Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soit $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que si T est bornée sur une boule B non triviale (*i.e.* de rayon $r > 0$), alors T est continue. En déduire que si T est continue en au moins 1 point x_0, alors T est continue.

Exercice 2. Soient E, F, G des espaces vectoriels normés, et soit $B : E \times F \to G$ une application *bilinéaire*. Montrer que les choses suivantes sont équivalentes :

(i) B est continue ;

(ii) il existe une constante C telle que $\forall (u, v) \in E \times F \ : \ \|B(u, v)\| \leqslant C \, \|u\| \, \|v\|$.

Exercice 3. Soient E, F, G des espaces vectoriels normés. Montrer que si E et F sont de dimension finie, alors toute application bilinéaire $B : E \times F \to G$ est continue.

Exercice 4. Soient E et F deux espace vectoriel normés. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|T\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est la constante de Lipschitz de T.

Exercice 5. Soient E et F des espace vectoriel normé, et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que T est bijective et que T^{-1} est continue. Montrer que T est une isométrie si et seulement $\|T\| \leqslant 1$ et $\|T^{-1}\| \leqslant 1$.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel. Montrer que si $\| \cdot \|$ et $\| \cdot \|'$ sont deux normes équivalentes sur E, alors les normes subordonnées sur $\mathcal{L}(E)$ sont équivalentes.

Exercice 7. Pour $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, soit $\Phi_a : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\Phi_a(u) := \sum_{j=1}^{N} a_j u_j.$$

(1) Déterminer $\|\Phi_a\|$ lorsqu'on munit $\mathbb{R}^N$ de la norme $\| \cdot \|_1$.

(2) Même question avec la norme $\| \cdot \|_\infty$.

Exercice 8. Trouver la norme sur $M_N(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^N$.

Exercice 9. Soit $E := (\mathbb{K}^N, \| \cdot \|_1)$, et soit F un evn quelconque. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|T\| = \max\big(\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_N)\|\big)$, où $(e_1, \dots, e_N)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^N$.

Exercice 10. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$, et également $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_N(\mathbb{R})$. Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in M_N(\mathbb{R})$ alors

$$\|A\| \leqslant \left(\sum_{i,j=1}^{N} a_{i,j}^2\right)^{1/2}.$$

Exercice 11. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^N$, et également $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_N(\mathbb{R})$. De plus, si $M \in M_N(\mathbb{R})$ on note $\sigma(M)$ l'ensemble des valeurs propres de M. Le but de l'exercice est de montrer que si $A \in M_N(\mathbb{R})$, alors

$$\|A\| = \max\left\{\sqrt{\lambda};\ \lambda \in \sigma({}^tAA)\right\}.$$

(1) Rappeler pourquoi la matrice ${}^tAA$ est diagonalisable en base orthonormée, avec des valeurs propres $\geqslant 0$.
(2) Vérifier que si $u \in \mathbb{R}^N$, alors $\|Au\|^2 = \langle {}^tAAu, u\rangle$.
(3) Soit $(f_1, \ldots, f_N)$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^N$ formée de vecteurs propres pour ${}^tAA$, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ les valeurs propres associées. Montrer que si $u = \sum_{j=1}^N u_j f_j \in \mathbb{R}^N$, alors

$$\|Au\|^2 = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j u_j^2.$$

(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 12. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne. Calculer la norme de l'application linéaire $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$T(x,y) := \left(x, \frac{x+y}{2}\right).$$

Exercice 13. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne, et on note $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_2(\mathbb{R}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$. Pour $A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, calculer $\|A\|$ en fonction des coefficients de A.

Exercice 14. Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$, et soit λ une valeur propre de A. Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_N(\mathbb{C})$ subordonnée à une certaine norme sur $\mathbb{C}^N$, alors $|\lambda| \leqslant \|A\|$.

Exercice 15. Soit N un entier $\geqslant 2$.

(1) Pour $A = (a_{i,j}) \in M_N(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|_1 := \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|$. Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas subordonnée à une norme sur $\mathbb{K}^N$.

(2) Même question avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty := \max_{1\leqslant i,j\leqslant N} |a_{ij}|$.

Exercice 16. On note $c_0(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les suites $(u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0. On munit $c_0(\mathbb{N})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(1) Soit $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de scalaires. On suppose que la série $\sum a_i$ est absolument convergente. Montrer que pour tout $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$, la série $\sum a_i u_i$ est convergente, et que si on pose

$$\Phi_a(u) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i u_i,$$

alors on définit une forme linéaire continue sur $c_0(\mathbb{N})$ telle que $\|\Phi_a\| \leqslant \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

(2) Avec les notations de (1), montrer qu'en fait $\|\Phi_a\| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

Exercice 17. On munit $\mathcal{C}([0,1])$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit Φ la forme linéaire sur $\mathcal{C}([0,1])$ définie par

$$\Phi(u) := \int_0^1 g(t)u(t)\,dt.$$

(1) Montrer que Φ est continue avec $\|\Phi\| \leqslant \|g\|_\infty$.

(2) Soit $t_0 \in [0,1]$ tel que $g(t_0) \neq 0$. On suppose par exemple que $g(t_0) > 0$.

  (a) Soit ε vérifiant $0 < \varepsilon < g(t_0)$. Justifier l'existence d'un intervalle non trivial $I = [a,b] \subseteq]0,1[$ tel que $\forall t \in I \ : \ g(t) \geqslant g(t_0) - \varepsilon$.

  (b) Avec les notations de (a), soit $\delta > 0$ tel que $[a-\delta, a+\delta] \subseteq [0,1]$. On note $u_\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction continue valant 1 sur I, valant 0 en dehors de $[a-\delta, a+\delta]$, et affine sur $[a-\delta, a]$ et sur $[b, b+\delta]$. Calculer $\|u_\delta\|_1$ et minorer $\Phi(u_\delta)$.

(3) Montrer que $\|\Phi\| = \|g\|_\infty$.

Exercice 18. Soit $E := \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, et soient $\alpha, \beta > 0$. On note $\Phi : \mathcal{C}([0,1]) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\Phi(u) := \alpha \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \beta \int_{1/2}^1 u(t)\,dt.$$

(1) Montrer que Φ est continue et qu'on a $\|\Phi\| \leqslant \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot$

(2) Dans cette question, on veut montrer qu'en fait $\|\Phi\| = \frac{\alpha+\beta}{2}\cdot$

  (a) Pour ε vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on note u_ε la fonction continue sur $[0,1]$ valant 1 sur $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon]$, valant -1 sur $[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1]$ et affine sur $[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$. Calculer $\|u_\varepsilon\|_\infty$ et $\Phi(u_\varepsilon)$.

(b) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 19. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $\Phi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Montrer que pour tout $x_0 \in E \backslash \ker \Phi$, on a

$$\|\Phi\| = \frac{|\Phi(x_0)|}{\operatorname{dist}(x_0, \ker \Phi)}.$$

Exercice 20. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme définie par $\|P\| := \sup\{|P(x)|;\ x \in [a, b]\}$.

(1) Justifer que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.

(2) Soit $x_0 \in \mathbb{R}\backslash[a, b]$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(x_0) > 1$ et $0 \leqslant P(x) \leqslant 1$ pour tout $x \in [a, b]$; et en déduire que la forme linéaire $P \mapsto P(x_0)$ n'est pas continue sur $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.

Exercice 21. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$, avec $a < b$. On note $\mathcal{C}^1([a, b])$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions $f : [0, 1] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si $x_0 \in [a, b]$, alors la forme linéaire $u \mapsto u'(x_0)$ n'est pas continue sur $\big(\mathcal{C}^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty\big)$.

Exercice 22. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

(1) Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in N} \subseteq E$ telle que : les x_n sont linéairement indépendants et $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) En admettant que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire, montrer qu'il existe une forme linéaire sur E qui n'est pas continue.

Exercice 23. Soient E et F deux espace vectoriel normé avec $\dim(E) < \infty$, et soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. Soit également $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $T_k \to T$ pour la norme de $\mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $T_k(u) \to T(u)$ pour tout $u \in E$.

Exercice 24. Soit E l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions continues $f : [0, \infty[\to \mathbb{K}$ tendant vers 0 à l'infini. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Trouver une suite (Φ_k) de formes linéaires continues sur E telle que $\Phi_k(u) \to u$ pour tout $u \in E$ mais $\|\Phi_k\| \not\to 0$. Comparer avec l'Exercice 23.

Exercice 25. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que la suite $(T^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E)$, et qu'elle *converge au sens de Cesàro*, autrement dit qu'il existe $P \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\frac{1}{n+1}(Id + T + \cdots + T^n) \xrightarrow{n \to \infty} P.$$

(1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} \ : \ \frac{1}{n+1}\sum_{l=0}^{n} T^{k+l} \to P$ quand $n \to \infty$.

(2) Montrer que $P^2 = P$.

Exercice 26. Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *Si* $\|\cdot\|$ *est une norme quelconque sur* $M_N(\mathbb{K})$*, alors la suite* $\left(\|A^n\|^{1/n}\right)_{n\geqslant 1}$ *est convergente, et* $\lim \|A^n\|^{1/n}$ *ne dépend pas de la norme* $\|\cdot\|$.

(1) Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que (a_n) est *sous-multiplicative*, ce qui signifie la chose suivante :

$$\forall n, n' \in \mathbb{N}^* \ : \ a_{n+n'} \leqslant a_n a_{n'}.$$

On pose

$$l := \inf \left\{a_n^{1/n};\ n \geqslant 1\right\}.$$

(a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier $m = m_\varepsilon$ tel que $a_m \leqslant (l+\varepsilon)^m$.

(b) On garde les notations de (a). Pour $n \geqslant m_\varepsilon$, on écrit $n = p_n m_\varepsilon + r_n$, où $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant r_n < m_\varepsilon$. On pose également $\alpha := \max\{a_r;\ 0 \leqslant r < m_\varepsilon\}$. Montrer que

$$\forall n \geqslant m_\varepsilon \ : \ a_n^{1/n} \leqslant (l+\varepsilon)^{1-\frac{r_n}{n}} \times \alpha^{1/n}.$$

(c) Montrer que la suite $\left(a_n^{1/n}\right)$ converge et que sa limite est égale à l.

(2) Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_N(\mathbb{K})$ subordonnée à une certaine norme sur $\mathbb{K}^N$, alors la suite $\left(\|A^n\|^{1/n}\right)$ est convergente.

(3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 27. Pour toute matrice $A \in M_N(\mathbb{C})$, on pose

$$\rho(A) := \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{1/n},$$

où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $M_N(\mathbb{C})$ (*cf* l'Exercice 26). On pose également

$$r(A) := \max\left\{|\lambda|;\ \lambda \text{ valeur propre de } A.\right\}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule suivante, qu'on appelle la **formule du rayon spectral** :

$$\forall A \in M_N(\mathbb{C}) \ : \ \rho(A) = r(A).$$

(1) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_N(\mathbb{C})$ subordonnée à une certaine norme sur $\mathbb{C}^N$. Montrer que si $A \in M_N(\mathbb{C})$ et si λ est une valeur propre de A, alors $|\lambda^n| \leqslant \|A^n\|$ pour tout $n \geqslant 1$. En déduire que $r(A) \leqslant \rho(A)$.

(2) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_N(\mathbb{C})$, et soit $Q \in GL_N(\mathbb{C})$. Montrer qu'on définit une norme sur $M_N(\mathbb{C})$ en posant $\|M\|_Q := \|Q^{-1}MQ\|$ pour toute matrice $M \in M_N(\mathbb{C})$, et que si $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative ($\|AB\| \leqslant \|A\|\,\|B\|$), alors $\|\cdot\|_Q$ aussi.

(3) Soit $B \in M_N(\mathbb{C})$ une matrice *triangulaire supérieure*, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_N$. Pour $\alpha > 0$, on note D_α la matrice diagonale de coefficients $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^N$. Montrer que $D_\alpha^{-1} B D_\alpha$ tend vers la matrice diagonale de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ quand $\alpha \to 0$.

(4) Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$. Déduire de (1) et (2) que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une norme sous-multiplicative $|||\cdot|||$ (dépendant de A et de ε) sur $M_N(\mathbb{C})$ telle que $|||A||| \leqslant r(A) + \varepsilon$.

(5) Démontrer la formule du rayon spectral.

Exercice 28. (Théorème de Hahn-Banach en dimension finie)
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel de dimension finie, soit M un sous-espace vectoriel de E, et soit $\varphi : M \to \mathbb{R}$ une forme linéaire (continue). Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une forme linéaire $\Phi : E \to \mathbb{R}$ telle que $\Phi(u) = \varphi(u)$ pour tout $u \in M$ et $\|\Phi\| = \|\varphi\|$.

(1) Pourquoi peut-on supposer que $\|\varphi\| = 1$?

(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E contenant a, avec $F \neq E$, et soit $e \in E \backslash F$. Soit également $\psi : F \to \mathbb{R}$ une forme linéaire vérifiant $\|\psi\| \leqslant 1$.

   (a) Montrer que pour tous $v, w \in F$, on a
   $$\psi(v) - \|v - e\| \leqslant \|w + e\| - \psi(w) \,.$$

   (b) En déduire qu'il existe un nombre réel c tel que
   $$\forall v, w \in F \;:\; \psi(v) - \|v - e\| \leqslant c \leqslant \|w + e\| - \psi(w) \,.$$

   (c) Montrer que pour tout $u \in F$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a
   $$\psi(u) + c\lambda \leqslant \|u + \lambda e\| \,.$$

   (d) En déduire qu'il existe une forme linéaire $\psi' : F \oplus \mathbb{R}e \to \mathbb{R}$ telle que $\psi' \equiv \psi$ sur F et $\|\psi'\| \leqslant 1$.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 29. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel de dimension finie, et soit $a \in E \backslash \{0\}$ fixé. En utilisant l'Exercice 28, montrer qu'il existe une forme linéaire $\Theta \in E^*$ telle que $\|\Theta\| = 1$ et $\Theta(a) = \|a\|$.

Exercice 30. Démontrer directement le résultat de l'Exercice 29 lorsque la norme de E provient d'un produit scalaire.