration. Par le Théorème 3.1, $f(K)$ est un compact de \mathbb{R} , donc possède un plus petit et un plus grand élément. \square

Voici une conséquence immédiate, qui formalise la très importante idée suivante : la compacité donne de l'uniformité.

COROLLAIRE 3.3. *Soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit $c \in \mathbb{R}$. On suppose qu'on a $f(x) < c$ pour tout $x \in E$. Alors, pour tout compact $K \subseteq E$, il existe une constante $\alpha_K < c$ telle que $\forall x \in K : f(x) \leq \alpha_K$. (Résultat analogue si $f(x) > c$ pour tout $x \in E$.)*

Démonstration. C'est évident : la restriction de f à K possède un maximum, atteint en un point $x_0 \in K$; donc $\forall x \in K : f(x) \leq \alpha_K := f(x_0) < c$. \square

COROLLAIRE 3.4. *Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit C un fermé non-vide de E . Si $f : C \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue telle que $f(x) \rightarrow +\infty$ quand $\|x\| \rightarrow \infty$, alors f possède un minimum.*

Démonstration. La "difficulté" est que C n'est pas compact ; mais l'hypothèse faite sur f permet de la contourner en se ramenant à un compact.

Fixons $a \in C$, et posons $K := \{x \in C ; f(x) \leq f(a)\}$. L'ensemble K est un fermé de E car C est fermé et f est continue. De plus, K est également borné : en effet, s'il ne l'était pas, on pourrait trouver une suite $(x_n) \subseteq K$ telle que $\|x_n\| \rightarrow \infty$, donc telle que $f(x_n) \rightarrow +\infty$, ce qui est absurde puisque $f(x_n) \leq f(a)$ pour tout n . Comme $\dim(E) < \infty$, on en déduit que K est compact ; et $K \neq \emptyset$ puisque $a \in K$. Par continuité, la restriction de f à K possède un minimum, atteint en un point $x_0 \in K$. On a ainsi $f(x_0) \leq f(x)$ pour tout $x \in K$; et on a également $f(x_0) < f(x)$ pour tout $x \in C \setminus K$ puisqu'un tel x vérifie $f(x) > f(a) \geq f(x_0)$. Donc $f(x_0)$ est bien la valeur minimale prise par f sur tout l'ensemble C . \square

EXEMPLE. ("Théorème fondamental de l'algèbre")

Si P est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors P possède au moins une racine complexe.

Démonstration. Comme toute fonction polynomiale est continue, la fonction $z \mapsto |P(z)|$ est continue sur \mathbb{C} par composition. De plus, $|P(z)| \rightarrow +\infty$ quand $|z| \rightarrow +\infty$ car P est non constant (**exo**). Donc $|P(z)|$ possède un minimum sur \mathbb{C} par le Corollaire 3.4 : il existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tel que $\forall z \in \mathbb{C} : |P(z_0)| \leq |P(z)|$. Quitte à remplacer P par le polynôme $P(z + z_0)$, on peut également supposer que $z_0 = 0$. On a ainsi

$$\forall z \in \mathbb{C} : |P(0)| \leq |P(z)|;$$

et il s'agit de montrer que $P(0) = 0$. Supposons que $P(0) \neq 0$, et essayons d'obtenir une contradiction. Quitte à remplacer P par $\frac{1}{P(0)}P$, on peut supposer que $P(0) = 1$.

Comme P est non constant et $P(0) = 1$, on peut écrire

$$P(z) = 1 + c_m z^m + z^{m+1}Q(z),$$

où $m \geq 1$, $c_m \neq 0$ et Q est un polynôme (éventuellement nul). Autrement dit,

$$P(z) = 1 + c_m z^m (1 + \varepsilon(z)),$$

où $\varepsilon(z) := \frac{1}{c_m} z Q(z)$. Comme la fonction polynomiale $Q(z)$ est continue, on voit que

$$\varepsilon(z) \rightarrow 0 \quad \text{quand } z \rightarrow 0.$$

L'inégalité $1 = |P(0)| \leq |P(z)|$ s'écrit maintenant comme suit :

$$\forall z \in \mathbb{C} : |1 + c_m z^m (1 + \varepsilon(z))| \geq 1.$$

Voici maintenant le point clé : comme $m \geq 1$, tout nombre complexe de module 1 possède des racines m -ièmes ; donc on peut choisir $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $e^{im\theta} = -\frac{|c_m|}{c_m}$, i.e. $c_m e^{im\theta} = -|c_m|$. En prenant $z = r e^{i\theta}$ dans l'inégalité précédente, on obtient ainsi

$$(*) \quad \forall r > 0 : \left| 1 - |c_m| r^m (1 + \varepsilon(r e^{i\theta})) \right| \geq 1.$$

Choisissons alors $r > 0$ tel que $|c_m| r^m \leq 1$ et $|\varepsilon(r e^{i\theta})| \leq 1/2$, ce qui est possible puisque $\varepsilon(z) \rightarrow 0$ quand $z \rightarrow 0$. Par (*), on a

$$\begin{aligned} 1 &\leq \left| 1 - |c_m| r^m + |c_m| r^m \varepsilon(r e^{i\theta}) \right| \\ &\leq \left| 1 - |c_m| r^m \right| + \frac{1}{2} |c_m| r^m \\ &= 1 - |c_m| r^m + \frac{1}{2} |c_m| r^m \\ &= 1 - \frac{1}{2} |c_m| r^m < 1. \end{aligned}$$

On a donc obtenu la contradiction cherchée. □

Voici pour finir une dernière conséquence du Théorème 3.1.

COROLLAIRE 3.5. *Soient E et F deux espaces métriques, avec E compact. Si $f : E \rightarrow F$ est une bijection continue, alors f est un homéomorphisme, i.e. $f^{-1} : F \rightarrow E$ est continue.*

Démonstration. Il suffit de montrer que $(f^{-1})^{-1}(C)$ est fermé dans F pour tout fermé $C \subseteq E$, i.e que $f(C)$ est fermé dans F . Mais ceci est clair : comme E est compact, le fermé C est compact, donc $f(C)$ est compact car f est continue, et donc $f(C)$ est fermé dans F . □

4. Continuité uniforme

DÉFINITION 4.1. Soient (E, d) et (F, d) deux espaces métriques. On dit qu'une application $f : E \rightarrow F$ est **uniformément continue** si f est continue en tout point et si, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut prendre le même “ δ de continuité” pour tous les points de E . Avec des quantificateurs : f est uniformément continue si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : d(f(u), f(v)) \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } u, v \in E \text{ vérifiant } d(u, v) \leq \delta.$$

REMARQUE 1. Pour montrer qu'une application $f : E \rightarrow F$ est uniformément continue, il suffit d'obtenir une majoration de la forme $d(f(u), f(v)) \leq \Phi(d(u, v))$ pour tous $u, v \in E$, où $\Phi(\delta) \rightarrow 0$ quand $\delta \rightarrow 0^+$. On dit alors que la fonction Φ est un *témoin d'uniforme continuité* pour f .

REMARQUE 2. Une application $f : E \rightarrow F$ est uniformément continue si et seulement si la chose suivante a lieu : pour toutes suites $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de E telles que $d(u_k, v_k) \rightarrow 0$, on a que $d(f(u_k), f(v_k)) \rightarrow 0$.

Démonstration. C'est un bon **exo** de compréhension des définitions. □

EXEMPLE 1. Toute application f lipschitzienne est uniformément continue.

Démonstration. C'est évident : si on pose $k := \text{Lip}(f)$, alors f est uniformément continue avec témoin $\Phi(\delta) := k\delta$. □

EXEMPLE 2. La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^+ , mais elle n'est pas lipschitzienne.

Démonstration. Posons $f(t) := \sqrt{t}$.

La fonction f est dérivable sur $]0, \infty[$ avec $f'(t) = \frac{1}{2\sqrt{t}}$. Comme f' n'est pas bornée sur $]0, \infty[$ (elle tend vers $+\infty$ en 0), on en déduit que f n'est pas lipschitzienne sur $]0, \infty[$, et donc pas lipschitzienne sur \mathbb{R}^+ .

Cependant, si $s, t \geq 0$, alors $\sqrt{s+t} \leq \sqrt{s} + \sqrt{t}$, comme on le voit en mettant au carré. On en déduit que si $0 \leq u \leq v$, alors $f(v) \leq f(u) + f(v-u)$, i.e. $f(v) - f(u) \leq \sqrt{v-u}$; donc, par symétrie : $|f(v) - f(u)| \leq \sqrt{|v-u|}$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}^+$. Donc f est uniformément continue avec témoin $\Phi(\delta) := \sqrt{\delta}$. □

EXEMPLE 3. Si $[a, b]$ est un intervalle *fermé borné*, alors toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue : c'est le **Théorème de Heine**.

Démonstration. On le sait... ou pas. □

EXEMPLE 4. La fonction $t \mapsto t^2$ n'est pas uniformément continue sur \mathbb{R} .

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq]0, \infty[$ une suite tendant vers $+\infty$, soit $(\delta_k) \subseteq]0, \infty[$ une suite tendant vers 0, et posons $v_k := u_k + \delta_k$. Par définition, $d(u_k, v_k) = v_k - u_k \rightarrow 0$. Cependant, $d(u_k^2, v_k^2) = v_k^2 - u_k^2 = 2u_k\delta_k + \delta_k^2 \geq 2u_k\delta_k$. Donc, si on choisit $\delta_k := \frac{1}{u_k}$, on voit que $d(u_k^2, v_k^2) \not\rightarrow 0$; ce qui montre que la fonction $t \mapsto t^2$ n'est en effet pas uniformément continue. □

Le résultat suivant est (peut-être) bien connu pour les fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. C'est une autre manifestation du “principe” selon lequel la compacité donne de l'uniformité.

THÉORÈME 4.2. (Théorème de Heine)

Si K est un espace métrique compact, alors toute application continue $f : K \rightarrow F$ (où F est un espace métrique quelconque) est uniformément continue.

Démonstration. Il s'agit de montrer que si (u_k) et (v_k) sont deux suites d'éléments de K telles que $f(u_k, v_k) \rightarrow 0$, alors $d(f(u_k), f(v_k)) \rightarrow 0$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors, quitte à extraire une sous-suite de la suite des $d(f(u_k), f(v_k))$, on peut supposer qu'il existe $\varepsilon > 0$ telle que $\forall k \in \mathbb{N} : d(f(u_k), f(v_k)) \geq \varepsilon$. Comme K est compact, la suite (u_k) possède une sous-suite (u_{k_n}) qui converge vers un point $a \in K$. Alors v_{k_n} tend vers a également, car $d(v_{k_n}, a) \leq d(v_{k_n}, u_{k_n}) + d(u_{k_n}, a)$ et $d(v_{k_n}, u_{k_n}) \rightarrow 0$. Comme f est continue au point a , on en déduit que $f(u_{k_n}) \rightarrow f(a)$ et $f(v_{k_n}) \rightarrow f(a)$. Donc $d(f(u_{k_n}), f(v_{k_n})) \rightarrow d(f(a), f(a)) = 0$, ce qui est absurde puisque $d(f(u_{k_n}), f(v_{k_n})) \geq \varepsilon$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. \square

5. Propriété de Borel-Lebesgue

DÉFINITION 5.1. Soit E un espace métrique. Un **recouvrement ouvert** de E est une famille $(O_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E telle que $\bigcup_{i \in I} O_i = E$.

Exemple. Pour tout $x \in E$, choisissons un nombre $r_x > 0$ et posons $B_x := B(x, r_x)$. Alors la famille $(B_x)_{x \in E}$ est un recouvrement ouvert de E .

THÉORÈME 5.2. Pour un espace métrique K , les choses suivantes sont équivalentes.

- (1) K est compact.
- (2) Tout recouvrement ouvert de K possède un **sous-recouvrement fini**; autrement dit : pour tout recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$ de K , on peut trouver $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que $O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_N} = K$.

REMARQUE. La propriété (2) s'appelle la **propriété de Borel-Lebesgue**. C'est elle qui est utilisé pour *définir* la compacité dans le cadre des espaces topologiques généraux : un espace topologique E est dit compact s'il est séparé et s'il possède la propriété de Borel-Lebesgue.

COROLLAIRE 5.3. Soit E un espace métrique. Pour un ensemble $K \subseteq E$, les choses suivantes sont équivalentes.

- (a) K est compact.
- (b) Pour toute famille $(V_i)_{i \in I}$ d'ouverts de E telle que $\bigcup_{i \in I} V_i \supseteq K$, on peut trouver $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que $V_{i_1} \cup \dots \cup V_{i_N} \supseteq K$.

Démonstration. C'est clair par le théorème, puisque les ouverts de K sont exactement les ensembles de la forme $O = V \cap K$ où V est un ouvert de E . \square

Comme en s'en doute, la preuve du Théorème 5.2 consiste à démontrer deux implications ; dont l'une se trouve être plus simple que l'autre.

Preuve de l'implication (2) \implies (1). C'est la partie "facile" du théorème. Supposons (2) vérifiée. D'après la Remarque 2.12, pour montrer que K est compact il suffit de montrer que si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés non-vides de K , alors $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$; ou de manière équivalente : que si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de fermés de K telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset$, alors il existe un $N \in \mathbb{N}$ tel que $C_N = \emptyset$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons $O_n := K \setminus C_n$. Les O_n sont des ouverts de K ; et comme $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset$, on a $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} O_n = K$. Ainsi, la famille $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est un recouvrement ouvert de K . Par (2), on peut donc trouver $n_1, \dots, n_r \in \mathbb{N}$ tels que $K = O_{n_1} \cup \dots \cup O_{n_r}$. Mais la suite (O_n) est croissante car la suite (C_n) est décroissante. Donc, si on pose $N := \max(n_1, \dots, n_r)$, alors $O_{n_1} \cup \dots \cup O_{n_r} = O_N$. Ainsi, on a $O_N = E$; autrement dit $C_N = \emptyset$. \square

La preuve de l'implication (1) \implies (2) est plus délicate. On va utiliser les deux lemmes suivants.

LEMME 5.4. *Soit K un espace métrique compact. Pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $a_N, \dots, a_1 \in K$ tels que $\bigcup_{j=1}^N B(a_j, \varepsilon) = K$.*

Démonstration. Supposons que la conclusion annoncée soit fautive pour un certain $\varepsilon > 0$. Soit $u_0 \in K$ quelconque. On a $K \neq B(u_0, \varepsilon)$ par hypothèse, donc on peut trouver $u_1 \in K$ tel que $u_1 \notin B(u_0, \varepsilon)$, i.e. $d(u_1, u_0) \geq \varepsilon$. De même, on a $B(u_0, \varepsilon) \cup B(u_1, \varepsilon) \neq K$, donc on peut trouver $u_2 \in K$ tel que $u_2 \notin B(u_0, \varepsilon) \cup B(u_1, \varepsilon)$, i.e. $d(u_2, u_0) \geq \varepsilon$ et $d(u_2, u_1) \geq \varepsilon$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ de points de K telle que $\forall k \forall j < k : d(u_k, u_j) \geq \varepsilon$. On a ainsi $d(u_k, u_{k'}) \geq \varepsilon$ pour tous $k, k' \in \mathbb{N}$ tels que $k \neq k'$. Donc la suite (u_k) ne possède aucun sous-suite convergente (**micro-exo**), ce qui contredit la compacité de K . \square

LEMME 5.5. (Lemme de Lebesgue)

*Soit K un espace métrique compact. Si $(O_i)_{i \in I}$ est un recouvrement ouvert de K , alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ vérifiant la propriété suivante : tout ensemble $A \subseteq K$ tel que $\text{diam}(A) \leq \varepsilon$ est entièrement contenu dans un des ouverts O_i . On dit que ε est un **nombre de Lebesgue** pour le recouvrement ouvert $(O_i)_{i \in I}$.*

Démonstration. Supposons que la conclusion annoncée soit fautive. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un ensemble $A_\varepsilon \subseteq K$ tel que $\text{diam}(A_\varepsilon) \leq \varepsilon$ mais A_ε n'est contenu dans aucun des ouvert O_i . En prenant $\varepsilon := 1/k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$ et en posant $B_k := A_{1/k}$, on obtient ainsi une suite (B_k) de parties de K telle que B_k n'est contenu dans aucun O_i et $\text{diam}(B_k) \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$.

Les B_k sont en particulier non-vides, donc on peut choisir un point $u_k \in B_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Comme K est compact la suite (u_k) possède une sous-suite (u_{k_n}) qui converge vers un point $a \in K$. Comme $\bigcup_{i \in I} O_i = K$, on peut trouver $i_0 \in I$ tel que $a \in O_{i_0}$; et comme O_{i_0} est ouvert, on peut choisir $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subseteq O_{i_0}$. Soit alors $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(u_{k_n}, a) < \varepsilon/2$ et $\text{diam}(B_{k_n}) < \varepsilon/2$. Alors $B_{k_n} \subseteq B(a, \varepsilon)$ d'après l'inégalité triangulaire (si $u \in B_{k_n}$, alors $d(u, a) \leq d(u, u_{k_n}) + d(u_{k_n}, a) \leq \text{diam}(B_{k_n}) + d(u_{k_n}, a) < \varepsilon$). Donc $B_{k_n} \subseteq O_{i_0}$, ce qui pose problème puisque B_{k_n} est censé n'être contenu dans aucun O_i . \square

On peut maintenant terminer la preuve du Théorème 5.2.

Preuve de l'implication (1) \implies (2). Supposons que l'espace métrique K soit compact, et montrons qu'il vérifie la propriété de Borel-Lebesgue.

Soit $(O_i)_{i \in I}$ un recouvrement ouvert de K . Par le Lemme 5.5, on peut choisir un nombre de Lebesgue $\varepsilon > 0$ pour le recouvrement (O_i) . Par le Lemme 5.4, on peut ensuite trouver $a_1, \dots, a_N \in K$ tels que $K = B(a_1, \varepsilon/2) \cup \dots \cup B(a_N, \varepsilon/2)$. Alors les boules $B_k := B(a_k, \varepsilon/2)$ vérifient $\text{diam}(B_k) \leq 2\varepsilon/2 = \varepsilon$; donc, par définition de ε , on peut trouver i_1, \dots, i_N tels que $B_k \subseteq O_{i_k}$ pour $k = 1, \dots, N$. On a alors $K = O_{i_1} \cup \dots \cup O_{i_N}$, ce qui termine la preuve. \square

6. Produits infinis de compacts ; procédé diagonal

On a vu que tout produit fini d'espaces compacts est compact ; autrement dit, si K_1, \dots, K_N sont des espaces métriques compacts et si on pose $K := K_1 \times \dots \times K_N$, alors toute suite $(u_k) \subseteq K$ possède une sous-suite qui converge "coordonnée par coordonnée". Avec un peu plus d'efforts, on peut démontrer la même chose pour un produit infini de compacts.

THÉORÈME 6.1. *Soit $(K_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces métriques compacts, et soit $K := \prod_{i \in \mathbb{N}} K_i$. (Les éléments de K sont donc de la forme $u = (u(i))_{i \in \mathbb{N}}$, où $u(i) \in K_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.) Si $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de K , alors (u_k) possède une sous-suite (u'_n) qui converge coordonnée par coordonnée : $\forall i \in \mathbb{N} : u'_n(i) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_i \in K_i$.*

Démonstration. La suite $(u_k(0))_{k \in \mathbb{N}}$ vit dans le compact K_0 , donc elle possède une sous-suite convergente. Il existe ainsi un ensemble infini $\Lambda_0 \subseteq \mathbb{N}$ et un point $a_0 \in K_0$ tels que $u_k(0) \rightarrow a_0$ quand $k \rightarrow \infty$ et $k \in \Lambda_0$.

De même, la suite $(u_k(1))_{k \in \mathbb{N}}$ vit dans le compact K_1 , donc on peut trouver un ensemble infini $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_0$ et un point $a_1 \in K_1$ tels que $u_k(1) \rightarrow a_1$ quand $k \rightarrow \infty$ et $k \in \Lambda_1$.

On voit maintenant qu'on peut construire par récurrence une suite décroissante $(\Lambda_i)_{i \geq 0}$ de parties infinies de \mathbb{N} et des points $a_0 \in K_0, a_1 \in K_1, a_2 \in K_2, \dots$ tels que

$$\forall i \in \mathbb{N} : u_k(i) \xrightarrow[k \in \Lambda_i]{k \rightarrow \infty} a_i.$$

Définissons alors

$$\begin{cases} k_0 := \min \Lambda_0, \\ k_1 := \min \{k \in \Lambda_1; k > k_0\}, \\ \vdots \\ k_n := \min \{k \in \Lambda_n; k > k_{n-1}\} \quad \text{pour tout } n \geq 1. \end{cases}$$

Par définition, la suite $(k_n)_{n \geq 0}$ est strictement croissante ; et pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(u_{k_n}(i))_{n \geq i}$ est extraite de la suite $(u_k(i))_{k \in \Lambda_i}$. Donc $u_{k_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a_i$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Ainsi, on a bien trouvé une sous-suite (u_{k_n}) de (u_k) qui converge coordonnée par coordonnée. \square

REMARQUE. La méthode utilisée dans la preuve qu'on vient de faire porte le nom de **procédé diagonal**. Le principe général est le suivant : si $(\Lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de parties infinies de \mathbb{N} , alors il existe un ensemble infini Λ qui est "presque contenu" dans chacun des Λ_i , au sens où $\Lambda \setminus \Lambda_i$ est fini pour tout $i \in \mathbb{N}$. On dit qu'un tel ensemble Λ "diagonalise" la suite (Λ_i) .

COROLLAIRE 6.2. *Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. On suppose que la suite (u_k) est **simplement bornée** : pour tout $i \in \mathbb{N}$ fixé, la suite $(u_k(i))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans \mathbb{K} . Alors la suite (u_k) possède une sous-suite (u_{k_n}) qui converge coordonnée par coordonnée.*

Démonstration. Par hypothèse, on a pour tout $i \in \mathbb{N}$ une constante $M_i < \infty$ telle que $\forall k \in \mathbb{N} \quad |f_k(z)| \leq M_i$. Donc, pour tout $i \in \mathbb{N}$, la suite $(u_k(i))_{k \in \mathbb{N}}$ vit dans l'ensemble $K_i := \overline{B}(0, M_i) \subseteq \mathbb{K}$, qui est un compact de \mathbb{K} . Ainsi, les u_k vivent dans le produit de compacts $K := \prod_{i \in \mathbb{N}} K_i$, et on peut appliquer le Théorème 6.1. \square

Espaces complets

1. Définitions et exemples

1.1. Suites de Cauchy, espaces complets.

DÉFINITION 1.1. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E . On dit que (u_k) est une **suite de Cauchy** si $d(u_p, u_q) \rightarrow 0$ quand $p, q \rightarrow \infty$. Avec des quantificateurs : (u_k) est de Cauchy si et seulement si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K \in \mathbb{N} \text{ tel que } \forall p, q \geq K : d(u_p, u_q) \leq \varepsilon.$$

REMARQUE 1. Toute suite *convergente* est de Cauchy.

Démonstration. Si $u_k \rightarrow a$, alors $d(u_p, u_q) \leq d(u_p, a) + d(a, u_q) \xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0$. \square

REMARQUE 2. Dans un espace vectoriel normé, toute suite de Cauchy est *bornée*.

Démonstration. Soit (u_k) une suite de Cauchy dans un evn $(E, \|\cdot\|)$. Si on applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon := 6$, on obtient un entier K tel que

$$\forall p, q \geq K : \|u_q - u_p\| \leq 6.$$

On a alors $\forall k \geq K : \|u_k\| \leq \|u_k - u_K\| + \|u_K\| \leq 6 + \|u_K\|$. Donc, si on pose $M := \max(\|u_0\|, \dots, \|u_{K-1}\|, 6 + \|u_K\|)$, alors

$$\forall k \in \mathbb{N} : \|u_k\| \leq M.$$

\square

Remarque 3. Les suites de Cauchy restent les mêmes si on remplace la distance d par une distance *Lipschitz-équivalente*. Donc, dans un espace vectoriel de dimension finie, l'expression "suite de Cauchy" a un sens intrinsèque : cela signifie "suite de Cauchy pour n'importe quelle norme".

Démonstration. **Exo.** \square

Le lemme suivant est souvent utile.

LEMME 1.2. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans un espace métrique (E, d) . Si (u_k) possède une sous-suite convergente, alors (u_k) est convergente.

Démonstration. Supposons que (u_k) possède une sous-suite $(u_{k_n})_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge vers un point $a \in E$, et montrons que $u_k \rightarrow a$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme (u_k) est de Cauchy, on peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k, k' \geq K : d(u_k, u_{k'}) \leq \varepsilon$. Soit ensuite $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $k_{n_0} \geq K$. On a $k_n \geq K$ pour tout $n \geq n_0$, donc $\forall k \geq K \forall n \geq n_0 : d(u_k, u_{k_n}) \leq \varepsilon$. Comme $u_{k_n} \rightarrow a$ quand $n \rightarrow \infty$, on en déduit que $d(u_k, a) \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq K$. \square

DÉFINITION 1.3. On dit qu'un espace métrique (E, d) est **complet** si toute suite de Cauchy de (E, d) est convergente dans E . Un espace vectoriel normé complet s'appelle un **espace de Banach**.

EXEMPLE 1. \mathbb{R} est complet pour la distance usuelle : c'est ce que dit le *critère de Cauchy* pour les suites de nombres réels.

Exemple 2. \mathbb{Q} n'est pas complet pour la distance usuelle.

Démonstration. Soit $(r_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de rationnels convergeant vers un nombre irrationnel a , par exemple $a := \sqrt{2}$. La suite (r_k) converge dans \mathbb{R} , donc elle est de Cauchy dans \mathbb{R} pour la distance usuelle. Mais (r_k) est une suite de rationnels, donc c'est une suite de Cauchy de $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$; et comme $a \notin \mathbb{Q}$, elle ne converge pas dans \mathbb{Q} . Ainsi, $(\mathbb{Q}, |\cdot|)$ n'est pas complet. \square

1.2. Quatre exemples très importants.

EXEMPLE 1. Tout espace métrique *compact* est complet.

Démonstration. Soit (E, d) un espace métrique compact. Si (u_k) est une suite de Cauchy dans (E, d) , alors (u_k) possède une sous-suite convergente par compacité, et donc (u_k) est convergente d'après le Lemme 1.2. \square

EXEMPLE 2. Tout espace vectoriel normé *de dimension finie* est complet.

Démonstration. Soit E un evn de dimension $N < \infty$ sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Par équivalence des normes en dimension finie, il suffit de montrer que $E := (\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$ est complet (**micro-exo**). Soit donc $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. On écrit $u_k = (u_k(1), \dots, u_k(N))$.

Pour $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$|u_q(j) - u_p(j)| \leq \|u_q - u_p\|_\infty.$$

Donc, pour tout $j \in \llbracket 1, N \rrbracket$, la suite $(u_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans \mathbb{R} , qui est complet. Par conséquent, chaque suite $(u_k(j))_{k \in \mathbb{N}}$ converge, $u_k(j) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} u(j) \in \mathbb{R}$. Si on pose $u := (u(1), \dots, u(N)) \in \mathbb{R}^N$, alors $u_k \rightarrow u$ "coordonnée par coordonnée", donc $u_k \rightarrow u$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. Ainsi, on a bien montré que toute suite de Cauchy (u_k) converge dans $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. \square

Remarque. Cet exemple montre en particulier que \mathbb{C} est complet pour la distance usuelle; ce qu'on aurait pu voir directement.

EXEMPLE 3. Si I est un ensemble non-vide quelconque, alors l'espace $\ell^\infty(I)$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. Soit $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$. On veut montrer que (f_k) converge dans $\ell^\infty(I)$; autrement dit, qu'il existe une $f \in \ell^\infty(I)$ telle que $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$. On va faire cela en 3 étapes, ce qui est essentiellement toujours le cas lorsqu'on veut montrer qu'un certain espace est complet.

ÉTAPE 1. Identification d'un "candidat limite".

Pour $t \in I$ fixé et pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$|f_q(t) - f_p(t)| \leq \|f_q - f_p\|_\infty \xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0.$$

Donc, pour tout $t \in I$, la suite $(f_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , qui est complet. Par conséquent, pour tout $t \in I$, la suite $(f_k(t))_{k \in \mathbb{N}}$ converge, $f_k(t) \rightarrow l_t \in \mathbb{K}$. Si on pose $f(t) := l_t$, on obtient ainsi une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ telle

$$\forall t \in I : f_k(t) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} f(t).$$

ÉTAPE 2. Le candidat limite appartient au bon espace; *i.e.* $f \in \ell^\infty(I)$.

Il s'agit de voir que la fonction f est bornée. Comme la suite (f_k) est de Cauchy dans $\ell^\infty(I)$, elle est *bornée* dans $\ell^\infty(I)$: on a une constante M telle que $\|f_k\|_\infty \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; autrement dit

$$\forall k \forall t \in I : |f_k(t)| \leq M.$$

En fixant $t \in I$ et en faisant $k \rightarrow \infty$, on obtient

$$\forall t \in I : |f(t)| \leq M;$$

donc f est en effet bornée, avec $\|f\|_\infty \leq M$.

ÉTAPE 3. $f_k \rightarrow f$ au sens de la distance considéré; *i.e.* $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. Comme la suite (f_k) est de Cauchy dans $\ell^\infty(I)$, on peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq K : \|f_q - f_p\|_\infty \leq \varepsilon$, *i.e.*

$$\forall p, q \geq K \forall t \in I : |f_q(t) - f_p(t)| \leq \varepsilon.$$

En fixant $t \in I$, en prenant $q := k \geq K$ et en faisant $p \rightarrow \infty$, on obtient

$$\forall k \geq K \forall t \in I : |f_k(t) - f(t)| \leq \varepsilon;$$

autrement dit $\|f_k - f\|_\infty \leq \varepsilon$ pour tout $k \geq K$. On a donc bien montré que $f_k \rightarrow f$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$. \square

EXEMPLE 4. Soient E et F deux evn sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , et soit $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace des applications linéaires continues $T : E \rightarrow F$, muni de sa norme naturelle. Si l'espace d'arrivée F est complet, alors $\mathcal{L}(E, F)$ est complet. En particulier, pour tout evn E , l'espace $E^* := \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est complet. (On dit que E^* est le **dual** de l'evn E .)

Démonstration. Soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $\mathcal{L}(E, F)$. On veut montrer qu'il existe $T \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\|T_k - T\|_{\mathcal{L}(E, F)} \rightarrow 0$. Dans la suite, on écrit simplement $\|\cdot\|$ au lieu de $\|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$.

ÉTAPE 1. Identification d'un candidat limite.

Pour $u \in E$ fixé pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on a

$$\|T_q(u) - T_p(u)\| = \|(T_q - T_p)(u)\| \leq \|T_q - T_p\| \|u\| \xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0.$$

Donc, pour tout $u \in E$, la suite $(T_k(u))_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans F , qui est supposé complet. Par conséquent, pour tout $u \in E$, la suite $(T_k(u))_{k \in \mathbb{N}}$ converge, $T_k(u) \rightarrow l_u \in F$. Si on pose $T(u) := l_u$, on obtient une application $T : E \rightarrow F$ telle

$$\forall u \in E : T_k(u) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} T(u).$$

ÉTAPE 2. Le candidat limite appartient au bon espace; *i.e.* $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Il s'agit de montrer que l'application $T : E \rightarrow F$ est linéaire et continue. Comme les T_k sont linéaires et que $T_k(u) \rightarrow T(u)$ pour tout $u \in E$, on vérifie sans difficulté que T est linéaire (**exo**). Comme la suite (T_k) est de Cauchy, elle est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$: on a une constante M telle que $\|T_k\| \leq M$ pour tout $k \in \mathbb{N}$; autrement dit

$$\forall k \forall u \in E : \|T_k(u)\| \leq M \|u\|.$$

En fixant $u \in E$ et en faisant $k \rightarrow \infty$, on en déduit

$$\forall u \in E : \|T(u)\| \leq M \|u\|.$$

Donc l'application linéaire T est continue, avec $\|T\| \leq M$.

ÉTAPE 3. $T_k \rightarrow T$ au sens de la distance considérée, i.e. $\|T_k - T\| \rightarrow 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme la suite (T_k) est de Cauchy, on peut trouver $K \in \mathbb{N}$ tel que $\forall p, q \geq K : \|T_q - T_p\| \leq \varepsilon$, i.e.

$$\forall p, q \geq K \forall u \in E : \|(T_q - T_p)(u)\| \leq \varepsilon \|u\|.$$

En prenant $q := k \geq K$ et en faisant $p \rightarrow \infty$, on en déduit

$$\forall k \geq K \forall u \in E : \|(T_k - T)(u)\| \leq \varepsilon \|u\|;$$

autrement dit $\forall k \geq K : \|T_k - T\| \leq \varepsilon$, par définition de $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{\mathcal{L}(E, F)}$. On a donc bien montré que $\|T_k - T\| \rightarrow 0$. \square

1.3. Sous-espaces. Si (E, d) est un espace métrique et $M \subseteq E$, on dira que M est complet pour d si l'espace métrique $(M, d|_{M \times M})$ est complet.

PROPOSITION 1.4. Soit (E, d) un espace métrique et soit $M \subseteq E$. Si M est complet pour d , alors M est fermé dans E .

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de M telle que $u_k \rightarrow u \in E$: il faut voir que $u \in M$. Comme la suite (u_k) converge dans E , c'est une suite de Cauchy, donc une suite de Cauchy dans $(M, d|_{M \times M})$ puisque les u_k appartiennent à M . Comme M est supposé complet pour d , la suite (u_k) converge dans M , i.e. $u_k \rightarrow u' \in M$. Par unicité de la limite, on a $u' = u$; donc $u \in M$. \square

Exemples. $\mathbb{Q}, \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},]0, \infty[,]0, 1]$ ne sont pas complets pour la distance usuelle (induite par la valeur absolue), car ils ne sont pas fermés dans \mathbb{R} .

COROLLAIRE 1.5. Si E est un espace vectoriel normé quelconque, alors tout sous-espace vectoriel de dimension finie $M \subseteq E$ est fermé dans E .

Démonstration. On a vu que tout evn de dimension finie est complet. \square

Exercice. Redémontrer ce dernier résultat en utilisant le théorème de Bolzano-Weierstrass.

PROPOSITION 1.6. Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $M \subseteq E$. Si M est fermé dans E , alors M est complet pour d .

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans $(M, d|_{M \times M})$. Alors (u_k) est une suite de Cauchy dans (E, d) , donc elle converge dans E puisque E est supposé complet : $u_k \rightarrow u \in E$. Comme M est fermé dans E , on a $u \in M$; et donc (u_k) converge dans M . \square

COROLLAIRE 1.7. *Si $[a, b]$ est un intervalle compact de \mathbb{R} , alors l'espace $\mathcal{C}([a, b])$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.*

Démonstration. On sait que $\mathcal{C}([a, b])$ est un sous-espace fermé de $\ell^\infty([a, b])$, puisque toute limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue. Comme on a vu que $\ell^\infty([a, b])$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on peut donc conclure que $\mathcal{C}([a, b])$ est complet. \square

1.4. Produits.

PROPOSITION 1.8. *Soient $(E_1, d_1), \dots, (E_N, d_N)$ des espaces métriques, et soit $E := E_1 \times \dots \times E_N$ muni de la distance produit. Si E_1, \dots, E_N sont complets, alors E aussi.*

Démonstration. Aux notations près, la preuve est identique à celle de la complétude de $(\mathbb{R}^N, \|\cdot\|_\infty)$. On la laisse donc en **exo**. \square

Exercice. Démontrer la réciproque : si $E = E_1 \times \dots \times E_N$ est complet, alors les E_i sont complets.

2. Fermés emboîtés

Le résultat suivant est à comparer au “Théorème des compacts emboîtés” (Lemme 2.10 du Chapitre 3).

LEMME 2.1. (Théorème des fermés emboîtés)

Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés non-vides de E . On fait les hypothèses suivantes :

- (i) *la suite (C_n) est **décroissante** ($C_{n+1} \subseteq C_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$) ;*
- (ii) *$\text{diam}(C_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.*

Alors on peut conclure que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ est non-vide, et en fait réduite à un point $\{a\}$.

Démonstration. Comme tous les C_k sont non-vides, on peut choisir pour tout $k \in \mathbb{N}$ un point $x_k \in C_k$.

Montrons que la suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy. Si $p, q \in \mathbb{N}$ avec par exemple $p \leq q$ alors $x_p \in C_p$, et $x_q \in C_q \subseteq C_p$ car la suite (C_n) est décroissante ; donc $d(x_p, x_q) \leq \text{diam}(C_p)$. Ainsi :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} : d(x_p, x_q) \leq \text{diam}(C_{\min(p,q)}) \xrightarrow{p,q \rightarrow \infty} 0.$$

Comme E est supposé complet, la suite de Cauchy (x_k) converge, $x_k \rightarrow a \in E$. Si $n \in \mathbb{N}$, alors $\forall k \geq n : x_k \in C_k \subseteq C_n$. Comme C_n est supposé fermé dans E on en déduit que $a = \lim x_k \in C_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi $a \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ et donc $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n \neq \emptyset$. Enfin, si $b \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$, alors $d(a, b) \leq \text{diam}(C_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque a et b appartiennent à C_n , donc $d(a, b) = 0$ puisque $\text{diam}(C_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$, et donc $b = a$. Ainsi, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n$ est réduite au point $\{a\}$. \square

Remarque. Dans le Théorème des fermés emboîtés, la condition sur les diamètres est indispensable pour assurer que l'intersection des C_n est non-vide. Par exemple, si on prend $E := \mathbb{R}$ et $C_n := [n, \infty[$, alors E est complet et (C_n) est une suite décroissante de fermés non-vides telle que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} C_n = \emptyset$.

EXEMPLE. Si (E, d) est un espace métrique complet tel que tout ouvert non vide de E contient au moins 2 points, alors *non dénombrable*. En particulier, \mathbb{R} n'est pas dénombrable.

Démonstration. La preuve est la même que celle vue (?) pour \mathbb{R} en 1ère année. Il s'agit de montrer que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite quelconque de points de E , alors on peut trouver un point $a \in E$ qui est différent de tous les x_n .

Par hypothèse, E n'est pas réduit à 1 point ; donc on peut trouver $z_0 \in E$ tel que $z_0 \neq x_0$, puis $\varepsilon_0 > 0$ tel que $x_0 \notin \overline{B}(z_0, \varepsilon_0)$; et on peut de plus supposer que $\varepsilon_0 \leq 2^{-0}$. Ensuite, par hypothèse sur E , la boule ouverte $B(z_0, \varepsilon_0)$ n'est pas réduite à 1 point ; donc on peut trouver $z_1 \in B(z_0, \varepsilon_0)$ tel que $z_1 \neq x_1$, puis $\varepsilon_1 > 0$ tel que $x_1 \notin \overline{B}(z_1, \varepsilon_1)$ et $\overline{B}(z_1, \varepsilon_1) \subseteq B(z_0, \varepsilon_0)$, avec de plus $\varepsilon_1 \leq 2^{-1}$. Et on continue : par récurrence, on construit une suite décroissante de boules fermées $\overline{B}_n = \overline{B}(z_n, \varepsilon_n)$ avec $\varepsilon_n \leq 2^{-n}$, telle que $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \notin \overline{B}_n$. Par le Théorème des fermés emboîtés, l'intersection de toutes ces boules \overline{B}_n est non-vide, réduite à un point $\{a\}$; et $a \neq x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ puisque $a \in \overline{B}_n$ et $x_n \notin \overline{B}_n$. \square

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si $B = \overline{B}(x, r)$ et $B' = \overline{B}(x', r')$ sont deux boules fermées de E telle que $B' \subseteq B$, alors $\|x' - x\| \leq \frac{1}{2}r$. En déduire que si E est complet, alors toute suite décroissante de boules fermées de E a une intersection non-vide.

Exercice 2. On munit \mathbb{N} de la distance d défini comme suit : $d(n, n) := 0$, et $d(n, m) := \alpha_n$ si $n < m$, où $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante telle que $\alpha_k \rightarrow \alpha > 0$. Vérifier que d est effectivement une distance, et montrer que (\mathbb{N}, d) est complet ; puis montrer qu'il existe dans (\mathbb{N}, d) une suite décroissante de boules fermées dont l'intersection est vide.

3. Séries normalement convergentes

DÉFINITION 3.1. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de E . On dit que **la série** $\sum u_k$ **est normalement convergente** si la série à termes positifs $\sum \|u_k\|$ est convergente.

Exemples. Si $E = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , une série "normalement convergente" d'éléments de E est simplement une série absolument convergente. Si $E = (\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$, une série normalement convergente d'éléments de E est une série de fonctions qui "converge normalement" au sens habituel.

THÉORÈME 3.2. Dans un espace vectoriel normé E complet, toute série normalement convergente est convergente. Autrement dit : si (u_k) est une suite d'éléments de E telle que $\sum_{k=0}^{\infty} \|u_k\| < \infty$, alors la série $\sum u_k$ converge dans E , i.e. la suite des sommes partielles $S_n := \sum_{k=0}^n u_k$ converge dans E .

Démonstration. La preuve est identique à celle du théorème affirmant que toute séries absolument convergente de nombres réels ou complexes est convergente.

Comme E est supposé complet, il suffit de montrer que la suite (S_n) est de Cauchy ; ce qui est facile : si $p, q \in \mathbb{N}$ et $p < q$, alors

$$\|S_q - S_p\| = \left\| \sum_{k=p+1}^q u_k \right\| \leq \sum_{k=p+1}^q \|u_k\| \xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0,$$

puisque la série $\sum \|u_k\|$ est convergente. \square

Exercice. Soit (E, d) un espace métrique complet. Montrer que si (x_k) est une suite de points de E telle que la série $\sum d(x_k, x_{k+1})$ est convergente, alors la suite (x_k) converge dans E .

COROLLAIRE 3.3. Soit E un espace de Banach. Si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1$, alors $Id - H$ est inversible dans $\mathcal{L}(E)$, avec

$$(Id - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k,$$

où la série converge dans $\mathcal{L}(E)$.

Démonstration. La série $\sum H^k$ est normalement convergente, car $\|H^k\| \leq \|H\|^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $\|H\| < 1$. Donc la série $\sum H^k$ converge dans $\mathcal{L}(E)$ car $\mathcal{L}(E)$ est complet, et on peut poser $T := \sum_{k=0}^{\infty} H^k$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $(Id - H) \sum_{k=0}^n H^k = Id - H^{n+1}$ (**micro-exo**). Comme $H^{n+1} \rightarrow 0$ et comme l'application $X \mapsto (Id - H)X$ est continue sur $\mathcal{L}(E)$, on en déduit que $(Id - H)T = Id$ en faisant $n \rightarrow \infty$. On montre de même que $T(Id - H) = Id$. Donc $Id - H$ est inversible, d'inverse T . \square

EXERCICE. Soit $GL(E) := \{T \in \mathcal{L}(E); T \text{ inversible}\}$. Montrer que $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$.

COROLLAIRE 3.4. Si $A \in M_N(\mathbb{C})$, alors la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge dans $M_N(\mathbb{C})$. La matrice

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$$

s'appelle comme il se doit l'**exponentielle** de la matrice A .

Démonstration. On a le choix de la norme sur $M_N(\mathbb{C})$ puisqu'on est en dimension finie. On choisit une norme $\|\cdot\|$ subordonnée à une norme quelconque sur \mathbb{C}^N . Alors $\left\| \frac{A^k}{k!} \right\| \leq \frac{\|A\|^k}{k!}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ est normalement convergente car la série $\sum \frac{a^k}{k!}$ converge pour tout $a \in \mathbb{R}$; et donc la série $\sum \frac{A^k}{k!}$ converge dans $M_N(\mathbb{C})$ puisque $M_N(\mathbb{C})$ est complet. \square

EXERCICE. Montrer que si $A, B \in M_N(\mathbb{C})$ vérifient $AB = BA$, alors $e^{A+B} = e^A e^B$.

La proposition suivante est une réciproque du Théorème 3.2.

PROPOSITION 3.5. Soit E un espace vectoriel normé. On suppose que toute série normalement convergente à termes dans E est convergente. Alors on peut conclure que E est complet.

Démonstration. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de Cauchy d'éléments de E . Si on applique la définition d'une suite de Cauchy avec $\varepsilon := 2^{-n}$, on obtient, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un entier K_n tel que

$$\forall p, q \geq K_n : \|u_q - u_p\| \leq 2^{-n}.$$

De plus, on peut supposer que la suite (K_n) est strictement croissante. Si on pose $v_n := u_{K_n}$, on obtient donc une sous-suite (v_n) de (u_k) telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|v_{n+1} - v_n\| = \|u_{K_{n+1}} - u_{K_n}\| \leq 2^{-n}.$$

La série $\sum \|v_{n+1} - v_n\|$ est donc convergente; et donc, par hypothèse sur E , la série $\sum (v_{n+1} - v_n)$ converge dans E . Comme $v_n = v_0 + \sum_{i=0}^{n-1} (v_{i+1} - v_i)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que la suite (v_n) est convergente. Ainsi, on a montré que (u_k) possède une sous-suite convergente. Comme (u_k) est toujours une suite de Cauchy, on peut donc conclure que (u_k) est convergente, d'après le Lemme 1.2 \square

EXERCICE. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $M \subseteq E$ un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que si E est complet, alors l'espace vectoriel quotient E/M est complet pour la norme quotient. (On rappelle que la norme quotient est définie comme suit : $\|[x]\|_{E/M} = \text{dist}(x, M)$ pour tout $x \in E$.)

3.1. Applications linéaires surjectives. Comme illustration du Théorème 3.2, on va démontrer un résultat donnant un critère de surjectivité pour les applications linéaires continues.

PROPOSITION 3.6. *Soient X un espace de Banach, Y un espace vectoriel normé, et $T : X \rightarrow Y$ une application linéaire continue. On suppose qu'il existe deux constantes M et c avec $c < 1$ telles que la chose suivante ait lieu : pour tout $y \in Y$ tel que $\|y\| \leq 1$, on peut trouver $x \in X$ tel que $\|x\| \leq M$ et $\|T(x) - y\| \leq c$. Alors on peut conclure que l'application linéaire T est surjective; et plus précisément, que pour tout $y \in Y$, on peut trouver $x \in X$ tel que $\|x\| \leq \frac{M}{1-c} \|y\|$ et $T(x) = y$.*

Démonstration. Par homogénéité, il suffit de montrer que pour tout $y \in Y$ vérifiant $\|y\| \leq 1$, on peut trouver $x \in X$ tel que $\|x\| \leq \frac{M}{1-c}$ et $T(x) = y$.

Comme $\|y\| \leq 1$, on peut trouver $x_0 \in X$ tel que $\|x_0\| \leq M$ et $\|y - T(x_0)\| \leq c$. Alors $y_1 := \frac{1}{c}(y - T(x_0))$ vérifie $\|y_1\| \leq 1$, donc on peut trouver $x_1 \in X$ tel que $\|x_1\| \leq M$ et $\|y_1 - T(x_1)\| \leq c$; autrement dit, par linéarité de T :

$$\|y - T(x_0 + cx_1)\| \leq c^2.$$

En continuant ainsi, on construit par récurrence une suite $(x_k)_{k \geq 0} \subseteq X$ telle que $\|x_k\| \leq M$ pour tout $k \geq 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N} : \|y - T(x_0 + cx_1 + \dots + c^n x_n)\| \leq c^{n+1}.$$

La série $\sum c^k x_k$ est normalement convergente car $\|c^k x_k\| \leq M c^k$ et $c < 1$. Comme X est un espace de Banach, on peut donc poser

$$x := \sum_{k=0}^{\infty} c^k x_k.$$

On a $\|x\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|c^k x_k\| \leq M \sum_{k=0}^{\infty} c^k = \frac{M}{1-c}$; et $T(x) = y$ car T est continue et $c^{n+1} \rightarrow 0$. \square

COROLLAIRE 3.7. (Théorème de prolongement de Tietze)

Soit E un espace métrique, et soit C un fermé de E . Pour toute fonction continue bornée $f : C \rightarrow \mathbb{R}$, on peut trouver une fonction continue bornée $\tilde{f} : C \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $\tilde{f}|_C = f$ et $\|\tilde{f}\|_{\infty} = \|f\|_{\infty}$.

Démonstration. Notons $\mathcal{C}_b(E)$ l'espace des fonctions continues bornées sur E , muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, et considérons l'application linéaire (continue) $T : \mathcal{C}_b(E) \rightarrow \mathcal{C}_b(C)$ définie par $T(u) := u|_C$. Avec ces notations, il s'agit de voir que pour toute $f \in \mathcal{C}_b(C)$, on peut trouver $\tilde{f} \in \mathcal{C}_b(E)$ telle que $T(\tilde{f}) = f$ et $\|\tilde{f}\|_{\infty} \leq \|f\|_{\infty}$. (On a toujours $\|u\|_{\infty} \geq \|T(u)\|_{\infty}$.)

Comme $\mathcal{C}_b(E)$ est un espace de Banach (c'est un sous-espace fermé de $l^\infty(E)$), il suffit de montrer la chose suivante : si $f \in \mathcal{C}_b(C)$ vérifie $\|f\|_\infty \leq 1$, alors on peut trouver $u \in \mathcal{C}_b(E)$ telle que $\|u\|_\infty \leq 1/3$ et $\|T(u) - f\|_\infty \leq 2/3$. En effet, si cela est acquis, on pourra appliquer la proposition avec $M := 1/3$ et $c := 2/3$ (noter que $\frac{1/3}{1-2/3} = 1$).

Soit donc $f \in \mathcal{C}_b(C)$ vérifiant $\|f\|_\infty \leq 1$, i.e. $-1 \leq f(z) \leq 1$ pour tout $z \in C$. Posons $A := \{x \in C; f(x) \geq 1/3\}$ et $B := \{z \in C; f(z) \leq -1/3\}$. Comme f est continue, A et B sont des fermés de C , donc des fermés de E puisque C est fermé; et $A \cap B = \emptyset$. Par la Proposition 4.3 du Chapitre 2, on peut donc séparer A et B par une fonction continue : il existe une fonction continue $\theta : E \rightarrow [0, 1]$ valant 1 sur A et 0 sur B . Si on pose $u(x) := \frac{2}{3}\theta(x) - \frac{1}{3}$, alors la fonction u est continue, elle est égale à $1/3$ sur A et à $-1/3$ sur B , et on a $-1/3 \leq u(x) \leq 1/3$ pour tout $x \in E$. Comme $1/3 \leq f(z) \leq 1$ sur A , $-1 \leq f(z) \leq -1/3$ sur B et $-1/3 < f(z) < 1/3$ sur $C \setminus (A \cup B)$, on voit qu'on a $|u(z) - f(z)| \leq 2/3$ pour tout $z \in C$ (exo), i.e. $\|T(u) - f\|_\infty \leq 2/3$. Donc la fonction u convient. \square

4. Prolongement des applications uniformément continues

THÉORÈME 4.1. *Soient E et F deux espaces métriques, avec F complet. Soit également $D \subseteq E$ une partie dense de E , et soit $f : D \rightarrow F$. On suppose que f est uniformément continue. Alors f se prolonge de manière unique en une application continue $\tilde{f} : E \rightarrow F$; et l'application \tilde{f} est uniformément continue.*

Démonstration. (i) Comme D est dense dans E , l'unicité d'un éventuel prolongement continu de f découle du théorème de "prolongement des identités" (Proposition 5.4 du Chapitre 2).

(ii) Montrons l'existence d'une application uniformément continue $\tilde{f} : E \rightarrow F$ qui prolonge f .

FAIT 1. Une application uniformément continue change les suites de Cauchy en suites de Cauchy.

Preuve du Fait 1. C'est un exo de compréhension des définitions, qu'il est important de faire soi-même. \square

FAIT 2. Soit $x \in E$ quelconque. Si $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de D telle que $z_k \rightarrow x$, alors la suite $(f(z_k))$ converge dans F . De plus, $\lim f(z_k)$ ne dépend pas de la suite (z_k) telle que $z_k \rightarrow x$.

Preuve du Fait 2. Par le Fait 1, la suite $(f(z_k))$ est de Cauchy dans F car la suite (z_k) – qui converge dans E – est de Cauchy dans D et f est uniformément continue; donc $(f(z_k))$ converge dans F puisque F est supposé complet.

Si (z_k) et (z'_k) sont deux suites d'éléments de D telle que $z_k \rightarrow x$ et $z'_k \rightarrow x$, alors la "suite mélangée" $(z_0, z'_0, z_1, z'_1, \dots)$ converge également vers x ; donc la suite $(f(z_0), f(z'_0), f(z_1), f(z'_1), \dots)$ converge, ce qui entraîne que $d(f(z_k), f(z'_k)) \rightarrow 0$. On a donc $\lim f(z_k) = \lim f(z'_k)$. \square

Par le Fait 2, et comme D est dense dans E , on peut poser, pour tout $x \in E$:

$$\tilde{f}(x) := \lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k),$$

où (z_k) est n'importe quelle suite d'éléments de D telle que $z_k \rightarrow x$. On a $\tilde{f}(x) = f(x)$ si $x \in D$ car pour un tel x on peut prendre $z_k := x$. Montrons que l'application $\tilde{f} : E \rightarrow F$ est uniformément continue.

Soit $\varepsilon > 0$ quelconque. On cherche un $\delta > 0$ tel que

$$d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } x, x' \in E \text{ vérifiant } d(x, x') < \delta.$$

Comme on sait que l'application $f : D \rightarrow F$ est uniformément continue, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$d(f(z), f(z')) \leq \varepsilon \quad \text{pour tous } z, z' \in D \text{ vérifiant } d(z, z') < \delta.$$

Montrons que ce δ convient. Soient $x, x' \in E$ vérifiant $d(x, x') < \delta$. Choisissons des suites (z_k) et (z'_k) d'éléments de D telles que $z_k \rightarrow x$ et $z'_k \rightarrow x'$. Alors $d(z_k, z'_k) \rightarrow d(x, x') < \delta$; donc on peut trouver un entier k_0 tel que $\forall k \geq k_0 : d(z_k, z'_k) < \delta$. On a alors

$$\forall k \geq k_0 : d(f(z_k), f(z'_k)) \leq \varepsilon;$$

et comme $f(z_k) \rightarrow \tilde{f}(x)$ et $f(z'_k) \rightarrow \tilde{f}(x')$ par définition de l'application \tilde{f} , on en déduit $d(\tilde{f}(x), \tilde{f}(x')) = \lim d(f(z_k), f(z'_k)) \leq \varepsilon$. \square

COROLLAIRE 4.2. *Soit $]a, b)$ un intervalle de \mathbb{R} "ouvert à gauche". Si $f :]a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ est uniformément continue, alors f se prolonge par continuité au point a . (Résultat analogue pour un intervalle $(a, b[$ "ouvert à droite".)*

Démonstration. On applique le théorème avec $E := [a, b)$ et $D :=]a, b)$, qui est certainement dense dans E . \square

COROLLAIRE 4.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés, avec F complet, et soit $M \subseteq E$ un sous-espace vectoriel dense dans E . Si $T : M \rightarrow F$ est une application linéaire continue, alors T se prolonge de manière unique en une application linéaire continue $\tilde{T} : E \rightarrow F$.*

Démonstration. L'application linéaire continue $T : M \rightarrow F$ est lipschitzienne, donc uniformément continue. Donc, par le théorème, il existe une unique application continue $\tilde{T} : E \rightarrow F$ qui prolonge T . Il reste à voir que \tilde{T} est linéaire.

Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Les applications $(u, v) \mapsto \tilde{T}(\lambda u + \mu v)$ et $(u, v) \mapsto \lambda \tilde{T}(u) + \mu \tilde{T}(v)$ sont continues sur $E \times E$ car \tilde{T} est continue, et elles coïncident sur $M \times M$ car $\tilde{T}|_M = T$ et T est linéaire. Comme $M \times M$ est dense dans $E \times E$, ces deux applications coïncident donc sur $E \times E$ par "prolongement des identités" (Proposition 5.4 du Chapitre 2); ce qui prouve la linéarité de \tilde{T} . \square

5. Complété d'un espace métrique

Le théorème suivant montre en particulier que toute suite de Cauchy dans un espace métrique (E, d) quelconque est en fait convergente; mais dans un espace plus gros.

THÉORÈME 5.1. *Soit (E, d) un espace métrique quelconque. Il existe un espace métrique (\hat{E}, \hat{d}) possédant les propriétés suivantes :*

- " $E \subseteq \hat{E}$ ", i.e. E se plonge isométriquement dans \hat{E} ;
- E est dense dans \hat{E} ;
- (\hat{E}, \hat{d}) est complet.

De plus, l'espace métrique (\hat{E}, \hat{d}) est unique à isométrie près. On dit que (\hat{E}, \hat{d}) est le **complété** de l'espace métrique (E, d) .

Exemple. Le complété de \mathbb{Q} muni de la distance usuelle est \mathbb{R} , puisque \mathbb{R} est complet et que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} .

Preuve du théorème. (i) *Existence.* On sait que, comme tout espace métrique, E se plonge isométriquement dans $(\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$ pour un certain ensemble I . On sait aussi que $(\ell^\infty(I), \|\cdot\|_\infty)$ est complet. Donc, si on note \hat{E} l'adhérence de E dans $\ell^\infty(I)$ et \hat{d} la distance sur \hat{E} induite par $\|\cdot\|_\infty$, alors (\hat{E}, \hat{d}) possède les propriétés requises.

(ii) *Unicité.* On va utiliser le théorème de prolongement des applications uniformément continues. Soient (M_1, d_1) et (M_2, d_2) deux “complétés” de (E, d) : on veut montrer que (M_1, d_1) et (M_2, d_2) sont isométriques. Par hypothèse, (M_1, d_1) et (M_2, d_2) sont complets avec “ $E \subseteq M_1$ ” et “ $E \subseteq M_2$ ”, et E est dense dans M_1 et dans M_2 . Soient $i_1 : E \rightarrow M_1$ et $i_2 : E \rightarrow M_2$ les injections canoniques. Comme $E \subseteq M_1$ est dense dans M_1 et comme $i_2 : E \rightarrow M_2$ est une isométrie, donc une application uniformément continue (!), il existe une unique application continue $J : M_1 \rightarrow M_2$ telle que $J(x) = i_2(x) = x$ pour tout $x \in E \subseteq M_1$. De plus, comme i_2 est une isométrie, on vérifie (exo) que J est une isométrie. De même, il existe une isométrie $J' : M_2 \rightarrow M_1$ telle que $J'(x) = x$ pour tout $x \in E \subseteq M_2$. On a alors $J' \circ J(x) = x$ pour tout $x \in E \subseteq M_1$, et $J \circ J'(x) = x$ pour tout $x \in E \subseteq M_2$. Ainsi, l'application $J' \circ J : M_1 \rightarrow M_1$ coïncide avec id_{M_1} sur E , et $J \circ J' : M_2 \rightarrow M_2$ coïncide avec id_{M_2} sur E . Comme E est dense dans M_1 et M_2 et comme $J' \circ J$ et $J \circ J'$ sont continues (ce sont des isométries), on en déduit qu'on a $J' \circ J = id_{M_1}$ et $J \circ J' = id_{M_2}$. Donc J et J' sont des isométries *bijectives* et $J' = J^{-1}$; et ainsi, M_1 et M_2 sont isométriques. \square

EXERCICE. Montrer que si E est un espace vectoriel normé, alors son complété \hat{E} peut être muni d'une structure d'espace vectoriel normé. Autrement dit : *le complété d'un evn est un espace de Banach.*

6. Complétude et compacité

On a vu plus haut que tout espace métrique compact est complet. De plus, on sait également (cf le Chapitre 3) que tout espace métrique E compact est **précompact**, ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut recouvrir E par un nombre fini d'ensembles de diamètres $\leq \varepsilon$. Le théorème suivant montre que la chose qui manque à un espace métrique précompact pour être compact est précisément d'être complet.

THÉORÈME 6.1. *Un espace métrique (E, d) est compact si et seulement si il est précompact et complet.*

Le preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant. Pour démontrer le théorème, on a en fait uniquement besoin de savoir que (i) \implies (ii).

LEMME 6.2. *Pour un espace métrique (E, d) , les choses suivantes sont équivalentes.*

- (i) E est précompact.
- (ii) Toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ possède une sous-suite de Cauchy.

Preuve du Lemme 6.2. (i) \implies (ii). Supposons E précompact. Soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite quelconque de points de E : on cherche à construire une sous-suite (u_{k_n}) qui soit de Cauchy. Comme E est précompact, on peut trouver des ensembles $Z_1, \dots, Z_N \subseteq E$ de diamètre $\leq \varepsilon_0 := 2^{-0}$ tels que $E = Z_1 \cup \dots \cup Z_N$. Il y a une infinité d'entiers $k \in \mathbb{N}$

et un nombre fini de Z_i , donc on peut trouver $i_0 \in \llbracket 1, N \rrbracket$ et un ensemble infini $\Lambda_0 \subseteq \mathbb{N}$ tels que $\forall k \in \Lambda_0 : u_k \in Z_{i_0}$. On a alors

$$\forall k, k' \in \Lambda_0 : d(u_k, u_{k'}) \leq \text{diam}(Z_{i_0}) \leq 2^{-0}.$$

En répétant ce raisonnement avec $\varepsilon_1 := 2^{-1}$ au lieu de ε_0 et Λ_0 au lieu de \mathbb{N} , on obtient un ensemble infini $\Lambda_1 \subseteq \Lambda_0$ tel que $\forall k, k' \in \Lambda_1 : d(u_k, u_{k'}) \leq 2^{-1}$. Et ainsi de suite : par récurrence, on construit une suite décroissante $(\Lambda_n)_{n \geq 0}$ de parties infinies de \mathbb{N} telle que

$$\forall n \geq 0 \forall k, k' \in \Lambda_n : d(u_k, u_{k'}) \leq 2^{-n}.$$

Posons alors $k_0 := \min \Lambda_0$ et $k_n := \min \{k \in \Lambda_n; k > k_{n-1}\}$ pour tout $n \geq 1$ (procédé diagonal). On obtient de la sorte une sous-suite (u_{k_n}) de (u_k) . Si $p, q \in \mathbb{N}$, alors $k_p \in \Lambda_p$ et $k_q \in \Lambda_q$; donc k_p et k_q appartiennent tous les deux à $\Lambda_{\min(p,q)}$ car la suite (Λ_n) est décroissante. Par conséquent :

$$\forall p, q \in \mathbb{N} : d(u_{k_p}, u_{k_q}) \leq 2^{-\min(p,q)} \xrightarrow{p,q \rightarrow \infty} 0;$$

et donc la sous-suite (u_{k_n}) est de Cauchy.

(ii) \implies (i) Supposons (ii) vérifiée. Soit $(\widehat{E}, \widehat{d})$ le complété de (E, d) . Par (ii), toute suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ possède une sous-suite qui converge dans \widehat{E} . Donc E est relativement compact dans \widehat{E} ; et donc E est précompact. \square

Preuve du Théorème 6.1. Par le Lemme 6.2, c'est à présent un **micro-exo** : il suffit d'écrire les définitions. \square

COROLLAIRE 6.3. *Soit (M, d) un espace métrique complet. Pour un ensemble $A \subseteq M$, on a l'équivalence suivante A est précompact $\iff \overline{A}$ est compact.*

Démonstration. Si \overline{A} est compact, alors \overline{A} est précompact et donc A aussi. Inversement, si A est précompact, alors \overline{A} aussi (**exo**); donc \overline{A} est compact car \overline{A} est complet en tant que fermé de l'espace complet M . \square

COROLLAIRE 6.4. *Un espace métrique E est précompact si et seulement si son complété \widehat{E} est compact.*

Démonstration. C'est évident d'après le corollaire précédent appliqué à $M := \widehat{E}$ et $A := E$. \square

7. Théorème du point fixe

Le théorème suivant possède d'innombrables applications.

THÉORÈME 7.1. *Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit Z un ensemble tel que $E \subseteq Z$. Soit également $\Phi : E \rightarrow Z$. On suppose que*

- (i) E est **stable par** Φ , i.e. $\Phi(E) \subseteq E$;
- (ii) l'application $\Phi : (E, d) \rightarrow (E, d)$ est **contractante**, i.e k -lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$.

Alors Φ possède un unique point fixe dans E ; autrement dit, il existe un et un seul point $a \in E$ tel que $\Phi(a) = a$. De plus, si on se donne un point $x_0 \in E$ quelconque, alors la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ définie par la récurrence $x_{n+1} = \Phi(x_n)$ converge vers a , et la convergence a lieu à vitesse géométrique ; plus précisément :

$$\forall n \geq 1 : d(x_n, a) \leq \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Démonstration. Soit $x_0 \in E$ quelconque. Comme E est stable par Φ , on peut en effet définir une suite $(x_n)_{n \geq 0} \subseteq E$ par la récurrence $x_{n+1} = \Phi(x_n)$.

Montrons que la suite (x_n) est de Cauchy. On remarque d'abord que si $n \geq 1$, alors

$$\begin{aligned} d(x_n, x_{n+1}) &= d(\Phi(x_{n-1}), \Phi(x_n)) \leq k d(x_{n-1}, x_n) \\ &\leq k^2 d(x_{n-2}, x_{n-1}) \quad \text{si } n \geq 2 \\ &\leq \dots \\ &\leq k^n d(x_0, x_1). \end{aligned}$$

(L'inégalité est vraie également pour $n = 0$.) On en déduit que si $p, q \in \mathbb{N}$ et $p < q$, alors

$$\begin{aligned} d(x_p, x_q) &\leq d(x_p, x_{p+1}) + d(x_{p+1}, x_{p+2}) + \dots + d(x_{q-1}, x_q) \\ &\leq (k^p + k^{p+1} + \dots + k^{q-1}) d(x_0, x_1) \\ &\xrightarrow{p, q \rightarrow \infty} 0 \quad \text{car la série } \sum k^i \text{ converge.} \end{aligned}$$

Donc la suite (x_n) est en effet de Cauchy. Comme E est supposé complet, la suite (x_n) converge, $x_n \rightarrow a \in E$. De plus, en prenant $p := n \in \mathbb{N}$ et en faisant $q \rightarrow \infty$ dans l'inégalité précédente, on voit que

$$\forall n \in \mathbb{N} : d(x_n, a) \leq \left(\sum_{i=n}^{\infty} k^i \right) d(x_0, x_1) = \frac{k^n}{1-k} d(x_0, x_1).$$

Comme l'application Φ est continue (car lipschitzienne), on a $\Phi(a) = \lim \Phi(x_n) = \lim x_{n+1} = a$; autrement dit a est un point fixe de Φ .

Enfin, a est le *seul* point fixe de Φ : si $b \in E$ vérifie $\Phi(b) = b$, alors

$$d(a, b) = d(\Phi(a), \Phi(b)) \leq k d(a, b),$$

ce qui n'est possible que si $d(a, b) = 0$ puisque $k < 1$. □

COROLLAIRE 7.2. Soient (E, d) un espace métrique complet, Z un ensemble tel que $E \subseteq Z$ et $\Phi : E \rightarrow Z$ telle que $\Phi(E) \subseteq E$. S'il existe un entier $r \geq 1$ tel que $\Phi^r := \Phi \circ \dots \circ \Phi$ soit contractante, alors Φ possède un et un seul point fixe dans E .

Démonstration. Par le théorème, l'application Φ^r possède un unique point fixe a . Mais $\Phi(a)$ est alors point fixe de Φ^r (**micro-exo**), donc $\Phi(a) = a$ par unicité, et ainsi a est en fait point fixe de Φ . Enfin, si b est un autre point fixe de Φ , alors b est aussi point fixe de Φ^r (**micro-exo**), et donc $b = a$. □

EXEMPLE. Soit E un espace de Banach. Si $h : E \rightarrow E$ est une application contractante, alors $Id - h$ est une bijection de E sur E . De plus, $(Id - h)^{-1}$ est lipschitzienne.

Démonstration. Montrons d'abord que $f := Id - h$ est bijective. Soit $y \in E$ quelconque : on veut montrer que l'équation $f(x) = y$ possède une et une seule solution.

Cette équation peut s'écrire comme un problème de point fixe (c'est une idée importante) :

$$f(x) = y \iff x + (y - f(x)) = x.$$

Soit $\Phi = \Phi_y : E \rightarrow E$ l'application définie par

$$\Phi(x) := x + (y - f(x)) = y + h(x).$$

Comme y est fixé et que h est contractante, l'application Φ est contractante ; donc elle possède un unique point fixe, ce qui prouve que f est bijective.

Montrons maintenant que f^{-1} est lipschitzienne. Par hypothèse, l'application h est k -lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$. On a donc pour tous $x, x' \in E$:

$$\begin{aligned} \|f(x') - f(x)\| &= \|(x' - x) - (h(x') - h(x))\| \\ &\geq \|x' - x\| - \|h(x') - h(x)\| \\ &\geq (1 - k) \|x' - x\|. \end{aligned}$$

Comme f est bijective, on en déduit

$$\forall y, y' \in E : \|y' - y\| \geq (1 - k) \|f^{-1}(y') - f^{-1}(y)\|;$$

ce qui prouve que f^{-1} est M -lipschitzienne avec $M := \frac{1}{1-k}$. □

Exercice. Soit E un espace de Banach, et soit $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|H\| < 1$. Écrire l'équation $(Id - H)T = Id$ d'inconnue $T \in \mathcal{L}(E)$ comme un problème de point fixe pour une certaine application $\Phi : \mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(E)$, et montrer que ce problème admet une unique solution T . Déterminer explicitement la suite $(T_n)_{n \geq 0}$ définie par $T_0 := Id$ et l'itération $T_{n+1} = \Phi(T_n)$. Conclusion ?

8. Théorème de Baire

Le résultat suivant est un moyen souvent efficace de montrer que certains ensembles sont non-vides. Il a de très nombreuses applications, parfois inattendues. Dans la suite, on dira qu'un espace métrique (E, d) est **topologiquement complet** s'il existe une distance δ sur E topologiquement équivalente à d telle que (E, δ) soit complet.

Exercice. Montrer que $]0, \infty[$ est topologiquement complet en considérant la distance δ définie par $\delta(x, y) := |y - x| + \left| \frac{1}{y} - \frac{1}{x} \right|$.

THÉORÈME 8.1. *Soit (E, d) un espace métrique topologiquement complet, et soit $(O_i)_{i \in I}$ une famille dénombrable d'ouverts de E . On suppose que chaque ouvert O_i est dense dans E . Alors, on peut conclure que $G := \bigcap_{i \in I} O_i$ est dense dans E ; et en particulier que $\bigcap_{i \in I} O_i \neq \emptyset$.*

Démonstration. On fait la preuve pour un ensemble d'indices I infini (ce qui est clairement le cas le plus difficile). Comme I est dénombrable, on peut supposer que $I = \mathbb{N}$; et on note alors la suite d'ouverts $(O_n)_{n \in \mathbb{N}}$ plutôt que $(O_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Enfin, comme E est topologiquement complet, on peut d'emblée supposer qu'il est complet pour la distance d donnée.

Soit O un ouvert quelconque de E , avec $O \neq \emptyset$: on veut montrer que $G \cap O \neq \emptyset$.

Comme O_0 est dense dans E , on a $O_0 \cap O \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in O_0 \cap O$. Comme $O_0 \cap O$ est un ouvert de E (intersection de 2 ouverts), on peut trouver $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subseteq O \cap O_0$.

La boule ouverte $B(x_0, \varepsilon_0)$ est un ouvert non-vide de E ; donc $B(x_0, \varepsilon_0) \cap O_1 \neq \emptyset$ car O_1 est dense dans E . Soit $x_1 \in B(x_0, \varepsilon_0) \cap O_1$. Comme $B(x_0, \varepsilon_0) \cap O_1$ est un ouvert de E , on peut trouver ε_1 tel que $0 < \varepsilon_1 \leq 2^{-1}$ et $\overline{B}(x_1, \varepsilon_1) \subseteq B(x_0, \varepsilon_0) \cap O_1$.

En répétant ce raisonnement, on voit qu'on peut construire par récurrence une suite $(x_n)_{n \geq 0}$ de points de E et une suite $(\varepsilon_n)_{n \geq 0}$ de nombres réels > 0 telles que

- $\overline{B}(x_0, \varepsilon_0) \subseteq O \cap O_0$.
- $\varepsilon_n \leq 2^{-n}$ et $\overline{B}(x_n, \varepsilon_n) \subseteq B(x_{n-1}, \varepsilon_{n-1}) \cap O_n$ pour tout $n \geq 1$;

Posons alors $C_n := \overline{B}(x_n, \varepsilon_n)$ pour tout $n \geq 0$. Par définition, les C_n sont des fermés non-vides de E , la suite (C_n) est décroissante, et $\text{diam}(C_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. D'après le Théorème des fermés emboîtés, on sait que $\bigcap_{n \geq 0} C_n$ est non-vide, réduite à un point $\{a\}$. Comme $C_n \subseteq O_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $C_0 \subseteq O$, on a $a \in O \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n = G \cap O$, ce qui termine la preuve. \square

Exercice. Soit E un espace métrique quelconque. Montrer que si O_1, \dots, O_N sont des ouverts denses de E , alors $O_1 \cap \dots \cap O_N$ est encore dense dans E .

COROLLAIRE 8.2. *Soit E un espace métrique topologiquement complet.*

- Si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E et si chaque F_n est d'intérieur vide dans E , alors $M := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est encore d'intérieur vide; et en particulier $E \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n \neq \emptyset$.
- De manière équivalente : si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés d'un espace métrique topologiquement complet E et si $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur non-vide dans E , alors il existe au moins un $n \in \mathbb{N}$ tel que $\overset{\circ}{F}_n \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fermés d'intérieur vide. Si on pose $O_n := E \setminus F_n$, alors les O_n sont des ouverts denses de E . Donc $G := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} O_n$ est dense dans E ; autrement dit M est d'intérieur vide puisque $E \setminus G = M$. \square

COROLLAIRE 8.3. *Soit E un espace métrique topologiquement complet. Si $(C_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de fermés de E telle que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n = E$, alors $\Omega := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{C}_n$ est dense dans E .*

Démonstration. On va montrer que $E \setminus \Omega$ est d'intérieur vide. Comme $E = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n$, on a

$$E \setminus \Omega = \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} C_n \right) \setminus \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overset{\circ}{C}_n \right) \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (C_n \setminus \overset{\circ}{C}_n).$$

Si on pose $F_n := C_n \setminus \overset{\circ}{C}_n$, alors les F_n sont des fermés de E car les C_n sont fermés; et les F_n sont visiblement d'intérieur vide (**micro-exo**). Donc $E \setminus \Omega = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est d'intérieur vide d'après le Corollaire 8.2 \square

EXEMPLE. Si E est un espace métrique topologiquement complet tel que tout ouvert non vide de E contient au moins 2 points, alors E est nécessairement *non dénombrable*. En particulier :

- \mathbb{R} n'est pas dénombrable;
- \mathbb{Q} n'est pas topologiquement complet.

Démonstration. On a déjà démontré ce résultat en utilisant le Théorème des fermés emboîtés. Avec le Théorème de Baire, ça va un peu plus vite.

Supposons que E soit dénombrable, et écrivons $E = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Si on pose $F_n := \{x_n\}$, alors les F_n sont des fermés de E , et ils sont d'intérieur vide dans E par hypothèse sur E . D'après le Théorème de Baire, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ doit encore être d'intérieur vide dans E , ce qui est absurde puisque $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n = E$. \square

9. Trois applications "non triviales"

9.1. Projection sur un convexe complet. Pour illustrer le théorème des fermés emboîtés, on va démontrer le résultat suivant, qui est à la base de toute la théorie des "espaces de Hilbert" (dont on ne parlera pas...).

THÉORÈME 9.1. (Théorème de projection)

Soit H un espace vectoriel normé **pré-hilbertien**, i.e. dont la norme $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire. Soit également $C \subseteq H$ une partie convexe, non-vide et complète pour $\|\cdot\|$. Pour tout point $a \in H$, il existe un et un seul point $u \in C$ tel que $\|a - u\| = \text{dist}(a, C)$. Ce point u s'appelle le **projeté** de a sur le convexe C , et se note en général $p_C(a)$.

Démonstration. Quitte à remplacer C par $C_a := C - a = \{u - a; u \in C\}$ – qui est tout autant convexe et complet que C – on se ramène au cas où $a = 0$. Comme $\text{dist}(0, C) = \inf \{\|u\|; u \in C\}$, il s'agit alors de montrer que C possède un et un seul point de norme minimale.

Posons $d := \inf \{\|u\|; u \in C\}$, et pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit

$$C_n := \left\{ u \in C; \|u\| \leq d + \frac{1}{n} \right\}.$$

Par définition de d , les C_n sont tous non-vides. Ils sont également fermés dans H (**exo**), et la suite (C_n) est visiblement décroissante. De plus, on a

$$\bigcap_{n \geq 1} C_n = \{u \in C; \|u\| \leq d\} = \{u \in C; \|u\| = d\} \quad \text{par définition de } d.$$

Il s'agit donc de montrer que $\bigcap_{n \geq 1} C_n$ contient exactement 1 point; et par le Théorème des fermés emboîtés, il suffit pour cela de vérifier que $\text{diam}(C_n) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ quelconque. Si $u, v \in C_n$, alors $\frac{u+v}{2} \in C_n$ car C_n est un ensemble convexe (**exo**), et donc $\|\frac{u+v}{2}\| \geq d$. De plus, $\|u\| \leq d + \frac{1}{n}$ et $\|v\| \leq d + \frac{1}{n}$ par définition de C_n . Enfin, d'après l'identité du parallélogramme, on a

$$\|u + v\|^2 + \|u - v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|u - v\|^2 &= 2(\|u\|^2 + \|v\|^2) - \|u + v\|^2 \\ &\leq 2 \left[\left(d + \frac{1}{n}\right)^2 + \left(d + \frac{1}{n}\right)^2 \right] - 4d^2 \\ &= \frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tous $u, v \in C_n$, on en déduit

$$\text{diam}(C_n) \leq \sqrt{\frac{8d}{n} + \frac{4}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

□

REMARQUE. Si C est un sous-espace vectoriel de H , alors $p_C(a)$ est caractérisé par les propriétés suivantes :

$$p_C(a) \in C \quad \text{et} \quad (a - p_C(a)) \perp C.$$

Pour cette raison, on dit que $p_C(a)$ est le **projeté orthogonal** de a sur E .

Démonstration. Comme C est un espace vectoriel, $p_C(a) + tv$ appartient à C pour tout $v \in C$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc, si on fixe $v \in C$, la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) := \|p_C(a) + tv - a\|^2$ possède un minimum en $t := 0$ par définition de $p_C(a)$. En développant le produit scalaire, et en supposant par commodité que l'espace H est réel, on voit que $f(t) = \|v\|^2 t^2 + 2\langle p_C(a) - a, v \rangle t + \|p_C(a) - a\|^2$. En particulier, f est dérivable sur \mathbb{R} et $f'(0) = 2\langle p_C(a) - a, v \rangle$. On a donc $\langle p_C(a) - a, v \rangle = 0$, pour tout $v \in C$.

Soit u un point de C vérifiant $(u - a) \perp C$: montrons que nécessairement $u = p_C(a)$. Comme C est un espace vectoriel, on a $v - u \in C$ pour tout $v \in C$, et donc $(a - u) \perp (v - u)$. D'après le Théorème de Pythagore, on a donc $\|a - v\| \geq \|a - u\|$, pour tout $v \in C$ (faire un dessin) ; et donc $u = p_C(a)$ par “unicité du projeté”. □

Dans les trois exercices qui suivent, on garde les notations et les hypothèses du Théorème de projection ; et on suppose que le corps de base est \mathbb{R} par commodité.

Exercice 1. Montrer que si $a \in H$, alors

$$\forall v \in C : \langle a - p_C(a), v - p_C(a) \rangle \leq 0.$$

(Commencer par vérifier que $\gamma(t) := p_C(a) + t(v - p_C(a)) \in C$ pour tout $t \in [0, 1]$. En déduire que $f(t) := \|\gamma(t) - a\|^2$ atteint son minimum sur $[0, 1]$ au point $t := 0$, et conclure.)

Exercice 2. Montrer que l'application $p_C : H \rightarrow C$ est 1-lipschitzienne. (Étant donné $x, y \in H$, appliquer l'Exercice 1 avec $a := x$, $v := p_C(y)$ et $a := y$, $v := p_C(x)$; puis ajouter les inégalités.)

Exercice 3. Montrer que si C est un sous-espace vectoriel de H , alors l'application p_C est linéaire.

9.2. Équations différentielles. Pour illustrer le théorème du point fixe, on va démontrer un résultat d'existence et d'unicité de solution d'une équation différentielle.

PROPOSITION 9.2. Soit I un intervalle compact de \mathbb{R} , et soit $f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que f est continue sur $I \times \mathbb{R}$, et lipschitzienne par rapport à la 2ème variable. Alors, pour tout $t_0 \in I$ et pour tout $u_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique fonction $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 qui est solution de l'équation différentielle $u'(t) = f(t, u(t))$ avec la “condition initiale” $u(t_0) = u_0$.

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier (mais non trivial) du **Théorème de Cauchy-Lipschitz**, dont on ne donnera pas l'énoncé général. Le propos ici est juste de donner une illustration intéressante du Théorème du point fixe sans s'embarasser de complications techniques.

Dans le jargon des équations différentielles, on veut montrer que le *Problème de Cauchy*

$$(*) \quad \begin{cases} u'(t) = f(t, u(t)) \\ u(t_0) = u_0 \end{cases}$$

possède une unique solution.

Si $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue, alors u est solution de (*) si et seulement si elle vérifie

$$\forall t \in I : u(t) = u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Autrement dit, si on note comme d'habitude $\mathcal{C}(I)$ l'ensemble des fonctions continues $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $\mathcal{F}(I)$ l'ensemble de toutes les fonctions $x : I \rightarrow \mathbb{R}$, alors u est solution du problème de Cauchy si et seulement si u est un point fixe de l'application $\Phi : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{F}(I)$ définie par

$$\Phi(u)(t) := u_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds.$$

Il s'agit donc de montrer que Φ possède un unique point fixe $u \in \mathcal{C}(I)$.

On sait $\mathcal{C}(I)$ est complet pour la distance induite par la norme $\| \cdot \|_\infty$. De plus, si $u \in \mathcal{C}(I)$, alors $\Phi(u)$ est une fonction continue et même de classe \mathcal{C}^1 , car f est continue. Donc $\mathcal{C}(I)$ est stable par Φ . Pour conclure, il suffit donc de montrer que l'application $\Phi : \mathcal{C}(I) \rightarrow \mathcal{C}(I)$ possède une itérée contractante, *i.e.* qu'il existe un entier $r \geq 1$ tel que Φ^r soit contractante.

Par hypothèse sur f , il existe une constante C telle que

$$\forall s \in I \forall x, y \in \mathbb{R} : |f(s, y) - f(s, x)| \leq C |y - x|.$$

Donc, si $u, v \in \mathcal{C}(I)$ et si $t \in I$, alors

$$\begin{aligned} |\Phi(v)(t) - \Phi(u)(t)| &\leq \left| \int_{t_0}^t |f(s, v(s)) - f(s, u(s))| ds \right| \\ &\leq C \left| \int_{t_0}^t |v(s) - u(s)| ds \right| \\ &\leq C |t - t_0| \times \|v - u\|_\infty. \end{aligned}$$

En remplaçant u et v par $\Phi(u)$ et $\Phi(v)$, on en déduit

$$\begin{aligned} \|\Phi^2(v)(t) - \Phi^2(u)(t)\| &\leq C \left| \int_{t_0}^t |\Phi(v)(s) - \Phi(u)(s)| ds \right| \\ &\leq C \left| \int_{t_0}^t C |s - t_0| \|v - u\|_\infty ds \right| \\ &= \frac{C^2 |t - t_0|^2}{2} \|v - u\|_\infty; \end{aligned}$$

puis par récurrence :

$$\|\Phi^r(v)(t) - \Phi^r(u)(t)\| \leq \frac{C^r |t - t_0|^r}{r!} \|v - u\|_\infty$$

pour tout $t \in I$ et pour tout $r \in \mathbb{N}$. On a donc

$$\|\Phi^r(v) - \Phi^r(u)\|_\infty \leq \frac{C^r |I|^r}{r!} \|v - u\|_\infty$$

pour tout $r \in \mathbb{N}$ et pour tous $u, v \in \mathcal{C}(I)$. Ainsi, Φ^r est C_r -lipschitzienne pour tout $r \in \mathbb{N}$, où $C_r := \frac{C^r |I|^r}{r!}$. Donc Φ^r est contractante si r est suffisamment grand, puisque $C_r \rightarrow 0$ quand $r \rightarrow \infty$. \square

Exercice. Soient $a, u_0 \in \mathbb{R}$, et soit $\Phi : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ l'application définie par $\Phi(u)(t) := u_0 + \int_0^t a u(s) ds$. Déterminer explicitement la suite de fonctions $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0(t) := u_0$ et $u_{n+1} := \Phi(u_n)$. Conclusion?

9.3. Fonctions nulle-part dérivables. Comme illustration du théorème de Baire, on va démontrer qu’il existe des fonctions continues “très méchantes”.

THÉORÈME 9.3. *Il existe des fonctions continues sur $[0, 1]$ qui ne sont dérivables en aucun point.*

Démonstration. On va utiliser le Théorème de Baire pour montrer que l’ensemble des fonctions continues nulle-part dérivable est dense dans l’espace de Banach $\mathcal{C}([0, 1])$, et donc en particulier non-vide. Mais on ne produira pas explicitement une telle fonction, ce qui est typique dans les démonstrations d’existence d’objets bizarres basées sur le Théorème de Baire.

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathcal{O}_n = \left\{ f \in \mathcal{C}([0, 1]); \forall x \in [0, 1] : \sup_{y \neq x} \frac{|f(y) - f(x)|}{|y - x|} > n \right\}.$$

FAIT 1. Chaque \mathcal{U}_n est un ouvert de $\mathcal{C}([0, 1])$.

Preuve du Fait 1. Fixons n , et posons $\mathcal{F}_n := \mathcal{C}([0, 1]) \setminus \mathcal{O}_n$. Par définition, une fonction f appartient à \mathcal{F}_n si et seulement si il existe un point $x \in [0, 1]$ tel que la propriété suivante ait lieu :

$$(*) \quad \forall y \in [0, 1] : |f(y) - f(x)| \leq n|x - y|.$$

Notons \mathbf{F} l’ensemble des couples $(x, f) \in [0, 1] \times \mathcal{C}([0, 1])$ vérifiant la propriété (*). Comme l’application $(x, f) \mapsto f(x)$ est continue sur $[0, 1] \times \mathcal{C}([0, 1])$ (**exo**), on voit que l’ensemble \mathbf{F} est un fermé de $[0, 1] \times \mathcal{C}([0, 1])$; et par définition de \mathbf{F} , on a l’équivalence

$$f \in \mathcal{F}_n \iff \exists x \in [0, 1] : (x, f) \in \mathbf{F}.$$

Comme $[0, 1]$ est compact, on en déduit (**exo**) que \mathcal{F}_n est fermé dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Donc \mathcal{U}_n est en effet ouvert. \square

FAIT 2. Chaque \mathcal{O}_n est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$.

Preuve du Fait 2. On sait que l’ensemble des fonctions *lipschitziennes* est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$: cela vient par exemple du fait que toute fonction continue $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ est limite uniforme de fonctions affines par morceaux; ou moins élémentairement du fait qu’une telle f est limite de uniforme de fonctions polynomiales (Théorème de Weierstrass), qui sont lipschitziennes car de classe \mathcal{C}^1 sur l’intervalle compact $[0, 1]$. Pour montrer que \mathcal{U}_n est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$, il suffit donc de montrer qu’on peut approcher toute fonction lipschitzienne $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ par un élément de \mathcal{U}_n . Fixons g , et fixons $\varepsilon > 0$. On cherche $f \in \mathcal{U}_n$ telle que $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Comme g est lipschitzienne, il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\left| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \right| \leq C$$

pour tous $x, y \in [0, 1]$, $x \neq y$.

Soit $M > 0$ à fixer ultérieurement, et soit $\theta : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue affine par morceaux de pente partout supérieure à M en valeur absolue et vérifiant $\|\theta\|_\infty \leq \varepsilon$. (Dessiner le graphe d’une telle fonction.) Enfin, posons $f := g + \theta$. On a évidemment $\|f - g\|_\infty \leq \varepsilon$.

Si x est un point quelconque de $[0, 1]$, alors on peut trouver $y \neq x$ tel que

$$\left| \frac{\theta(y) - \theta(x)}{y - x} \right| \geq M.$$

On a alors

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \right| &\geq M - \left| \frac{g(y) - g(x)}{y - x} \right| \\ &\geq M - C \\ &> n \quad \text{si on a choisi } M > n + C. \end{aligned}$$

Comme le point $x \in [0, 1]$ est arbitraire, on en déduit que $f \in \mathcal{U}_n$. Ceci termine la preuve du Fait 2. \square

D'après le théorème de Baire l'intersection de tous les ouverts \mathcal{U}_n est dense dans $\mathcal{C}([0, 1])$. Comme il est assez clair qu'une fonction f appartenant à tous les \mathcal{U}_n n'est dérivable en aucun point (**exo**), cela termine la preuve. \square

Connexité

1. Espaces métriques connexes

DÉFINITION 1.1. *Un espace métrique E est dit **connexe** si les seules parties de E à la fois ouvertes et fermées dans E sont \emptyset et E .*

Remarque 1. Cette définition a un sens pour tout espace topologique E .

Remarque 2. On dit qu'une partie non-vide M d'un espace métrique E est une **partie connexe de E** si M est connexe pour la topologie induite ; autrement dit, si les seules parties de M à la fois ouvertes et fermées *dans M* sont \emptyset et M . On convient également que \emptyset est un ensemble connexe.

Le lemme suivant donne plusieurs reformulations de la notion de connexité ; en particulier, (iii) et (iii') signifient intuitivement qu'un espace métrique est connexe si et seulement si il est "d'un seul tenant". Petit point vocabulaire : dans tout ce chapitre, on appellera **partition** d'un ensemble E toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de E deux à deux disjointes telle que $\bigcup_{i \in I} A_i = E$. (On n'exige pas que les A_i soient *non-vides*.)

LEMME 1.2. *Pour un espace métrique E , les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (i) *E est connexe.*
- (ii) *Pour tout $A \subseteq E$ tel que $A \neq \emptyset$ et $A \neq E$, on a $\partial A \neq \emptyset$.*
- (iii) *Il n'est pas possible de partitionner E en deux ouverts non-vides.*
- (iii') *Il n'est pas possible de partitionner E en deux fermés non-vides.*
- (iv) *Il n'est pas possible de partitionner E en un nombre fini $N \geq 2$ d'ouverts non-vides.*
- (iv') *Il n'est pas possible de partitionner E en un nombre fini $N \geq 2$ de fermés non-vides.*

Démonstration. L'équivalence de (i) et (ii) vient du fait que si $A \subseteq E$, alors

$$A \text{ est ouvert et fermé} \iff \partial A = \emptyset.$$

(En effet, comme $\partial A = \overline{A} \setminus \overset{\circ}{A}$ et $\overset{\circ}{A} \subseteq A \subseteq \overline{A}$, on a $\partial A = \emptyset$ si et seulement $\overline{A} = A = \overset{\circ}{A}$, ce qui signifie exactement que A est ouvert et fermé.) On voit ainsi que (ii) est simplement la *contraposée* de (i).

L'équivalence de (i) et (iii) est claire également : E est non connexe si et seulement si il existe un ensemble $A \subseteq E$ tel que A et $E \setminus A$ sont tous les deux ouverts et non-vides, ce qui signifie qu'il existe une partition (O_1, O_2) de E en deux ouverts non-vides.

L'équivalence de (iii) et (iii') est elle aussi immédiate : si (A, B) est une partition de E , alors $A = E \setminus B$; donc A et B sont tous les deux ouverts si et seulement si ils sont tous les deux fermés.

Il est évident que (iv) entraîne (ii). Inversement, si E se partitionne en ouverts non-vides O_1, O_2, \dots, O_N , alors O_1 et $O'_2 := O_2 \cup \dots \cup O_N$ forment une partition de E en 2 ouverts non-vides. Ainsi, (ii) et (iv) sont équivalentes.

Enfin, l'équivalence de (iv) et (iv') est laissée en **exo**. \square

Exercice. Montrer que E est connexe si et seulement si la propriété suivante a lieu : si $A, B \subseteq E$ sont non-vides et vérifient $A \cup B = E$, alors $\overline{A} \cap B \neq \emptyset$ ou $A \cap \overline{B} \neq \emptyset$.

EXEMPLE 1. Si E est un espace métrique, alors tout singleton $\{a\} \subseteq E$ est connexe.

Démonstration. **Exo**. \square

EXEMPLE 2. Si E est un espace métrique *topologiquement discret*, alors les seules parties connexes de E sont \emptyset et les singletons ; et donc E n'est pas connexe s'il contient au moins 2 points. En particulier, un espace métrique *fini* contenant au moins 2 points n'est pas connexe.

Démonstration. Si $M \subseteq E$ est non-vide et si on choisit $a \in M$, alors $\{a\}$ et $M \setminus \{a\}$ forment une partition de M , ils sont tous les deux *ouverts* dans M car M est topologiquement discret. Si de plus M contient au moins deux points, alors $\{a\}$ et $M \setminus \{a\}$ sont tous les deux non-vides, donc M n'est pas connexe. \square

Exemple 3. $M :=]0, 1] \cup]3, \infty[$ n'est pas une partie connexe de \mathbb{R} .

Démonstration. Si on pose $O_1 :=]0, 1]$ et $O_2 :=]3, \infty[$, alors O_1 et O_2 sont des *ouverts* de M (car par exemple $O_1 = M \cap]-\infty, 2[$ et O_2 est même ouvert dans \mathbb{R}), qui sont non-vides et forment une partition de M . \square

Exemple 4. $M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \neq 1\}$ n'est pas une partie connexe de \mathbb{R}^2 .

Démonstration. Si on pose $O_1 := \{(x, y); xy > 1\}$ et $O_2 := \{(x, y); xy < 1\}$, alors O_1 et O_2 sont des ouverts de \mathbb{R}^2 , donc de M , ils sont non-vides (**micro-exo**) et forment une partition de M . On peut également (c'est même bien plus convaincant) faire un dessin et constater que M se partitionne naturellement en 3 ouverts non-vides. \square

Exercice. Dessiner M et les ensembles O_1 et O_2 introduits dans la preuve.

EXEMPLE 5. $GL_N(\mathbb{R})$ n'est pas une partie connexe de $M_N(\mathbb{R})$.

Démonstration. Si on pose $O^+ = \{M; \det(M) > 0\}$ et $O^- := \{M; \det(M) < 0\}$, alors O^+ et O^- sont des ouverts de $M_N(\mathbb{R})$ par continuité du déterminant, ils sont non-vides (**micro-exo**), et ils forment une partition de $GL_N(\mathbb{R})$. \square

L'exemple suivant est particulièrement important.

THÉORÈME 1.3. *Les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles.*

Démonstration. On aura besoin de la caractérisation suivante des intervalles.

FAIT. Un ensemble $M \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si

$$(1.1) \quad \forall x, y \in M \text{ tels que } x < y, \text{ on a }]x, y[\subseteq M.$$

Preuve du Fait. Tout intervalle satisfait évidemment (1.1).

Inversement, supposons que (1.1) soit vérifiée. Posons $a := \inf M$ (qui existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$) et $b := \sup M$ (qui existe dans $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Il suffit de montrer que l'intervalle $]a, b[$ est contenu dans M . En effet, comme $M \subseteq [a, b]$ par définition de a et b , cela entraînera que M est égal à $]a, b[$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $[a, b]$ et donc que M est un intervalle.

Soit $z \in]a, b[$ quelconque. Par définition de a et b , on peut trouver $x, y \in M$ tels que $a < x < z$ et $z < y < b$. Alors $z \in]x, y[$, et donc $z \in M$ par (1.1). \square

On peut maintenant passer à la preuve du théorème proprement dite.

(i) Montrons qu'une partie connexe de \mathbb{R} est nécessairement un intervalle. Soit $M \subseteq \mathbb{R}$, et supposons que M ne soit pas un intervalle. Par le fait, on peut alors trouver $x, y \in A$ avec $x < y$ tel que $]x, y[$ n'est pas contenu dans A ; autrement dit, il existe $z \notin A$ tel que $x < z < y$. On a alors $A \subseteq]-\infty, z[\cup]z, \infty[$, donc les ensembles $O_1 := A \cap]-\infty, z[$ et $O_2 := A \cap]z, \infty[$ forment une partition de A . De plus, O_1 et O_2 sont des ouverts de A , et ils sont non-vides car $x \in O_1$ et $y \in O_2$. Donc A n'est pas connexe.

(ii) Montrons maintenant que tout intervalle est connexe. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Supposons que I ne soit pas connexe. Alors on peut écrire $I = C_1 \cup C_2$, où C_1 et C_2 sont des fermés non vides de I tels que $C_1 \cap C_2 = \emptyset$. Choisissons $a \in C_1$ et $b \in C_2$, avec par exemple $a < b$. Alors l'ensemble $C_1 \cap [a, b]$ est un fermé non vide de $[a, b]$ (il contient a), donc un compact non vide de \mathbb{R} ; et donc il possède un plus grand élément α . On a $\alpha \neq b$ car $\alpha \in C_1$ et $b \notin C_1$. Ainsi $a \leq \alpha < b$, et par définition de α , il n'y a aucun point de C_1 entre α et b . De même, l'ensemble $C_2 \cap [\alpha, b]$ étant compact et non vide, il admet un plus petit élément β . On a $\alpha < \beta$, et il n'y a aucun point de C_2 entre α et β . Ainsi, il n'y a aucun point de $C_1 \cup C_2$ entre α et β , donc aucun point de I . Mais ceci est absurde puisque $]\alpha, \beta[\subseteq I$ et $I = C_1 \cup C_2$. \square

Pour conclure cette section, voici un résultat parfois utile, qui permet d'éviter de se torturer l'esprit avec des questions de topologie induite.

PROPOSITION 1.4. *Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. Les propriétés suivantes ont équivalentes.*

- (1) M n'est pas connexe.
- (2) On peut trouver V_1 et V_2 ouverts dans E tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $M \subseteq V_1 \cup V_2$ et $V_1 \cap M \neq \emptyset$, $V_2 \cap M \neq \emptyset$.

Démonstration. Supposons (2) vérifiée. Alors $O_1 := V_1 \cap M$ et $O_2 := V_2 \cap M$ sont des ouverts non-vides de M formant une partition de M ; donc M n'est pas connexe.

Inversement, supposons que M ne soit pas connexe. On peut donc partitionner M en deux fermés non-vides C_1, C_2 . Posons alors $V_1 := \{x \in E; \text{dist}(x, C_1) < \text{dist}(x, C_2)\}$ et $V_2 := \{x \in E; \text{dist}(x, C_2) < \text{dist}(x, C_1)\}$. Les ensembles V_1 et V_2 sont des ouverts de E , et il est évident que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$.

FAIT. On a $C_1 \subseteq V_1$ et $C_2 \subseteq V_2$.

Preuve du Fait. Soit $x \in C_1$ quelconque. On a évidemment $\text{dist}(x, C_1) = 0$. De plus $x \notin C_2$ puisque $C_1 \cap C_2 = \emptyset$, et donc $x \notin \overline{C_2}^M$ puisque C_2 est fermé dans M . Comme $\overline{C_2}^M = \overline{C_2} \cap M$ et $x \in M$, on en déduit que $x \notin \overline{C_2}$, et donc $\text{dist}(x, C_2) > 0 = \text{dist}(x, C_1)$. Ainsi, $x \in V_1$. On montre de même que $C_2 \subseteq V_2$. \square

Par le Fait, on voit que $V_1 \cap M$ et $V_2 \cap M$ sont non-vides et que $M = C_1 \cup C_2 \subseteq V_1 \cup V_2$, ce qui termine la preuve de l'implication (1) \implies (2). \square

Remarque. La moitié de ce résultat est spécifique aux espaces métriques : l'implication (1) \implies (2) est fautive pour un espace topologique E général. L'implication (2) \implies (1) est en revanche vraie dans tout espace topologique.

Exercice. Montrer que la Proposition 1.4 est vraie si on suppose que E est un espace topologique séparé et que M est compact au sens de Borel-Lebesgue. (Utiliser un exemple d'utilisation de la propriété de Borel-Lebesgue donné au Chapitre 3.)

2. Connexité et applications continues

Le lemme suivant donne une caractérisation de la connexité qui est souvent utile en pratique.

LEMME 2.1. *Pour un espace métrique E , les propriétés suivantes sont équivalentes.*

- (1) E est connexe.
- (2) Toute application continue de E dans l'espace à 2 éléments $\{0, 1\}$ muni de la topologie discrète est constante.

Démonstration. Pour tout ensemble $A \subseteq E$, on notera $\mathbf{1}_A$ la **fonction indicatrice** de A , qui est l'application de E dans $\{0, 1\}$ définie par

$$\mathbf{1}_A(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

Toutes les applications de E dans $\{0, 1\}$ sont des fonctions indicatrices (une application $f : E \rightarrow \{0, 1\}$ est la fonction indicatrice de $A := \{x; f(x) = 1\}$). De plus, il est évident que $\mathbf{1}_A$ est constante si et seulement si $A = \emptyset$ ou E .

FAIT. $\mathbf{1}_A$ est continue si et seulement si A est ouvert et fermé dans E .

Preuve du Fait. On a $A = \mathbf{1}_A^{-1}(\{1\})$, et $\{1\}$ est ouvert et fermé dans $\{0, 1\}$. Donc, si $\mathbf{1}_A$ est continue, alors A est ouvert et fermé dans E . Inversement, supposons que A soit ouvert et fermé dans E . Comme les seules parties de $\{0, 1\}$ sont \emptyset , $\{1\}$, $\{0\}$ et $\{0, 1\}$, on voit que pour tout ensemble $V \subseteq \{0, 1\}$, on a $\mathbf{1}_A^{-1}(V) = \emptyset$, A , $E \setminus A$ ou E . Ces ensembles sont tous ouverts dans E puisque A est ouvert et fermé, donc $\mathbf{1}_A$ est continue. \square

La preuve du lemme est maintenant immédiate : par le Fait, E est non connexe si et seulement si il existe un ensemble $A \subseteq E$ tel que $\mathbf{1}_A$ soit continue et non constante, ce qui revient à dire qu'il existe une application continue non constante f de E dans $\{0, 1\}$. \square

Bien que très facile à démontrer, le résultat suivant est absolument essentiel.

THÉORÈME 2.2. *Soient E et F deux espaces métriques. Si $f : E \rightarrow F$ est une application continue, alors f change les connexes en connexes : pour tout ensemble connexe $C \subseteq E$, l'ensemble $f(C)$ est connexe.*

Démonstration. Quitte à remplacer E par C et F par $f(C)$, on peut supposer que E lui-même est connexe et que f est surjective. Il s'agit alors de montrer que $F = f(E)$ est connexe.

Si A est une partie ouverte et fermée de F , alors $f^{-1}(A)$ est ouvert et fermé dans E car f est continue. Comme E est connexe, on a donc $f^{-1}(A) = \emptyset$ ou $f^{-1}(A) = E$. Mais $A = f(f^{-1}(A))$ car f est surjective. Donc, ou bien $A = f(\emptyset) = \emptyset$, ou bien $A = f(E) = F$. Cela prouve que F est connexe. \square

Comme les parties connexes de \mathbb{R} sont les intervalles, on en déduit immédiatement le **théorème des valeurs intermédiaires** :

COROLLAIRE 2.3. *Si I est un intervalle de \mathbb{R} et si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue sur I , alors $f(I)$ est un intervalle.*

Une autre application immédiate et utile est le résultat suivant, qu'on pourrait tout aussi bien démontrer directement à partir de la définition.

COROLLAIRE 2.4. *Si E est un espace métrique connexe, alors toute application continue de E dans un espace Z topologiquement discret est constante. En particulier, si F est un autre espace métrique, alors toute application continue $f : E \rightarrow F$ ne prenant qu'un nombre fini de valeurs est constante.*

Démonstration. Comme f est continue et E connexe, $f(E)$ est une partie connexe (non vide) de Z , donc un singleton puisque Z est topologiquement discret. Le cas particulier en est bien un : si l'application continue $f : E \rightarrow F$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs, on peut la considérer comme une application continue $f : E \rightarrow Z$ où $Z := f(E)$ est fini, donc topologiquement discret. \square

Voici une autre conséquence, un peu inattendue.

COROLLAIRE 2.5. *Si (E, d) est un espace métrique connexe contenant au moins 2 points, alors E est non dénombrable.*

Démonstration. Choisissons $a, b \in E$ avec $a \neq b$, et soit $\delta := d(a, b)$. La fonction $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := d(a, x)$ est continue; donc $f(E)$ est un intervalle de \mathbb{R} car E est supposé connexe. Comme $f(a) = 0$ et $f(b) = \delta$, on en déduit que $f(E)$ contient l'intervalle $[0, \delta]$. Donc $f(E)$ n'est pas dénombrable car $[0, \delta]$ ne l'est pas; et donc E non plus puisque $f(E) = \{f(x); x \in E\}$ s'énumère à l'aide de E . \square

Remarque. Ce résultat est spécifique aux espaces métriques. Bien que cela soit difficile à croire, il existe des espaces topologiques séparés, dénombrables (infinis) et cependant connexes. (Si on n'exige pas que l'espace soit séparé, c'est évident : prendre $E := \mathbb{N}$ avec la topologie "grossière" $\{\emptyset, E\}$.)

COROLLAIRE 2.6. *Soient E et F deux espaces métriques, avec E connexe. Si $f : E \rightarrow F$ est une application continue telle que $f(E)$ est dénombrable, alors f est constante.*

Démonstration. C'est évident par le corollaire précédent : $f(E)$ est connexe, non-vide et dénombrable, donc réduit à un point. \square

Exercice 1. Montrer que $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ est connexe.

Exercice 2. Soit E un espace métrique connexe, et soient $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions continues ne s'annulant pas. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un entier $n \geq 1$ tel que $f(x)^n = g(x)^n$, et que f et g prennent la même valeur en au moins 1 point $x_0 \in E$. Montrer que $f = g$.

Exercice 3. Soit $D \subseteq \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. Montrer qu'il n'existe aucune fonction continue $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(D) \subseteq \mathbb{R} \setminus D$ et $f(\mathbb{R} \setminus D) \subseteq D$. (Commencer par montrer qu'une telle f doit nécessairement être constante.)

3. Connexité par arcs

3.1. Chemins et courbes.

DÉFINITION 3.1. Soit E un espace métrique. Un **chemin dans E** est une application continue $\gamma : [a, b] \rightarrow E$, où $[a, b]$ est un segment de \mathbb{R} . L'**image** de γ est l'ensemble $\gamma([a, b]) \subseteq E$. Une **courbe dans E** est un ensemble $\Gamma \subseteq E$ qui est l'image d'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow E$.

Remarque 1. Si $M \subseteq E$, un **chemin dans M** est donc un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ tel que $\gamma([a, b]) \subseteq M$; et une **courbe dans M** est une courbe $\Gamma \subseteq E$ entièrement contenue dans M .

Remarque 2. Par définition, une courbe est un ensemble *compact* et *connexe*.

Remarque 3. Si $u, v \in E$, on dira qu'une courbe $\Gamma \subseteq E$ **relie u à v dans E** si Γ est l'image d'un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ tel que $\gamma(a) = u$ et $\gamma(b) = v$.

Intuitivement (et si on fait un dessin dans le plan) une courbe reliant u à v est une "ligne continue" partant de u et aboutissant à v . La ligne a le droit d'être très biscornue, de se recouper très souvent...; mais elle doit rester "continue" : il ne peut pas y avoir de "coupure". (Tout cela n'a évidemment pas grand sens.)

Exercice. Montrer que si $\Gamma \subseteq E$ est une courbe reliant u à v , alors Γ relie v à u .

EXEMPLE 3.2. Soit E un espace vectoriel normé, et soient $u, v \in E$. On définit $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ par $\gamma(t) := (1 - t)u + tv$. Alors γ est un chemin affine dont l'image est le segment $[u, v] \subseteq E$. En particulier, $[u, v]$ est une courbe reliant u à v dans E .

Exercice. Montrer que si $\Gamma \subseteq E$ est une courbe reliant u à v , alors il existe un chemin $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ (l'intervalle de définition est $[0, 1]$) d'image Γ tel que $\gamma(0) = u$ et $\gamma(1) = v$.

Le lemme suivant est très utile. Comme il est intuitivement évident, on l'utilisera sans y faire explicitement référence; mais il demande quand même une preuve.

LEMME 3.3. Soit E un espace métrique, et soit $u, v, w \in E$. Si $\Gamma_1 \subseteq E$ est une courbe reliant u à v dans E , et si $\Gamma_2 \subseteq E$ est une courbe reliant v à w , alors $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est une courbe, qui relie u à w .

Démonstration. D'après l'exercice posé quelques lignes plus haut, on peut trouver deux chemins $\gamma_{u,v}, \gamma_{v,w} : [0, 1] \rightarrow E$ d'images respectives Γ_1, Γ_2 tels que $\gamma_{u,v}(0) = u$, $\gamma_{u,v}(1) = v = \gamma_{v,w}(0)$ et $\gamma_{v,w}(1) = w$. Alors l'application $\gamma : [0, 1] \rightarrow E$ définie par $\gamma(t) := \gamma_{u,v}(2t)$ si $t \in [0, 1/2]$ et $\gamma(t) := \gamma_{v,w}(2t - 1)$ si $t \in [1/2, 1]$ est bien définie et continue. Autrement dit γ est un chemin dans E , d'image $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$, avec $\gamma(0) = \gamma_{u,v}(0) = u$ et $\gamma(1) = \gamma_{v,w}(1) = w$. Donc $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ est bien une courbe reliant u à w dans E . \square

Exercice. Montrer qu'on définit une *relation d'équivalence* \mathcal{R} sur E en déclarant que $u\mathcal{R}v$ si et seulement si il existe une courbe reliant u à v dans E .

Le résultat suivant porte parfois le nom de **Lemme du passage des douanes**.

PROPOSITION 3.4. Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. Si $\gamma : [a, b] \rightarrow E$ est un chemin tel que $\gamma(a) \in A$ et $\gamma(b) \in E \setminus A$, alors il existe au moins un $t \in [a, b]$ tel que $\gamma(t) \in \partial A$. De manière équivalente, si $\Gamma \subseteq E$ est un chemin reliant un point de A à un point de $E \setminus A$, alors $\Gamma \cap \partial A \neq \emptyset$.

Démonstration. Soit $\Gamma \subseteq E$ une courbe reliant un point $u \in A$ à un point $v \in E \setminus A$: il s'agit de voir que Γ contient au moins 1 point de ∂A .

Si $u \notin \overset{\circ}{A}$, on a déjà gagné car dans ce cas $u \in A \setminus \overset{\circ}{A} \subseteq \partial A$. De même, il n'y a rien à faire si $v \in \overline{A}$ car alors $v \in \overline{A} \setminus A \subseteq \partial A$. Dans la suite, on suppose donc que $u \in \overset{\circ}{A}$ et $v \in E \setminus \overline{A}$.

Supposons que $\Gamma \cap \partial A = \emptyset$. Alors, comme $E = \overset{\circ}{A} \cup \partial A \cup (E \setminus \overline{A})$, on a $\Gamma \subseteq \overset{\circ}{A} \cup (E \setminus \overline{A})$. Donc les ensembles $O_1 := \Gamma \cap \overset{\circ}{A}$ et $O_2 := \Gamma \cap (E \setminus \overline{A})$ forment une partition de Γ . De plus, O_1 et O_2 sont des ouverts de Γ car $\overset{\circ}{A}$ et $E \setminus \overline{A}$ sont des ouverts de E , et ils sont non-vides car $u \in O_1$ et $v \in O_2$. On en déduit que Γ n'est pas connexe, ce qui est une contradiction. \square

COROLLAIRE 3.5. *Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. S'il existe une courbe $\Gamma \subseteq E$ reliant un point de A à un point de $E \setminus A$, alors $\partial A \neq \emptyset$.*

Démonstration. C'est évident par la proposition. \square

3.2. Espaces connexes par arcs.

DÉFINITION 3.6. *Soit E un espace métrique. On dit que E est **connexe par arcs** si, étant donné deux points quelconques $u, v \in E$, il est toujours possible de trouver une courbe Γ reliant u à v dans E .*

Remarque. Comme toujours, une partie M de E est dite connexe par arcs si M est connexe par arcs pour la topologie induite ; autrement dit, si pour tous $u, v \in E$, on peut trouver une courbe $\Gamma \subseteq E$ reliant u à v et *entièrement contenue dans M* .

PROPOSITION 3.7. *Tout espace connexe par arcs est connexe.*

Démonstration. Supposons E connexe par arcs. Il s'agit de montrer que si $A \subseteq E$ est non-vide et différent de E , alors $\partial A \neq \emptyset$. Mais ceci est évident : en choisissant un point $u \in A$ et un point $v \in E \setminus A$, on peut trouver une courbe Γ joignant u à v dans E puisque E est connexe par arcs, et on en déduit que $\partial A \neq \emptyset$ par le Lemme du passage des douanes. \square

REMARQUE. On verra plus loin que la réciproque n'est pas vraie : il existe des espaces métriques connexes qui ne sont pas connexes par arcs.

Comme on va le voir, l'intérêt de la connexité par arcs est qu'en pratique, lorsqu'un espace est connexe par arcs il est facile de le vérifier, et *très* facile de s'en convaincre.

EXEMPLE 1. Si E est un espace vectoriel normé, alors tout ensemble *convexe* $M \subseteq E$ est connexe par arcs (et donc connexe).

Démonstration. Si u, v sont deux points quelconques de M , on peut relier u à v par les segment $[u, v]$, qui est entièrement contenu dans M puisque M est convexe. \square

Exemple 2. L'ensemble $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy < 1\}$ est connexe par arcs (et donc connexe).

Démonstration. C'est clair en faisant un dessin. \square

EXEMPLE 3. Si E est un espace vectoriel normé de dimension réelle ≥ 2 , alors $E \setminus \{0\}$ et $S_E := \{u \in E; \|u\| = 1\}$ sont connexes par arcs (et donc connexes).

Démonstration. (i) Soient $u, v \in E \setminus \{0\}$ quelconques. Si le segment $[u, v]$ ne passe pas par 0, alors $[u, v]$ est une courbe joignant u à v dans $E \setminus \{0\}$. Si $[u, v]$ passe par 0, alors u et v sont colinéaires. Comme $\dim(E) \geq 2$, on peut trouver $w \in E$ qui n'est colinéaire ni à u ni à v . Alors les segments $[u, w]$ et $[w, v]$ ne passent pas par 0, donc $\Gamma := [u, w] \cup [w, v]$ est une courbe reliant u à v dans $E \setminus \{0\}$.

(ii) Soient maintenant $u, v \in S$ quelconques. Par (i), on peut trouver une courbe Γ_0 reliant u à v dans $E \setminus \{0\}$. Alors $\Gamma := \left\{ \frac{x}{\|x\|}; x \in \Gamma_0 \right\}$ est une courbe (**exo**), qui relie u à v dans S_E . \square

Exercice 1. Montrer que si $Z \subseteq \mathbb{C}$ est un ensemble fini, alors $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs.

Exercice 2. Soit $D \subseteq \mathbb{C}$ un ensemble dénombrable.

- (i) Soient $u, v \in \mathbb{C} \setminus D$ fixés, et soit Δ la médiatrice de $[u, v]$. Pour tout $p \in \Delta$, on note C_p le cercle de centre p passant par u et v . Observer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \{u, v\}$, alors z appartient à au plus 1 cercle C_p ; puis montrer que l'ensemble $\mathcal{D} := \{p \in \Delta; C_p \cap D \neq \emptyset\}$ est dénombrable.
- (ii) Montrer que $\mathbb{C} \setminus D$ est connexe par arcs.

EXEMPLE 4. $GL_N(\mathbb{C})$ est connexe par arcs (et donc connexe).

Démonstration. Soient $A, B \in GL_N(\mathbb{C})$ quelconques. On cherche un chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow GL_N(\mathbb{C})$ tel que $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$.

Pour $\lambda \in \mathbb{C}$, posons $P(\lambda) := \det((1 - \lambda)A + \lambda B)$. Alors P est une fonction polynomiale (**micro-exo**), et $P \neq 0$ car $P(0) = \det(A) \neq 0$. Donc $Z := \{\lambda \in \mathbb{C}; P(\lambda) = 0\}$ est un ensemble fini; en particulier, $\mathbb{C} \setminus Z$ est connexe par arcs (c'est l'Exercice 1 ci-dessus). Comme 0 et 1 appartiennent à $\mathbb{C} \setminus Z$ (car $P(0) = \det(A)$ et $P(1) = \det(B)$), on peut donc trouver un chemin $\lambda : [a, b] \rightarrow \mathbb{C} \setminus Z$ tel que $\lambda(a) = 0$ et $\lambda(b) = 1$. Soit alors $\gamma : [a, b] \rightarrow M_N(\mathbb{C})$ le chemin défini par $\gamma(t) := (1 - \lambda(t))A + \lambda(t)B$. Comme $\lambda(t) \in \mathbb{C} \setminus Z$, on a $\det(\gamma(t)) = P(\lambda(t)) \neq 0$ pour tout t ; donc γ est un chemin dans $GL_N(\mathbb{C})$; et bien sûr $\gamma(a) = A$ et $\gamma(b) = B$. \square

On a dit plus haut (sans le démontrer) que la connexité n'entraîne pas la connexité par arcs. La proposition suivante montre qu'il y a cependant une assez large classe d'espaces pour lesquels les deux notions coïncident.

DÉFINITION 3.8. On dit qu'un espace métrique E est **localement connexe par arcs** si, pour tout point $a \in E$ et pour tout voisinage U de a , on peut trouver un voisinage V de a tel que $V \subseteq U$ et V est connexe par arcs.

EXEMPLE 3.9. Tout espace vectoriel normé est localement connexe par arcs.

Démonstration. Si $a \in E$, alors les boules ouvertes $B(a, r)$, $r > 0$ forment une base de voisinages de a ; et ces boules sont des ensembles *convexes*, donc connexes par arcs. \square

Exercice. Montrer que si E est localement connexe par arcs, alors tout ouvert de E est localement connexe par arcs.

PROPOSITION 3.10. Si E est un espace métrique localement connexe par arcs, alors tout ouvert connexe de E est connexe par arcs.

Démonstration. Soit Ω un ouvert connexe de E . On doit montrer que pour tous $u, v \in \Omega$, on peut trouver une courbe $\Gamma \subseteq E$ contenue dans Ω et reliant u à v . Pour cela, on fixe un point $u \in \Omega$, et on pose

$$A := \{v \in \Omega; \text{ il existe une courbe reliant } u \text{ à } v \text{ dans } \Omega\}.$$

L'ensemble A est non-vide car $u \in A$ (le singleton $\{u\}$ est une courbe dans Ω !).

Montrons que A est un ouvert de Ω . Soit $v_0 \in A$ quelconque, et soit $\Gamma_{u,v_0} \subseteq \Omega$ une courbe joignant u à v_0 . Comme E est localement connexe par arcs et comme Ω est un voisinage ouvert de v_0 dans E , on peut trouver un voisinage V de v_0 connexe par arcs tel que $V \subseteq \Omega$ et V est connexe par arcs. Pour tout point $v \in V$, on peut trouver une courbe $\Gamma_{v_0,v} \subseteq V$ reliant v_0 à v . Alors $\Gamma := \Gamma_{u,v_0} \cup \Gamma_{v_0,v}$ est une courbe contenue dans Ω qui relie u à v ; donc $v \in A$. Ainsi, on a trouvé un voisinage V de v_0 dans E entièrement contenu dans A , ce qui prouve que A est un ouvert de E , et donc de Ω .

Montrons maintenant que A est également un fermé de Ω . Soit $v \in \overline{A}^\Omega = \overline{A} \cap \Omega$. Comme $v \in \Omega$ et comme E est localement connexe par arcs, on peut trouver un voisinage V de v tel que $V \subseteq \Omega$ et V est connexe par arcs. Comme $v \in \overline{A}$ et que V est un voisinage de v , on peut trouver un point $v_0 \in A$ tel que $v_0 \in V$. Comme V est connexe par arcs, on peut ensuite trouver une courbe $\Gamma_{v_0,v} \subseteq V$ qui relie v_0 à v ; et comme $v_0 \in A$, on peut également trouver une courbe $\Gamma_{u,v_0} \subseteq \Omega$ qui relie u à v_0 . Alors $\Gamma := \Gamma_{u,v_0} \cup \Gamma_{v_0,v}$ est une courbe dans Ω qui relie u à v , et donc $v \in A$. Ceci étant vrai pour tout $v \in \overline{A}^\Omega$, cela prouve que A est bien un fermé de Ω .

En conclusion, A est non-vide, ouvert et fermé dans Ω . Comme Ω est supposé connexe, on en déduit que $A = \Omega$. Autrement dit, on peut relier u à n'importe quel point $v \in \Omega$ par une courbe contenue dans Ω . Donc Ω est connexe par arcs. \square

COROLLAIRE 3.11. *Tout espace métrique connexe et localement connexe par arcs est connexe par arcs.*

Démonstration. C'est évident par la proposition. \square

COROLLAIRE 3.12. *Tout ouvert connexe d'un espace vectoriel normé est connexe par arcs.*

Démonstration. Compte tenu de l'exemple 3.9, c'est à nouveau évident. \square

Exercice 1. Soit E un evn. Si $u, v \in E$, appelons **ligne polygonale reliant u à v** tout ensemble $\Gamma \subseteq E$ de la forme $\Gamma = [u_0, u_1] \cup \dots \cup [u_{N-1}, u_N]$, où $u_0 = u$ et $u_N = v$. Montrer que tout ouvert connexe $\Omega \subseteq E$ est "connexe par lignes polygonales" : deux points quelconques $u, v \in \Omega$ peuvent toujours être reliés par une ligne polygonale Γ entièrement contenue dans Ω .

Exercice 2. Soit E un espace métrique, et soit \mathcal{R} une relation d'équivalence sur E . Montrer que si toutes les classes d'équivalences pour E sont ouvertes, alors elles sont également toutes fermées. En déduire une "autre" preuve du fait que si E est connexe et localement connexe par arcs, alors il est connexe par arcs.

3.3. Un contre-exemple. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \sin(1/x)$, et soit G le graphe de f ,

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0 \text{ et } y = \sin(1/x)\}.$$

Comme $\sin(1/x)$ prend toutes les valeurs entre -1 et 1 sur tout intervalle $]0, \varepsilon]$, $\varepsilon > 0$, il n'est pas difficile de voir (**exo**) que l'adhérence de G dans \mathbb{R}^2 est donnée par

$$\overline{G} = G \cup L \quad \text{où} \quad L = \{0\} \times [-1, 1].$$

On va montrer ici que \overline{G} est une partie connexe de \mathbb{R}^2 , mais n'est pas connexe par arcs.

De façon générale (voir la section suivante), l'adhérence d'un connexe est toujours un ensemble connexe. Comme G est connexe (c'est l'image de l'intervalle $]0, \infty[$ par l'application continue $x \mapsto (x, \sin(1/x))$), on en déduit que \overline{G} est une partie connexe de \mathbb{R}^2 .

Montrons maintenant que \overline{G} n'est pas connexe par arcs, ce qui est un peu plus délicat.

On va en fait montrer qu'il n'existe pas de courbe dans \overline{G} reliant $(0, 0)$ (qui appartient à \overline{G}) à un point de G . On aura pour cela besoin du fait suivant, où L est le segment $\{0\} \times [-1, 1] = \{(0, y); y \in [-1, 1]\}$.

FAIT. Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un disque centré en un point $\alpha \in L$ et de rayon $r < 1$. Si C est une partie connexe de $\overline{G} \cap D$ contenant α , alors $C \subseteq L$.

Preuve du Fait. Si C n'est pas contenu dans L , alors $C \cap G \neq \emptyset$, i.e. C contient un point $(x_0, f(x_0))$ avec $x_0 > 0$. En notant $\pi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la projection sur l'axe des abscisses, on voit donc que $\pi(C)$ contient 0 (car $\alpha \in C$) et x_0 . De plus, $\pi(C)$ est connexe car C est connexe; donc $\pi(C)$ est un intervalle, et par conséquent $\pi(C)$ contient tout l'intervalle $[0, x_0]$. Comme $C \subseteq \overline{G} \cap D \subseteq L \cup (G \cap D)$ et $\pi(L) = \{0\}$, on en déduit que $\pi(G \cap D)$ contient l'intervalle $]0, x_0]$. Mais en faisant un dessin, on voit de suite que ceci est impossible car D est de rayon strictement inférieur à 1 . \square

Soit maintenant $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{G}$ un chemin quelconque tel que $\gamma(a) = (0, 0)$: on veut montrer que $\gamma(b) \notin G$; et on va en fait prouver que $\gamma([a, b]) \subseteq L$.

Soit $A := \{t \in [a, b]; \gamma(t) \in L\}$. Par définition, A est un fermé de $[a, b]$ car L est un fermé de \mathbb{R}^2 et γ est continu; et $A \neq \emptyset$ car $a \in A$. Comme $[a, b]$ est connexe, il suffit donc de vérifier que A est également un ouvert de $[a, b]$ pour conclure que $A = [a, b]$, ce qui est le résultat souhaité.

Soit $t_0 \in A$ quelconque. Par continuité de γ , on peut trouver $\delta > 0$ tel que, en posant $I :=]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\cap [a, b]$, on ait $\gamma(I) \subseteq D := D(\gamma(t_0), 1/2)$. Alors $C := \gamma(I)$ est connexe et contenu dans $\overline{G} \cap D$. Par le Fait (appliqué avec $\alpha := \gamma(t_0)$, qui appartient bien à L puisque $t_0 \in A$), on en déduit que $\gamma(I) \subseteq L$. Ainsi, on a trouvé un voisinage I de t_0 dans $[a, b]$ tel que $\gamma(t) \in L$ pour tout $t \in I$, autrement dit $I \subseteq A$, ce qui prouve que A est un ouvert de $[a, b]$.

En conclusion, on a montré qu'il n'existe aucun chemin $\gamma : [a, b] \rightarrow \overline{G}$ tel que $\gamma(a) = (0, 0)$ et $\gamma(b) \in G$. Autrement dit, il n'existe aucune courbe dans \overline{G} joignant $(0, 0)$ à un point de G ; et donc \overline{G} n'est pas connexe par arcs.

4. Petites propriétés de stabilité

4.1. Adhérence d'un connexe.

PROPOSITION 4.1. *Soit E un espace métrique. Si $A \subseteq E$ est connexe, alors tout ensemble B tel que $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ est connexe. En particulier, si A est connexe alors \overline{A} est également connexe.*

Démonstration. On montre que toute application continue $f : B \rightarrow \{0, 1\}$ est constante. Comme A est connexe et $f|_A$ est une application continue de A dans $\{0, 1\}$, l'application f est constante sur A . Mais A est *dense* dans B puisque $B \subseteq \overline{A}$; donc f est constante sur B par continuité. \square

Exercice. Démontrer cette proposition en utilisant uniquement la définition de la connexité.

4.2. Réunions de connexes. Une réunion d'ensembles connexes n'a en général aucune raison d'être connexe : par exemple, $\{0, 1\} = \{0\} \cup \{1\}$ n'est pas connexe. Cependant, si ces ensembles connexes sont "reliés les uns aux autres", alors la réunion est connexe :

PROPOSITION 4.2. *Soit E un espace métrique, et soit $(C_i)_{i \in I}$ une famille de parties connexes de E . On suppose que pour tous $i, j \in I$, on peut trouver $i_1, \dots, i_N \in I$ avec $i_1 = i$ et $i_N = j$ tels que $C_{i_k} \cap C_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ pour $k = 1, \dots, N-1$. Alors $C := \bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. Soit $f : C \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue. Comme les C_i sont connexes, l'application f est constante sur chaque C_i , disons $f(x) \equiv c_i$ sur C_i . Pour montrer que f est constante sur C , il suffit de vérifier que c_i ne dépend en fait pas de i , autrement dit que $c_i = c_j$ pour tous $i, j \in I$.

Soient $i_1, \dots, i_N \in I$ tels que $i_1 = i$, $i_N = j$ et $C_{i_k} \cap C_{i_{k+1}} \neq \emptyset$ pour $k = 1, \dots, N-1$. Pour $k = 1, \dots, N-1$, l'application f est identiquement égale à c_{i_k} sur C_{i_k} et à $c_{i_{k+1}}$ sur $C_{i_{k+1}}$. Comme $C_{i_k} \cap C_{i_{k+1}} \neq \emptyset$, on a donc $c_{i_k} = c_{i_{k+1}}$ pour $k = 1, \dots, N-1$; d'où $c_i = c_{i_1} = c_{i_2} = \dots = c_{i_{N-1}} = c_{i_N} = c_j$. \square

COROLLAIRE 4.3. *Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de parties connexes de E telle que $C_i \cap C_j \neq \emptyset$ pour tous $i, j \in I$, alors $C = \bigcup_{i \in I} C_i$ est connexe.*

Démonstration. C'est évident par la proposition : pour $i, j \in I$ donnés, on peut prendre $N = 2$, $i_1 = i$ et $i_2 = j$. \square

COROLLAIRE 4.4. *Si $(C_i)_{i \in I}$ est une famille de parties connexes de E contenant toutes la même ensemble $M \neq \emptyset$, alors $\bigcup_i C_i$ est connexe.*

4.3. Intersections. Une intersection de connexes n'est pas connexe en général (**exo**). On a cependant le résultat suivant.

PROPOSITION 4.5. *Soit E un espace métrique. Si $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts connexes de E , alors $K := \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$ est connexe.*

Démonstration. Supposons que K ne soit pas connexe. D'après la Proposition 1.4, on peut alors trouver deux ouverts V_1, V_2 de E tels que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $K \subseteq V_1 \cup V_2$ et $V_i \cap K \neq \emptyset$ pour $i = 1, 2$. Comme K est contenu dans l'ouvert $V := V_1 \cup V_2$ et est l'intersection de la suite décroissante de compacts (K_n) , l'un des K_n est déjà contenu dans V , d'après le théorème des compacts emboîtés. On a donc un $N \in \mathbb{N}$ tel que $K_N \subseteq V_1 \cup V_2$. Mais V_1 et V_2 sont toujours des ouverts disjoints, et $V_1 \cap K_N$ et $V_2 \cap K_N$ sont non-vides car ils contiennent respectivement $V_1 \cap K$ et $V_2 \cap K$. Par la Proposition 1.4, ceci est absurde car K_N est supposé connexe. \square

Exercice 1. Montrer que le résultat est faux si on suppose seulement que les K_n sont fermés dans E .

Exercice 2. Montrer que le résultat est encore vrai si on suppose seulement que E est un espace topologique séparé et que les K_n sont compacts au sens de Borel-Lebesgue.

4.4. Produits. Pour les produits, il n'y a aucune restriction :

PROPOSITION 4.6. *Si E_1, \dots, E_N sont des espaces métriques connexes, alors $E := E_1 \times \dots \times E_N$ est connexe.*

Démonstration. Par récurrence, il suffit de le montrer pour le produit de deux espaces métriques connexes E_1, E_2 .

Soit $f : E_1 \times E_2 \rightarrow \{0, 1\}$ une application continue : on veut montrer que f est constante.

Si on fixe un point $u \in E_1$, alors l'application $f_u : E_2 \rightarrow \{0, 1\}$ définie par $f_u(v) := f(u, v)$ est continue, donc constante car E_2 est connexe. Donc $f(u, v)$ ne dépend pas de $v \in E_2$.

Mais de même, $f(u, v)$ ne dépend pas non plus de $u \in E_1$. Ainsi, $f(u, v)$ ne dépend ni de u , ni de v ; autrement dit, f est constante. \square

Exercice. Montrer que si E_1, \dots, E_N sont connexes par arcs, alors $E_1 \times \dots \times E_N$ aussi.

5. Composantes connexes

Dans toute cette section, E est un espace métrique.

DÉFINITION 5.1. Une **composante connexe de E** est une partie connexe C de E qui est maximale pour l'inclusion (il n'existe pas de partie connexe $M \subseteq E$ contenant strictement C).

EXEMPLE 1. Si E est connexe, il a *exactement une* composante connexe, à savoir $C := E$.

EXEMPLE 2. Si E est *topologiquement discret*, les composantes connexes de E sont les singletons.

Démonstration. C'est clair puisque les parties connexes de E sont \emptyset et les singletons. \square

REMARQUE. Les composantes connexes de E sont toujours des parties non-vides et *fermées* de E .

Démonstration. Comme il y a des parties connexes non-vides dans E (tous les singletons), \emptyset n'est pas une partie connexe maximale, *i.e.* pas une composante connexe de E . Si C est une composante connexe, alors \overline{C} est connexe et contient C , donc $\overline{C} = C$ par maximalité de C ; autrement dit, C est un fermé de E . \square

LEMME 5.2. *Soit C une composante connexe de E . Si $M \subseteq E$ est connexe et $M \cap C \neq \emptyset$, alors $M \subseteq C$.*

Démonstration. Comme $M \cap C \neq \emptyset$, l'ensemble $C \cup M$ est connexe par la Proposition 4.2, et il contient C ; donc $C \cup M = C$ par maximalité de C , *i.e.* $M \subseteq C$. \square

LEMME 5.3. *Si $M \subseteq E$ est connexe et non-vide, alors il existe une et une seule composante connexe de E qui contient M . Cette composante connexe est la plus grande partie connexe de E contenant M .*

Démonstration. Notons C la réunion de toutes les parties connexes de E contenant M . Alors C contient M car il y a au moins une partie connexe de E qui contient M , à savoir M elle-même. De plus, comme $M \neq \emptyset$, on voit que C est connexe d'après la Proposition 4.2. Ainsi, C est la *plus grande* partie connexe de E contenant M . En particulier, C est une partie connexe de E maximale pour l'inclusion, *i.e.* une composante connexe de E . \square

REMARQUE 5.4. Pour tout point $a \in E$, on notera $C(a)$ l'unique composante connexe de E contenant a , qui est d'après le Lemme 5.3 la plus grande partie connexe de E contenant a . On dit que $C(a)$ est la **composante connexe de a dans E** .

PROPOSITION 5.5. *Les composantes connexes de E forment une partition de E .*

Démonstration. Si C et C' sont deux composantes connexes de E et si $C \cap C' \neq \emptyset$, alors $C' \subseteq C$ et $C \subseteq C'$ d'après le Lemme 5.2, donc $C = C'$; autrement dit, si $C \neq C'$ alors $C \cap C' = \emptyset$. Ainsi, les composantes connexes de E sont deux à deux disjointes. De plus, tout point $a \in E$ appartient à une composante connexe de E , d'après le Lemme 5.3 appliqué à $M := \{a\}$. \square

La proposition suivante permet souvent de déterminer très facilement les composantes connexes.

PROPOSITION 5.6. *Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ une famille d'ouverts connexes de E . On suppose que les Ω_i sont non-vides et forment une partition de E . Alors les Ω_i sont les composantes connexes de E .*

Démonstration. Remarquons d'abord que les ouverts Ω_i sont également tous *fermés* dans E . Soit en effet $i_0 \in I$. Comme les Ω_i forment une partition de E , on a $E \setminus \Omega_{i_0} = \bigcup_{i \neq i_0} \Omega_i$, et donc $E \setminus \Omega_{i_0}$ est ouvert dans E .

Montrons que les Ω_i sont des composantes connexes de E . Soit $i \in I$ quelconque. Comme Ω_i est connexe, il est contenu dans une composante connexe C d'après le Lemme 5.3. D'après ce qui précède, Ω_i est alors ouvert et fermé *dans* C ; donc $\Omega_i = C$ car C est connexe et $\Omega_i \neq \emptyset$.

Montrons maintenant qu'il n'y a pas d'autres composantes connexes que les Ω_i . Soit C une composante connexe de E . Comme $C \neq \emptyset$ et $\bigcup_{i \in I} \Omega_i = E$, on peut trouver un i tel que $C \cap \Omega_i \neq \emptyset$; et comme C et Ω_i sont des composantes connexes de E , cela entraîne que $C = \Omega_i$ puisque deux composantes connexes distinctes sont nécessairement disjointes d'après la Proposition 5.5. \square

La preuve de la Proposition 5.6 a implicitement établi le fait suivant :

FAIT 5.7. *Si $C \subseteq E$ est connexe et si $\Omega \subseteq E$ est ouvert et fermé dans E , alors ou bien $\Omega \cap C = \emptyset$, ou bien $C \subseteq \Omega$.*

Démonstration. C'est clair car $\Omega \cap C$ est ouvert et fermé dans C et C est connexe. \square

Exemple 1. Les composantes connexes de $E := [0, 1[\cup [2, 3]$ sont $[0, 1[$ et $[2, 3]$. En effet, ces ensembles sont connexes non-vides, ils forment une partition de E , et ils sont également *ouverts* dans E car $[0, 1[=]-\infty, 1[\cap E$ et $[2, 3] =]3/2, \infty[\cap E$.

Exemple 2. Les composantes connexes de $E := \mathbb{C} \setminus \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| \neq 1\}$ sont $\Omega_1 := \{z; |z| < 1\}$ et $\Omega_2 := \{z; |z| > 1\}$. En effet, Ω_1 et Ω_2 sont des ouverts non-vides de \mathbb{C} , donc de E , ils forment une partition de E , et ils sont connexes par arcs (c'est clair pour le disque Ω_1 qui est convexe, et facile à démontrer pour Ω_2).

Exercice. Déterminer les composantes connexes de $E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; xy \neq 1\}$.

DÉFINITION 5.8. On dit que l'espace métrique E est localement connexe si, pour tout point $a \in E$ et pour tout voisinage U de a dans E , on peut trouver un voisinage V de a tel que V est connexe et $V \subseteq U$.

EXEMPLE. Tout espace localement connexe par arcs est localement connexe. En particulier, tout espace vectoriel normé est localement connexe.

PROPOSITION 5.9. Si E est localement connexe, alors les composantes connexes de tout ouvert $\Omega \subseteq E$ sont des ouverts de E .

Démonstration. Soit C une composante connexe de Ω , et soit $a \in C$. Comme E est localement connexe et comme Ω est un voisinage ouvert de a dans E , on peut trouver un voisinage V de a tel que V est connexe et $V \subseteq \Omega$. Alors $V \subseteq C$ d'après le Lemme 5.2, car V est une partie connexe de Ω , C est une composante connexe de Ω et $V \cap C \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout point $a \in C$, on peut trouver un voisinage V de a dans E entièrement contenu dans C ; donc C est un ouvert de E . \square

COROLLAIRE 5.10. Si E est localement connexe, alors les composantes connexes de E sont à la fois ouvertes et fermées dans E .

COROLLAIRE 5.11. Si E est un espace vectoriel normé, alors les composantes connexes de tout ouvert de E sont des ouverts de E .

Exercice 1. Soit E un espace métrique, et soit Ω un ouvert de E . Montrer que si C est une composante connexe de Ω , alors $\partial C \subseteq \partial \Omega$.

Exercice 2. Montrer que si $A \subseteq \mathbb{C}$ est borné, alors $\mathbb{C} \setminus A$ a exactement une composante connexe non bornée.

Exercice 3. Soient K et L deux fermés de \mathbb{C} . On suppose que $K \subseteq L$ et que $\partial L \subseteq \partial K$. Montrer que L est la réunion de K et des composantes connexes de $\mathbb{C} \setminus K$ qui intersectent L .

6. Quelques “petites” applications

6.1. Non existence de racines n -ièmes continues. Rappelons que si $n \in \mathbb{N}^*$, alors tout nombre complexe $z \neq 0$ possède des racines n -ièmes dans \mathbb{C} ; en fait, exactement n racines n -ièmes. Le résultat suivant montre qu'on ne peut pas choisir “continûment” une racine n -ième de z .

PROPOSITION 6.1. Si n est un entier ≥ 2 , il n'existe pas de “fonction racine n -ième” continue sur le cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Autrement dit, il n'existe pas d'application continue $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\phi(z)^n = z$ pour tout $z \in \mathbb{T}$.

Démonstration. Supposons qu'une telle racine n -ième continue $\phi : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ existe, et essayons d'obtenir une contradiction.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$f(t) := e^{-i \frac{t}{n}} \phi(e^{it}).$$

On a par définition

$$f(t)^n = e^{-ni \frac{t}{n}} \phi(e^{it})^n = e^{-it} e^{it} = 1$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc f prend ses valeurs dans l'ensemble fini $Z := \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$. De plus, la fonction f est continue car ϕ l'est. Comme \mathbb{R} est connexe, on en déduit que f est *constante*. En particulier, $f(0) = f(2\pi)$.

Cependant, $f(0) = \phi(1)$ et $f(2\pi) = e^{-i\frac{2\pi}{n}}\phi(e^{i2\pi}) = e^{-i\frac{2\pi}{n}}\phi(1)$. Comme $\phi(1) \neq 0$ (car $\phi(1)^n = 1$) et $e^{-i\frac{2\pi}{n}} \neq 1$ (car $n \geq 2$), on en déduit $f(0) \neq f(2\pi)$, ce qui est la contradiction souhaitée. \square

6.2. Un cercle ne se plonge pas dans \mathbb{R} . Le résultat suivant est intuitivement assez évident.

PROPOSITION 6.2. *Si Γ est un cercle de \mathbb{C} , alors il n'existe pas d'injection continue de Γ dans \mathbb{R} .*

Démonstration. Tout repose sur le fait suivant.

FAIT. Si Γ est un cercle de \mathbb{C} , alors Γ est compact et connexe. De plus, pour tout $w \in \Gamma$, l'ensemble $\Gamma \setminus \{w\}$ est connexe.

Démonstration. Soient a le centre de Γ et r son rayon. Alors

$$\Gamma = \{a + re^{it}; t \in [0, 2\pi]\}.$$

Autrement dit, $\Gamma = \phi([0, 2\pi])$, où $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ est définie par $\phi(t) := e^{it}$. L'application ϕ est continue; donc Γ est compact et connexe car $[0, 2\pi]$ l'est.

Soit $w \in \Gamma$. On écrit $w = a + re^{i\theta_0}$ où $\theta_0 \in \mathbb{R}$. Alors, avec la notation précédente, on a $\Gamma \setminus \{w\} = \phi(] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[)$; et donc $\Gamma \setminus \{w\}$ est connexe car $] \theta_0, \theta_0 + 2\pi[$ l'est. \square

Supposons maintenant qu'il existe une injection continue $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$, où Γ est un cercle de \mathbb{C} . Alors f est un homéomorphisme de Γ sur $\Gamma' := f(\Gamma)$ car Γ est compact, donc Γ' est une partie de \mathbb{R} homéomorphe à Γ . Par le Fait, on en déduit que Γ' est connexe, et que $\Gamma' \setminus \{x\}$ est connexe pour tout $x \in \Gamma'$. Autrement dit, Γ' est un intervalle de \mathbb{R} (non réduit à un point) tel que $\Gamma' \setminus \{x\}$ est un intervalle pour tout $x \in \Gamma'$; ce qui est visiblement absurde. \square

COROLLAIRE 6.3. *Si U est un ouvert non vide de \mathbb{C} , alors il n'existe pas d'injection continue de U dans \mathbb{R} .*

Démonstration. L'ouvert U contient un disque fermé non trivial, donc contient un cercle Γ . Donc le résultat est évident par la proposition. \square

Remarque. Ce qu'on vient de montrer est un cas très particulier du résultat suivant (dont la preuve est beaucoup plus difficile) : *si $n, m \in \mathbb{N}$ et $n > m$ et si U est un ouvert non vide de \mathbb{R}^n , alors il n'existe pas d'injection continue de U dans \mathbb{R}^m .*

6.3. Fonctions continues injectives. Le résultat suivant est normalement connu depuis longtemps. Le propos ici est d'en donner une démonstration “élégante”.

PROPOSITION 6.4. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue injective, alors f est strictement monotone.*

Démonstration. Posons

$$\Delta := \{(x, y) \in I \times I; x < y\},$$

et définissons $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(x, y) := f(y) - f(x).$$

L'ensemble Δ est visiblement convexe (c'est un "triangle ouvert"), donc connexe ; et la fonction Φ est continue car f est continue. Donc $\Phi(\Delta) \subseteq \mathbb{R}$ est connexe, autrement dit $\Phi(\Delta)$ est un intervalle. De plus, $\Phi(\Delta)$ ne contient pas 0 car f est injective. Donc on a ou bien $\Phi(\Delta) \subseteq]0, \infty[$, ou bien $\Phi(\Delta) \subseteq]-\infty, 0[$. Dans le premier cas, f est strictement croissante ; et dans le deuxième cas, f est strictement décroissante (**micro-exo**). \square

6.4. Dérivées et valeurs intermédiaires. On va maintenant démontrer un très joli résultat sur les fonctions dérivées, qu'on appelle habituellement le **Théorème de Darboux**.

THÉORÈME 6.5. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction dérivable en tout point, alors la fonction f' vérifie le théorème des valeurs intermédiaires : pour tout intervalle $J \subseteq I$, $f'(J)$ est un intervalle.*

Remarque. La subtilité vient du fait que la fonction f' n'est pas nécessairement continue.

Exercice. Donner un exemple de fonction f dérivable sur \mathbb{R} mais pas de classe \mathcal{C}^1 .

Preuve du théorème de Darboux. Fixons un intervalle non trivial $J \subseteq I$. Posons

$$\Delta := \{(x, y) \in J \times J; x < y\},$$

et définissons $\Phi : \Delta \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Phi(x, y) := \frac{f(y) - f(x)}{y - x}.$$

L'ensemble Δ est convexe (donc connexe) et la fonction Φ est continue car f est continue. Donc $\Phi(\Delta)$ est connexe.

FAIT. On a $\Phi(\Delta) \subseteq f'(J) \subseteq \overline{\Phi(\Delta)}$.

Preuve du Fait. Si $(x, y) \in \Delta$, alors $f(y) - f(x) = f'(c)(y - x)$ pour un certain point $c \in]x, y[$ d'après la formule des accroissements finis ; donc $\Phi(x, y) = f'(c) \in f'(J)$.

Inversement, si $t_0 \in J$ alors, en supposant par exemple que t_0 n'est pas la borne de droite de J , on peut trouver une suite $(y_n) \subseteq J$ tendant vers t_0 avec $y_n > t_0$. On a alors

$$f'(t_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(t_0)}{y_n - t_0} = \lim_{n \rightarrow \infty} \Phi(t_0, y_n),$$

et donc $f'(t_0) \in \overline{\Phi(\Delta)}$. Ainsi, $f'(J) \subseteq \overline{\Phi(\Delta)}$. Si t_0 est la borne de droite de J , on raisonne de même avec une suite $(x_n) \subseteq J$ telle que $x_n \rightarrow t_0$ et $x_n < t_0$ (on a $f'(t_0) = \lim \Phi(x_n, t_0)$ et $(x_n, t_0) \in \Delta$). \square

La preuve du théorème est maintenant terminée : par le Fait et la Proposition 4.1, $f'(J)$ est une partie connexe de \mathbb{R} , i.e. un intervalle. \square

Exercice 1. Montrer que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable sur $[a, b]$ avec $f'(a) > 0$ et $f'(b) < 0$, alors f atteint son maximum en un point c appartenant à $]a, b[$. En déduire une preuve "directe" du théorème de Darboux.

Exercice 2. Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et dérivable en tout point, alors f est de classe \mathcal{C}^1 .

6.5. Description des ouverts de \mathbb{R} . Comme illustration de la notion de composante connexe (et de quelques autres faits établis précédemment), on peut démontrer très facilement le résultat suivant, qui décrit complètement tous les ouverts de \mathbb{R} .

THÉOREME 6.6. *Tout ouvert de \mathbb{R} est réunion dénombrable (éventuellement finie) d’intervalles ouverts deux à deux disjoints.*

Démonstration. Soit Ω un ouvert de \mathbb{R} . Notons $(C_i)_{i \in I}$ la famille des composantes connexes de Ω . Les C_i sont des intervalles de \mathbb{R} puisque ce sont des parties connexes de \mathbb{R} , et ce sont des ouverts de \mathbb{R} car \mathbb{R} est localement connexe et Ω est ouvert ; donc les C_i sont des intervalles ouverts. Bien entendu, les C_i sont deux à deux disjoints et $\Omega = \bigcup_{i \in I} C_i$. Il reste donc simplement à voir que l’ensemble d’indices I est nécessairement dénombrable. Comme les C_i sont des ouverts non vides de \mathbb{R} et que \mathbb{Q} est dense dans \mathbb{R} , on peut choisir pour tout $i \in I$ un rationnel r_i tel que $r_i \in C_i$. Comme les C_i sont deux à deux disjoints, l’application $i \mapsto r_i$ est une bijection de I sur $D := \{r_i; i \in I\}$. Comme $D \subseteq \mathbb{Q}$ et que \mathbb{Q} est dénombrable, l’ensemble D est dénombrable, et donc I est lui aussi dénombrable. □