

Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Soit E un espace métrique et soit $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E . On suppose que les suites $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite (u_k) converge.

Exercice 2. Trouver une suite de nombres réels qui possède exactement une valeur d'adhérence mais qui ne soit pas convergente.

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels.

- (1) Justifier que (x_n) possède une plus petite valeur d'adhérence et une plus grande valeur d'adhérence.
- (2) On note $\overline{\lim} x_n$ la plus grande valeur d'adhérence de (x_n) , et $\underline{\lim} x_n$ la plus petite valeur d'adhérence de (x_n) . Montrer qu'on a

$$\overline{\lim} x_n = \inf_{m \in \mathbb{N}} \sup_{n \geq m} x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \sup_{n \geq m} x_n \quad \text{et} \quad \underline{\lim} x_n = \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{n \geq m} x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} \inf_{n \geq m} x_n.$$

- (3) Montrer qu'on a $\overline{\lim} (-x_n) = -\underline{\lim} x_n$ et $\underline{\lim} (-x_n) = -\overline{\lim} x_n$.

Exercice 4. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites bornées de nombres réels, alors

$$\underline{\lim} u_n + \underline{\lim} v_n \leq \underline{\lim} (u_n + v_n) \leq \underline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n \leq \overline{\lim} (u_n + v_n) \leq \overline{\lim} u_n + \overline{\lim} v_n.$$

Exercice 5. Soit (x_n) une suite de nombres positifs. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha \in [0, 1[$ tel que $x_n + \alpha x_{2n}$ tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$.

- (1) On pose $L = \overline{\lim} x_n$ et $l = \underline{\lim} x_n$. En utilisant les inégalités de l'Exercice 4, montrer qu'on a $1 \leq l + \alpha L$ et $1 \geq L + \alpha l$.
- (2) Montrer que la suite (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 6. Soit (u_k) une suite de nombres réels. On suppose que $u_{k+1} - u_k \rightarrow 0$ quand $k \rightarrow \infty$. Montrer que si a et b sont deux valeurs d'adhérence de (u_k) , alors tout nombre $c \in [a, b]$ est valeur d'adhérence de (u_k) .

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E en utilisant le Théorème de Bolzano-Weierstrass.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit $T \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $\|T\| \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$A_n := \frac{1}{n}(I + T + \dots + T^{n-1}).$$

Le but de l'exercice est de montrer la chose suivante : pour tout $x \in E$, la suite $(A_n(x))$ converge vers un point $y \in E$ tel que $T(y) = y$.

- (1) Montrer qu'on a $\|A_n\| \leq 1$ pour tout n .
- (2) Montrer que $A_n(I - T)(x) \rightarrow 0$ pour tout $x \in E$.
- (3) Dédire de (2) que $A_n(z) \rightarrow 0$ pour tout $z \in \overline{\text{Im}(I - T)}$.
- (4) Soit $x \in E$ fixé.
 - (a) Montrer qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers (n_k) telle que la suite $(A_{n_k}(x))$ converge vers un point $y \in E$.
 - (b) Montrer à l'aide de (2) que $T(y) = y$.
 - (c) Montrer que $x - A_n(x) \in \text{Im}(I - T)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; et en déduire que $x - y \in \overline{\text{Im}(I - T)}$.
 - (d) Justifier qu'on a $A_n(x) - y = A_n(x - y)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, puis montrer que $A_n(x) \rightarrow y$.

Exercice 9. Soit $E := \mathcal{C}([0, 2\pi])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n \in E$ la fonction définie par $e_n(t) := e^{int}$.

- (1) Combien vaut $\|e_n\|_\infty$?
- (2) Pour $n, n' \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{2\pi} |e_n(t) - e_{n'}(t)|^2 dt$; et en déduire une minoration de $\|e_n - e_{n'}\|_\infty$ si $n \neq n'$.
- (3) Montrer que la suite (e_n) ne possède aucune sous-suite convergente.

Exercice 10. Soit I un ensemble infini, et soit $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I deux à deux distincts. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $u_k \in \ell^\infty(I)$ définie par $u_k(t_k) = 1$ et $u_k(t) = 0$ pour tout $t \neq t_k$. Montrer que la suite (u_k) est bornée dans $\ell^\infty(I)$, mais qu'elle ne possède aucune sous-suite convergente.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie. On note B_E la boule unité fermée de E i.e. $B_E = \{u \in E; \|u\| \leq 1\}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_E$ ne possédant aucune sous-suite convergente. (Ce résultat s'appelle le **Théorème de Riesz**.)

- (1) Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel fermé, avec $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\text{dist}(u, F) \geq 1/2$. (Commencer par choisir $x \in E \setminus F$, puis $f \in F$ tel que $\|x - f\| \leq 2 \text{dist}(x, F)$.)

(2) Construire par récurrence une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq E$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait : $\|u_k\| = 1$ et $\text{dist}(u_k, \text{vect}\{u_{k'}, k' < k\}) \geq 1/2$.

(3) Conclure.

Exercice 12. Soit E un espace métrique. Montrer que si $(x_l)_{l \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de E convergeant vers un point $a \in E$, alors l'ensemble $K := \{x_l; l \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est un compact de E .

Exercice 13. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$. On suppose que pour tout compact $K \subseteq E$, l'application $f|_K : K \rightarrow F$ est continue. Montrer que f est continue.

Exercice 14. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$ une application continue. On suppose que pour tout compact $K \subseteq F$, l'ensemble $f^{-1}(K)$ est un compact de E . Montrer que $f(E)$ est un fermé de F .

Exercice 15. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \rightarrow F$.

(1) Montrer que si f est continue, alors le graphe de f est une partie fermée de $E \times F$.

(2) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R} = F$. Montrer que la réciproque de (1) n'est pas vraie.

(3) Montrer que si E et F sont compacts, alors la réciproque de (1) est vraie.

Exercice 16. Soient Λ et E deux espaces métriques, avec E compact, et soit $F : \Lambda \times E \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un et un seul point $x \in E$ tel que $F(\lambda, x) = 0$, et on note ce point $x(\lambda)$. Montrer que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

Exercice 17. Soient E et K deux espaces métriques, avec K compact. Soit également $C \subseteq E \times K$ un ensemble fermé. Montrer que $\tilde{C} := \{x \in E; \exists y \in K : (x, y) \in C\}$ est un fermé de E .

Exercice 18. L'ensemble $A := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^4 \leq 6\}$ est-il compact? Même question pour l'ensemble $B := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^3 \leq 6\}$.

Exercice 19. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$\Sigma_N := \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N; x_j \geq 0 \text{ pour tout } j \in \llbracket 1, N \rrbracket \text{ et } \sum_{j=1}^N x_j = 1 \right\}$$

est un compact de \mathbb{R}^N . Dessiner Σ_2 et Σ_3 .

Exercice 20. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$. On pose

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; ax^2 + bxy + cy^2 \leq 1\}.$$

Montrer que M est compact si et seulement si $b^2 - 4ac < 0$.

Exercice 21. Soit $O_N(\mathbb{R}) := \{M \in M_N(\mathbb{R}); {}^tMM = Id\}$. Montrer que $O_N(\mathbb{R})$ est un compact de $M_N(\mathbb{R})$.

Exercice 22. Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie, et soit $K \subseteq E$ un ensemble compact, convexe, symétrique par rapport à 0, et tel que $0 \in \overset{\circ}{K}$. Pour $u \in E$, on pose

$$\|u\|_K := \inf \left\{ s > 0; \frac{u}{s} \in K \right\}.$$

- (1) Justifier la définition.
- (2) Montrer que $K = \{u \in E; \|u\|_K \leq 1\}$.
- (3) Montrer que $\|\cdot\|_K$ est une norme sur E .

Exercice 23. Soit K un espace métrique compact, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues, $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) est *décroissante* ($f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ pour tout n et pour tout $x \in K$) et que $f_n(x) \rightarrow 0$ pour tout $x \in K$. Le but de l'exercice est de montrer que (f_n) converge vers 0 *uniformément*, i.e. $\|f_n\|_\infty \rightarrow 0$. (Ce résultat s'appelle le **Théorème de Dini**.)

- (1) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := \{x \in K; f_n(x) \geq \varepsilon\}$. Justifier que les K_n sont des fermés de K , et déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$.
- (2) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 24. Soit E un espace métrique, et soit $f : E \rightarrow \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\alpha := \{x \in E; f(x) \leq \alpha\}$ est compact.

- (1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := \{x \in E; f(x) \leq -n\}$. Déterminer $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n$, et en déduire que la fonction f est minorée.
- (2) Montrer que f possède un minimum.

Exercice 25. Soit E un espace vectoriel normé. Pour $A, B \subseteq E$, on pose $A + B := \{u + v; u \in A, v \in B\}$.

- (1) Montrer que si A est compact et si B est fermé, alors $A + B$ est fermé.
- (2) Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

Exercice 26. Soit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue de \mathbb{T} sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. (En particulier, $[0, 2\pi[$ et \mathbb{T} ne sont pas homéomorphes même s'il existe une bijection continue de $f : [0, 2\pi[\rightarrow \mathbb{T}$, à savoir $f(t) := e^{it}$).

Exercice 27. Soit X un espace métrique, et soit $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$ une application continue. On suppose que $\gamma|_{]0,1[}$ est injective, et que $\gamma(1) = \gamma(0)$.

- (1) Soit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$, et soit $q : [0, 1] \rightarrow \mathbb{T}$ définie par $q(t) := e^{2i\pi t}$. Montrer qu'il existe une unique application $\tilde{\gamma} : \mathbb{T} \rightarrow X$ telle que $\forall t \in [0, 1] : \tilde{\gamma}(q(t)) = \gamma(t)$.
- (2) Montrer que $\Gamma := \gamma([0, 1])$ est homéomorphe au cercle \mathbb{T} .

Exercice 28. Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $f : E \rightarrow E$. On suppose que f est *dilatante*, ce qui signifie que $\forall x, y \in E : d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$. Le but de l'exercice est de montrer que f est une isométrie bijective.

- (1) Soient $x, y \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n := f^n(x)$ et $y_n := f^n(y)$, où $f^0 := id_E$ et $f^n = f \circ \dots \circ f$ pour $n \geq 1$.
 - (a) Montrer que si $n, n' \in \mathbb{N}$ et $n < n'$, alors $d(x_n, x_{n'}) \geq d(x, x_{n'-n})$ et $d(y_n, y_{n'}) \geq d(y, y_{n'-n})$.
 - (b) En déduire qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k \geq 0}$ telle que $x_{n_{k+1}-n_k} \rightarrow x$ et $y_{n_{k+1}-n_k} \rightarrow y$.
 - (c) Montrer que $d(x, y) = d(f(x), f(y))$.
- (2) Soit $y \in E$ quelconque. En considérant à nouveau la suite $(y_n) = (f^n(y))$, montrer que $y \in \overline{f(E)}$; puis montrer que $y \in f(E)$.
- (3) Conclure.

Exercice 29. Pour tout $r > 0$, on pose $D(0, r) := \{z \in \mathbb{C}; |z| < r\}$. On pose également $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$. Montrer que si K est un compact de \mathbb{D} alors il existe $r < 1$ tel que $K \subseteq D(0, r)$.

Exercice 30. Soit $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$. Montrer que si K est un compact de \mathbb{C}_+ , alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z \in K : \operatorname{Re}(z) \geq \alpha$; et en déduire que la série $\sum e^{-nz}$ converge normalement sur tout compact de \mathbb{C}_+ .

Exercice 31. Soit E un espace métrique compact, et soit $\alpha : E \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $|\alpha(x)| < 1$ pour tout $x \in E$. Montrer que si (t_n) est une suite quelconque de points de E , alors la série $\sum \alpha(t_n)^n$ est convergente.

Exercice 32. Soit $c > 0$, et soit $K := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x \geq 0, y \geq 0 \text{ et } x + y = c\}$. Soient également $\alpha, \beta > 0$. Montrer sans calcul que la fonction f définie par $f(x, y) := x^\alpha y^\beta$ possède un maximum sur K ; puis déterminer ce maximum.

Exercice 33. Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) := (x^2 + y^2)e^{x^2 - y^2}$. Montrer sans calcul que f possède un maximum sur le carré $C := [0, 2] \times [0, 2]$; puis déterminer ce maximum.

Exercice 34. Soit $\Omega := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x > 0, y > 0\}$, et soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x + y + \frac{a}{xy}$, où $a > 0$ est fixé.

- (1) Montrer que si (z_n) est une suite de points de Ω telle que la suite $(f(z_n))$ converge, alors (z_n) admet une sous-suite qui converge vers un point de Ω .
- (2) Montrer que f possède un minimum; puis déterminer ce minimum.

Exercice 35. Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $f : E \rightarrow E$. On suppose qu'on a $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Montrer que f admet un et un seul point fixe. (On pourra considérer la fonction $x \mapsto d(x, f(x))$.)

Exercice 36. Soit E un espace vectoriel normé réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On dit qu'une forme linéaire continue $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ **atteint sa norme** s'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\Phi(u) = \|\Phi\|$.

- (1) Montrer que si $\dim(E) < \infty$ alors toute forme linéaire continue $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ atteint sa norme.
- (2) Dans cette question, on prend $E := c_0(\mathbb{N})$. Soit $\Phi : c_0(\mathbb{N}) \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Phi(u) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} u_i$ pour $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$. La forme linéaire Φ atteint-elle sa norme?
- (3) Dans cette question, on prend $E = \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Phi(u) := \int_0^{1/2} u(t) dt - \int_{1/2}^1 u(t) dt$. La forme linéaire Φ atteint-elle sa norme?

Exercice 37. Soit E un espace vectoriel normé réel.

- (1) Montrer que si $V \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et si $x_0 \in E$, alors il existe $v \in V$ tel que $\|x_0 - v\| = \text{dist}(x_0, V)$.
- (2) Soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ une forme linéaire continue, $\Phi \neq 0$, et soit $x_0 \in E \setminus \ker(\Phi)$. Montrer que s'il existe $v \in \ker(\Phi)$ tel que $\|x_0 - v\| = \text{dist}(x_0, \ker(\Phi))$, alors Φ atteint sa norme (cf l'Exercice 36).
- (3) Dans cette question, on prend $E := \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Trouver un sous-espace fermé $V \subseteq E$ et $f_0 \in \mathcal{E}$ tels que $\forall v \in V : \|f_0 - v\| > \text{dist}(f_0, V)$.

Exercice 38. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites (finies) en $\pm\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur \mathbb{R} .

Exercice 39. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est uniformément continue sur \mathbb{R}^+ si et seulement si $\alpha \leq 1$.

Exercice 40. Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors il existe deux constantes A et B telles que $\forall t \in \mathbb{R}^+ : |f(t)| \leq A + Bt$.

Exercice 41. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $B \subseteq E$ un ensemble borné. Montrer que toute fonction uniformément continue $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 42. Soit $f :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que $f(x)$ admet une limite (finie) quand $x \rightarrow 0^+$.

Exercice 43. Soit (K, d) un espace métrique compact, soit (F, d) un autre espace métrique, et soit $f : K \rightarrow F$ une application continue.

- (1) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que l'ensemble $L_\varepsilon := \{(x, y) \in K \times K; d(f(x), f(y)) \geq \varepsilon\}$ est un compact de $K \times K$, et en déduire que $\delta := \inf \{d(x, y); (x, y) \in L_\varepsilon\}$ est > 0 .
- (2) *Déduire de (1) que f est uniformément continue.*

Exercice 44. Montrer, *sans utiliser* le théorème du cours sur l'équivalence entre la compacité et la propriété de Borel-Lebesgue, que tout intervalle fermé borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ possède la propriété de Borel-Lebesgue.

Exercice 45. Soit E un espace métrique. *En utilisant uniquement la propriété de Borel-Lebesgue*, démontrer les choses suivantes.

- (1) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de points de E convergeant vers $a \in E$, alors l'ensemble $K := \{x_n; n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est un compact de E .
- (2) Tout compact de E est fermé dans E ; et si E est compact, alors tout fermé de E est compact.
- (3) Si $f : E \rightarrow F$ est continue (F étant un autre espace métrique) et si K est un compact de E , alors $f(K)$ est un compact de F .
- (4) Toute réunion finie de compacts de E est un compact.

Exercice 46. Montrer *en utilisant le Lemme de Lebesgue* que toute fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue.

Exercice 47. Soit I un intervalle compact de \mathbb{R} . Montrer que si $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles ouverts telle que $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} I_k \supseteq I$, alors $|I| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |I_k|$. (On note $|J|$ la longueur d'un intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$.)

Exercice 48. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications de E dans F . Soit également $f : E \rightarrow F$. On suppose qu'il existe un ensemble dense $D \subset E$ tel que $f_n(z) \rightarrow f(z)$ quand $n \rightarrow \infty$ pour tout $z \in D$. On suppose également qu'il existe une constante C telle que f et les f_n sont C -lipschitziennes.

- (1) Montrer que $f_n(x) \rightarrow f(x)$ pour tout $x \in E$.
- (2) Dans cette question, on suppose que E est compact.
 - (a) Soit $\varepsilon > 0$. En utilisant la propriété de Borel-Lebesgue, montrer qu'il existe $z_1, \dots, z_N \in D$ tels que $E = B(z_1, \varepsilon) \cup \dots \cup B(z_N, \varepsilon)$.
 - (b) Montrer que $f_n \rightarrow f$ uniformément.

Exercice 49. Soit K un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs réelles. Soit \mathcal{A} un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ tel que $\forall f \in \mathcal{A} : f^2 \in \mathcal{A}$. On suppose que pour tout $x \in K$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{A}$ telle que $\forall x \in K : F(x) > 0$.

Exercice 50. Soit (E, d) un espace métrique compact.

- (1) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un ensemble fini $D_k \subseteq E$ tel que $\bigcup_{z \in D_k} B(z, \frac{1}{k}) = E$.
- (2) Montrer que E est *séparable*, i.e. il existe un ensemble $D \subseteq E$ à la fois dénombrable et dense dans E .

Exercice 51. Soit $K := \{u = (u(i))_{i \in \mathbb{N}} \in \ell^\infty; \forall i \in \mathbb{N} : |u(i)| \leq 2^{-i}\}$. Montrer que K est un compact de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Exercice 52. Soit K une partie de $c_0(\mathbb{N})$. Le but de l'exercice est de montrer que les choses suivantes sont équivalentes :

- (i) K est relativement compact dans $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$;
- (ii) il existe une suite de nombres réels positifs $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ tendant vers 0 telle que $\forall u \in K \forall i \in \mathbb{N} : |u(i)| \leq \varepsilon_i$.

- (1) Montrer que (ii) entraîne (i).
- (2) On suppose que K est compact.
 - (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_n(u) := \sup \{|u(i)|; i \geq n\}$. Montrer que les fonctions f_n sont continues (en fait, 1-lipschitziennes).
 - (b) En utilisant l'Exercice 23, montrer que (ii) est vérifiée.