Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Soit E un ensemble non-vide, et soit d la distance discrète sur E. Montrer que (E, d) est complet.

Exercice 2. Pour $i, j \in \mathbb{N}$, on pose $d(i,j) := |2^{-i} - 2^{-j}|$. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$ qui définit la topologie discrète, mais que $(\mathbb{N}, d)$ n'est pas complet.

Exercice 3. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Pour $f \in \mathcal{C}^1(I)$, on pose $\|f\| := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathcal{C}^1(I)$, et que $(\mathcal{C}^1(I), \|\cdot\|)$ est complet.

Exercice 4. Montrer que $\mathcal{C}^1([0,1])$ n'est pas complet pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. On note $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions lipschitziennes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$.

(1) Montrer que $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$ est un espace vectoriel.
(2) Pour $f \in \mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$, on note $\|f\|$ la constante de Lipschitz de f. Montrer que $\|\cdot\|$ est une norme sur $\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R})$.
(3) Montrer que $(\mathrm{Lip}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|)$ est complet.

Exercice 6. On note $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constituée par toutes les suites de nombres réels $u = (u(j))_{j\in\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u(j)$ est absolument convergente. Pour $u = (u(j)) \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose

$$\|u\|_1 = \sum_{j=0}^{\infty} |u(j)|.$$

Montrer que $\ell^1(\mathbb{N})$ est complet pour la norme $\|\cdot\|_1$.

Exercice 7. Soit (E, d) un espace métrique complet. Pour $u, v \in E$, on pose $\rho(u,v) := \min(1, d(u,v))$. Montrer que ρ est une distance sur E topologiquement équivalente à d, et que (E, ρ) est complet. Quel "avantage" ρ possède-t-elle sur d ?

Exercice 8. Pour $x, y > 0$, on pose $d(x,y) := |\ln(y) - \ln(x)|$. Montrer que d est une distance sur $]0, \infty[$ topologiquement équivalente à la distance usuelle, et que $(]0,\infty[\,, d)$ est complet.

Exercice 9. Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit O un ouvert de E.

(1) Pour $u, v \in O$, on pose

$$\delta(u,v) := d(u,v) + \left|\frac{1}{\operatorname{dist}(u, E\backslash O)} - \frac{1}{\operatorname{dist}(v, E\backslash O)}\right|$$

(a) Justifier la définition, et montrer que δ est une distance sur O.

(b) Montrer que la distance δ est topologiquement équivalente à $d_{|O\times O}$.

(2) Montrer que O est topologiquement complet.

Exercice 10. Soit (E, d) un espace métrique, et soit $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de sous-ensembles de E. On suppose que G_n est topologiquement complet pour tout $n \in \mathbb{N}$, et que $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n \neq \varnothing$. Le but de l'exercice est de montrer que G est topologiquement complet.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver une distance ρ_n sur G_n topologiquement équivalente à $d_{|G_n\times G_n}$ telle que (G_n, ρ_n) soit complet et $\rho_n(u, v) \leqslant 1$ pour tous $u, v \in G_n$.

(2) Pour $u, v \in G$, on pose

$$\rho(u,v) := \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}\rho_n(u,v).$$

Justifier la définition et montrer que ρ est une distance sur G topologiquement équivalente à $d_{|G\times G}$.

(3) Montrer que G est topologiquement complet.

Exercice 11. Montrer que $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ est topologiquement complet.

Exercice 12. Soient E et F deux espaces métriques, avec F complet. Soit également $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications, $f_n : E \to F$. On suppose que les f_n sont toutes k-lipschitziennes pour une certaine constante k, et qu'il existe un ensemble dense $D \subseteq E$ tel que pour tout $z \in D$, la suite $(f_n(z))_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans F. Montrer que pour tout $x \in E$, la suite $(f_n(x))$ converge dans F.

Exercice 13. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, avec E complet, et soit $f : E \to F$ une application continue. On suppose qu'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall u, v \in E \ : \ d_F(f(u), f(v)) \geqslant \alpha\, d_E(u, v).$$

Montrer que pour tout fermé $C \subseteq E$, l'ensemble $f(C)$ est un fermé de F.

Exercice 14. Soit (E,d) un espace métrique. On suppose que E vérifie le théorème des fermés emboités ; autrement dit, on suppose que la chose suivante est vraie : pour toute suite décroissante $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de fermés non-vides de E telle que $\operatorname{diam}(C_n)\to 0$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$. Le but de l'exercice est de montrer que (E,d) est complet.

(1) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans (E,d). Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $C_n := \overline{\{u_k;\ k\geqslant n\}}$. Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_n \neq \varnothing$.

(2) Montrer que (E,d) est complet.

Exercice 15. Soit E un espace de Banach, et soit $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de boules fermées de E. Le but de l'exercice est de montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n \neq \varnothing$. Dans la suite, on écrit $B_n = \overline{B}(a_n, r_n)$.

(1) Montrer que la suite (r_n) est décroissante.

(2) Montrer que si $p\leqslant q$ alors $\|a_q - a_p\| \leqslant r_p - r_q$.

(3) Déduire de (2) que la suite (a_n) converge dans E.

(4) Montrer que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n$ est une boule fermée, et conclure.

Exercice 16. Soit $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ un suite strictement décroissante de nombres réels tendant vers 1. Pour $i,j\in\mathbb{N}$, on pose $d(i,j) := \alpha_{\min(i,j)}$ si $i\neq j$, et $d(i,j) = 0$ si $i=j$.

(1) Montrer que d est une distance sur $\mathbb{N}$ et que $(\mathbb{N},d)$ est complet.

(2) Déterminer $\overline{B}(n,\alpha_n)$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

(3) Comparer avec l'Exercice 15.

Exercice 17. Soit H un espace de Hilbert, et soit $E\subseteq H$ un sous-espace vectoriel fermé. Pour $x\in H$, on note $P_E(x)$ l'unique point u de E tel que $\|x-u\| = \operatorname{dist}(x,E)$.

(1) Montrer que pour tout $x\in H$, on a $\operatorname{dist}(x,E)^2 = \|x\|^2 - \|P_E(x)\|^2$.

(2) Montrer que $P_E : H\to H$ est une projection linéaire continue et qu'on a $\|P_E\| = 1$.

(3) Montre que pour tous $x,y\in E$, on a $\langle P_E(x), y\rangle = \langle P_E(x), P_E(y)\rangle = \langle x, P_E(y)\rangle$.

(4) On suppose que E est de dimension finie. Soit $(e_1,\dots,e_d)$ une base orthonormée de E. Montrer que pour tout $x\in H$, on a

$$P_E(x) = \sum_{i=1}^{d} \langle x, e_i\rangle\, e_i.$$

Exercice 18. Soit H un espace de Hilbert, et soit $E\subseteq H$ un sous-espace vectoriel fermé. On pose $E^\perp := \{z\in H;\ \forall u\in E\ :\ \langle z,u\rangle = 0\}$. Montrer que $H = E\oplus E^\perp$.

Exercice 19. Soit H un espace de Hilbert, et soit $M \subseteq H$ un sous-espace vectoriel. Montrer que M est dense dans H si et seulement si $M^\perp = \{0\}$.

Exercice 20. Soit n un entier $\geqslant 3$. Calculer $\inf \left\{ \int_0^1 (t^n - a - bt - ct^2)^2 ;\ a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$.

Exercice 21. Soit (E, d) un espace métrique complet. Montrer que si $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E telle que la série $\sum d(u_k, u_{k+1})$ est convergente, alors (u_k) converge dans E.

Exercice 22. Soit E et F deux espaces vectoriels normés, avec F complet. Soit également $f : E \to F$ une application continue. On suppose qu'il existe une constante C telle que

$$\forall u, v \in E \ : \ \|f(u+v) - f(u) - f(v)\| \leqslant C.$$

Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une application linéaire continue $L : E \to F$ telle que $\forall u \in E \ : \ \|L(u) - f(u)\| \leqslant C$.

(1) Soit $u \in E$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\left\| \frac{f(2^k u)}{2^k} - \frac{f(2^{k-1}u)}{2^{k-1}} \right\| \leqslant \frac{C}{2^k}$.

(2) Montrer que pour tout $u \in E$, la suite $\left(\frac{f(2^k u)}{2^k} \right)_{k\geqslant 1}$ converge dans F, et que la convergence est uniforme par rapport à u.

(3) On définit une application $L : E \to F$ en posant

$$L(u) = \lim_{k\to\infty} \frac{f(2^k u)}{2^k}.$$

Montrer que l'application L est continue et vérifie $L(u+v) = L(u) + L(v)$ pour tous $u, v \in E$; puis montrer que L convient.

Exercice 23. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, avec F complet, et soit $T : E \to F$ une application linéaire continue. Soient également $R, r > 0$. On suppose que $\overline{T\big(B_E(0,R)\big)}$ contient $B_F(0,r)$. Le but de l'exercice est de montrer que $T\big(B_E(0,R)\big)$ contient $B_F(0,r)$. (En particulier, cela montrera que T est *surjective.*)

(1) Soit $y \in B_F(0,r)$ quelconque.

  (a) Justifier l'existence de $\lambda > 1$ tel que $\lambda y \in B_F(0,r)$.

  (b) Montrer que pour tout $C > 1$ donné, on peut construire par récurrence une suite $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $B_E(0,R)$ telle que

$$\left\| \lambda y - T\left(\sum_{i=0}^{k} C^{-i} x_i \right) \right\| < \frac{r}{C^{k+1}} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

(2) Démontrer le résutat annoncé.

Exercice 24. Soit E un espace de Banach *séparable*. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une surjection linéaire continue de $\ell^1(\mathbb{N})$ sur E.

(1) Soit $(x_j)_{j\in\mathbb{N}}$ une suite dense dans la boule $B_E(0,1)$. Pour $u = (u(j))_{j\geqslant 0} \in \ell^1(\mathbb{N})$, on pose
$$T(u) := \sum_{j=0}^{\infty} u(j)\, x_j.$$
Justifier la définition, et montrer que $T : \ell^1(\mathbb{N}) \to E$ est une application linéaire continue.

(2) Conclure en utilisant l'Exercice 23.

Exercice 25. Soit E un espace de Banach. On note $GL(E)$ l'ensemble des éléments *inversibles* de $\mathcal{L}(E)$, autrement dit l'ensemble des $L \in \mathcal{L}(E)$ qui sont bijectives et telles que l'application linéaire L^{-1} est continue.

(1) Soit $L \in GL(E)$. Montrer que si $H \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $\|H\| < 1/\|L^{-1}\|$, alors $L + H \in GL(E)$ et
$$(L+H)^{-1} = L^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} (HL^{-1})^k,$$
où la série converge dans $\mathcal{L}(H)$. (*Suggestion* : écrire $L + H = (Id + HL^{-1})L$.) Montrer ensuite que pour un tel H, on a
$$\|(L+H)^{-1} - L^{-1}\| \leqslant \frac{\|L^{-1}\|^2\, \|H\|}{1 - \|L^{-1}\|\, \|H\|}.$$

(2) Montrer que $GL(E)$ est un ouvert de $\mathcal{L}(E)$, et que l'application $L \mapsto L^{-1}$ est continue sur $GL(E)$.

Exercice 26. (séries produits)
Soient E, F, G des espaces de Banach, et soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire continue. Soient également deux suites $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset E$ et $(v_l)_{l\in\mathbb{N}} \subset F$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$w_n = \sum_{k=0}^{n} B(u_k, v_{n-k}).$$

(0) Montrer qu'il existe une constante C telle que
$$\forall (u,v) \in E \times F \;:\; \|B(u,v)\| \leqslant C\, \|u\|\, \|v\|.$$

(1) Montrer que si les deux séries $\sum u_k$ et $\sum v_l$ sont normalement convergentes, alors la série $\sum w_n$ l'est aussi.

(2) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{n=0}^{N} w_n - B\left(\sum_{k=0}^{N} u_k, \sum_{l=0}^{N} v_l\right) = \sum_{\substack{k,l \in [\![0,N]\!] \\ k+l>N}} B(u_k, v_l).$$

(3) En déduire que si les suites (u_k) et (v_l) sont bornées, alors existe une constante M telle que
$$\forall N \in \mathbb{N} \ : \ \left\| \sum_{n=0}^{N} w_n - B\left(\sum_{k=0}^{N} u_k, \sum_{l=0}^{N} v_l\right) \right\| \leqslant M \left(\sum_{N/2<k\leqslant N} \|u_k\| + \sum_{N/2<l\leqslant N} \|v_l\| \right).$$

(4) Montrer que que si les deux séries $\sum u_k$ et $\sum v_l$ sont normalement convergentes, alors
$$\sum_{n=0}^{\infty} w_n = B\left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k, \sum_{l=0}^{\infty} v_l\right).$$

Exercice 27. En utilisant l'exercice 26, montrer que si $X, Y \in M_n(\mathbb{R})$ vérifient $XY = YX$, alors $e^{X+Y} = e^X e^Y$.

Exercice 28. Montrer qu'une application uniformément continue change les suites de Cauchy en suites de Cauchy.

Exercice 29. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, soit D une partie bornée de E, et soit $f : D \to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que f est bornée.

Exercice 30. Soit (E, d) un espace métrique complet, et soit $f : E \to E$ une application continue.

(1) On suppose qu'il existe une fonction $\phi : E \to \mathbb{R}^+$ telle que
$$\forall x \in E \ : \ d(x, f(x)) \leqslant \phi(x) - \phi(f(x)).$$

(a) Soit $x_0 \in E$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x)$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\sum_{k=0}^{n} d(x_k, x_{k+1}) \leqslant \phi(x_0) - \phi(x_{n+1})$.

(b) Montrer que f possède un point fixe.

(2) Dans cette question, on suppose que f est contractante. En notant k la constante de Lipschitz de f, montrer que f vérifie l'hypothèse de (1) avec $\phi(x) := \frac{1}{1-k} d(x, f(x))$.

Exercice 31. Soit E un espace de Banach, et soit $\varphi : E \to E$. On suppose que φ est contractante.

(1) Montrer que $Id_E - \varphi$ est une bijection de E sur E.

(2) Soit $a \in E$. Soit également $x_0 \in E$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n) + a$. Montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 32. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, et soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Soient également $t_0 \in I$ et $c \in \mathbb{R}$. On définit $\Phi : \mathcal{C}(I) \to \mathcal{C}(I)$ comme suit : si $u \in \mathcal{C}(I)$, alors

$$\Phi(u)(t) = c + \int_{t_0}^{t} \lambda u(s)\, ds.$$

(1) Soit $u_0 \in \mathcal{C}(I)$, et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la récurrence $u_{n+1} = \Phi(u_n)$. En admettant que la suite (u_n) converge dans $\mathcal{C}(I)$, déterminer sa limite.

(2) On garde les notations de (1) et on prend pour u_0 la fonction constante égale à 1. Déterminer u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et vérifier que (u_n) converge effectivement dans $\mathcal{C}(I)$.

Exercice 33. Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vérifiant $|\alpha| + |\beta| < 1$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la suite définie par $x_0 := 77$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = \alpha \arctan(x_n) + \beta \cos(x_n) + 844$. Montrer que la suite (x_n) est convergente.

Exercice 34. Soit $a > 0$. Soit également $x_0 \geqslant \sqrt{a}$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$. Montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 35. Soit $0 < \alpha < e/2$. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 := 998$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = e^{-\alpha x_n^2}$ est convergente.

Exercice 36. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et strictement positive en tout point. On suppose qu'on a $|f'(x)| \leqslant \frac{1}{2}\frac{f(x)}{x}$ pour tout $x > 0$.

(1) Montrer qu'on a $|\ln(f(y)) - \ln(f(x))| \leqslant \frac{1}{2}\,|\ln(y) - \ln(x)|$ pour tous $x, y > 0$.

(2) Montrer que f possède un unique point fixe $x \in]0, \infty[$.

Exercice 37. Soient $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ vérifiant $\lambda^2 + \mu^2 < 1$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, le système d'équations

$$\begin{cases} x + \lambda\cos(x) + \mu\sin(y) = a \\ y - \lambda\sin(x) + \mu\cos(y) = b \end{cases}$$

possède une unique solution $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 38. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(x) := x + \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Montrer qu'on a $|\phi(u) - \phi(v)| < |u - v|$ pour tous $u, v \in \mathbb{R}$ tels que $u \neq v$, mais que ϕ ne possède pas de point fixe.

Exercice 39. Soit $\theta : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue qui n'est pas identiquement égale à 1, et soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut montrer qu'il existe une unique fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(0) = \alpha$ et $f'(t) = f(\theta(t))$ pour tout $t \in [0,1]$.

(1) Soit $\Phi : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathcal{C}([0,1])$ l'application définie par

$$\Phi(u)(x) := \alpha + \int_0^x u(\theta(t))\, dt.$$

Montrer que si $u, v \in \mathcal{C}([0,1])$, alors $|\Phi(v)(x) - \Phi(u)(x)| \leqslant \|v - u\|_\infty\, x$ pour tout $x \in [0,1]$, et en déduire que $|\Phi^2(v)(x) - \Phi^2(u)(x)| \leqslant k\, \|v - u\|_\infty$ pour tout $x \in [0,1]$, où $k := \int_0^1 \theta(t)\, dt$.

(2) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 40. Montrer qu'il existe une unique fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x) = \int_0^x f(t)\, dt + \frac{1}{5}\cos(f(x))$ pour tout $x \in [0,1]$.

Exercice 41. Soit $[a,b]$ un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $\theta : [a,b] \to [a,b]$ une fonction continue vérifiant $\theta(t) \leqslant t$ pour tout $t \in [a,b]$. Soient également $\alpha \in \mathbb{R}$ et $k \geqslant 0$. On veut montrer qu'il existe une unique fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(a) = \alpha$ et $f'(x) = k\, f(\theta(x))$ pour tout $x \in [a,b]$.

(1) Soit $M > 0$. Pour $u \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose $\|u\|_M := \sup\{|u(t)|e^{-Mt};\ t \in [a,b]\}$. Montrer que $\|\cdot\|_M$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$, équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(2) Soit $\Phi : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ l'application définie par

$$\Phi(u)(x) := \alpha + \int_a^x k\, u(\theta(t))\, dt.$$

Montrer que si $u, v \in \mathcal{C}([a,b])$ et si $M > 0$, alors

$$\forall x \in [a,b]\ :\ |\Phi(v)(x) - \Phi(u)(x)| \leqslant \frac{k}{M}\, \|v - u\|_M\, e^{Mx};$$

et en déduire que $\|\Phi(v) - \Phi(u)\|_M \leqslant \frac{k}{M}\, \|v - u\|_M$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 42. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $K \subseteq E$ un ensemble compact et convexe, $K \neq \varnothing$. Soit également $f : K \to K$ une application 1-lipschitzienne.

(1) Soit $a \in K$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $f_n : K \to E$ par

$$f_n(x) := \frac{1}{n}\,a + \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x).$$

Montrer que f_n possède un unique point fixe $x_n \in K$.

(2) Montrer que f possède un point fixe.

Exercice 43. Soient E et F deux espaces de Banach. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *Si $T : E \to F$ est une application linéaire continue bijective, alors T^{-1} est continue.* Ce résultat s'appelle le **théorème d'isomorphisme de Banach**.

(1) Soit $T : E \to F$ linéaire continue et *surjective*.

  (a) Montrer qu'il existe un entier n tel que $\overline{T\big(B_E(0,n)\big)}$ est d'intérieur non-vide dans F.

  (b) Soient $y_0 \in F$ et $r > 0$ tels que $B_F(y_0, r) \subseteq \overline{T\big(B_E(0,n)\big)}$. Montrer que $B_F(0,r) \subseteq \overline{T\big(B_E(0,2n)\big)}$.

  (c) En utilisant l'Exercice 23, montrer qu'il existe une constante C telle que : pour tout $y \in F$ vérifiant $\|y\| = 1$, on peut trouver $x \in E$ vérifiant $\|x\| \leqslant C$ tel que $T(x) = y$.

(2) Conclure.

Exercice 44. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, avec (E, d_E) complet, et soit $f : E \to F$. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe une constante C_x telle que

$$\forall y \in E \;:\; d_F\big(f(x), f(y)\big) \leqslant C_x\, d_E(x,y).$$

(1) Montrer que f est continue.

(2) En considérant les ensembles

$$F_n := \{x \in E;\, \forall y \in E \;:\; d_F\big(f(x), f(y)\big) \leqslant n\, d_E(x,y)\}$$

et en utilisant le théorème de Baire, montrer qu'il existe un ouvert non vide $U \subset E$ tel que $f_{|U}$ est lipschitzienne.

Exercice 45. (théorème de Banach-Steinhaus)
Soient E un espace de Banach et F un espace vectoriel normé. Soit également $\mathcal{F}$ une famille d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $u \in E$, il existe une constante C_u telle que $\forall L \in \mathcal{F} \;:\; \|L(u)\| \leqslant C_u$. Le but de l'exercice est de montrer que la famille $\mathcal{F}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$F_n := \left\{u \in E;\ \forall L \in \mathcal{F}\ :\ \|L(u)\| \leqslant n\right\}$$

Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que F_N est d'intérieur non-vide.

(2) Soient $x_0 \in E$ et $r > 0$ tels que $\overline{B}(x_0, r) \subseteq F_N$. Montrer que pour tout $u \in \overline{B}(0, r)$ et pour toute $L \in \mathcal{F}$, on a $\|L(u)\| \leqslant C_{x_0} + N$.

(3) Conclure.

Exercice 46. (théorème de Banach-Steinhaus, 2)
Le but de l'exercice est de donner une preuve du Théorème de Banach-Steinhaus qui n'utilise pas le Théorème de Baire. On conserve donc les notations de l'Exercice 45.

(1) Soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$ quelconque.

(a) Montrer que pour tous $u, \xi \in E$, on a

$$\|L(\xi)\| \leqslant \frac{1}{2}\left(\|L(u+\xi)\| + \|L(u-\xi)\|\right) \leqslant \max(\|L(u+\xi), L(u-\xi)\|)\,.$$

(b) Pour $u \in E$ et $r > 0$, on note $\overline{B}(u, r)$ la boule fermée de centre u et de rayon r. Exprimer $\sup\{\|L(\xi)\|;\ \xi \in \overline{B}(0, r)\}$ en fonction de r et de $\|L\|$.

(c) Déduire de (a) et (b) que pour tous $u \in E$ et pour tout $r > 0$, on a

$$\sup_{u' \in \overline{B}(u,r)} \|L(u')\| \geqslant r\,\|L\|\,.$$

(2) Soit $(L_n)_{n \geqslant 1}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F.

(a) En utilisant (1), montrer qu'on peut construire par récurrence une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ avec $u_0 = 0$, telle que $\|u_n - u_{n-1}\| \leqslant 3^{-n}$ et $\|L_n(u_n)\| > \frac{2}{3} \times 3^{-n}\|L_n\|$ pour tout $n \geqslant 1$.

(b) Montrer que la suite (u_n) est convergente, et que sa limite u est telle que $\|u - u_n\| \leqslant \frac{1}{2} \times 3^{-n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) On suppose qu'on a $\|L_n\| \geqslant 4^n$ pour tout n. Montrer que $\|L_n(u)\|$ tend vers $+\infty$.

(3) Démontrer par l'absurde le résultat souhaité.

Exercice 47. Soient E un espace de Banach, F un espace vectoriel normé, et (L_n) une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que pour tout $u \in E$, la suite $(L_n(u))$ converge dans F. En utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer que si on pose $L(u) = \lim_{n\to\infty} L_n(u)$, alors l'application (linéaire) $L : E \to F$ est continue.

Exercice 48. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $f : E \to F$. On suppose que pour toute forme linéaire continue $\Theta \in F^*$, la fonction $\Theta \circ f : E \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne.

(1) Pour $u, v \in E$ avec $u \neq v$, on définit une forme linéaire $L_{u,v} : F^* \to \mathbb{R}$ par

$$\forall \Theta \in F^* \ : \ L_{u,v}(\Theta) = \frac{\Theta(f(v)) - \Theta(f(u))}{\|v - u\|} \cdot$$

Montrer que les $L_{u,v}$ sont continues ; puis, en utilisant le théorème de Banach-Steinhaus, montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall u, v \ : \ \|L_{u,v}\| \leqslant C$.

(2) On *admet* que pour tout $z \in F$, on peut trouver $\Theta \in F^*$ telle que $\|\Theta\| = 1$ et $\Theta(z) = \|z\|$. Déduire de (1) que l'application f est lipschitzienne.

Exercice 49. Soient (E, d_E) et (F, d_F) deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$. On suppose que pour toute fonction lipschitzienne $\varphi : F \to \mathbb{R}$, la fonction $\varphi \circ f$ est lipschitzienne. Le but de l'exercice est de montrer que f est lipschitzienne.

(1) On note $\mathrm{Lip}(F)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions lipschitziennes $\varphi : E \to \mathbb{R}$. On fixe un point $b \in F$, et pour $\varphi \in \mathrm{Lip}(F)$ on pose $\|\varphi\| := |\varphi(b)| + L(\varphi)$, où $L(\varphi)$ est la constante de Lipschitz de φ. Montrer que $(\mathrm{Lip(F)}, \| \cdot \|)$ est un espace de Banach.

(2) En utilisant le théorème de Baire, montrer qu'il existe un entier n_0 et une boule $\overline{B}(\varphi_0, r) \subset \mathrm{Lip}(F)$ avec $r > 0$ telle que $\forall \varphi \in \overline{B}(\varphi_0, r) \ : \ L(\varphi \circ f) \leqslant n_0$; et en déduire qu'il existe une constante C telle que $\forall \varphi \in \overline{B}(0, 1) \ : \ L(\varphi \circ f) \leqslant C$.

(3) Pour tout $v \in F$, on note $\varphi_v : F \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi_v(u) := d(u, v)$. Montrer qu'il existe une constante M telle que $\forall v \in F \ : \ L(\varphi_v \circ f) \leqslant M$.

(4) Montrer que f est M-lipschitzienne.

Exercice 50. Soient E, F, G des espaces vectoriels normés. On dit qu'une application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est *séparément continue* si pour tout $u \in E$ fixé, l'application $v \mapsto B(u, v)$ est continue, et pour tout $v \in F$ fixé, l'application $u \mapsto B(u, v)$ est continue.

(1) Dans cette question, on suppose que E est complet. Soit $B : E \times F \to G$ bilinéaire et séparément continue.

  (a) Pour tout $v \in E$, on note $B_v \in \mathcal{L}(E, G)$ l'application linéaire définie comme suit :

$$\forall u \in E \ : \ B_v(u) := B(u, v).$$

  Montrer que pour tout $u \in E$, il existe une constante C_u telle que

$$\forall v \in F \ : \ \|B_v(u)\| \leqslant C_u \|v\| .$$

(b) En déduire que la famille $\mathcal{F} = \{B_v;\ \|v\| \leqslant 1\}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E, G)$.

(c) Montrer que B est continue.

(2) Dans cette question, on prend $E = \mathcal{C}([0,1]) = F$, muni de la norme $\|\cdot\|$ suivante : pour toute $u \in \mathcal{C}([0,1])$,

$$\|u\| := \int_0^1 |u(t)|\, dt.$$

Soit $B : \mathcal{C}([0,1]) \times \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ la forme bilinéaire définie par

$$B(u,v) = \int_0^1 u(t)v(t)\, dt\,.$$

(a) Montrer que B est séparément continue.

(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n \in \mathcal{C}([0,1])$ la fonction $t \mapsto t^n$. Calculer $B(u_n, u_n)$ et $\|u_n\|$.

(c) La forme bilinéaire B est-elle continue ?

Exercice 51. Montrer qu'il n'existe aucune norme sur $\mathbb{R}[X]$ telle que $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$ soit complet.

Exercice 52. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $a > 0$, on a $\lim_{\mathbb{N} \ni n \to \infty} f(na) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n := \{a \in [1, \infty[\ \ \forall k \geqslant n\ :\ |f(ka)| \leqslant \varepsilon\}$. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que F_{n_0} est d'intérieur non-vide.

(2) Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient $0 < \alpha < \beta$. Montrer que l'ensemble $\bigcup_{k \geqslant n} [k\alpha, k\beta]$ contient un intervalle de la forme $[X, \infty[$.

(3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 53. Soit (K, d) un espace métrique compact *dénombrable*. Le but de l'exercice est de montrer que K est homéomorphe à un compact de $\mathbb{R}$.

(1) Soient $a, b \in K$ tels que $a \neq b$. On pose

$$O_{a,b} := \{f \in \mathcal{C}(K);\ f(a) \neq f(b)\}.$$

(a) Montrer que $O_{a,b}$ est un ouvert de $\mathcal{C}(K)$.

(b) Montrer que $O_{a,b} \neq \varnothing$.

(c) Montrer que si $f \in O_{a,b}$ et $u \in \mathcal{C}(K) \backslash O_{a,b}$, alors $u + \varepsilon f \in O_{a,b}$ pour tout $\varepsilon > 0$; et en déduire que $O_{a,b}$ est dense dans $\mathcal{C}(K)$.

(2) Déduire de (1) qu'il existe une fonction $f : K \to \mathbb{R}$ qui est continue et *injective* ; et conclure.

Exercice 54. Soit E un espace métrique complet, et soit $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On note $\mathrm{Cont}(f)$ l'ensemble des points de continuité de f. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathrm{Cont}(f)$ est dense dans E.

(1) Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$O_\varepsilon := \{x \in E;\ \exists V \text{ voisinage de } x \text{ tel que } \ \forall u, v \in V\ :\ |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon\}.$$

  (a) Montrer que chaque O_ε est un ouvert de E.

  (b) Montrer que $\bigcap_{p\in\mathbb{N}^*} O_{1/p} \subseteq \mathrm{Cont}(f)$.

(2) Pour $\varepsilon > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$C_{n,\varepsilon} := \{x \in E;\ \forall p, q \geqslant n\ :\ |f_p(x) - f_q(x)| \leqslant \varepsilon/3\}.$$

  (a) Montrer que $C_{n,\varepsilon}$ est un fermé de E.

  (b) Montrer que $\forall u, v \in C_{n,\varepsilon}\ :\ |f(u) - f(v)| \leqslant |f_n(u) - f_n(v)| + 2\varepsilon/3$.

  (c) Déduire de (b) que $\mathring{C}_{n,\varepsilon} \subseteq O_\varepsilon$.

(3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 55. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable en tout point. Montrer que l'ensemble des points de continuité de f' est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 56. Soit $\mathbf{1}_\mathbb{Q} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction indicatrice des rationnels. Montrer qu'il est impossible de trouver une suite de fonctions continues qui converge simplement vers $\mathbf{1}_\mathbb{Q}$.