Séries de Fourier et analyse complexe

Licence de Mathématiques, 3ème année

Table des matières

Chapitre 1. Séries de Fourier 5
1. Fonctions périodiques, coefficients de Fourier 5
2. Un (tout petit) peu d'analyse fonctionnelle 8
3. Convolution 10
4. Théorème de Fejér 13
5. Théorie "L^2" 16
6. Convergence normale 19
7. Convergence ponctuelle 21

Chapitre 2. Fonctions holomorphes 27
1. Calcul différentiel dans le plan complexe 27
2. Fonctions holomorphes 30
3. Séries entières ; fonctions analytiques 33
4. Fonctions usuelles 38
5. Holomorphe = analytique 44

Chapitre 3. Quelques propriétés des fonctions holomorphes 47
1. Zéros des fonctions holomorphes 47
2. Théorème de Liouville 50
3. Principe du maximum 52
4. Développement en série de Laurent 56

Chapitre 4. Intégrale curviligne 61
1. Définition et propriétés élémentaires 61
2. Formule de Green-Riemann 67
3. Théorème de Cauchy et formule de Cauchy 74

Chapitre 5. Résidus 81
1. La "formule des résidus" 81
2. Calcul pratique d'un résidu dans le cas d'un pôle 82
3. Exemples de calculs d'intégrales 84
4. Comptage de zéros 89

Chapitre 6. Suites, séries et intégrales 95
1. Majoration de la dérivée 95
2. Suites de fonctions holomorphes 95
3. Intégrales à paramètres 96
4. Produits infinis 98

Chapitre 7. Primitives, homotopie 103
1. Primitives 103
2. Homotopie 104

3. Indice d'un lacet par rapport à un point 108

Chapitre 8. Morera et Cauchy-Goursat 111

Chapitre 1

Séries de Fourier

1. Fonctions périodiques, coefficients de Fourier

1.1. Généralités.

Définition 1.1. *Soit $T > 0$. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est T-**périodique** si*

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ f(x+T) = f(x).$$

Exemple 1. Les fonctions sinus et cosinus sont 2π-périodiques.

Exemple 2. La fonction "partie fractionnaire" est 1-périodique.

Exemple 3. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, la fonction e_k définie par

$$e_k(t) := e^{ikt}$$

est 2π-périodique. Plus généralement, toute fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de la forme

$$P(t) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{ikt} \qquad \text{où} \qquad \Lambda \subseteq \mathbb{Z} \text{ est fini}$$

est 2π-périodique. Une fonction de ce type s'appelle un **polynôme trigonométrique**.

Notation. Étant donné $T > 0$, on note L^1_T l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions boréliennes $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ qui sont T-périodiques et **localement intégrables**, *i.e.* intégrables sur tout intervalle compact $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

Le lemme suivant est d'usage constant.

Lemme 1.2. *Si $f \in L^1_T$ alors, pour tous intervalles $I, J \subseteq \mathbb{R}$* de longueur T, *on a*

$$\int_I f(t)\, dt = \int_J f(t)\, dt.$$

Démonstration. Il suffit de montrer que $\int_I f(t)\, dt = \int_0^T f$ pour tout intervalle I de longueur T. On écrit $I = [a, a+T]$. Par la relation de Chasles, on a

$$\begin{aligned}\int_a^{a+T} f(t)\, dt &= \int_a^0 f(t)\, dt + \int_0^T f(t)\, dt + \int_T^{a+T} f(t)\, dt \\ &= \int_0^T f(t)\, dt + \int_T^{a+T} f - \int_0^a f.\end{aligned}$$

De plus, comme f est T-périodique, on a aussi

$$\int_T^{a+T} f = \int_T^{a+T} f(x)\, dx = \int_0^a f(t+T)\, dt = \int_0^a f(t)\, dt = \int_0^a f;$$

d'où le résultat. □

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne T-périodique. Montrer que si f est intégrable sur *un* intervalle de longueur T, alors $f \in L^1_T$.

1.2. Un problème naturel. Comme les seules fonctions 2π-périodiques auxquelles on pense immédiatement sont les polynômes trigonométriques, il parait naturel de se demander si on peut "synthétiser" n'importe quelle fonction 2π-périodique $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à partir des fonctions 2π-périodiques élémentaires $e_k(t) = e^{ikt}$.

Exemple d'énoncé plausible. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique "raisonnable", alors on peut écrire

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

où $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de coefficients (indépendants de t) et la série de fonctions $\sum c_k e_k$ converge en un sens à préciser.

Terminologie. Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite indexée par $\mathbb{Z}$ dans un espace vectoriel normé E. On dira que *la série* $\sum u_k$ *converge* si les **sommes partielles symétriques** $S_n := \sum_{k=-n}^{n} u_k$ admettent une limite quand $n \to \infty$.

Lemme 1.3. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique. On suppose qu'on peut écrire*

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

où la série $\sum c_k e^{ikt}$ converge uniformément *sur $\mathbb{R}$. Dans ces conditions, les coefficients c_k sont* déterminés de manière unique *: on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$,*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt.$$

Démonstration. Comme $f(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilt}$ avec *convergence uniforme* de la série sur $[-\pi, \pi]$, on peut écrire

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt}\, dt &= \int_{-\pi}^{\pi} \Big(\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{ilt} \Big) e^{-ikt} dt \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(l-k)t} dt.\end{aligned}$$

De plus, si $m \in \mathbb{Z}$, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{imt} dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } \ m = 0, \\ \left[\frac{1}{m} e^{imt} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0 & \text{si } \ m \neq 0. \end{cases}$$

Donc le seul terme non nul dans la somme précédente est celui où $l = k$, qui vaut $2\pi c_k$; et on obtient ainsi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt = 2\pi\, c_k.$$

□

1.3. Coefficients de Fourier. Le Lemme 1.3 “motive” la définition suivante.

DÉFINITION 1.4. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose*

$$c_k(f) := \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}.$$

*On dit que les c_k sont les **coefficients de Fourier** de f, et que la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k e^{ikt}$ est la **série de Fourier** de f.*

REMARQUE 1. Par périodicité, on a aussi $c_k(f) = \int_I f(t)e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}$ pour n'importe quel intervalle I de longueur 2π. En particulier,

$$c_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi}.$$

REMARQUE 2. L'application qui à une fonction f associe la suite $(c_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$ est *linéaire* : on a $c_k(f+g) = c_k(f) + c_k(g)$ et $c_k(\lambda f) = \lambda c_k(f)$ pour toute constante λ.

NOTATION. Si $f \in L^1_{2\pi}$, on pose pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$S_n f(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e^{ikt}.$$

Autrement dit,

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k.$$

REMARQUE 1.5. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, posons

$$\alpha_k(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \qquad \text{et} \qquad \beta_k(f) := \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(t)\sin(kt)\,dt.$$

(i) Si la fonction f est paire sur $]-\pi,\pi[$, alors

$$c_k(f) = \alpha_k(f) \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

et

$$S_n f(x) = c_0(f) + 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(f)\cos(kx) \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

(ii) Si la fonction f est impaire sur $]-\pi,\pi[$, alors

$$c_k(f) = -i\beta_k(f) \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

et

$$S_n f(x) = 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k(f)\sin(kx) \qquad \text{pour tout } n \geqslant 1.$$

Démonstration. (i) Supposons f paire. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$\begin{aligned} c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0} f(t)e^{-ikt}dt + \int_0^\pi f(t)e^{-ikt}dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\left(\int_0^\pi f(-t)e^{ikt}dt + \int_0^\pi f(t)e^{-ikt}dt\right) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi f(t)\times 2\cos(kt)\,dt \qquad \text{par parité de } f \\ &= \alpha_k(f). \end{aligned}$$

En particulier $c_{-k}(f) = c_k(f) = a_k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et donc

$$S_nf(x) = c_0(f) + \sum_{k=1}^n \alpha_k(f)\big(e^{ikx} + e^{-ikx}\big) = c_0(f) + 2\sum_{k=1}^n \alpha_k(f)\cos(kx).$$

(ii) Supposons f impaire. On montre comme dans (i) qu'on a

$$c_k(f) = -\frac{i}{\pi}\int_0^\pi f(t)\sin(kt)\,dt = -i\beta_k(f)$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$. En particulier $c_0(f) = 0$ et $c_{-k}(f) = -c_k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; donc

$$S_nf(x) = \sum_{k=1}^n c_k(f)\big(e^{ikx} - e^{-ikx}\big) = 2i\sum_{k=1}^n c_k(f)\sin(kx) = 2\sum_{k=1}^n \beta_k(f)\sin(kx).$$

□

La question centrale. A quelle(s) condition(s) peut-on dire que S_nf "tend vers f", en un (ou plusieurs) sens à préciser ?

2. Un (tout petit) peu d'analyse fonctionnelle

2.1. Des espaces de fonctions. On a déjà défini l'espace $L^1_{2\pi}$. On définit de même l'espace $L^p_{2\pi}$ pour $1 \leqslant p < \infty$: une fonction borélienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est dans $L^p_{2\pi}$ si f est 2π-périodique et si $|f|^p$ est localement intégrable. *On identifie* deux fonctions de $L^p_{2\pi}$ si elles sont égales presque partout. Ainsi,

$$f = 0 \quad \text{dans } L^p_{2\pi} \iff f(t) = 0 \quad \text{pp.}$$

Enfin, on note $\mathcal{C}_{2\pi}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continues et 2π-périodiques.

Pour $f \in L^p_{2\pi}$, on pose

$$\|f\|_p := \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \frac{dt}{2\pi}\right)^{1/p} ;$$

et pour $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, on pose

$$\|f\|_\infty := \sup\big\{|f(t)|;\ t \in [-\pi,\pi]\big\} = \sup\big\{|f(t)|;\ t \in \mathbb{R}\big\}.$$

Fait 1. $L^p_{2\pi}$ et $\mathcal{C}_{2\pi}$ sont des espaces vectoriels, et $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_\infty$ sont des normes sur $L^p_{2\pi}$ et sur $\mathcal{C}_{2\pi}$ respectivement.

Fait 2. Pour tout $1 \leqslant p < \infty$, on a $\mathcal{C}_{2\pi} \subseteq L^p_{2\pi} \subseteq L^1_{2\pi}$ et $\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_p \leqslant \|\cdot\|_\infty$.

Démonstration. L'inclusion $\mathcal{C}_{2\pi} \subseteq L^p_{2\pi}$ et l'inégalité $\|_p \cdot \|_p \leqslant \| \cdot \|_\infty$ sont laissées en exo.

Montrons l'inclusion $L^p_{2\pi} \subseteq L^1_{2\pi}$ et l'inégalité $\| \cdot \|_1 \leqslant \| \cdot \|_p$. Supposons $1 < p < \infty$, et notons q l'exposant conjugué de p. Si $f \in L^p_{2\pi}$ alors, par l'inégalité de Hölder, on a

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \, \frac{dt}{2\pi} \leqslant \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/p} \left(\int_{-\pi}^{\pi} 1^q \, \frac{dt}{2\pi} \right)^{1/q} = \|f\|_p;$$

donc $f \in L^1_{2\pi}$ et $\|f\|_1 \leqslant \|f\|_p$. □

Fait 3. Si $f \in L^1_{2\pi}$, alors

$$|c_k(f)| \leqslant \|f\|_1 \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Micro-exo. □

Exercice 1.1. *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors f est (bornée et)* uniformément continue *sur $\mathbb{R}$.*

On *admettra* le résultat suivant.

Théorème 2.1. *$\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $L^p_{2\pi}$, pour tout $1 \leqslant p < \infty$.*

2.2. Raisonnement par approximation. Le lemme suivant est la base de nombreux "raisonnements par approximation". On l'utilisera plusieurs fois.

Lemme 2.2. *Soient E et F deux espaces vectoriels normés. Soient également $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues, $L_n : E \to F$, et soit $L \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que :*

(i) *il existe un ensemble dense $\mathcal{D} \subseteq E$ tel que $L_n(z) \to L(z)$ pour tout $z \in \mathcal{D}$;*

(ii) *il existe une constante C telle que $\forall n \in \mathbb{N} \; : \; \|L_n\| \leqslant C$.*

Alors on peut conclure que $L_n(u) \to L(u)$ pour tout $u \in E$

Démonstration. Quitte à remplacer L_n par $L_n - L$ (qui vérifie (ii) avec $C' := C + \|L\|$), on peut supposer que $L = 0$.

Soit $u \in E$ quelconque, et soit $\varepsilon > 0$. Comme $\mathcal{D}$ est dense dans E, on peut trouver $z \in \mathcal{D}$ tel que $\|z - u\| \leqslant \varepsilon$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a alors

$$\begin{aligned} \|L_n(u) &= \|L_n(u - z) + L_n(z)\| \\ &\leqslant \|L_n(u - z)\| + \|L_n(z)\| \\ &\leqslant \|L_n\| \, \|u - z\| + \|L_n(z)\| \\ &\leqslant C \, \|z - u\| + \|L_n(z)\| \leqslant C \, \varepsilon + \|L_n(z)\|. \end{aligned}$$

Maintenant, comme $z \in \mathcal{D}$, on sait que $L_n(z) \to 0$; donc on peut trouver un entier N tel que $\|L_n(z)\| \leqslant \varepsilon$ pour tout $n \geqslant N$. On obtient ainsi

$$\forall n \geqslant N \; : \; \|L_n(u)\| \leqslant (C + 1) \, \varepsilon;$$

ce qui montre que $L_n(u) \to 0$. □

3. Convolution

3.1. Définition du produit de convolution.

DÉFINITION 3.1. *Soient $f, g \in L^1_{2\pi}$. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ soit intégrable sur $[-\pi, \pi]$, on pose*

$$f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\frac{dt}{2\pi}\cdot$$

On dit que la fonction (partiellement définie) $f * g$ est la ***convolée*** *de f et g.*

LEMME 3.2. *Si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors $f * g(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ et $f * g \in L^1_{2\pi}$, avec $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \|g\|_1$.*

Démonstration. Comme g est 2π-périodique, il est clair que $f * g(x)$ est bien défini si et seulement si $f * g(x + 2\pi)$ l'est, et qu'on a alors $f * g(x) = f * g(x + 2\pi)$. Donc $f * g$ est 2π-périodique sur son domaine de définition.

Par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(x-t)|\,\frac{dt}{2\pi} \right) \frac{dx}{2\pi} &= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \left(\int_{-\pi}^{\pi} |g(x-t)|\,\frac{dx}{2\pi} \right) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)| \left(\int_{-\pi-t}^{\pi-t} |g(u)|\,\frac{du}{2\pi} \right) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \|g\|_1 \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|\,\frac{dt}{2\pi} \\
&= \|g\|_1 \|f\|_1 < \infty.
\end{aligned}$$

En particulier, on a $\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(x-t)|\,\frac{dt}{2\pi} < \infty$ pour presque tout $x \in [-\pi, \pi]$. Autrement dit, $f * g(x)$ est bien défini pour presque tout $x \in [-\pi, \pi]$; et donc pour presque tout $x \in \mathbb{R}$ par périodicité

Enfin, comme $|f * g(x)| \leqslant \phi(x) := \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(x-t)|\,\frac{dt}{2\pi}$ pp, on a $\int_{-\pi}^{\pi} |f * g(x)|\,\frac{dx}{2\pi} \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} \phi(x)\,\frac{dx}{2\pi} = \|f\|_1 \|g\|_1$; donc $f * g \in L^1_{2\pi}$ et $\|f * g\|_1 \leqslant \|f\|_1 \, \|g\|_1$. □

REMARQUE 1. Si $f \in L^1_{2\pi}$ et $g \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $f * g(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $f * g \in \mathcal{C}_{2\pi}$ avec $\|f * g\|_\infty \leqslant \|f\|_1 \|g\|_\infty$.

Démonstration. Comme g est bornée sur $\mathbb{R}$ et f est intégrable sur $[-\pi, \pi]$, la fonction $t \mapsto f(t)g(x-t)$ est intégrable sur $[-\pi, \pi]$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; autrement dit $f * g(x)$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$. La continuité de $f * g$ découle du théorème de continuité pour les intégrales à paramètre (exo). □

REMARQUE 2. Si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors $f * g = g * f$.

Démonstration. En posant $u := x - t$ et en utilisant la périodicité, on voit que

$$\begin{aligned}
f * g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\frac{dt}{2\pi} &= \int_{-t}^{-t+2\pi} f(x-u)g(u)\,\frac{du}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(x-u)\,\frac{du}{2\pi} = g * f(x).
\end{aligned}$$

□

REMARQUE 3. L'application $(f, g) \mapsto f * g$ est *bilinéaire.*

Démonstration. C'est évident par linéarité de l'intégrale. □

3.2. Fourier et convolution. Le lemme suivant est “évident”, mais on verra qu'il est aussi très important.

LEMME 3.3. *Si $f \in L^1_{2\pi}$, alors $f * e_k = c_k(f)e_k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. C'est clair par définition :

$$f * e_k(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{ik(x-t)}\,\frac{dt}{2\pi} = e^{ikx}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = c_k(f)e_k(x).$$

□

La proposition suivante ne nous servira en fait à rien ; mais il est tout de même important de connaitre ce résultat (“la transformation de Fourier change le produit de convolution en produit ordinaire”).

PROPOSITION 3.4. *Si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors $c_k(f * g) = c_k(f)c_k(g)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Par le théorème de Fubini (exo : vérifier qu'on peut l'appliquer), on a

$$\begin{aligned}
c_k(f * g) &= \int_{-\pi}^{\pi} f * g(x)\, e^{-ikx}\,\frac{dx}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(x-t)\,\frac{dt}{2\pi} \right) e^{-ikx}\,\frac{dx}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} \left(\int_{-\pi}^{\pi} g(x-t)e^{-ik(x-t)}\,\frac{dx}{2\pi} \right) \frac{dt}{2\pi} \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt} \left(\int_{-t-\pi}^{-t+\pi} g(u)e^{-iku}\,\frac{du}{2\pi} \right) \frac{dt}{2\pi} \\
&= c_k(g) \int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{-ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = c_k(g)c_k(f).
\end{aligned}$$

□

3.3. Approximation par convolution.

DÉFINITION 3.5. *Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions de $L^1_{2\pi}$. On dit que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une **suite de Dirac** si elle vérifie les propriétés suivantes.*

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$, *et* $Q_n \geqslant 0$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$;

(ii) *pour tout* δ *vérifiant* $0 < \delta < \pi$, *on a*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} Q_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{-\delta} Q_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

EXEMPLE. Il existe une suite de Dirac (Q_n) formée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on choisit une fonction $q_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $q_n \geqslant 0$, $q_n(t) = 0$ en dehors de $[-2^{-n}, 2^{-n}]$ et $\int_{-\pi}^{\pi} q_n(t)\,dt = 2\pi$, et on prolonge q_n en une fonction 2π-périodique Q_n. Faire un dessin. □

THÉORÈME 3.6. *Soit $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq L^1_{2\pi}$ une suite de Dirac.*

(1) *Si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, alors $Q_n * f \to f$ uniformément quand $n \to \infty$.*

(2) *Si $f \in L^1_{2\pi}$, alors $Q_n * f \to f$ en norme L^1.*

Démonstration. (1) Soit $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Fixons $\varepsilon > 0$; on veut montrer qu'il existe un entier N tel que

$$\forall n \geqslant N\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ |Q_n * f(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon.$$

La 1ère idée est d'écrire $Q_n * f(x) - f(x)$ comme une intégrale. Si $x \in \mathbb{R}$ est quelconque, alors comme $\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} = 1$ par (i), on peut écrire

$$f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi};$$

et par conséquent

$$Q_n * f(x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \big(f(x-t) - f(x)\big) Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi}\cdot$$

La 2ème idée est de découper l'intégrale en 2 parties : celle où la variable t est "petite" et celle où t n'est "pas petit".

De façon précise, comme la fonction f est dans $\mathcal{C}_{2\pi}$, elle est *uniformément continue* sur $\mathbb{R}$. Donc, on peut trouver $\delta > 0$, avec $\delta < \pi$ si on veut, tel que

$$|u - v| \leqslant \delta \implies |f(u) - f(v)| \leqslant \varepsilon.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$ quelconques, on écrit alors

$$Q_n * f(x) - f(x) = \int_{|t| \leqslant \delta} \big(f(x-t) - f(x)\big) Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta < |t| \leqslant \pi} \big(f(x-t) - f(x)\big) Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi};$$

et comme $Q_n \geqslant 0$, on en déduit

$$\begin{aligned} |Q_n * f(x) - f(x)| &\leqslant \int_{|t| \leqslant \delta} \varepsilon\, Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} + \int_{\delta < |t| \leqslant \pi} 2\|f\|_\infty\, Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} \\ &\leqslant \varepsilon \int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} + 2\|f\|_\infty \int_{\delta < |t| \leqslant \pi} Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} \\ &\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{\delta < |t| \leqslant \pi} Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} \quad \text{par (i).} \end{aligned}$$

Cette majoration est valable pour tout $x \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$. Maintenant, par (ii) on peut trouver un entier N tel que

$$\forall n \geqslant N\ :\ 2\|f\|_\infty \int_{\delta < |t| \leqslant \pi} Q_n(t)\, \frac{dt}{2\pi} \leqslant \varepsilon.$$

Ainsi, on obtient

$$\forall n \geqslant N\ \forall x \in \mathbb{R}\ :\ |Q_n * f(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon;$$

donc on obtient ce qu'on voulait en démarrant avec $\varepsilon/2$ au lieu de ε.

(2) La preuve est un exemple typique de "raisonnement par approximation".

On veut montrer que $Q_n * f \to f$ dans $L^1_{2\pi}$ pour toute $f \in L^1_{2\pi}$; et comme $\|\cdot\|_1 \leqslant \|\cdot\|_\infty$, on sait déjà par (1) que c'est vrai lorsque $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$. Considérons alors les applications *linéaires* $L_n : L^1_{2\pi} \to L^1_{2\pi}$ et $L : L^1_{2\pi} \to L^1_{2\pi}$ définies par

$$L_n(f) := Q_n * f \qquad \text{et} \qquad L(f) := f.$$

Comme $\|Q_n * f\|_1 \leqslant \|f\|_1\, \|Q_n\|_1 = \|f\|_1$ par (i), les L_n sont continues et $\|L_n\| \leqslant 1$ pour tout n ; et bien sûr L est continue aussi. De plus, $L_n(\varphi) \to L(\varphi)$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}_{2\pi}$ par (1). Comme $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $L^1_{2\pi}$, on peut donc conclure grâce au Lemme 2.2 que $L_n(f) \to L(f)$ pour toute $f \in L^1_{2\pi}$; ce qu'on voulait. □

Corollaire 3.7. *Soit* $\mathcal{C}^1_{2\pi} := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *2π-périodiques et de classe* $\mathcal{C}^1\}$. *Alors* $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ *est dense dans* $L^1_{2\pi}$.

Démonstration. On choisit une suite de Dirac (Q_n) formée de fonctions $\mathcal{C}^1$. Si $f \in L^1_{2\pi}$ est quelconque, alors les fonctions $Q_n * f$ sont $\mathcal{C}^1$: en effet, on a $Q_n * f(x) = f * Q_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) Q_n(x-t)\, \frac{dt}{2\pi}$, donc on peut appliquer le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres (exo). Comme $Q_n * f \to f$ en norme L^1 par le Théorème 3.6, on voit donc que pour toute $f \in L^1_{2\pi}$, on peut trouver une suite $(f_n) \subseteq \mathcal{C}^1_{2\pi}$ telle que $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f$. □

3.4. Illustration : le “Lemme de Riemann-Lebesgue”.

Proposition 3.8. *Pour toute fonction* $f \in L^1_{2\pi}$, *on a* $\lim_{k\to\pm\infty} c_k(f) = 0$.

Démonstration. On raisonne “par approximation”.

Cas 1. On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^1$.

Dans ce cas, on utilise une intégration par parties. Si $k \neq 0$, alors

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} dt \\ &= \left[f(t) \times \frac{1}{-ik}\, e^{-ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) e^{-ikt} dt \\ &= \frac{2\pi}{ik}\, c_k(f'). \end{aligned}$$

Donc $|c_k(f)| \leqslant \frac{1}{|k|}\, |c_k(f')| \leqslant \frac{1}{|k|}\, \|f'\|_1$, et donc $c_k(f) \to 0$ quand $k \to \pm\infty$.

Cas général. On montre le résultat pour toute $f \in L^1_{2\pi}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$, soit $L_k : L^1_{2\pi} \to \mathbb{C}$ la *forme linéaire* définie par

$$L_k(f) := c_k(f).$$

Comme $|c_k(f)| \leqslant \|f\|_1$ pour toute $f \in L^1_{2\pi}$, les L_k sont continues avec $\|L_k\| \leqslant 1$ pour tout k. De plus, $L_k(\varphi) \to 0$ pour toute $\varphi \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$ par le Cas 1. Comme $\mathcal{C}^1_{2\pi}$ est dense dans $L^1_{2\pi}$, on peut donc conclure grâce au Lemme 2.2 que $L_k(f) \to 0$ pour toute $f \in L^1_{2\pi}$; ce qu'on voulait. □

Remarque. Il est important de se souvenir que si f est une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$c_k(f) = \frac{1}{ik}\, c_k(f') \qquad \text{pour tout } k \neq 0; \tag{3.1}$$

et que cette formule s'obtient en faisant une intégration par parties.

4. Théorème de Fejér

4.1. L'énoncé et ses conséquences. Si $f \in L^1_{21\pi}$, on pose pour tout $N \in \mathbb{N}$:

$$\sigma_N f(x) := \frac{1}{N+1} \sum_{n=0}^{N} S_n f(x).$$

Théorème 4.1. (Théorème de Fejér)

(1) *Si* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$, *alors* $\sigma_N f(x) \to f(x)$ *uniformément sur* $\mathbb{R}$ *quand* $N \to \infty$.

(2) *Si* $f \in L^1_{2\pi}$, *alors* $\sigma_N f \to f$ *en norme* L^1.

Corollaire 4.2. *Les coefficients de Fourier* déterminent la fonction *: si* $f, g \in L^1_{2\pi}$ *vérifient* $c_k(f) = c_k(g)$ *pour tout* $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $f = g$.

Démonstration. Soit $u := f - g$. Par linéarité, on a $c_k(u) = 0$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, et on veut montrer que $u = 0$. Mais c'est évident par Fejér : comme $c_k(u) = 0$ pour tout k, on a $S_n u = 0$ pour tout n, donc $\sigma_N u = 0$ pour tout N, et donc $u(t) = 0$ pp puisque $\sigma_N u \to u$ en norme L^1. □

Corollaire 4.3. *Les polynômes trigonométriques sont denses dans* $\mathcal{C}_{2\pi}$ *et dans* $L^p_{2\pi}$, $1 \leqslant p < \infty$ *pour les normes respectives de ces espaces.*

Démonstration. Pour $\mathcal{C}_{2\pi}$ et $L^1_{2\pi}$, c'est immédiat par Fejér puisque les $\sigma_N f$ sont des polynômes trigonométriques pour toute $f \in L^1_{2\pi}$. Pour $L^p_{2\pi}$, $1 < p < \infty$, on peut raisonner comme suit. Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble des polynômes trigonométriques. Comme $\|u\|_p \leqslant \|u\|_\infty$ pour toute $u \in \mathcal{C}_{2\pi}$ et comme $\mathcal{P}$ est dense dans $\mathcal{C}_{2\pi}$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, on voit que l'adhérence de $\mathcal{P}$ dans $L^p_{2\pi}$ contient $\mathcal{C}_{2\pi}$; et comme $\mathcal{C}_{2\pi}$ est dense dans $L^p_{2\pi}$ par le Théorème 2.1, on en déduit que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^p_{2\pi}$. □

Corollaire 4.4. *Soit* $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ *et soit* $t \in \mathbb{R}$. *Si* $S_n f(t)$ *admet une limite quand* $n \to \infty$, *alors cette limite est nécessairement égale à* $f(t)$.

Démonstration. Notons L la limite de $S_n f(t)$. Par le **théorème de Cesàro**, $\sigma_N f(t) = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^N S_n f(t)$ tend vers L quand $N \to \infty$; donc $L = f(t)$ par Fejér. □

Exercice. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Montrer que pour tout $N \geqslant 0$, on a

$$\sigma_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k(f) e^{ikx}.$$

4.2. Preuve du Théorème de Fejér. Le preuve du Théorème de Fejér repose sur les trois lemmes suivants.

Lemme 4.5. *Soit* $f \in L^1_{2\pi}$.

(1) *Pour tout* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$S_n f = f * D_n \qquad \text{où} \quad D_n := \sum_{k=-n}^{n} e_k.$$

(2) *Pour tout* $N \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\sigma_N f = f * K_N \qquad \text{où} \quad K_N := \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} D_n.$$

Démonstration. (1) Par linéarité,

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)\, e_k = \sum_{k=-n}^{n} f * e_k = f * \Big(\sum_{k=_n}^{n} e_k\Big).$$

(2) Même preuve, en utilisant (1). □

DÉFINITION 4.6. *La fonction D_n s'appelle le* ***noyau de Dirichlet*** *de degré n, et la fonction K_N s'appelle le* ***noyau de Fejér*** *de degré N.*

LEMME 4.7. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$D_n(t) = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)};$$

et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$K_N(t) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\left((N+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Remarque. Pour $t \in 2\pi\mathbb{Z}$ il faut lire $D_n(t) = 2n+1$ et $K_N(t) = N+1$.

Preuve du lemme. Tout repose sur le Fait suivant.

FAIT. Si $t \in \mathbb{R}\backslash 2\pi\mathbb{Z}$ et $M \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{m=0}^{M} e^{imt} = e^{iM\frac{t}{2}} \frac{\sin\left((M+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Preuve du Fait. Comme $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$, on a $e^{it} \neq 1$, donc on peut écrire

$$\sum_{m=0}^{M} e^{imt} = \frac{1-e^{i(M+1)t}}{1-e^{it}}.$$

Puis on "traffique" $\frac{1-e^{i(M+1)t}}{1-e^{it}}$ pour faire apparaitre les sinus :

$$\begin{aligned} \frac{1-e^{i(M+1)t}}{1-e^{it}} &= \frac{e^{i(M+1)\frac{t}{2}}}{e^{i\frac{t}{2}}} \times \frac{e^{-i(M+1)\frac{t}{2}} - e^{i(M+1)\frac{t}{2}}}{e^{-i\frac{t}{2}} - e^{i\frac{t}{2}}} \\ &= e^{iM\frac{t}{2}} \times \frac{-2i\sin\left((M+1)\frac{t}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{t}{2}\right)}; \end{aligned}$$

d'où le résultat. □

En appliquant le Fait avec $M := 2n$, on trouve (pour $t \notin 2\pi\mathbb{Z}$)

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = e^{-int} \sum_{m=0}^{2n} e^{imt} = e^{-int} \times e^{int} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

ce qui est la formule souhaitée pour $D_n(t)$.

Ensuite, on écrit

$$(N+1)K_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)} \operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{i(2n+1)\frac{t}{2}}\right).$$

En appliquant le Fait avec $M := N$, on trouve

$$\sum_{n=0}^{N} e^{i(2n+1)\frac{t}{2}} = e^{i\frac{t}{2}} \sum_{n=0}^{N} e^{int} = e^{i(N+1)\frac{t}{2}} \frac{\sin\left((N+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

Donc

$$\operatorname{Im}\left(\sum_{n=0}^{N} e^{i(n+\frac{1}{2})t}\right) = \frac{\sin^2\left((N+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)},$$

ce qui donne la formule pour $K_N(t)$. □

Lemme 4.8. *La suite $(K_N)_{N\geqslant 0}$ est une suite de Dirac. Autrement dit, les noyaux de Fejér K_N possèdent les propriétés suivantes :*

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$ *et* $K_N \geqslant 0$ *pour tout* $N \in \mathbb{N}$;

(ii) *pour tout* δ *vérifiant* $0 < \delta < \pi$, *on a*

$$\lim_{N\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} K_N(t)dt = 0 = \lim_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{-\delta} K_N(t)\,dt.$$

Démonstration. (i) Par le Lemme 4.7, K_N est bien une fonction *positive*. De plus, $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc $\int_{-\pi}^{\pi} K_N(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N} \int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$.

(ii) Comme K_N est une fonction paire (par définition, ou par le Lemme 4.7), il suffit de considérer $\int_{\delta}^{\pi} K_N(t)\,dt$. Si $\delta \leqslant t \leqslant \pi$, alors $\sin^2(t/2) \geqslant \sin^2(\delta/2)$. Donc, par le Lemme 4.7,

$$0 \leqslant \int_{\delta}^{\pi} K_N(t)\,dt \leqslant \frac{1}{N+1}\int_{\delta}^{\pi} \frac{1}{\sin^2(\delta/2)} \leqslant \frac{C_\delta}{N+1} \qquad \text{où } C_\delta = \tfrac{\pi-\delta}{\sin^2(\delta/2)};$$

ce qui montre que $\int_{\delta}^{\pi} K_N \to 0$ quand $N \to \infty$. □

Preuve du Théorème de Fejér. Par le Lemme 4.5, on a $\sigma_N f = f * K_N = K_N * f$ pour toute $f \in L^1_{2\pi}$; et par le Lemme 4.8, la suite $(K_N)_{N\geqslant 0}$ est une suite de Dirac. Donc il suffit d'appliquer le Théorème 3.6. □

5. Théorie "L^2"

5.1. Structure hilbertienne de $L^2_{2\pi}$.

Fait 5.1. *On a "$L^2_{2\pi} \cdot L^2_{2\pi} \subseteq L^1_{2\pi}$" : si $f, g \in L^2_{2\pi}$, alors $fg \in L^1_{2\pi}$.*

Démonstration. On a $|fg| \leqslant \frac{1}{2}(|f|^2 + |g|^2)$; donc $|fg|$ est localement intégrable puisque $|f|^2$ et $|g|^2$ le sont. □

Notation. Pour $f, g \in L^2_{2\pi}$, on pose

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,\frac{dt}{2\pi}.$$

Cela a bien un sens car $f\overline{g} \in L^1_{2\pi}$ d'après le Fait 5.1.

Fait 5.2. $\langle\cdot,\cdot\rangle$ *est un* ***produit scalaire*** *sur* $L^1_{2\pi}$, *et la norme* $\|\cdot\|_2$ *provient de ce produit scalaire : si* $f \in L^2_{2\pi}$, *alors*

$$\|f\|_2 = \sqrt{\langle f, f\rangle}.$$

*En particulier, on a l'****inégalité de Cauchy-Schwarz*** *: si* $f, g \in L^2_{2\pi}$, *alors*

$$|\langle f, g\rangle| \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2.$$

Démonstration. Exo. □

Remarque. Si on applique Cauchy-Schwarz avec $|f|$ et $|g|$ plutôt que f et g, on obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(t)|\,\frac{dt}{2\pi} \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2,$$

autrement dit

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\,\|g\|_2.$$

LEMME 5.3. *La famille* $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est* ***orthonormale*** *pour le produit scalaire* $\langle\cdot,\cdot\rangle$. *Autrement dit :*

$$\|e_k\|_2 = 1 \quad \textit{pour tout } k \qquad \text{et} \qquad \langle e_k, e_l\rangle = 0 \quad \textit{si } k \neq l.$$

Démonstration. On a $\|e_k\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |e^{ikt}|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{dt}{2\pi} = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$; et $\langle e_k, e_l\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-l)t} \frac{dt}{2\pi} = \left[\frac{1}{2\pi i(k-l)} e^{i(k-l)t}\right]_{-\pi}^{\pi} = 0$ si $k \neq l$ par périodicité. □

COROLLAIRE 5.4. *Pour tout polynôme trigonométrique* $P(t) = \sum_{k\in\Lambda} c_k e^{ikt}$, *on a*

$$\|P\|_2^2 = \sum_{k\in\Lambda} |c_k|^2.$$

Démonstration. Comme les vecteurs $c_k e_k$ sont deux à deux orthogonaux dans $L^2_{2\pi}$, on a $\|P\|_2^2 = \|\sum_{k\in\Lambda} c_k e_k\|_2^2 = \sum_{k\in\Lambda} \|c_k e_k\|_2^2$ par le **Théorème de Pythagore** ; d'où le résultat puisque $\|e_k\|_2 = 1$ pour tout k. □

5.2. Signification géométrique de la série de Fourier.

FAIT 5.5. *Si* $f \in L^1_{2\pi}$, *on a pour tout* $k \in \mathbb{Z}$ *:*

$$c_k(f) = \langle f, e_k\rangle.$$

Démonstration. Par définition. □

NOTATION. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on note $\mathcal{P}_n$ l'ensemble des polynômes trigonométriques **de degré** $\leqslant n$, *i.e.* les polynômes trigonométriques P de la forme

$$P(t) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikt}.$$

Autrement dit :

$$\mathcal{P}_n = \mathrm{Vect}\,(e_{-n}, \dots, e_0, \dots e_n) = \mathrm{Vect}\,(e_k)_{k=-n}^{n}.$$

LEMME 5.6. *Si* $f \in L^2_{2\pi}$, *alors, pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $S_n f$ *est le* ***projeté orthogonal*** *de* f *sur* $\mathcal{P}_n$. *Autrement dit, on a*

$$S_n f \in \mathcal{P}_n \qquad \text{et} \qquad \langle f - S_n, Q\rangle = 0 \quad \textit{pour tout } Q \in \mathcal{P}_n.$$

Démonstration. Comme la famille $(e_k)_{k=-n}^{n}$ est orthonormale et engendre $\mathcal{P}_n$, c'est une *base orthonormée* de $\mathcal{P}_n$. De plus, on a par le Fait 5.5 :

$$S_n f = \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle\, e_k;$$

donc on reconnait la formule "bien connue" pour le projeté orthogonal. □

COROLLAIRE 5.7. *On a* $\|f - S_n f\|_2 \leqslant \|f - P\|_2$ *pour tout* $P \in \mathcal{P}_n$.

Démonstration. Comme $(f - S_n f) \perp \mathcal{P}_n$, on a $(f - S_n f) \perp (S_n f - P)$, et donc par Pythagore :

$$\|f - P\|_2^2 = \|(f - S_n f) + (S_n f - P)\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f - P\|_2^2.$$

En particulier, $\|f - P\|_2^2 \geqslant \|S_n f - P\|_2^2$. □

Terminologie. Si $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est une suite de nombres réels positifs indexée par $\mathbb{Z}$, on pose

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k;$$

limite qui existe dans $[0,\infty]$ car la suite $A_n := \sum_{k=-n}^{n} \alpha_k$ est croissante. On dit que *la série* $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k$ *est convergente* si on a $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k < \infty$.

Exercice. Si la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} \alpha_k$ est convergente, alors $\alpha_k \to 0$ quand $k \to \pm\infty$.

Corollaire 5.8. *Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors la série $\sum_{k\in\mathbb{Z}} |c_k(f)|^2$ est convergente ; et de plus, on a l'**inégalité de Bessel***

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2.$$

Démonstration. Par Pythagore, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\|f\|_2^2 = \|f - S_n f\|_2^2 + \|S_n f\|_2^2.$$

Donc

$$\sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2 = \|S_n f\|^2 \leqslant \|f\|_2^2 \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N};$$

et donc $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 \leqslant \|f\|_2^2 < \infty$. □

Remarque. L'inégalité de Bessel montre en particulier que si $f \in L^2_{2\pi}$, alors $c_k(f) \to 0$ quand $k \to \pm\infty$. En raisonnant "par approximation", on peut alors en déduire le Lemme de Riemann-Lebesgue (*i.e.* la même conclusion en supposant seulement que $f \in L^1_{2\pi}$).

5.3. Le Théorème de Parseval.

Théorème 5.9. *Si $f \in L^2_{2\pi}$, alors la série de Fourier de f "converge vers f en norme L^2" ; autrement dit*

$$\|S_n f - f\|_2 \to 0 \qquad \textit{quand } n \to \infty.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Comme les polynômes trigonométriques sont denses dans $L^2_{2\pi}$ pour la norme L^2, on peut trouver un polynôme trigonométrique P tel que $\|f - P\|_2 < \varepsilon$. Alors $P \in \mathcal{P}_N$ pour un certain entier N, et on a donc $P \in \mathcal{P}_n$ pour tout $n \geqslant N$. Comme $S_n f$ est le projeté orthogonal de f sur $\mathcal{P}_n$, on en déduit

$$\|S_n f - f\|_2 \leqslant \|P - f\|_2 < \varepsilon \qquad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

□

Corollaire 5.10. *Pour toute $f \in L^2_{2\pi}$, on a la **formule de Parseval***

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \, \frac{dt}{2\pi}.$$

Démonstration. Par le Théorème 5.9, $\|S_n f\|_2 \to \|f\|_2$ quand $n \to \infty$. Donc

$$\|f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \|S_n f\|_2^2 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} |c_k(f)|^2.$$

□

Exemple. On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$

Démonstration. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f(t) = t \qquad \text{pour} \quad -\pi \leqslant t < \pi.$$

La fonction f est continue sur $[-\pi, \pi[$ et bornée sur $[-\pi, \pi]$, donc $f \in L^2_{2\pi}$.

On a $c_0(f) = \int_{-\pi}^{\pi} t \, \frac{dt}{2\pi} = 0$ car f est impaire sur $]-\pi, \pi[$. Pour $k \neq 0$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f) &= \int_{-\pi}^{\pi} te^{-ikt}\, dt \\ &= \left[t \times \frac{-1}{ik} e^{-ikt} \right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{ik} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} dt \\ &= 2 \times \frac{(-1)^{k+1}\pi}{ik}; \end{aligned}$$

donc $c_k(f) = \frac{(-1)^{k+1}}{ik}$ et $|c_k(f)|^2 = \frac{1}{k^2}$ pour tout $k \neq 0$.

Par la formule de Parseval, on a donc

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2} = \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 \frac{dt}{2\pi} = \int_{-\pi}^{\pi} t^2 \frac{dt}{2\pi},$$

autrement dit

$$2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{2\pi} \times \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2\pi} \times 2\,\frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{3}\cdot$$

□

6. Convergence normale

Définition 6.1. *Soit $(f_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une suite de fonctions bornées indexée par $\mathbb{Z}$, avec $f_k : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que **la série** $\sum f_k$ **converge normalement sur** $\mathbb{R}$ si on a $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|f_k\|_\infty < \infty$; autrement dit, s'il existe une suite de réels positifs $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que*

$$|f_k(t)| \leqslant \alpha_k \quad \textit{pour tout } t \in \mathbb{R} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k < \infty.$$

Remarque 1. Si la série $\sum f_k$ converge normalement sur $\mathbb{R}$, alors la suite des sommes partielles symétriques $S_n = \sum_{k=-n}^{n} f_k$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. On vérifie (exo) que la suite (S_n) est de Cauchy dans l'espace des fonctions bornées $(\ell^\infty(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, qui est complet . □

Remarque 2. Une série de la forme $\sum c_k e^{ikt}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$ si et seulement si la série $\sum |c_k|$ est convergente.

Démonstration. C'est évident. □

RAPPEL. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. On dit que f est **de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux** sur un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ s'il existe une subdivision $(s_0, \dots, s_N)$ de $[a, b]$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $]s_j, s_{j+1}[$, $0 \leqslant j \leqslant N-1$ et f' admet une limite à droite en s_j et une limite à gauche en s_{j+1}. (Faire un dessin).

Remarque. La fonction f n'est pas forcément *continue* sur $[a, b]$. Mais si elle l'est, et si $(s_0, \dots, s_N)$ est comme plus haut, alors f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle fermé $[s_j, s_{j+1}]$.

Le résultat suivant s'appelle parfois le **Théorème de Dirichlet**. On pourrait aussi l'appeler le "Théorème de convergence normale pour les séries de Fourier".

THÉORÈME 6.2. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique. Si f est* continue sur $\mathbb{R}$ *et de classe $\mathcal{C}^1$* par morceaux sur $[-\pi, \pi]$, *alors la série de Fourier de f converge normalement vers f. Autrement dit, on peut écrire*

$$\forall t \in \mathbb{R} \;:\; f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikt},$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Démonstration. Dans ce qui suit, on posera $f'(t) = \cdots f'(t)$ en tout point t où f est dérivable, et $f'(t) = 0$ en tout point t où f n'est pas dérivable.

FAIT 0. La fonction f' est *continue par morceaux* sur $[-\pi, \pi]$; et donc $f' \in L^2_{2\pi}$.

FAIT 1. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $c_k(f') = ikc_k(f)$.

Preuve du Fait 1. Comme f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut trouver une subdivision $(s_0, \dots, s_N)$ de $[-\pi, \pi]$ telle que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque intervalle $[s_j, s_{j+1}]$, $0 \leqslant j \leqslant N-1$. Alors

$$c_k(f') = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f'(t) e^{-ikt} dt.$$

De plus comme f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur chaque $[s_j, s_{j+1}]$, on peut intégrer par parties :

$$\int_{s_j}^{s_{j+1}} f'(t) e^{-ikt} dt = \Big[f(t) e^{-ikt} \Big]_{s_j}^{s_{j+1}} + \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t) \times ike^{-ikt} dt.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} c_k(f') &= \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \Big[f(t) e^{-ikt} \Big]_{s_j}^{s_{j+1}} + \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{s_j}^{s_{j+1}} f(t) \times ike^{-ikt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \Big[f(t) e^{-ikt} \Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \times ike^{-ikt} dt. \end{aligned}$$

De plus $\big[f(t) e^{-ikt} \big]_{-\pi}^{\pi} = 0$ par 2π-périodicité ; donc

$$c_k(f') = ik \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-ikt} \frac{dt}{2\pi} = ik\, c_k(f).$$

□

FAIT 2. La série $\sum c_k(f)e^{ikt}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Preuve du Fait 2. Par le Fait 1, on a $c_k(f) = \frac{1}{ik}\, c_k(f')$ pour tout $k \neq 0$, donc

$$|c_k(f)| = \frac{1}{|k|}\, |c_k(f')| \leqslant \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{k^2} + |c_k(f')|^2\Big);$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k| &\leqslant |c_0(f)|^2 + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}\frac{1}{k^2} + \frac{1}{2}\sum_{k\neq 0}|c_k(f')|^2\\ &< \infty \qquad \text{par l'inégalité de Bessel pour } f'.\end{aligned}$$

□

Remarque. De cette preuve, il importe retenir la chose suivante : si (a_k) et (b_k) sont deux suites de nombres complexes telles que les séries $\sum |a_k|^2$ et $\sum |b_k|^2$ sont convergentes, alors la série $\sum a_k b_k$ est absolument convergente. Pour faire court :

$$\ell^2 \cdot \ell^2 \subseteq \ell^1.$$

FAIT 3. On a $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikt} = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Preuve du Fait 3. Comme f est continue, cela découle du Corollaire 4.4.

On peut aussi raisonner comme suit. Posons $\widetilde{f}(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikt}$. Par convergence uniforme de la série $\sum c_k(f)e^{ikt}$, la fonction $\widetilde{f}$ est continue (et 2π-périodique), et on a $c_k(\widetilde{f}) = c_k(f)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$ d'après le Lemme 1.3 ; donc $\widetilde{f} = f$ par le Corollaire 4.2.

□

Par les Faits 2 et 3, la preuve du théorème est maintenant terminée. □

7. Convergence ponctuelle

DÉFINITION 7.1. *Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. On dit que la fonction f est* ***régulière au point*** *x_0 si*

- *f admet une limite à gauche et une limite à droite en x_0 ;*
- *la fonction f_+ définie par $f_+(x) = f(x)$ pour $t > x_0$ et $f_+(x_0) = f(x_0^+)$ est dérivable à droite en x_0,*
- *la fonction f_- définie par $f_-(x) = f(x)$ pour $t < x_0$ et $f_-(x_0) = f(x_0^-)$ est dérivable à gauche en x_0.*

EXEMPLE. Si f est de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux au voisinage de x_0, *i.e.* $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < x_0 < b$, alors f est régulière au point x_0.

Le résultat suivant est parfois appelé le **Théorème de Jordan-Dirichlet**. On pourrait aussi l'appeler le “Théorème de convergence ponctuelle” (pour les séries de Fourier).

THÉORÈME 7.2. *Soit $f \in L^1_{2\pi}$, et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f est régulière au point x_0, alors*

$$S_n f(x_0) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2};$$

autrement dit, on peut écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx_0} = \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2}.$$

En particulier, si f *est* continue *en* x_0 *et* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux au voisinage de* x_0*, alors*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)e^{ikx_0} = f(x_0).$$

Démonstration.

FAIT 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n f(x_0) - \frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \int_0^{\pi} D_n(t)\phi(t)\,\frac{dt}{2\pi},$$

où D_n est le noyau de Dirichlet et

$$\phi(t) := \big(f(x_0+t) - f(x_0^+)\big) + \big(f(x_0-t) - f(x_0^-)\big).$$

Preuve du Fait 1. On sait par le Lemme 4.5 que

$$S_n f(x_0) = f * D_n(x_0) = D_n * f(x_0) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x_0 - t)D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}.$$

De plus, $D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e_k(t)$ est visiblement une fonction *paire*. Donc

$$\int_{-\pi}^{0} f(x_0-t)D_n(t)\,dt = \int_0^{\pi} f(x_0+t)D_n(t)\,dt;$$

et par conséquent

$$S_n f(x_0) = \int_0^{\pi} \big(f(x_0-t) + f(x_0+t)\big)\, D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}. \tag{7.1}$$

Par ailleurs, comme D_n est paire et $\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \sum_{k=-n}^{n} \int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,\frac{dt}{2\pi} = 1$, on a

$$\int_0^{\pi} D_n(t)\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi} = \frac{1}{2}.$$

Donc on peut écrire $\frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} = (f(x_0^+) + f(x_0^-) \times \int_0^{\pi} D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}$, ou encore

$$\frac{f(x_0^+) + f(x_0^-)}{2} = \int_0^{\pi} \big(f(x_0^+) + f(x_0^-)\big)\, D_n(t)\,\frac{dt}{2\pi}. \tag{7.2}$$

En combinant (7.1) et (7.2), on obtient l'identité cherchée. □

FAIT 2. La fonction $h : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ définie par

$$h(0) := 0 \qquad \text{et} \qquad h(t) := \frac{\phi(t)}{\sin(\frac{t}{2})} \quad \text{pour } 0 < t \leqslant \pi$$

est intégrable sur $[0,\pi]$.

Preuve du Fait 2. Comme h est visiblement borélienne, il suffit de montrer qu'elle est *bornée* sur $[0,\pi]$.

Comme f est régulière en x_0, on sait que $\frac{f(x)-f(x_0^+)}{x-x_0}$ admet une limite quand $x \to x_0^+$ et que $\frac{f(x)-f(x_0^-)}{x-x_0}$ admet une limite quand $x \to x_0^-$; autrement dit, $\frac{f(x_0+t)-f(x_0^+)}{t}$ et $\frac{f(x_0-t)-f(x_0^-)}{t}$ admettent des limites finies quand $t \to 0^+$. Donc $\frac{\phi(t)}{t}$ admet une limite finie quand $t \to 0^+$; et en particulier $\frac{\phi(t)}{t}$ est *borné* au voisinage de 0^+. On peut donc trouver $\delta > 0$ et une constante C tels tel que $|\phi(t)| \leqslant C\,t$ sur $]0,\delta]$. Par ailleurs, on a également $\sin(\frac{t}{2}) \geqslant \frac{2}{\pi} \times \frac{t}{2} = \frac{t}{\pi}$ sur $[0,\pi]$ car $\sin(u) \geqslant \frac{2}{\pi}u$ sur $[0,\pi/2]$. Donc on obtient

$$|h(t)| \leqslant Ct \times \frac{\pi}{t} = \pi C \qquad \text{pour } 0 < t \leqslant \delta.$$

Ainsi, h est bornée sur $]0,\delta]$, et donc bornée sur $[0,\delta]$. Comme h est également bornée sur $[\delta,\pi]$ (car f est bornée et la fonction $t \mapsto 1/\sin(\frac{t}{2})$ est continue sur $[\delta,\pi]$), on en déduit que h est bornée sur $[0,\pi]$. □

On peut maintenant démontrer le théorème. Soit h la fonction définie dans le Fait 2. Par le Fait 1 et comme

$$D_n(t)\phi(t) = \frac{\sin\big((2n+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin(\frac{t}{2})}\,\phi(t) = \sin\Big((2n+1)\frac{t}{2}\Big)\,h(t) \quad \text{si } 0 < t \leqslant \pi,$$

on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} S_nf(x_0) - \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2} &= \int_0^{\pi} \sin\Big((2n+1)\frac{t}{2}\Big)\,h(t)\,\frac{dt}{2\pi} \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\big((2n+1)u\big)\,h(2u)\frac{dt}{2\pi}\cdot \end{aligned}$$

De plus, par le Fait 2 la fonction 2π-périodique $\widetilde{h}$ définie par $\widetilde{h}(u) = h(2u)$ sur $[0,\frac{\pi}{2}]$ et $\widetilde{h}(u) = 0$ sur $]\frac{\pi}{2},2\pi]$ appartient à $L^1_{2\pi}$. Par le *Lemme de Riemann-Lebesgue*, on en déduit que $S_nf(x_0) - \frac{f(x_0^+)+f(x_0^-)}{2}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$; ce qui termine la démonstration. □

Corollaire 7.3. *Soient $f,g \in L^1_{2\pi}$ et soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si f et g coïncident au voisinage de x_0, alors $S_nf(x_0)$ admet une limite quand $n \to \infty$ si et seulement si $S_ng(x_0)$ en admet une, et dans ce cas $\lim_{n\to\infty} S_nf(x_0) = \lim_{n\to\infty} S_ng(x_0)$. (Ce résultat porte le nom de* ***principe de localisation****.)*

Démonstration. La fonction $\phi := g - f$ est identiquement nulle au voisinage de x_0, donc certainement régulière au point x_0 avec $\phi(x_0^-) = 0 = \phi(x_0^+)$. Donc $S_n\phi(x_0) \to 0$ quand $n \to \infty$, autrement dit $S_ng(x_0) - S_nf(x_0) \to 0$. Le résultat s'en déduit immédiatement. □

Exemple 1. On a les formules suivantes :

$$\forall t \in\,]-\pi,\pi[\ :\ \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\,\frac{\sin(kt)}{k} = \frac{t}{2},$$

et

$$\forall x \in\,]0,2\pi[\ :\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}\cdot$$

Démonstration. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(t)=t \qquad \text{pour } t\in[-\pi,\pi[\,.$$

La fonction f est visiblement régulière en tout point (mais pas continue), et continue sur $]-\pi,\pi[$. De plus, f est *impaire* sur $]-\pi,\pi[$. D'après le Théorème 7.2 et la Remarque 1.5, on a donc

$$2\sum_{k=1}^{\infty}\beta_k(f)\sin(kt)=t \qquad \text{pour tout } t\in\,]-\pi,\pi[.$$

Le calcul des coefficients $\beta_k(f)$ est facile en intégrant par parties :

$$\begin{aligned}\beta_k(f)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}t\sin(kt)\,dt&=\left[-\frac{1}{k\pi}\,t\cos(kt)\right]_0^{\pi}+\frac{1}{k\pi}\int_0^{\pi}\cos(kt)\,dt\\&=\frac{(-1)^{k+1}}{k}+0.\end{aligned}$$

(On pouvait aussi dire qu'on a déjà vu au cours du calcul de $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$ que $c_k(f)=\frac{(-1)^{k+1}}{ik}$, et que $\beta_k(f)=-\frac{1}{i}\,c_k(f)$.) On obtient ainsi

$$\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin(kt)}{k}=\frac{t}{2} \qquad \text{pour } t\in\,]-\pi,\pi[.$$

Si maintenant on prend $x\in\,]0,2\pi[$ et $t:=\pi-x$, alors $\sin(kt)=(-1)^{k+1}\sin(kx)$ pour tout $k\geqslant 1$; et comme $t\in\,]-\pi,\pi[$, on en déduit

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin(kx)}{k}=\frac{\pi-x}{2} \qquad \text{pour } x\in\,]0,2\pi[.$$

□

EXEMPLE 2. Pour tout $a\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}$, on a

$$\pi\cot(\pi a)=\frac{1}{a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-k^2}.$$

Démonstration. Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique telle que

$$f(t)=e^{iat} \qquad \text{pour } t\in[0,2\pi[\,.$$

La fonction f est régulière au point $x_0=0$, avec $f(0^+)=1$ et $f(0^-)=f(2\pi^-)=e^{2i\pi a}$. Donc on peut écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k(f)=\frac{1+e^{2i\pi a}}{2}=e^{i\pi a}\cos(\pi a). \tag{7.3}$$

Par ailleurs, les $c_k(f)$ sont faciles à calculer : comme $a\notin\mathbb{Z}$, on a

$$c_k(f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{iat}e^{-ikt}dt=\left[\frac{1}{i(a-k)}e^{i(a-k)t}\right]_0^{2\pi}=\frac{1}{2i\pi(a-k)}\left(e^{2i\pi a}-1\right);$$

et comme $e^{2i\pi a}-1=e^{i\pi a}\left(e^{i\pi a}-e^{-i\pi a}\right)=e^{i\pi a}\times 2i\sin(\pi a)$, cela peut encore s'écrire

$$c_k(f)=\frac{e^{i\pi a}\sin(\pi a)}{\pi(a-k)}.$$

On a donc pour tout $n \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\sum_{k=-n}^{n} c_k(f) &= \frac{e^{i\pi a}\sin(\pi a)}{\pi}\left[\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{a-k} + \frac{1}{a+k}\Big)\right] \\ &= \frac{e^{i\pi a}\sin(\pi a)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{n}\frac{2a}{a^2-k^2}\right).\end{aligned}$$

En revenant à (7.3), on obtient ainsi

$$\frac{e^{i\pi a}\sin(\pi a)}{\pi}\left(\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-k^2}\right) = e^{i\pi a}\cos(\pi a);$$

d'où la formule souhaitée :

$$\frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2a}{a^2-k^2} = \pi\,\mathrm{cotan}(\pi a).$$

□

Chapitre 2

Fonctions holomorphes

1. Calcul différentiel dans le plan complexe

1.1. Préambule : $\mathbb{C}$ et $\mathbb{R}^2$. Dans tout ce qui suit, on identifiera constamment $\mathbb{C}$ avec $\mathbb{R}^2$ de la façon habituelle : à un nombre complexe $z = x + iy$ correspond le couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Il est *très important* de savoir "jongler" avec cette identification :

$$\begin{gathered} \mathbb{C} \longleftrightarrow \mathbb{R}^2 \\ z = x + iy \longleftrightarrow (x, y) \end{gathered}$$

1.2. Formes différentielles.

Notations. On notera $\mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ ou $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ l'ensemble des applications $\mathbb{R}$-linéaires de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{C}$. Si $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) = \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ et $h \in \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, on note $L(h)$, ou $L \cdot h$, ou simplement Lh, l'image de h par L.

Remarque. Comme $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 4. C'est aussi un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (car on peut multiplier une application linéaire $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ par un nombre *complexe*), de dimension 2.

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Une* ***1-forme différentielle*** *sur Ω est une application $\omega : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$.*

Remarque. La définition a en fait un sens même si Ω n'est pas un ouvert, ce qui sera parfois commode.

Exemple. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction différentiable en tout point, alors sa différentielle $df : \Omega \to \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est une forme différentielle.

Opérations sur les formes différentielles.

(a) *Addition, multiplication par un scalaire.* La somme de deux 1-formes ω_1 et ω_2 est la forme différentielle définie par la formule

$$(\omega_1 + \omega_2)(z) = \omega_1(z) + \omega_2(z)\,.$$

Le produit d'une 1-forme ω par un scalaire $\lambda \in \mathbb{C}$ est la 1 -forme définie par

$$(\lambda\omega)(z) = \lambda\omega(z)\,.$$

(b) *Multiplication par une* ***fonction***. Si ω est une 1-forme différentielle sur Ω et si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction sur Ω, on définit une 1-forme $f\omega$ en posant

$$(f\omega)(z) = f(z)\omega(z)\,.$$

(La multiplication par un scalaire est un cas particulier : c'est la multiplication par une fonction constante).

1.3. Écritures "canoniques" d'une forme différentielle. Dans ce qui suit Ω est un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

NOTATION 1. On note x et y les "fonctions coordonnées" sur Ω : si $u = (x_u, y_u) \in \Omega$, alors $x(u) = x_u$ et $y(u) = y_u$. (On devrait en fait écrire x_Ω et y_Ω pour indiquer que leur domaine de définition est Ω ; mais ce serait un peu lourd.) Même si elles sont à valeurs réelles, on considèrera x et y comme des fonctions de Ω dans $\mathbb{C}$.

Par définition, les fonctions x et y sont les restrictions à Ω des "applications linéaires coordonnées" $\pi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ et $\pi_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ définies par $\pi_i(h_1, h_2) = h_i$. Elles sont donc différentiables sur Ω, avec pour tout $u \in \Omega$:

$$dx(u) = \pi_1 \quad \text{et} \quad dy(u) = \pi_2.$$

Autrement dit, si $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$ alors

$$dx(u)h = h_1 \quad \text{et} \quad dy(u)h = h_2\,.$$

PROPOSITION 1.2. *Toute 1-forme différentielle ω sur Ω s'écrit de manière unique sous la forme*

$$\omega = Pdx + Qdy\,,$$

où P et Q sont des fonctions sur Ω. En notant (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$, on a

$$P(u) = \omega(u)e_1 \qquad \text{et} \qquad Q(u) = \omega(u)e_2.$$

Démonstration. Si $u \in \Omega$ et $h = (h_1, h_2) \in \mathbb{R}^2$, alors

$$\begin{aligned}\omega(u)h &= \omega(u) \cdot (h_1e_1 + h_2e_2)\\ &= h_1 \times \omega(u)e_1 + h_2 \times \omega(u)e_2\\ &= (\omega(u)e_1)\, dx(u)h + (\omega(u)e_2)\, dy(u)h.\end{aligned}$$

Donc $\omega = Pdx + Qdy$ avec $P(u) := \omega(u)e_1$ et $Q(u) := \omega(u)e_2$.

La preuve de l'unicité du couple de fonctions (P, Q) tel que $\omega = Pdx + Qdy$ est laissée en exo. $\square$

EXEMPLE. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction différentiable en tout point de Ω, alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,. \tag{1.1}$$

Démonstration. On a $df = Pdx + Qdy$ avec $P(u) = df(u)e_1 = \frac{\partial f}{\partial x}(u)$ et $Q(u) = df(u)e_2 = \frac{\partial f}{\partial y}(u)$. $\square$

NOTATION 2. On note $z : \Omega \to \mathbb{C}$ et $\bar{z} : \Omega \to \mathbb{C}$ les fonctions $z \mapsto z$ et $z \mapsto \bar{z}$.

Par définition, les fonctions z et $\bar{z}$ sont les restrictions à Ω des applications $\mathbb{R}$-linéaires $I : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ et $\bar{I} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définies par $I(h) = h$ et $\bar{I}(h) = \bar{h}$. Donc z et $\bar{z}$ sont différentiables sur Ω, avec

$$dz(u) = I \quad \text{et} \quad d\bar{z}(u) = \bar{I}$$

pour tout $u \in \Omega$. Autrement dit, si $h \in \mathbb{C}$ alors

$$dz(u)h = h \quad \text{et} \quad d\bar{z}(u)h = \bar{h}\,.$$

Par ailleurs, comme $z = x + iy$ et $\bar{z} = x - iy$, on a par linéarité de la différentiation :

$$dz = dx + idy \quad \text{et} \quad d\bar{z} = dx - idy\,.$$

PROPOSITION 1.3. *Toute* 1*-forme différentielle sur* Ω *s'écrit de manière unique sous la forme*

$$\omega = Adz + Qd\bar{z}\,,$$

où A *et* B *sont des fonctions sur* Ω*. Plus précisément, si* ω *s'écrit* $\omega = Pdx + Qdy$*, alors on a*

$$\omega = \frac{1}{2}(P - iQ)dz + \frac{1}{2}(P + iQ)d\bar{z}.$$

Démonstration. Comme $dz = dx + idy$ et $d\bar{z} = dx - idy$, on a $dx = \frac{1}{2}(dz + d\bar{z})$ et $dy = \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z})$. Donc

$$\begin{aligned}\omega &= Pdx + Qdy \\ &= P \times \frac{1}{2}(dz + d\bar{z}) + Q \times \frac{1}{2i}(dz - d\bar{z}) \\ &= \frac{1}{2}(P - iQ)dz + \frac{1}{2}(P + iQ)d\bar{z}.\end{aligned}$$

La preuve de l'unicité est laissée à nouveau en exo. $\square$

Cette Proposition "justifie" la définition suivante.

DÉFINITION 1.4. *Si* $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *est une fonction différentiable sur* Ω*, on définit deux fonctions* $\frac{\partial f}{\partial z}$ *et* $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ *par*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} - i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x} + i\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{cases}$$

D'après (1.1) et la Proposition 1.3, on a alors

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\, dz + \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, d\bar{z}\,. \tag{1.2}$$

Exemple. Comme $dz = 1\,dz + 0\,d\bar{z}$ et $d\bar{z} = 0\,dz + 1\,d\bar{z}$, on a (par unicité dans l'écriture $Adz + Bd\bar{z}$)

$$\frac{\partial z}{\partial z} = 1 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial \bar{z}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial z}{\partial \bar{z}} = 0 = \frac{\partial \bar{z}}{\partial z}\,\cdot$$

Exercice. Établir les formules $\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$ et $\overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\cdot$

On aura de temps en temps besoin du lemme suivant. Rappelons que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω, alors le **laplacien** de f est la fonction

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\,\cdot$$

LEMME 1.5. *Si* $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$*, alors* $\Delta f = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\,\dfrac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}\cdot$

Démonstration. Il suffit de calculer calmement $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial \bar{z} \partial z}$: c'est un excellent exercice. $\square$

2. Fonctions holomorphes

2.1. Définition et propriétés formelles.

Définition 2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$.*
(1) *On dit que f est **$\mathbb{C}$-dérivable** en un point $p \in \Omega$ si la limite*

$$f'(p) := \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} = \lim_{z \to p} \frac{f(z) - f(p)}{z - p}$$

existe dans $\mathbb{C}$.
(2) *On dit que f est **holomorphe sur** Ω si elle est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et si la fonction $f' : \Omega \to \mathbb{C}$ est continue.*

Remarque 1. On verra plus tard que l'hypothèse de continuité faite sur f' est en fait superflue : si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, alors f' est *automatiquement* continue.

Remarque 2. Si f est $\mathbb{C}$-dérivable en $p \in \Omega$, alors f est *continue* au point p. Donc, toute fonction holomorphe est continue.

Démonstration. Exo. □

Notation. On notera $H(\Omega)$ l'ensemble des fonctions holomorphes sur Ω.

Exemples. La fonction $f(z) = z$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec $f'(z) \equiv 1$. A l'inverse, la fonctions $z \mapsto \bar{z}$ (qui est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ puisque $\mathbb{R}$-linéaire) n'est $\mathbb{C}$-dérivable en aucun point.

Démonstration. Si $p, h \in \mathbb{C}$ et $h \neq 0$ alors $\frac{\overline{p+h} - \bar{p}}{h} = \frac{\bar{h}}{h}$, expression qui n'a pas de limite quand $h \to 0$ car par exemple $\frac{\bar{h}}{h}$ vaut 1 si h est réel et -1 si h est imaginaire pur. □

Propriétés formelles. Les propriétés formelles de la $\mathbb{C}$-dérivabilité sont les mêmes que celles de la dérivabilité pour les fonctions d'une variable réelle, et les preuves sont identiques :

- Si f et g sont $\mathbb{C}$-dérivables sur Ω, alors $f + g$ et fg sont $\mathbb{C}$-dérivables, avec $(f + g)' = f' + g'$ et $(fg)' = f'g + fg'$. Si de plus g ne s'annule pas, alors $\frac{f}{g}$ est $\mathbb{C}$-dérivable, avec
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}.$$
- Si $f : \Omega_1 \to \mathbb{C}$ et $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ sont $\mathbb{C}$-dérivables et si $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$, alors $g \circ f$ est $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω_1, avec
$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \times f' .$$

Conséquences. Si $P(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ est une fonction polynomiale, alors P est holomorphe sur $\mathbb{C}$ avec $P'(z) = \sum_{k=1}^n k a_k z^{k-1}$. De même, toute fonction rationnelle $f(z) = P(z)/Q(z)$ est holomorphe sur son domaine de définition.

2.2. Similitudes et équation de Cauchy-Riemann.

Définition 2.2. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on note $M_\lambda : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ l'application linéaire définie par $M_\lambda(h) = \lambda h$. On dit qu'une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$ est une **similitude directe** si $L = M_\lambda$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$.*

Remarque. Une application linéaire $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})$ est une similitude directe si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-linéaire, et dans ce cas on a $L = M_{L(1)}$.

Démonstration. Il est clair que toute similitude est $\mathbb{C}$-linéaire. Inversement, si $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire, alors $L(h) = L(h \times 1) = h \times L(1)$ et donc $L = M_{L(1)}$. □

PROPOSITION 2.3. *Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$, où Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $p \in \Omega$. Alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en p si et seulement si les deux propriétés suivantes sont vérifiées : f est différentiable en p* ***et de plus*** *$df(p)$ est une similitude directe. Dans ce cas, on a $df(p) = M_{f'(p)}$.*

Démonstration. Supposons que f soit $\mathbb{C}$-dérivable en p, et posons $\lambda = f'(p)$. Par définition, on peut alors écrire

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lambda + \varepsilon(h)\,,$$

où $\varepsilon(h)$ tend vers 0 quand $h \to 0$. En multipliant par h, on en déduit

$$f(p+h) = f(p) + \lambda h + h\varepsilon(h) = f(p) + M_\lambda(h) + o(|h|)\,,$$

ce qui montre que f est différentiable en p avec $df(p) = M_\lambda = M_{f'(p)}$.

Inversement, supposons que f soit différentiable en p et que $df(p)$ soit une similitude M_λ. Alors

$$f(p+h) = f(p) + M_\lambda(h) + o(|h|) = f(p) + \lambda \times h + o(|h|)$$

quand $h \to 0$, et donc

$$\frac{f(p+h)-f(p)}{h} = \lambda + \frac{o(|h|)}{h} \xrightarrow{h\to 0} \lambda\,.$$

Par conséquent, f est $\mathbb{C}$-dérivable en p et $f'(p) = \lambda$. □

COROLLAIRE 2.4. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, alors $df = f'dz$.*

Démonstration. D'après la proposition, on a $df(u)h = f'(u) \times h$, autrement dit $df(u)h = f'(u)dz(u)h$ pour tout $u \in \Omega$ et $h \in \mathbb{C}$.

□

COROLLAIRE 2.5. *Pour une fonction différentiable $f : \Omega \to \mathbb{C}$, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) *f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point ;*

(ii) *$df = g\,dz$ pour une certaine fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$;*

(iii) *f vérifie l'**équation de Cauchy-Riemann** $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$.*

Dans ce cas, on a nécessairement $g = f'$ dans (ii).

Démonstration. On sait déjà que si f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, alors $df = f'dz$. Inversement, si $df = gdz$ pour une certaine fonction g, alors $df(u) = g(u)dz(u) = g(u)I = M_{g(u)}$ pour tout $u \in \Omega$; donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point avec $f' = g$. Ainsi, (i) et (ii) sont équivalentes. L'équivalence de (ii) et (iii) vient de l'identité $df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,d\bar z$ et de l'unicité dans l'écriture $Adz + Bd\bar z$. □

COROLLAIRE 2.6. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, alors $f' = \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$.*

Démonstration. On a $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ car d'une part $df = f'dz$ et d'autre part $df = \frac{\partial f}{\partial z}dz$ d'après l'équation de Cauchy-Riemann. Toujours d'après Cauchy-Riemann et par définition de $\frac{\partial f}{\partial \bar z}$, on a $\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, i.e. $\frac{\partial f}{\partial x} = -i\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{i}\frac{\partial f}{\partial y}$. Enfin, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial f}{\partial x}$. □

COROLLAIRE 2.7. *Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^1$ (quand on la considère comme une fonction de 2 variables réelles) et vérifie l'équation de Cauchy-Riemann $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$.*

Démonstration. Si f est $\mathcal{C}^1$ avec $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$, alors f est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point et $f' = \frac{\partial f}{\partial z}$ est continue, donc f est holomorphe. Inversement, si $f \in H(\Omega)$, alors f est différentiable avec $\frac{\partial f}{\partial \bar z} = 0$, et ses dérivées partielles sont continues puisque $\frac{\partial f}{\partial x} = f'$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = if'$. □

COROLLAIRE 2.8. ("TFA holomorphe")
Soit $f \in H(\Omega)$. Si $p \in \Omega$ et si $h \in \mathbb{C}$ est tel que $[p, p+h] \subset \Omega$, alors

$$f(p+h) = f(p) + \int_0^1 f'(p+th) \times h\, dt\,.$$

Démonstration. On applique le théorème fondamental de l'analyse à la fonction $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}$ définie par $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, où $\gamma(t) = p+th$. Cette fonction est bien définie et de classe $\mathcal{C}^1$ puisque $\gamma(t) \in \Omega$ pour tout $t \in [0,1]$, et on a $\varphi'(t) = df(\gamma(t))\gamma'(t) = f'(p+th)\times h$. Donc $f(p+h) - f(p) = \varphi(1) - \varphi(0) = \int_0^1 \varphi'(t)\,dt = \int_0^1 f'(p+th)\times h\,dt\,.$ □

Exercice. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^n$ et soit $\varphi : U \to \mathbb{C}$ de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur un ouvert contenant $\varphi(U)$, alors

$$d(f \circ \varphi) = (f' \circ \varphi)\, d\varphi\,.$$

PROPOSITION 2.9. *Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{C}, \mathbb{C})$. Alors L est une similitude directe si et seulement si sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ est de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Dans ce cas, on a $L = M_\lambda$, où $\lambda = a + ib$.

Démonstration. Notons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. On a $e_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right) = 1 + i0 = 1$ et $e_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) = 0 + i1 = i$. Si L est une similitude, $L = M_\lambda$ avec $\lambda = a + ib$, on a $L(e_1) = \lambda \times 1 = a + ib = \left(\begin{smallmatrix} a \\ b \end{smallmatrix}\right)$ et $L(e_2) = \lambda \times i = ia - b = \left(\begin{smallmatrix} -b \\ a \end{smallmatrix}\right)$, et par conséquent L a pour matrice $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ dans la base (e_1, e_2). Inversement, si la matrice de L est de ce type et si on pose $\lambda = a + ib$, alors $L = M_\lambda$ puisque ces deux applications linéaires ont la même matrice. □

COROLLAIRE 2.10. (forme réelle de l'équation de Cauchy-Riemann)
Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et écrivons $f = u + iv$ (où u et v sont à valeurs réelles). Alors f est holomorphe si et seulement si

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad et \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

Démonstration. Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, elle est holomorphe si et seulement si $df(z)$ est une similitude directe pour tout $z \in \Omega$ (d'après la proposition 2.3) ; autrement dit : si et seulement si la matrice jacobienne de f en tout point est de la forme $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$. D'où le résultat par définition de la matrice jacobienne puisque $f = u + iv = \left(\begin{smallmatrix} u \\ v \end{smallmatrix}\right)$. □

Corollaire 2.11. *Si $f \in H(\Omega)$ et si on note $J_f(z)$ le déterminant jacobien de f en un point $z \in \Omega$, alors*

$$J_f(z) = |f'(z)|^2 .$$

Démonstration. Comme $df(z) = M_{f'(z)}$, la matrice jacobienne de f au point z est $\mathrm{Jac}_f(z) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$, où $f'(z) = a + ib$. Donc $J_f(z) = a^2 + b^2 = |f'(z)|^2$. □

Exercice. Montrer que pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ quelconque, on a

$$J_f = \left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\right|^2 .$$

3. Séries entières ; fonctions analytiques

3.1. Séries entières ; rayon de convergence.

Définition 3.1. *Une **série entière** est une série de fonctions de la variable $z \in \mathbb{C}$ de la forme $\Sigma(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n$, où les c_n sont des nombres complexes.*

Remarque 1. Il est important d'être conscient qu'une série entière est un objet **formel**. La série peut très bien ne converger pour aucun point (sauf $z = 0$).

Remarque 2. Par **convention**, on pose $z^0 = 1$ pour tout nombre complexe z. En particulier, on a $0^0 = 1$.

Notation. Pour $a \in \mathbb{C}$ et $r > 0$, on notera $D(a, r)$ le **disque ouvert de centre** a **et de rayon** r dans $\mathbb{C}$:

$$D(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| < r\} .$$

Le disque **fermé** correspondant sera noté $\overline{D}(a, r)$:

$$\overline{D}(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ |z - a| \leqslant r\} .$$

La notation $\overline{D}$ n'est pas choisie au hasard : le disque fermé est bien l'adhérence du disque ouvert !

Lemme 3.2. (lemme d'Abel)
*Soit $(c_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres complexes, et soit $\rho > 0$. Si la suite $(c_n \rho^n)$ est bornée, alors la série $\sum c_n z^n$ converge absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \rho$, et on a **convergence normale** sur tout disque fermé $\overline{D}(0, r)$ de rayon $r < \rho$.*

Démonstration. Choisissons une constante M telle que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $z \in \mathbb{C}$, on a $c_n z^n = c_n \rho^n \times \left(\frac{z}{\rho}\right)^n$, et donc

$$|c_n z^n| \leqslant M\,(|z|/\rho)^n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la série $\sum c_n z^n$ est absolument convergente si $|z|/\rho < 1$, i.e. $|z| < \rho$. Si $0 \leqslant r < \rho$, alors

$$\forall z \in \overline{D}(0, r)\ :\ |c_n z^n| \leqslant M\,(r/\rho)^n ,$$

majoration par le terme général d'une série convergente indépendante de $z \in \overline{D}(0,r)$. Donc la série $\sum c_n z^n$ converge normalement sur $\overline{D}(0,r)$.

□

Théorème 3.3. *Soit $\Sigma = \sum c_n z^n$ une série entière. Il existe un unique "nombre" $R \in [0,\infty]$ vérifiant les deux propriétés suivantes :*

(i) *la série $\sum c_n z^n$ converge pour $|z| < R$;*

(ii) *la série $\sum c_n z^n$ diverge pour $|z| > R$.*

De plus, la série $\sum c_n z^n$ converge absolument si $|z| < R$, et on a convergence normale sur tout compact de $D(0,R)$. Le "nombre" R s'appelle le ***rayon de convergence*** *de la série entière Σ.*

Démonstration. Posons $R = \sup\{\rho \geqslant 0;\ \text{la suite } (|c_n|\rho^n) \text{ est bornée}\}$. Cette définition a bien un sens : R existe dans $[0,\infty]$ car l'ensemble dont on prend la borne supérieure est non vide (il contient $r = 0$). Si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $|z| < R$ alors on peut trouver $\rho > |z|$ tel que la suite $|c_n|\rho^n$ est bornée, donc la série $\sum c_n z^n$ converge absolument d'après le lemme d'Abel. Si $|z| > R$ alors la suite $(|c_n z^n|)$ n'est pas bornée par définition de R, donc la série $\sum c_n z^n$ ne peut pas converger. Ainsi, R vérifie (i) et (ii). De plus, la série $\sum c_n z^n$ converge normalement sur tout disque $\overline{D}(0,r)$ de rayon $r < R$ d'après le lemme d'Abel, donc uniformément sur tout compact de $D(0,R)$.

L'unicité est "évidente" : si $R' \in [0,\infty]$ vérifie (i) et (ii), on ne peut pas avoir $R' < R$ sinon on obtiendrait une contradiction en choisissant r tel que $R' < r < R$. (La série $\sum c_n r^n$ devrait à la fois converger car $r < R$ et diverger car $r > R'$). De même on ne peut pas avoir $R' > R$, donc $R' = R$. □

Notation. On notera $R(\Sigma)$ le rayon de convergence d'une série entière Σ.

Fait 3.4. *Si $\Sigma = \sum c_n z^n$ est une série entière, alors*

$$\begin{aligned} R(\Sigma) &= \sup\{r \geqslant 0;\ \textit{la série } \textstyle\sum |c_n|\, r^n \textit{ converge}\} \\ &= \sup\{r \geqslant 0;\ \text{la suite } (|c_n| r^n) \text{ est bornée}\}. \end{aligned}$$

On en déduit les choses suivantes : étant donné $r \in \mathbb{R}_+$,

- *si la suite $(|c_n| r^n)$ est bornée, alors $R(\Sigma) \geqslant r$;*
- *si la série $\sum |c_n| r^n$ diverge, alors $R(\Sigma) \leqslant r$.*

Conséquence 1. *Si la suite (c_n) est* ***bornée****, alors $R(\Sigma) \geqslant 1$.*

Conséquence 2. *Soient $\Sigma_0 = \sum c_n z^n$ et $\Sigma_1 = \sum c'_n z^n$ deux séries entières.*

(a) *S'il existe une constante M telle que $|c_n| \leqslant M\,|c'_n|$ à partir d'un certain rang, alors $R(\Sigma_0) \geqslant R(\Sigma_1)$.*

(b) *Si $|c_n| \sim \alpha\,|c'_n|$ pour une certaine constante α, alors $R(\Sigma_0) = R(\Sigma_1)$.*

Démonstration. (a) Si $|c_n| \leqslant M\,|c'_n|$ à partir d'un certain rang, alors

$$\big\{r \geqslant 0;\ \text{la suite } (|c'_n| r^n) \text{ est bornée}\big\} \subseteq \{r \geqslant 0;\ \text{la suite } (|c_n| r^n) \text{ est bornée}\},$$

et donc $R(\Sigma') \leqslant R(\Sigma)$.

(b) découle de (a) car si $|c_n| \sim \alpha\,|c'_n|$, alors $|c_n| \leqslant 2\alpha\,|c'_n|$ et $|c'_n| \leqslant (2/\alpha)\,|c_n|$ à partir d'un certain rang. □

REMARQUE. Comme le montrent les exemples suivants, on ne peut rien dire de complètement général sur la convergence de $\sum c_n z^n$ pour $|z| = R(\Sigma)$.

(1) Pour $\Sigma(z) = \sum z^n$, on a $R(\Sigma) = 1$ (car la série géométrique $\sum r^n$ converge si $r < 1$ et diverge si $r \geqslant 1$) et la série diverge en tout point z tel que $|z| = 1$.
(2) Pour $\Sigma(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$, on a $R(\Sigma) = 1$ (la suite $\left(\frac{r^n}{n^2}\right)$ est bornée si $r < 1$ et $\sum \frac{r^n}{n^2}$ diverge pour $r > 1$ car en fait $r^n/n^2 \to \infty$) et la série converge en tout point z tel que $|z| = 1$.
(3) pour $\Sigma(z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n}$, on a $R(\Sigma) = 1$ (même raisons que pour $\sum \frac{z^n}{n^2}$), la série diverge pour $z = 1$, mais converge pour $z = -1$ (série alternée), et en fait pour tout point $z \neq 1$ tel que $|z| = 1$ (ce qui n'est pas du tout évident).

La proposition qui va suivre donne une formule générale pour calculer le rayon de convergence d'une série entière. On doit d'abord rappeler la définition de la **limite supérieure** d'une suite de nombres réels (x_n) : la limite supérieure de (x_n) est la plus grande valeur d'adhérence de la suite (x_n) dans $[-\infty, +\infty]$; autrement dit, c'est la plus grande limite possible (dans $[-\infty, +\infty]$) pour une sous-suite de (x_n). On note ce "nombre" $\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n$, ou simplement $\overline{\lim}\, x_n$. Par exemple : si la suite (x_n) converge dans $[-\infty, +\infty]$ alors $\overline{\lim}\, x_n$ est la limite de (x_n) ; on a $\overline{\lim}\,(-1)^n = 1$ car les valeurs d'adhérence de $x_n = (-1)^n$ sont 1 et -1 ; et on a $\overline{\lim}\,(-1)^n \times n^2 = +\infty$.

Exercice 1. Montrer que pour tout nombre réel L, les implications suivantes ont lieu :

- $\overline{\lim}\, x_n < L \Longrightarrow x_n < L$ à partir d'un certain rang ;
- $\overline{\lim}\, x_n > L \Longrightarrow x_n > L$ pour une infinité d'entiers n.

Exercice 2. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites de nombres réels et si (u_n) admet une limite $l > 0$, alors $\overline{\lim}\,(u_n v_n) = l \times \overline{\lim}\, v_n$.

PROPOSITION 3.5. (formule d'Hadamard)
Pour toute série entière $\Sigma = \sum c_n z^n$, le rayon de convergence de Σ est donné par la formule

$$\frac{1}{R(\Sigma)} = \overline{\lim}\, |c_n|^{1/n} .$$

Démonstration. Notons R_0 le "nombre" défini par $\frac{1}{R_0} = \overline{\lim}\, |c_n|^{1/n}$. On va montrer séparément que $R(\Sigma) \geqslant R_0$ et $R(\Sigma) \leqslant R_0$.

Si $0 \leqslant r < R_0$, alors $\overline{\lim}_{n\to\infty}(|c_n|^{1/n} \times r) < 1$, donc on a $|c_n|^{1/n} \times r < 1$ à partir d'un certain rang, i.e. $|c_n| r^n < 1$. La suite $(|c_n| r^n)$ est donc bornée, et par conséquent $R(\Sigma) \geqslant r$. Ceci étant vrai pour tout $r < R_0$, on en déduit $R(\Sigma) \geqslant R_0$.

Si $r > R_0$, alors $\overline{\lim}_{n\to\infty}(|c_n|^{1/n} \times r) > 1$, donc on peut trouver une infinité d'entiers n tels que $|c_n| r^n > 1$. Par conséquent, $c_n r^n$ ne tend pas vers 0 quand $n \to \infty$, donc la série $\sum |c_n| r^n$ diverge et donc $r \geqslant R(\Sigma)$. Ceci étant vrai pour tout $r > R_0$, on en déduit $R_0 \geqslant R(\Sigma)$. □

COROLLAIRE 3.6. *Si $|c_n|^{1/n}$ admet une limite $l \in [0, \infty]$, alors $R(\Sigma) = 1/l$.*

COROLLAIRE 3.7. *Si $c_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et si $\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ admet une limite $l \in [0, \infty]$, alors $R(\Sigma) = 1/l$.*

Démonstration. D'après le corollaire précédent, il suffit de montrer que $|c_n|^{1/n}$ tend vers l. Supposons que $c_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si on pose

$$u_n := \log \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \log|c_{n+1}| - \log|c_n|,$$

alors $u_n \to L := \log l \in [-\infty, +\infty]$. Par le **Théorème de Cesàro**, on en déduit que

$$S_n := \frac{u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}}{n} \to L.$$

Mais par ailleurs,

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{n}\Big((\log|c_1| - \log|c_0|) + (\log|c_2| - \log|c_1|) + \cdots + (\log|c_n| - \log|c_{n-1}|)\Big) \\ &= \frac{1}{n}(\log|c_n| - \log|c_0|). \end{aligned}$$

Comme $\frac{\log|c_0|}{n} \to 0$ on en déduit que $\frac{\log|c_n|}{n} \to \log(l)$. Donc

$$|c_n|^{1/n} = \exp\left(\frac{\log|c_n|}{n}\right) \to e^{\log(l)} = l.$$

$\square$

Exemples. Pour $\Sigma = \sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, on a $R(\Sigma) = 1$ car $\frac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha} \to 1$. Pour $\Sigma = \sum \frac{z^n}{n!}$, on a $R(\Sigma) = \infty$ car $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{1}{n} \to 0$. Pour $\Sigma = \sum n! z^n$, on a $R(\Sigma) = 0$ car $\frac{(n+1)!}{n!} \to \infty$.

Exercice. Déterminer $R(\Sigma)$ pour $\Sigma := \sum_{n\geqslant 1}(1 + \frac{1}{n})^{n^2} z^n$ et $\Sigma := \sum_{k\geqslant 0} z^{2k}$.

3.2. Régularité de la somme d'une série entière.

Définition 3.8. *Soit $\Sigma(z) = \sum c_n z^n$ une série entière. La **série dérivée** de Σ est la série entière $\Sigma'(z) := \sum_{n\geqslant 1} n c_n z^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)c_{n+1}z^n$.*

Fait 3.9. *Une série entière et sa série dérivée ont le même rayon de convergence.*

Démonstration. Si $\Sigma = \sum c_n z^n$, alors $\Sigma'(z) = \sum_{n\geqslant 1} n c_n z^{n-1}$ a le même rayon de convergence que $\widetilde{\Sigma}(z) := \sum_{n\geqslant 0} n c_n z^n$ car $\widetilde{\Sigma}(z) = z\Sigma'(z)$ (et donc les deux séries convergent pour les mêmes valeurs de z). D'après la formule d'Hadamard, on a $1/R(\widetilde{\Sigma}) = \overline{\lim}\,(n^{1/n}\,|c_n|^{1/n})$ et donc $R(\widetilde{\Sigma}) = R(\Sigma)$ car $n^{1/n} \to 1$; d'où le résultat. $\square$

Théorème 3.10. *Soit $\Sigma = \Sigma c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$, et soit $f : D(0,R) \to \mathbb{C}$ la somme de cette série, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans le disque $D(0,R)$, et ses dérivées successives s'obtiennent en dérivant terme à terme : on a*

$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)\,c_n z^{n-k}\,.$$

Pour démontrer ce théorème, on va utiliser un lemme qui est l'analogue d'un résultat bien connu pour les fonctions d'une variable réelle. Ce lemme sera grandement "amélioré" au Chapitre 6.

LEMME 3.11. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $(f_N)_{N\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que (f_N) converge simplement vers une fonction $f:\Omega\to\mathbb{C}$, et que la suite (f'_N) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction $g:\Omega\to\mathbb{C}$. Alors f est holomorphe et $f'=g$.*

Preuve du Lemme 3.11. La fonction g est continue car les f'_N le sont. Donc, il suffit de montrer que f est $\mathbb{C}$-*dérivable* en tout point $z\in\Omega$, avec $f'(z)=g(z)$.

Soit $r>0$ tel que $\overline{D}(0,r)\subseteq\Omega$. Si $h\in\mathbb{C}$ vérifie $|h|\leqslant r$, alors le segment $[z,z+h]$ est contenu dans Ω. Comme les f_N sont holomorphes, on a donc, par le TFA holomorphe :

$$f_N(z+h)-f_N(z)=\int_0^1 f'_N(z+th)\,hdt \qquad \text{pour tout } N\geqslant 0,$$

Comme $f_N(z)\to f(z)$ et que $f'_N\to g$ uniformément sur le compact $[z,z+h]\subseteq\Omega$, de sorte que $f'_N(z+th)\to g(z+th)$ uniformément sur $[0,1]$, on peut passer à la limite, ce qui donne

$$f(z+h)-f(z)=\int_0^1 g(z+th)\,hdt=h\times\int_0^1 g(z+th)\,dt.$$

Pour tout $h\neq 0$ tel que $|h|\leqslant r$, on a donc

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h}=\int_0^1 g(z+th)\,dt.$$

Ensuite, comme g est continue, on montre (exo) que

$$\int_0^1 g(z+th)\,dt\xrightarrow{h\to 0} g(z);$$

ce qui termine la démonstration. □

Preuve du Théorème 3.10. Pour $N\in\mathbb{N}$, posons $f_N(z)=\sum_{n=0}^N c_n z^n$. Les fonctions f_N sont polynomiales, donc holomorphes sur $D(0,R)$, avec $f'_N(z)=\sum_{n=1}^N nc_nz^{n-1}$. D'après le Fait 3.9, la série entière $\sum_{n\geqslant 1} nc_nz^{n-1}$ a un rayon de convergence égal à R. Donc on peut poser $g(z):=\sum_{n=1}^\infty nc_nz^{n-1}$, et la série converge normalement sur tout compact de $D(0,R)$. En particulier, la suite (f'_N) converge vers g uniformément sur tout compact de $D(0,R)$. Grâce au Lemme 3.11 , on en déduit que f est holomorphe avec $f'(z)=g(z)=\sum_{n=1}^\infty nc_nz^{n-1}$.

Par récurrence, on montre alors que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable avec $f^{(k)}(z)=\sum_{n=k}^\infty n(n-1)\cdots(n-k+1)\,c_nz^{n-k}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. □

3.3. Fonctions analytiques.

DÉFINITION 3.12. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$.*

(1) *On dit que f est **développable en série entière** au voisinage d'un point $a\in\Omega$ s'il existe $r>0$ et une suite de coefficients $(c_n)_{n\geqslant 0}$ (dépendant de a) tels que $D(a,r)\subset\Omega$ et*

$$\forall z\in D(a,r)\ :\ f(z)=\sum_{n=0}^\infty c_n(z-a)^n\,,$$

où la série converge en tout point de $D(a,r)$.

(2) *On dit que f est $\mathbb{C}$-**analytique** sur Ω si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de Ω.*

Du théorème 3.10, on déduit facilement le résultat suivant.

PROPOSITION 3.13. *Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-analytique, alors f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω. De plus, si $a \in \Omega$ et si $f(z) = \sum_0^\infty c_n(z-a)^n$ sur un certain disque $D(a,r)$, alors les coefficients c_n sont déterminés de manière unique par la fonction f : on a*

$$\forall k \in \mathbb{N} \ : \ c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \, .$$

Démonstration. Soit $a \in \Omega$ quelconque, et soit $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$ et $f(z) = \sum_0^\infty c_n(z-a)^n$ sur $D(a,r)$, pour une certaine suite de coefficients (c_n). La série entière $\Sigma(w) = \sum c_n w^n$ a un rayon de convergence au moins égal à r, donc sa somme g est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans le disque $D(0,r)$, d'après le théorème 3.10. Comme $f(z) = g(z-a)$ dans $D(a,r)$, on en déduit que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable dans $D(a,r)$, donc au voisinage de a. Ceci étant vrai pour tout point $a \in \Omega$, cela signifie que f est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur Ω. Enfin, avec les notations précédentes on a $f^{(k)}(z) = g^{(k)}(z-a) = \sum_k^\infty n(n-1)\cdots(n-k+1)\, c_n(z-a)^{n-k}$ pour tout $z \in D(a,r)$, d'où $f^{(k)}(a) = k!c_k \times 0^0 + 0 = k!c_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. □

COROLLAIRE 3.14. *Toute fonction $\mathbb{C}$-analytique est holomorphe.*

4. Fonctions usuelles

4.1. Exponentielle.

DÉFINITION 4.1. *Pour $z = x + iy \in \mathbb{C}$, on pose $e^z := e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$.*

Cette définition suppose évidemment que l'on connaisse déjà l'exponentielle réelle et les fonctions sinus et cosinus.

REMARQUE. On a $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

Démonstration. Si $z = x + iy$, alors $|e^z| = e^x|e^{iy}| = e^x$ car $|e^{iy}| = 1$. □

PROPOSITION 4.2. *On a $e^z \neq 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ et $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ pour tous z, z'.*

Démonstration. $e^z \neq 0$ car $|e^z| = e^{\mathrm{Re}(z)} > 0$.
Si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, alors

$$e^{z+z'} = e^{x+x'+i(y+y')} = e^x e^{x'} e^{i(y+y')} \, .$$

Pour prouver que $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$, il suffit donc de vérifier qu'on a $e^{i(y+y')} = e^{iy}e^{iy'}$; mais ceci est la traduction des formules d'addition pour le sinus et le cosinus :

$$\begin{aligned} e^{i(y+y')} &= \cos(y+y') + i\sin(y+y') \\ &= (\cos y \cos y' - \sin y \sin y') + i(\cos y \sin y' + \sin y \cos y') \\ &= (\cos y + i \sin y)(\cos y' + i \sin y') \, . \end{aligned}$$

□

COROLLAIRE 4.3. *La fonction exponentielle est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{C}, +)$ sur $(\mathbb{C}^*, \times)$, de noyau $2i\pi\mathbb{Z}$.*

Démonstration. Notons E la fonction exponentielle. Que E soit un homorphisme de $(\mathbb{C}, +)$ dans $(\mathbb{C}^*, \times)$ est la traduction de la proposition. La surjectivité est claire puisque tout nombre complexe $w \neq 0$ peut s'écrire $w = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$, et donc $w = e^{\log r + i\theta}$. Si $z = x + iy \in \ker(E)$, alors $1 = e^z = e^x e^{iy}$; donc $e^x = |e^z| = 1$, *i.e.* $x = 0$, et $e^{iy} = 1$, *i.e.* $y \in 2\pi\mathbb{Z}$; autrement dit $z \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Inversement, il est clair que si $z = 2ik\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ alors $e^z = 1$. Ainsi, $\ker(E) = 2i\pi\mathbb{Z}$. $\square$

COROLLAIRE 4.4. *L'application $\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un homomorphisme surjectif de $(\mathbb{R}, +)$ sur $(\mathbb{T}, \times)$, de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.*

PROPOSITION 4.5. *La fonction exponentielle est holomorphe sur $\mathbb{C}$, avec $(e^z)' = e^z$.*

Démonstration. Notons $E : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ la fonction exponentielle, considérée comme fonction de deux variables réelles. On a $E = u + iv$ avec

$$u(x, y) = e^x \cos y \ \text{ et } \ v(x, y) = e^x \sin y\,.$$

Il est clair que E est de classe $\mathcal{C}^1$, et un calcul immédiat montre qu'on a $\frac{\partial u}{\partial x} = u = \frac{\partial v}{\partial y}$ et $\frac{\partial v}{\partial x} = v = -\frac{\partial u}{\partial y}$. Ainsi, E vérifie la forme réelle de l'équation de Cauchy-Riemann et est donc holomorphe sur $\mathbb{C}$. Enfin, on a

$$E' = \frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = u + iv = E\,.$$

$\square$

PROPOSITION 4.6. *On a $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$, où la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. La série entière $\sum \frac{z^n}{n!}$ a un rayon de convergence infini, donc elle converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

Soit $z \in \mathbb{C}$ fixé, et soit $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\varphi(t) = e^{tz}$. D'après la proposition précédente, la fonction exponentielle est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable sur $\mathbb{C}$, avec $(e^u)^{(k)} = e^u$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Donc φ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, avec $\varphi^{(k)}(t) = z^k e^{tz}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. D'après la formule de Taylor, on a

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) \times (1 - 0) + \cdots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \times (1 - 0)^n + \int_0^1 \frac{(1 - t)^n}{n!} \varphi^{(n+1)}(t)\, dt$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, autrement dit

$$e^z = 1 + z + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \frac{z^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n e^{tz} dt\,. \tag{4.1}$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \left| \frac{z^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n e^{tz} dt \right| &\leqslant \frac{|z|^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n |e^{tz}|\, dt \\ &\leqslant \frac{|z|^{n+1}}{n!} \times e^{\mathrm{Re}(z)}\,, \end{aligned}$$

et donc $\frac{z^{n+1}}{n!} \int_0^1 (1 - t)^n e^{tz} dt$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. On peut donc passer à la limite dans (4.1) pour obtenir la formule souhaitée. $\square$

Exercice. En utilisant la formule du binôme et le développement en série entière de l'exponentielle, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$e^z = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

4.2. Fonctions trigonométriques. Les fonctions trigonométriques complexes se définissent à partir de l'exponentielle.

DÉFINITION 4.7. *Pour* $z \in \mathbb{C}$, *on pose* $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ *et* $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$.

La vérification des propriétés suivantes est laissée en exercice.

(1) Les fonctions sin et cos sont holomorphes sur $\mathbb{C}$, avec $\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

(2) Les fonctions sin et cos sont développables en série entière sur $\mathbb{C}$, avec
$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \qquad \text{et} \qquad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot$$

(3) Les formules trigonométriques usuelles pour $\sin(u+v)$ et $\cos(u+v)$ restent valables pour tous $u, v \in \mathbb{C}$.

LEMME 4.8. *On a* $\cos z = 0$ *si et seulement si* z *est de la forme* $\frac{\pi}{2} + k\pi$, *où* $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Par définition de la fonction cos, on a les équivalences suivantes :
$$\begin{aligned} \cos z = 0 &\iff e^{iz} = -e^{-iz} \\ &\iff e^{2iz} = -1 = e^{i\pi} \\ &\iff e^{i(2z-\pi)} = 1 \\ &\iff 2z - \pi \in 2\pi\mathbb{Z}\,. \end{aligned}$$
□

COROLLAIRE 4.9. *La fonction* $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ *est bien définie et holomorphe sur* $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$

Exercice 1. Montrer qu'on a $\tan'(z) = 1 + \tan^2 z$

Exercice 2. Déterminer le domaine de définitions de $\operatorname{cotan} z := \frac{\cos z}{\sin z}\cdot$

4.3. Logarithmes et arguments.

NOTATION. On notera $\log :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction “logarithme népérien” usuelle, i.e. la réciproque de l'exponentielle réelle.

DÉFINITION 4.10. *Soit* $z \in \mathbb{C}^*$.

(a) *On dit qu'un nombre complex* w *est un* ***logarithme*** *de* z *si on a* $e^w = z$.

(b) *On dit qu'un nombre réel* θ *est un* ***argument*** *de* z *si on a* $e^{i\theta} = \frac{z}{|z|}\cdot$

REMARQUES.

(1) Si $z \in \mathbb{C}^*$ et $w \in \mathbb{C}$, alors w est un logarithme de z si et seulement si $w = \log(r) + i\theta$, où $r := |z|$ et θ est un argument de z.

(2) Tout nombre complexe $z \neq 0$ possède *une infinité* de logarithmes et d'arguments.

Démonstration. Si on écrit $w = x + iy$ et $z = re^{i\theta}$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, alors
$$e^w = z \iff e^x e^{iy} = re^{i\theta} \iff e^x = r \text{ et } e^{iy} = e^{i\theta} = \tfrac{z}{|z|};$$
ce qui donne (1). Et la partie (2) est évidente. □

Définition 4.11. *La **détermination principale de l'argument** est la fonction* $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ *définie comme suit :* $\arg(z)$ *est l'unique argument de* z *appartenant à l'intervalle* $]-\pi,\pi]$. *La **détermination principale du logarithme** est la fonction* $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ *définie par* $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$. *Autrement dit, si* $z = re^{i\theta}$ *avec* $r > 0$ ***et*** $\theta \in]-\pi,\pi]$, *alors* $\log(z) = \log(r) + i\theta$.

Exemples.

(1) On a $-1 = e^{i\pi}$, donc $\log(-1) = i\pi$. De même, $i = e^{-\frac{\pi}{2}}$ et $-i = e^{-i\frac{\pi}{2}}$, donc $\log(i) = i\frac{\pi}{2}$ et $\log(-i) = -i\frac{\pi}{2}$.

(2) On a $|1-i| = \sqrt{2}$ et $1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\,e^{-i\frac{\pi}{4}}$, donc $\log(1-i) = \log\sqrt{2} - i\frac{\pi}{4} = \frac{\log(2)}{2} - i\frac{\pi}{4}$.

Remarque 1. La notation log est intentionnelle : la fonction log prolonge la fonction logarithme réelle.

Remarque 2. En général, on n'a pas $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$: cette égalité est vraie seulement *modulo* $2i\pi$. Par exemple, on a $\log(-1 \times i) = \log(-i) = -i\frac{\pi}{2}$, mais $\log(-1) + \log(i) = i\pi + i\frac{\pi}{2} = i\frac{3\pi}{2}\cdot$ En fait, on a $\log(zz') = \log(z) + \log(z')$ si et seulement si $\arg(z) + \arg(z') \in]-\pi,\pi]$ (exo).

Remarque 3. Les fonctions log et arg ne sont pas continues sur $\mathbb{C}^*$. En fait, elles ne sont continues en aucun point de la forme $z = -r$, où $r > 0$.

Démonstration. Pour $\varepsilon \in]0,\pi]$, posons $z_\varepsilon^+ = re^{i(\pi-\varepsilon)}$ et $z_\varepsilon^- = re^{i(-\pi+\varepsilon)}$ (*faire un dessin*). Alors $z_\varepsilon^\pm \to r$ quand $\varepsilon \to 0^+$, mais $\arg(z_\varepsilon^+) = i(\pi-\varepsilon) \to i\pi$ et $\arg(z_\varepsilon^-) = i(-\pi+\varepsilon) \to -i\pi$. Donc la fonction arg est discontinue au point $-r$; et comme $\arg(z) = \mathrm{Im}(\log(z))$, on en déduit que la fonction log est également discontinue au point $-r$. ☐

Proposition 4.12. *La fonction* arg *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, *et la fonction* log *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ *avec* $\log'(z) = \frac{1}{z}\cdot$

Démonstration. Si $z = x+iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, alors $\theta := \arg(z) \in]-\pi,\pi[$. Donc $\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$ et $\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est bien définie. D'après le théorème de l'angle au centre et de l'angle inscrit, on a (faire un dessin)

$$\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{y}{x+|z|} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\cdot$$

De plus, comme $\theta/2 \in]-\pi/2,\pi/2[$ on a $\theta/2 = \arctan(\tan\theta/2)$. Donc

$$\arg(z) = \theta = 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right);$$

et cette formule explicite prouve que la fonction arg est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

Comme $\log(z) = \log|z| + i\arg(z)$ et que la fonction $z \mapsto \log|z| = \log(\sqrt{x^2+y^2})$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}^*$, la fonction log est également de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$. De plus, en différentiant la relation $e^{\log} = z$, on obtient $e^{\log}d(\log) = dz$, autrement dit $zd(\log) = dz$, ou encore $d(\log) = \frac{dz}{z}$. Par conséquent, log est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ avec $\log'(z) = \frac{1}{z}\cdot$ ☐

Corollaire 4.13. *Pour tout nombre complexe* z, *on a* $e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Démonstration. Fixons $z \in \mathbb{C}$. Si l'entier n est assez grand, alors $1 + \frac{z}{n} \neq 0$ et on peut écrire $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp\left(n \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)\right)$. De plus, comme la fonction log est $\mathbb{C}$-dérivable en 1 avec $\log'(1) = 1$ et comme $\log(1) = 0$, on voit que $\log(1+u) \sim u$ quand $u \to 0$. Par conséquent, $n \log\left(1 + \frac{z}{n}\right)$ tend vers z quand $n \to \infty$ et donc $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ tend vers e^z. □

Proposition 4.14. *Dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0,1)$, on a*

$$\log(1-z) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}\,,$$

où la série converge normalement sur tout compact de $\mathbb{D}$.

Démonstration. La série entière $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n}$ a un rayon de convergence égal à 1, donc elle converge normalement sur tout compact de $D(0,1) = \mathbb{D}$.

Si $z \in \mathbb{D}$, alors $1 - z \in D(1,1) \subset \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$ (*faire un dessin*). Donc $f(z) = \log(1-z)$ est bien définie et holomorphe sur $\mathbb{D}$, avec $f'(z) = -\frac{1}{1-z}$ et $f(0) = \log(1) = 0$. D'après le TFA holomorphe, on a donc

$$\log(1-z) = 0 - \int_0^1 \frac{1}{1-tz} \times z dt = -z \int_0^1 \frac{1}{1-tz}\, dt$$

pour tout point $z \in \mathbb{D}$. De plus, pour $z \in \mathbb{D}$ fixé on a

$$\frac{1}{1-tz} = \sum_{k=0}^{\infty} (tz)^k\,,$$

où la série géométrique converge normalement sur $[0,1]$ car $|tz| \leqslant |z| < 1$ pour tout $t \in [0,1]$. On en déduit

$$\begin{aligned}
\log(1-z) &= -z \int_0^1 \left(\sum_{k=0}^{\infty} (tz)^k \right) dt \\
&= -\sum \int \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} z^{k+1} \times \int_0^1 t^k\, dt \\
&= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{k+1}}{k+1}\,,
\end{aligned}$$

ce qui est la formule souhaitée. L'interversion de la somme infinie et de l'intégrale est justifiée par la convergence normale de la série sur $[0,1]$. □

Définition 4.15. *Soit $A \subset \mathbb{C}^*$. On dit qu'une fonction $L : A \to \mathbb{C}$ est une* ***détermination du logarithme sur*** *A si on a $e^{L(z)} = z$ pour tout $z \in A$, et qu'une fonction $\Theta = A \to \mathbb{R}$ est une* ***détermination de l'argument*** *si $\Theta(z)$ est un argument de z pour tout $z \in A$.*

Remarque 4.16. Il n'existe aucune détermination continue de l'argument sur le cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ et aucune détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. Supposons qu'il existe une détermination continue de l'argument sur $\mathbb{T}$, i.e. une fonction continue $\Theta : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ telle que $e^{i\Theta(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{T}$. On a alors $e^{i\Theta(e^{it})} = e^{it}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, autrement dit $e^{i(\Theta(e^{it}) - t)} = 1$. Donc la fonction

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = \Theta(e^{it}) - t$ est à valeurs dans $2\pi\mathbb{Z}$. Comme φ est de plus continue, elle est donc *constante* d'après le théorème des valeurs intermédiaires ($\varphi(\mathbb{R})$ doit être un intervalle contenu dans $2\pi\mathbb{Z}$). Il existe donc un entier k tel que

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ \Theta(e^{it}) = t + 2k\pi\,,$$

ce qui est absurde car le membre de gauche est 2π-périodique mais le membre de droite ne l'est pas.

Si L est une détermination du logarithme sur $\mathbb{C}^*$ alors $L(z) = \log|z| + i\Theta(z)$, où Θ est une détermination de l'argument. D'après ce qui précède, Θ ne peut pas être continue sur $\mathbb{C}^*$, donc L non plus puisque $\Theta(z) = \mathrm{Im}(L(z))$. □

Exercice. Montrer que si L est une détermination $\mathcal{C}^1$ du logarithme dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$, alors L est holomorphe et $L'(z) = \frac{1}{z}\cdot$

Exemple 4.17. Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert de longueur 2π, qu'on écrit sous la forme $I =]\alpha - \pi, \alpha + \pi[$, et soit $\Delta_I \subset \mathbb{C}$ la demi-droite $\mathbb{R}^- e^{i\alpha}$. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\Delta_I$, on note $\arg_I(z)$ l'unique argument de z appartenant à l'intervalle I, et on pose $\log_I(z) = \log|z| + i\arg_I(z)$. On dit que $\log_I$ et $\arg_I$ sont les déterminations du logarithme et de l'argument sur $\mathbb{C}\backslash\Delta_I$ **obtenues en choisissant l'argument dans** I.

Remarque. On a $\arg_{]-\pi,\pi[} = \arg$ et $\log_{]-\pi,\pi[} = \log$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$.

Proposition 4.18. *Avec les notations précédentes, la fonction* $\arg_I$ *est de classe* $\mathcal{C}^1$ *sur* $\mathbb{C}\backslash\Delta_I$*, et la fonction* $\log_I$ *est holomorphe sur* $\mathbb{C}\backslash\Delta$ *avec* $\log'(z) = 1/z$.

Démonstration. Un nombre complexe z appartient à $\mathbb{C}\backslash\Delta_I$ si et seulement si $ze^{-i\alpha} \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ (en tournant d'un angle $-\alpha$, on passe de Δ_I à $\mathbb{R}^-$), et on a alors $\arg_I(z) = \arg(ze^{-i\alpha}) + \alpha$ par définition de $\arg_I$. Comme $\arg$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, cela montre que $\arg_I$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{C}\backslash\Delta_I$, et on en déduit comme dans la preuve de la Proposition 4.12 que $\log_I$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\Delta_I$ avec $\log_I'(z) = \frac{1}{z}\cdot$ (On peut aussi dire que $\log_I(z) = \log(e^{-i\alpha}z) + i\alpha$, et donc $\log_I$ est holomorphe avec $\log_I'(z) = e^{-i\alpha}\log'(e^{-i\alpha}z) = 1/z$.) □

Corollaire 4.19. *Pour toute demi-droite* $\Delta \subset \mathbb{C}$ *d'origine* 0*, on peut trouver une détermination* $\mathcal{C}^1$ *de l'argument et une détermination holomorphe du logarithme sur* $\mathbb{C}\backslash\Delta$.

Démonstration. Toute demi-droite Δ d'origine 0 est une Δ_I. □

Corollaire 4.20. *Pour tout nombre complexe* $z_0 \neq 0$*, il existe une détermination holomorphe du logarithme définie sur un voisinage* V *de* z_0.

Démonstration. Il suffit de choisir une demi-droite Δ d'origine 0 ne passant pas par z_0 (par exemple $\Delta = \mathbb{R}^- z_0$), et de poser $V = \mathbb{C}\backslash\Delta$. □

4.4. Fonctions puissances.

Définition 4.21. *Soit* L *une détermination holomorphe du logarithme sur un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}^*$*. La* ***détermination de*** z^λ ***associée à*** L *est la fonction* $z \mapsto e^{\lambda L(z)}$*. Autrement dit, si* $z = re^{i\Theta(z)}$*, où* Θ *est la détermination de l'argument associée à* L*, alors*

$$z^\lambda = r^\lambda e^{i\lambda\Theta(z)}\,.$$

Remarque. Il est important d'avoir compris que z^λ dépend de la détermination du logarithme considérée, autrement dit du *choix de l'argument*. Par exemple, si on veut calculer $(-1)^{1/3}$ en choisissant l'argument dans $]0, 2\pi[$, alors on trouve $(-1)^{1/3} = (e^{i\pi})^{1/3} = e^{i\pi/3}$; mais si on choisit l'argument dans $]2\pi, 4\pi[$, on trouve $(-1)^{1/3} = (e^{i3\pi})^{1/3} = e^{i\pi} = -1$.

On laisse en exo la vérification des (importantes) propriétés suivantes.

(1) Si $\lambda = n \in \mathbb{N}^*$, alors $z^\lambda = \underbrace{z \times \cdots \times z}_{\text{n fois}} = \cdots z^n$, quelle que soit la détermination de l'argument choisie ; et $z^0 = 1$.

(2) Si on choisit l'argument dans $]-\pi, \pi[$ et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors la fonction z^λ (dont le domaine de définition est $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$) prolonge la fonction puissance x^λ usuelle (définie sur $]0, \infty[$).

(3) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ alors $|z^\lambda| = |z|^\lambda$, quelle que soit la détermination de l'argument choisie.

(4) Si $\Omega = \mathbb{C} \backslash \Delta$ pour une demi-droite $\Delta \neq [0, \infty[$ et si on choisit l'argument dans un intervalle I contenant 0, alors $|x^\lambda| = x^{\mathrm{Re}(\lambda)}$ pour tout $x \in]0, \infty[$.

5. Holomorphe = analytique

Pour conclure ce chapitre, on va démontrer le très important résultat suivant.

THÉORÈME 5.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors f est développable en série entière dans tout disque ouvert $D(a, R) \subseteq \Omega$.*

De ce théorème, on déduit immédiatement qu'il était inutile d'introduire la notion de fonction analytique.

COROLLAIRE 5.2. *Une fonction est holomorphe si et seulement si elle est $\mathbb{C}$-analytique. En particulier, toute fonction holomorphe est infiniment $\mathbb{C}$-dérivable.*

Preuve du Théorème 5.1. Fixons un disque $D(a, R) \subseteq \Omega$. Pour $0 \leqslant r < R$, soit $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par

$$f_r(t) := f(a + re^{it}).$$

Comme f est holomorphe sur $D(a, R)$, toutes les fonctions f_r sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$; donc on peut écrire pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$(*) \qquad f_r(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f_r) e^{ikt},$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant r < R$, posons $\varphi_k(r) = c_k(f_r)$; autrement dit,

$$\varphi_k(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})\, e^{-ikt} \, \frac{dt}{2\pi}.$$

Comme f est holomorphe sur $D(0, R)$, on voit en utilisant le théorème de dérivabilité des intégrales à paramètres (exo) que chaque fonction φ_k est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, R[$, avec

$$\varphi_k'(r) = \int_{-\pi}^{\pi} f'(a + re^{it}) e^{it} \, e^{-ikt} \, \frac{dt}{2\pi}.$$

Par ailleurs, si $r > 0$ alors

$$f'(a + re^{it})e^{it} = \frac{1}{ir}\frac{d}{dt}\Big[f(a + re^{it})\Big].$$

En intégrant par parties, on en déduit

$$\varphi_k'(r) = \Big[\frac{1}{2\pi ir}f(a + re^{it})e^{-ikt}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \frac{k}{r}\int_{-\pi}^{\pi} f(a + re^{it})\, e^{-ikt}\frac{dt}{2\pi},$$

autrement dit

$$\varphi_k'(r) = \frac{k}{r}\,\varphi_k(r).$$

Il s'agit d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 qu'on sait résoudre : on en déduit qu'il existe une constante c_k telle que

$$\varphi_k(r) = c_k r^k \qquad \text{pour } 0 < r < R.$$

Comme φ_k est de plus continue en 0, cela force $c_k = 0$ pour $k < 0$, puisque $r^k \to \infty$ quand $r \to 0^+$. Ainsi, $\varphi_k(r) \equiv 0$ si $k < 0$. En résumé :

$$c_k(f_r) = 0 \quad \text{si } k < 0 \qquad \text{et} \qquad c_k(f_r) = c_k r^r \quad \text{si } k \geqslant 0.$$

En revenant à $(*)$, on voit donc que si $z \in D(a, R)$ et si on écrit $z = a + re^{it}$ avec $0 \leqslant r < R$, alors

$$f(z) = f(a + re^{it}) = f_r(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k r^r\, e^{ikt} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(z - a)^k.$$

Donc f est développable en série entière dans le disque $D(0, R)$. □

Exercice. Soit f la fonction définie par $f(z) = \frac{1}{z^2-2z-2}$.

(a) Déterminer le plus grand disque $D(0, R)$ sur lequel f est holomorphe.

(b) Décomposer $f(z)$ en éléments simples, puis déterminer le développement en série entière de f dans le disque $D(0, R)$.

Proposition 5.3. (détermination des coefficients d'un DSE)
Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(a, R)$, et écrivons

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - a)^n.$$

(1) *Pour tout $n \geqslant 0$, on a $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.*

(2) *Soit $0 < r < R$, et notons $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction continue 2π-périodique définie par $f_r(t) := f(a + re^{it})$. Alors les coefficients de Fourier de f_r sont donnés par*

$$c_n(f_r) = \begin{cases} 0 & si\ n < 0 \\ c_n r^n & si\ n \geqslant 0 \end{cases}$$

On a donc

$$c_n r^n = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})e^{-int}\frac{dt}{2\pi} \quad \textit{pour tout } n \geqslant 0.$$

(3) *Si f est* continue sur le disque fermé $\overline{D}(a, R)$ *et holomorphe dans le disque $D(a, R)$, alors (2) est encore valable pour $r = R$.*

Démonstration. (1) a déjà été démontré : *cf* la Proposition 3.13.

(2) On a

$$f_r(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\big((a + re^{it} - a\big)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n r^n e^{int},$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$ (donc uniformément) ; donc il suffit d'appliquer le Lemme 1.3 du Chapitre 1.

(3) Si f est continue sur le disque fermé $\overline{D}(a,R)$, elle est bornée sur $\overline{D}(0,R)$ puisque $\overline{D}(0,R)$ est compact, et $f_r(t) \to f_R(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ quand $r \to R^-$. Par convergence dominée, on en déduit (exo) que $c_n(f_r) \xrightarrow{r\to R^-} c_n(f_R)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$; d'où le résultat. □

Corollaire 5.4. (formule de la moyenne)
Si f est une fonction holomorphe dans un disque $D(a,R)$, alors on a pour tout $0 < r < R$:

$$f(a) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, \frac{dt}{2\pi}\cdot$$

Si f est de plus continue sur le disque fermé $\overline{D}(a,R)$, alors cette formule est encore valable pour $r = R$.

Démonstration. Si on écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, alors $f(a) = c_0$; donc le résultat est immédiat par la Proposition 5.3. □

Corollaire 5.5. *Si f est une fonction holomorphe dans un disque $D(a,R)$ et si on écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$, alors*

$$\forall 0 < r < R \ :\ \sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})|^2\, \frac{dt}{2\pi}\cdot$$

Si f est de plus continue sur $\overline{D}(a,R)$, alors cette formule est encore valable pour $r = R$.

Démonstration. Cela découle de la Proposition 5.3 et de la *formule de Parseval* appliquée aux fonctions continues 2π-périodiques f_r. □

Chapitre 3

Quelques propriétés des fonctions holomorphes

1. Zéros des fonctions holomorphes

NOTATION 1.1. *Si f est une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, on pose*

$$Z(f) = \{a \in \Omega;\ f(a) = 0\}\,.$$

On dit que $Z(f)$ est l'ensemble des ***zéros*** *de la fonction f.*

1.1. Factorisation. On sait que si P est un polynôme à coefficients complexes et si a est une racine de P, alors on peut factoriser $P(z)$ sous la forme $P(z) = (z-a)^p Q(z)$, où $p \geqslant 1$ et Q est un polynôme tel que $Q(a) \neq 0$. Le théorème suivant généralise cette propriété algébrique à toutes les fonctions holomorphes.

THÉORÈME 1.2. (théorème de factorisation)
Soit Ω un ouvert ***connexe*** *de $\mathbb{C}$ et soit $f \in H(\Omega)$* ***non identiquement nulle****. Pour tout point $a \in Z(f)$, il existe un entier $p \geqslant 1$ et une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tels que*

(i) $\forall z \in \Omega\ :\ f(z) = (z-a)^p g(z)\,;$

(ii) *g est holomorphe et $g(a) \neq 0$.*

L'entier p et la fonction g sont déterminés de manière unique par (i) *et* (ii)*. On dit que p est la* ***multiplicité*** *de a comme zéro de f.*

Pour la preuve du théorème, on aura besoin du lemme suivant.

LEMME 1.3. *Soit $f \in H(\Omega)$ et soit $A = \{a \in \Omega;\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ f^{(n)}(a) = 0\}$. Alors A est à la fois ouvert et fermé dans Ω.*

Démonstration. Comme toutes les fonctions $f^{(n)}$ sont continues, il est clair que $A = \bigcap_n Z(f^{(n)})$ est un fermé de Ω.

Soit $a \in A$ quelconque. Comme $a \in \Omega$, on peut choisir $r > 0$ tel que $D(a,r) \subset \Omega$; et comme f est holomorphe, on a alors

$$\forall z \in D(a,r)\ :\ f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n\,.$$

Comme $f^{(n)}(a) = 0$ pour tout n (puisque $a \in A$), on voit ainsi que f est identiquement nulle sur le disque ouvert $D(a,r)$, et donc $f^{(n)} \equiv 0$ sur $D(a,r)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, $D(a,r)$ est contenu dans A. Comme a est un point quelconque de A, cela prouve que A est un ouvert de Ω.

□

COROLLAIRE 1.4. *Si Ω est connexe et si $f \in H(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle alors, pour tout point $a \in \Omega$, il existe un entier n tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$.*

Démonstration. Par connexité, l'ensemble A est soit vide soit égal à Ω. Comme f n'est pas identiquement nulle, on a $A \neq \Omega$; donc $A = \varnothing$, ce qui est la conclusion souhaitée. □

Remarque. On sait bien que ce dernier résultat n'est pas valable pour les fonctions d'une variable réelle. Par exemple, la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := e^{1/x}$ pour $x > 0$ et $f(x) := 0$ pour $x \leqslant 0$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et vérifie $f^{(n)}(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, mais elle n'est pas identiquement nulle.

Preuve du théorème de factorisation. Fixons $a \in Z(f)$.

Montrons d'abord l'existence de l'entier p et de la fonction g. Par le lemme (et son corollaire), on peut poser

$$p = \min\{n \in \mathbb{N};\ f^{(n)}(a) \neq 0\}\,.$$

Alors $p \geqslant 1$ car $f^{(0)}(a) = f(a) = 0$; et par définition de p, on a $f^{(p)}(a) \neq 0$ et $f(a) = \cdots = f^{(p-1)}(a) = 0$.

Choisissons $r > 0$ tel que $D(a, r) \subset \Omega$. Si $z \in D(a, r)$, alors

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n \\
&= \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^n \\
&= (z-a)^p \sum_{n=p}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}\,(z-a)^{n-p} \\
&= (z-a)^p \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(p+k)}(a)}{(p+k)!}\,(z-a)^k\,.
\end{aligned}$$

La série entière $\sum_{k\geqslant 0} \frac{f^{(p+k)}(a)}{(p+k)!}\,(z-a)^k$ (série entière en $z - a$) converge en tout point $z \in D(a, r)$, donc la fonction

$$\widetilde{g}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(p+k)}(a)}{(p+k)!}\,(z-a)^k$$

est bien définie et holomorphe sur $D(a, r)$. Par définition, on a $\widetilde{g}(a) = \frac{f^{(p)}(a)}{p!} \neq 0$, et

$$f(z) = (z-a)^p\,\widetilde{g}(z)$$

pour tout $z \in D(a, r)$.

Définissons alors une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$ par

$$g(z) = \begin{cases} \widetilde{g}(a) & \text{si } z = a \\ \frac{f(z)}{(z-a)^p} & \text{si } z \neq a \end{cases}$$

La fonction g est visiblement holomorphe sur $\Omega\backslash\{a\}$, et elle l'est également au voisinage de a car $g \equiv \widetilde{g}$ sur $z \in D(a, r)$. Donc g est holomorphe sur Ω. De plus, on a $g(a) = \widetilde{g}(a) \neq 0$ et $f(z) = (z-a)^p g(z)$ pour tout $z \in \Omega$ par définition de g.

Pour démontrer l'unicité, supposons que (p_1, g_1) et (p_2, g_2) vérifient (i) et (ii). Alors

$$(z-a)^{p_1} g_1(z) = f(z) = (z-a)^{p_2} g_2(z) \tag{1.1}$$

pour tout $z \in \Omega$. Si $p_1 \neq p_2$, on a par exemple $p_1 < p_2$ et donc $g_1(z) = (z-a)^{p_2-p_1} g_2(z)$. En particulier, on obtient $g_1(a) = 0$, ce qui est exclu. Donc $p_1 = p_2$. On en déduit $g_1(z) = g_2(z)$ pour $z \neq a$ en divisant par $(z-a)^{p_1} = (z-a)^{p_2}$ dans (1.1), donc également $g_1(a) = g_2(a)$ par continuité, et ainsi $g_1 = g_2$.

□

1.2. Le principe des zéros isolés. Le résultat suivant est une conséquence immédiate du théorème de factorisation.

THÉORÈME 1.5. (principe des zéros isolés)
Soit Ω un ouvert connexe *de $\mathbb{C}$. Si $f \in H(\Omega)$ n'est pas identiquement nulle, alors tous les zéros de f sant* ***isolés*** *: pour tout $a \in Z(f)$, on peut trouver un voisinage ouvert V de a tel que f n'a pas d'autre zéro que a dans V.*

Démonstration. Soit $a \in Z(f)$, et écrivons $f(z) = (z-a)^p g(z)$ comme dans le théorème de factorisation. Comme $g(a) \neq 0$ et comme g est continue au point a, on peut trouver un voisinage ouvert V de a tel que $g(z) \neq 0$ pour tout $z \in V$. Alors $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in V$ différent de a, donc le voisinage V convient. □

Exemple. Si $f(z) = \cos z$, alors $Z(f) = \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$: on voit bien que les zéros de f sont isolés !

RAPPEL. Soit $A \subset \mathbb{C}$, et soit $w \in A$. On dit que w est un **point d'accumulation de** A si tout voisinage de w contient une infinité de points de A.

Exercice 1. Montrer que w est un point d'accumulation de A si et seulement si il existe une suite (a_n) de points de A telle que $a_n \to w$ et $a_n \neq w$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 2. Montrer que tout point d'accumulation de A appartient à $\overline{A}$, et que tout point $w \in \overline{A} \backslash A$ est un point d'accumulation de A.

Exemples.

(1) L'ensemble $A = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ possède 1 point d'accumulation, à savoir $w = 0$.
(2) Si W est un ouvert de $\mathbb{C}$, alors tout point de W est un point d'accumulation de W.
(3) Si I est un segment nontrivial de $\mathbb{C}$, alors tout point de I est un point d'accumulation de I.

COROLLAIRE 1.6. *Si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $Z(f)$ ne possède pas de points d'accumulation dans Ω.*

Démonstration. C'est évident par le principe des zéros isolés. □

Remarque. En revanche, $Z(f)$ peut possèder des points d'accumulation en dehors de Ω. Par exemple, $f(z) = \sin(1/z)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et $Z(f) = \{\frac{1}{n\pi};\ n \in \mathbb{Z}^*\}$ admet 0 comme point d'accumulation.

COROLLAIRE 1.7. (principe d'identité)
Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$.

(1) *S'il existe un ensemble $A \subset \Omega$ possèdant un point d'accumulation dans Ω tel que $f(\xi) = g(\xi)$ pour tout $\xi \in A$, alors $f = g$.*
(2) *En particulier :*
   (i) *s'il existe un ouvert non-vide $W \subset \Omega$ tel que $f \equiv g$ sur W, alors $f = g$;*
   (ii) *s'il existe un segment nontrivial $I \subset \Omega$ tel que $f \equiv g$ sur I alors $f = g$.*

Exemple. Considérons la “formule d’addition”

$$\cos(u+v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)\,.$$

On sait que cette formule est vraie pour $u, v \in \mathbb{R}$. Pour $u \in \mathbb{R}$ fixé, les deux fonctions $f(v) = \cos(u+v)$ et $g(v) = \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$ sont holomorphes sur $\mathbb{C}$ et $f \equiv g$ sur $\mathbb{R}$; donc $f = g$ par le principe d’identité, autrement dit la formule d’addition est vraie pour $u \in \mathbb{R}$ et $v \in \mathbb{C}$ quelconque. En fixant maintenant $v \in \mathbb{C}$ et en appliquant le même raisonnement aux fonctions $u \mapsto \sin(u+v)$ et $u \mapsto \cos(u)\cos(v) - \sin(u)\sin(v)$, on conclut que la formule d’addidtion est vraie pour $u, v \in \mathbb{C}$ quelconques.

Corollaire 1.8. *Si f est une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors*

(i) *$Z(f) \cap K$ est fini pour tout compact $K \subset \Omega$;*

(ii) *$Z(f)$ est* ***dénombrable****.*

Démonstration. (i) Soit K un compact de Ω. Si $Z(f) \cap K$ était infini, on pourrait trouver une suite de points deux à deux distincts dans $Z(f) \cap K$. Par compacité, on pourrait en extraire une sous-suite convergente, et on obtiendrait ainsi une suite $(a_n) \subset Z(f) \cap K$ convergeant vers un point $a \in K$, les a_n étant deux à deux distincts. Alors a est un point d’accumulation de l’ensemble $\{a_n;\ n \in \mathbb{N}\}$, donc un point d’accumulation de $Z(f)$, ce qui est impossible puisque $a \in \Omega$.

La partie (ii) découle de (i) et du fait suivant, dont la preuve est laissée en exercice.

Fait. L’ouvert Ω est réunion dénombrable de compacts. Plus précisément, si on pose $K_n = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant n \text{ et } \operatorname{dist}(z, \mathbb{C}\backslash\Omega) \geqslant 2^{-n}\}$, alors les K_n sont compacts et $\Omega = \bigcup_0^\infty K_n$.

En effet, en écrivant $Z(f) = \bigcup_0^\infty Z(f) \cap K_n$, on voit que $Z(f)$ est une réunion dénombrable d’ensembles finis, donc un ensemble dénombrable.

□

Exercice. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que si f et g sont deux fonctions holomorphes sur Ω telles que $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$. En termes algébriques, cela signifie que $H(\Omega)$ est un anneau **intègre**.

2. Théorème de Liouville

2.1. Cauchy.

Le résultat suivant est souvent très utile.

Lemme 2.1. (inégalités de Cauchy)
Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(0,R)$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Pour $0 \leqslant r < R$, posons $M(r) = \sup\{|f(\xi)|;\ |\xi| = r\}$. Avec ces notations, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}\ :\ |c_n| r^n \leqslant M(r)\,.$$

Démonstration. C’est évident en écrivant la formule de la moyenne

$$c_n r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(re^{it})e^{-int}\,dt$$

et en majorant le module de l’intégrale :

$$|c_n|\,r^n \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} M(r)\,dt = M(r)\,.$$

□

2.2. Liouville.

DÉFINITION 2.2. *Une **fonction entière** est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ tout entier.*

THÉORÈME 2.3. *Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction entière. On suppose qu'il existe des constantes A, B et k telles que*

$$\forall z \in \mathbb{C} \ : \ |f(z)| \leqslant A + B\,|z|^k\,.$$

Alors f est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à k.

Démonstration. Écrivons $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. D'après les inégalités de Cauchy, on a

$$\begin{aligned} |c_n|\,r^n &\leqslant \sup\{|f(\xi)|;\ |\xi| = r\} \\ &\leqslant A + B\,r^k \end{aligned}$$

pour tout $r > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, et donc

$$|c_n| \leqslant \frac{A}{r^n} + \frac{B}{r^{n-k}}\,.$$

En faisant tendre r vers l'infini, on en déduit $c_n = 0$ pour tout $n > k$; donc $f(z) = \sum_{n \leqslant k} c_n z^n$, et f est polynomiale de degré au plus k.

□

COROLLAIRE 2.4. *Si f est une fonction entière et si $f(z)$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$, alors $f = 0$.*

Démonstration. Comme f est continue, l'hypothèse entraine que f est bornée sur $\mathbb{C}$, et donc constante par le théorème de Liouville ; et comme $f(z) \to 0$ quand $|z| \to \infty$, la constante vaut 0. □

Le "théorème de Liouville" proprement dit est le corollaire suivant :

COROLLAIRE 2.5. *Toute fonction entière bornée est constante.*

Démonstration. On applique le théorème avec $k = 0$, $A = 0$ et une constante B telle que $|f(z)| \leqslant B = 0 + B\,|z|^0$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. La conclusion est que f est une fonction polynomiale de degré $\leqslant 0$, c'est-à-dire une fonction constante. □

2.3. D'Alembert-Gauss. Comme illustration du théorème de Liouville, on va démontrer le "théorème fondamental de l'algèbre", qu'on appelle également "théorème de d'Alembert-Gauss".

THÉORÈME 2.6. *Si P est un polynôme non constant à coefficients complexes, alors P possède au moins une racine dans $\mathbb{C}$.*

COROLLAIRE 2.7. *Tout polynôme P à coefficients complexes de degré $n \geqslant 1$ peut se décomposer sous la forme $P(z) = C\,(z-\alpha_1)\cdots(z-\alpha_n)$, où $C, \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.*

Démonstration. On sait que si α est une racine de P, alors on peut écrire $P(z) = (z-\alpha)Q(z)$, où Q est un polynôme de degré $n-1$. Le résultat se déduit donc du théorème en raisonnant par récurrence sur $n = \deg(P)$. □

Preuve du théorème. Supposons que P ne possède aucune racine dans $\mathbb{C}$. Alors

$$f(z) = \frac{1}{P(z)}$$

est bien défini pour tout $z \in \mathbb{C}$, et f est une fonction entière. De plus, comme le polynôme P est non constant, on vérifie facilement que $|P(z)|$ tend vers l'infini quand $|z| \to \infty$. Donc $f(z)$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$, et par conséquent $f = 0$, ce qui est absurde puisque f ne s'annule pas. $\square$

3. Principe du maximum

3.1. La version de base. Il existe de nombreuses versions du “principe du maximum”, valables pour diverses catégories de fonctions. Pour les fonctions holomorphes, le rśultat de base s'énonce comme suit.

Théorème 3.1. *Soit Ω un ouvert **borné** de $\mathbb{C}$, et soit $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction **continue sur** $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω.*

(1) *Pour tout point $z \in \Omega$, on a $|f(z)| \leqslant \sup\limits_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|$.*

(2) *Si Ω est **connexe** et si f est **non constante**, alors l'inégalité précédente est stricte : $|f(z)| < \sup\limits_{\xi \in \partial\Omega} |f(\xi)|$ pour tout $z \in \Omega$.*

Démonstration. On démontre d'abord (2). Supposons donc que Ω est connexe et que f n'est pas constante. Posons $M = \sup_{\xi \in \overline{\Omega}} |f(\xi)|$. Il suffit de montrer qu'on a

$$\forall z \in \Omega \ : \ |f(z)| < M. \tag{3.1}$$

En effet, comme $\overline{\Omega}$ est compact (car Ω est borné) et f continue, on peut trouver $\xi_0 \in \overline{\Omega}$ tel que $|f(\xi_0)| = M$. Si (3.1) est vraie alors nécessairement $\xi_0 \in \partial\Omega$, donc $M = \sup_{\partial\Omega} |f|$ et donc $|f(z)| < \sup_{\partial\Omega} |f|$ pour tout $z \in \Omega$ (à nouveau grâce à (3.1)). La preuve de (3.1) repose sur le fait suivant :

Fait. L'ensemble $A = \{z \in \Omega;\ |f(z)| = M\}$ est ouvert et fermé dans Ω.

Preuve du Fait. L'ensemble A est fermé dans Ω car la fonction $|f|$ est continue. Pour montrer que A est ouvert, fixons $z_0 \in A$. Il s'agit de trouver $r_0 > 0$ tel que $D(z_0, r_0) \subset A$. On va en fait montrer que n'importe quel r_0 tel que $D(z_0, r_0) \subset \Omega$ convient. Fixons un tel r_0.

D'après la formule de la moyenne, on a pour tout $r \in [0, r_0[$:

$$\begin{aligned} M = |f(z_0)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta \right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta\,. \end{aligned}$$

En écrivant $M = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} M\, d\theta$ on en déduit

$$\int_0^{2\pi} \Big(M - |f(z_0 + re^{i\theta})| \Big)\, d\theta = 0\,.$$

La fonction de θ apparaissant sous l'intégrale étant continue et *positive* par définition de M, elle est donc identiquement nulle sur $[0, 2\pi]$. Ainsi, on a $|f(z_0 + re^{i\theta})| = M$ pour tout $r \in [0, r_0[$ et pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, autrement dit $|f(z)| \equiv M$ sur $D(z_0, r_0)$, ou encore $D(z_0, r_0) \subset A$. $\square$

Par connexité de Ω, l'ensemble A est soit vide, soit égal à Ω tout entier. Si $A = \Omega$, alors la fonction $|f|$ est constante sur Ω. On a donc $\Delta|f|^2 \equiv 0$ sur $D(z_0, r)$, et comme $\Delta|f|^2 = 4|f'|^2$ (exo), cela montre que f est constante sur Ω puisque Ω est supposé connexe. Par continuité, f est constante sur $\overline{\Omega}$, ce qui est exclu par hypothèse. On ne peut donc pas avoir $A = \Omega$. Ainsi $A = \varnothing$, ce qui démontre (3.1) et donc (2).

Pour démontrer (1), fixons $z \in \Omega$, et notons Ω_z la **composante connexe** de Ω contenant z. Comme Ω est ouvert, on sait que Ω_z est un *ouvert* (borné) de $\mathbb{C}$, et on a $\partial\Omega_z \subset \partial\Omega$. Si la fonction f est constante sur $\overline{\Omega_z}$, alors $|f(z)| = \sup_{\partial\Omega_z} |f| \leqslant \sup_{\partial\Omega} |f|$. Si f n'est pas constante sur $\overline{\Omega_z}$, alors $|f(z)| < \sup_{\partial\Omega_z} |f|$ d'après (2) appliqué à $f_{|\overline{\Omega_z}}$, et donc $|f(z)| < \sup_{\partial\Omega} |f|$. □

Remarque. On peut aussi énoncer une version du principe du maximum en remplaçant $|f|$ par $\mathrm{Re}(f)$. La démonstration est identique, le seul point à vérifier étant que si $u = \mathrm{Re}(f)$ est constante et si Ω est connexe, alors f est constante. Mais ceci est clair car $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}\right) = \frac{1}{2} f'$, et donc $f' = 0$ si u est constante.

Corollaire 3.2. ("principe du maximum local")
Soit Ω un ouvert ***connexe*** *de $\mathbb{C}$. Si $f \in H(\Omega)$ et si $|f|$ possède un* ***maximum local*** *en un point de Ω, alors f est constante. En particulier, si $|f|$ possède un maximum sur Ω, alors f est constante.*

Démonstration. Supposons que $|f|$ possède un maximum local en un point $z_0 \in \Omega$. On peut alors trouver un disque ouvert D centré en z_0 tel que $\overline{D} \subset \Omega$ et $|f(z_0)| \geqslant |f(\xi)|$ pour tout $\xi \in \overline{D}$, donc en particulier pour tout $\xi \in \partial D$. D'après le principe du maximum, la fonction f est constante sur D, donc constante sur Ω d'après le principe d'identité. □

Corollaire 3.3. ("principe du minimum local")
Soit Ω un ouvert ***connexe*** *de $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe* ***non constante*** *et si $|f|$ possède un* ***minimum local*** *en un point $z_0 \in \Omega$, alors $f(z_0) = 0$.*

Démonstration. Supposons que $f(z_0) \neq 0$. Par continuité, on peut alors trouver un disque ouvert D centré en z_0 tel que f ne s'annule pas sur D. La fonction $g = 1/f$ est bien définie et holomorphe sur D, et $|g| = 1/|f|$ possède un maximum local en z_0. Comme D est connexe, le principe du maximum local assure que g est constante sur D. Ainsi, f est constante sur D, donc constante sur Ω d'après le principe d'identité, ce qui est exclu par hypothèse.

□

Exercice. Démontrer le théorème fondamental de l'algèbre en utilisant le principe du minimum local.

3.2. Un résultat plus général (pas fait en cours). Le principe du maximum n'est pas réservé aux seules fonctions holomorphes :

Théorème 3.4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, et soit $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$ et de classe $\mathcal{C}^2$ dans Ω. On suppose que le Laplacien Δu est partout $\geqslant 0$ dans Ω.*

(a) *Pour tout point $z \in \Omega$, on a $u(z) \leqslant \sup_{\xi \in \partial\Omega} u(\xi)$.*

(b) *Si Ω est connexe et si u n'est pas constante, alors l'inégalité précédente est stricte.*

Les remarques suivantes montrent que ce résultat est plus général que le théorème 3.1.

REMARQUE 3.5. Si $n = 2$ et si $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et holomorphe dans Ω, on peut appliquer le théorème 3.4 à la fonction $u = |f|^2$ car $\Delta u = 4|f'|^2 \geqslant 0$, et on déduit immédiatement de (a) la partie (1) du théorème 3.1. De plus, si Ω est connexe alors u est constante si et seulement si f l'est (toujours à cause de l'identité $\Delta u = 4|f'|^2$), donc on retrouve la partie (2) du théorème 3.1 en appliquant (b).

On peut aussi appliquer le théorème 3.4 à la fonction $u = \mathrm{Re}(f)$, car $\Delta u = 2\frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}(f + \overline{f}) = 0$. Si Ω est connexe, alors u est constante si et seulement si f l'est car $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial (f+\bar{f})}{\partial z} = \frac{1}{2} f'$. On obtient ainsi une version du théorème 3.1 ou $|f|$ est remplacé par $\mathrm{Re}(f)$.

On ne démontrera le théorème 3.4 que pour $n = 2$. La preuve repose sur le lemme suivant.

LEMME 3.6. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et soit u une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur Ω vérifiant $\Delta u \geqslant 0$. Alors u possède la* ***propriété de sous-moyenne*** *: pour tout disque fermé $\overline{D}(z_0, r) \subset \Omega$, on a*

$$u(z_0) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Démonstration. Fixons un disque $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$, et pour $r \in [0, r_0]$, posons

$$I(r) = \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta.$$

Comme la fonction $F(r, \theta) = u(z_0 + re^{i\theta})$ possède une dérivée partielle $\frac{\partial F}{\partial r}$ continue sur $[0, r_0] \times [0, 2\pi]$, la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, r_0]$ d'après le théorème le plus élémentaire sur les intégrales à paramètres, et on peut dériver sous l'intégrale. Le point clé est le fait suivant :

FAIT. Pour $r > 0$ on a $I'(r) = \dfrac{1}{r} \displaystyle\int_{\overline{D}(z_0,r)} \Delta u(x, y)\, dxdy.$

Preuve du Fait. Écrivons $z_0 = (x_0, y_0)$. En dérivant sous l'intégrale, on trouve

$$\begin{aligned} r\, I'(r) &= \int_0^{2\pi} r\, \frac{\partial}{\partial r}\Big[u(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\Big]\, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[r\cos\theta\, \frac{\partial u}{\partial x}(x_r(\theta), y_r(\theta)) + r\sin\theta\, \frac{\partial u}{\partial y}(x_r(\theta), y_r(\theta))\right] d\theta\,, \end{aligned}$$

où on a posé $(x_r(\theta), x_r(\theta)) = (x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)$. Comme $\gamma_r(\theta) = (x_r(\theta), y_r(\theta))$ paramètre le cercle $\partial D(z_0, r)$, avec $dx = -r\sin\theta\, d\theta$ et $dy = r\cos\theta\, d\theta$, on en déduit

$$r\, I'(r) = \int_{\partial D(z_0,r)} -\frac{\partial u}{\partial y}\, dx + \frac{\partial u}{\partial x}\, dy\,.$$

D'après la formule de Green-Riemann (qui sera démontrée au Chapitre 4), cela s'écrit encore

$$r\, I'(r) = \int_{\overline{D}(z_0,r)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) dxdy,$$

ce qui est le résultat annoncé. □

Par hypothèse sur u, on a donc $rI'(r) \geqslant 0$ pour tout $r > 0$. Ainsi, la fonction I est croissante sur $]0, r_0]$, donc sur $[0, r_0]$ par continuité. En particulier, on a $I(0) \leqslant I(r_0)$, autrement dit $2\pi\, f(z_0) \leqslant \int_0^{2\pi} f(z_0 + r_0 e^{i\theta})\, d\theta$.

□

Remarque 3.7. On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est **harmonique** si elle vérifie $\Delta u = 0$. En appliquant le lemme précédent à u et à $-u$, on voit que si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique, alors u possède la **propriété de la moyenne**, i.e.

$$u(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

pour tout disque $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$. En fait, on peut montrer que la propriété de la moyenne caractérise les fonctions harmoniques : une fonction continue u est harmonique *si et seulement si* elle vérifie la propriété de la moyenne.

Preuve du théorème 3.4. Compte tenu du lemme 3.6, la preuve consiste à purement et simplement *recopier* celle du théorème 3.1 en remplaçant partout la fonction $|f|$ par la fonction u. Bien entendu, il faut aussi remplacer (1) par (a) et (2) par (b). □

3.3. Deux applications. On va maintenant utiliser le principe du maximum pour démontrer deux autres résultats importants.

Théorème 3.8. ("théorème de l'application ouverte", pas fait en cours)
*Soit Ω un ouvert **connexe** de $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et **non constante**, alors f est une application **ouverte** : l'image par f de tout ouvert $V \subset \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Soit $V \subset \Omega$ ouvert. Fixons $a \in V$ et posons $b = f(a)$. On veut montrer que $f(V)$ est un voisinage de b ; autrement dit, on cherche $r > 0$ tel que $D(b, r) \subset V$, ce qui signifie que pour tout $w \in D(b, r)$, on peut trouver $z \in V$ tel que $f(z) = b$.

Par hypothèse, f n'est pas constante. D'après le principe des zéros isolés appliqué à $g(z) = f(z) - b$, on peut donc trouver un disque ouvert D centré en a tel que $\overline{D} \subset V$ et $f(z) \neq b$ pour tout $z \in \overline{D} \backslash \{a\}$, en particulier pour tout $z \in \partial D$. Alors $\varepsilon := \inf\{|f(z)|;\ z \in \partial D\}$ est *strictement* positif par compacité de ∂D. On va montrer que $r = \varepsilon/2$ convient ; et plus précisément, que pour tout $w_0 \in D(b, \varepsilon/2)$, on peut trouver un point z_0 *dans* D tel que $f(z_0) = w_0$.

Fixons $w_0 \in D(b, \varepsilon/2)$ et posons $g(z) = f(z) - w_0$. Comme $\overline{D}$ est compact, $|g|$ possède un minimum sur $\overline{D}$, atteint en un point z_0. On a en particulier $|g(z_0)| \leqslant |g(a)| = |f(a) - w_0| = |b - w_0| < \varepsilon/2$. D'autre part, si $\xi \in \partial D$ alors

$$\begin{aligned} |g(\xi)| &= |f(\xi) - w_0| \\ &\geqslant |f(\xi) - b| - |b - w_0| \\ &\geqslant \varepsilon - \varepsilon/2 = \varepsilon/2\,. \end{aligned}$$

On en déduit que $z_0 \notin \partial D$, i.e. $z_0 \in D$. Comme D est ouvert et $|g(z_0)| \leqslant |g(z)|$ pour tout $z \in D$, cela montre que g possède un *minimum local* en z_0. D'après le corollaire 3.3, on a donc $g(z_0) = 0$, autrement dit $f(z_0) = w_0$. □

Théorème 3.9. ("lemme de Schwarz")
Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. On suppose qu'on a $f(0) = 0$ et $|f(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(1) *On a $|f(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et $|f'(0)| \leqslant 1$.*
(2) *S'il existe un point $a \neq 0$ tel que $|f(a)| = |a|$, ou si $|f'(0)| = 0$, alors f est une **rotation** : $f(z) \equiv \lambda\, z$, pour un certain $\lambda \in \mathbb{C}$ de module 1.*

Démonstration. Comme $f(0) = 0$, on peut écrire $f(z) = zg(z)$, pour une certaine fonction g holomorphe sur $\mathbb{D}$. On a de plus $g(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z} = f'(0)$. Fixons $z \in \mathbb{D}$. Si r vérifie $|z| < r < 1$ et si $\xi \in \partial D(0,r)$, alors $|g(\xi)| = \frac{1}{|\xi|}\,|f(\xi)| \leqslant \frac{1}{r}$ puisque $|f(\xi)| \leqslant 1$. D'après le principe du maximum, on a donc $|g(z)| \leqslant \frac{1}{r}$ pour tout r tel que $|z| < r < 1$, d'où $|g(z)| \leqslant 1$ en faisant tendre r vers 1. Ainsi, $|f(z)| = |zg(z)| \leqslant |z|$ pour tout $z \in \mathbb{D}$, et $|f'(0)| = |g(0)| \leqslant 1$.

Si $|f(a)| = |a|$ pour un certain $a \neq 0$, alors $|g(a)| = 1$; et si $|f'(0)| = 1$ alors $|g(0)| = 1$. Dans les deux cas $|g|$ admet un maximum (global) dans le disque $\mathbb{D}$, donc g est constante d'après le principe du maximum. On a ainsi $|g(z)| \equiv \lambda$, où la constante λ est de module 1 puisque $|g|$ atteint la valeur 1. Donc $f(z) \equiv \lambda\, z$ et f est une rotation. □

4. Développement en série de Laurent

On a vu que toute fonction holomorphe dans un disque $D(a,R)$ se développe en série entière dans ce disque, c'est à dire en série de puissances positives de $(z-a)$. On va maintenant démontrer un résultat analogue pour une fonction holomorphe dans une **couronne** centrée en a, c'est à dire un ensemble du type

$$C(a,r,R) = \{z \in \mathbb{C};\ r < |z-a| < R\}\,,$$

où $0 \leqslant r < R \leqslant \infty$. Remarquons que les valeurs $r = 0$ et $R = \infty$ sont autorisées. Si $r = 0$, alors $C(a,0,R)$ est le "disque épointé $D(a,R)\backslash\{a\}$; et si $R = \infty$, alors $C(a,r,\infty) = \{z \in \mathbb{C};\ |z-a| > r\}$. En particulier, $C(a,0,\infty) = \mathbb{C}\backslash\{a\}$.

Théorème 4.1. *Si f est une fonction holomorphe dans une couronne $C(a,r,R)$, il existe une unique suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que :*

(a) *la série $S^+(z) = \sum_{n\geqslant 0} c_n(z-a)^n$ converge pour tout z vérifiant $|z-a| < R$ et la série $S^-(z) = \sum_{n<0} c_n(z-a)^n$ converge pour tout z vérifiant $|z-a| > r$;*
(b) *pour tout $z \in C(a,r,R)$,*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n\,.$$

*De plus, la série $S^+(z)$ converge normalement sur tout disque $\{|z-a| \leqslant \rho\}$, $\rho < R$ et la série $S^-(z)$ converge normalement sur tout ensemble du type $\{|z-a| \geqslant \rho\}$, $\rho > r$. On dit que les c_n sont les **coefficients de Laurent** de f pour la couronne $C(a,r,R)$, et que la série $\sum c_n(z-a)^n$ est la **série de Laurent** de f pour la couronne $C(a,r,R)$.*

Remarque. Si f se trouve être en fait holomorphe dans le disque $D(0,R)$, alors (par *unicité* des coefficients) son développement de Laurent dans la couronne $D(a,R)\backslash\{a\}$ coïncide avec son développement en série entière dans $D(a,R)$. Autrement dit, on a $c_n = 0$ pour $n < 0$ et $c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ si $n \geqslant 0$.

Preuve du théorème 4.1. (i) Pour $r < \rho < R$, soit $f_\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction 2π-périodique définie par $f_\rho(t) := f(a + \rho e^{it})$. Comme f est holomorphe sur $C(a, r, R)$, la fonction f_ρ est de classe $\mathcal{C}^1$, donc on peut la développer en série de Fourier : on a ainsi

$$f(a + \rho e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f_\rho) e^{int},$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$; autrement dit

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n(f_\rho)| < \infty.$$

En procédant exactement comme dans la preuve du Théorème 5.1 du Chapitre 2, on montre qu'il existe une suite de coefficients $(c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ \forall r < \rho < R\ :\ c_n(f_\rho) = c_n \rho^n.$$

Si maintenant $z \in C(a, r, R)$ et si on écrit $z = a + \rho e^{it}$ avec $r < \rho < R$, alors on obtient

$$f(z) = f(a + \rho e^{it}) = f_\rho(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \rho^n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n,$$

où la série converge absolument.

(ii) Par (i), on a $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|\rho^n < \infty$ pour tout ρ vérifiant $r < \rho < R$. Donc, on a $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\rho^n < \infty$ pour tout $\rho < R$ et $\sum_{n=-\infty}^{-1} |c_n|\rho^n$ pour tout $\rho > r$ (exo) ; et par conséquent, la série $S^+(z)$ converge pour tout z vérifiant $|z - a| < R$ et la série $S^-(z)$ converge pour tout z vérifiant $|z - a| > r$.

(iii) La convergence normale des deux séries $S^+(z)$ et $S^-(z)$ est claire, car ce sont des séries entières en $u = z - a$ et $v = \frac{1}{z-a}$ respectivement, qui convergent en tout point des disques $\{|u| < R\}$ et $\{|v| < 1/r\}$.

(iv) Montrons maintenant l'unicité. Soit $(c'_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de coefficients vérifiant (a) et (b). Soit ρ vérifiant $0 < \rho < R$. Avec les notations de (i), on a pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$f_\rho(t) = f(a + \rho e^{it}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c'_n \rho^n e^{int}.$$

De plus, les deux séries $\sum_{n\geqslant 0} c'_n (z - a)^n$ et $\sum_{n<0} c'_n (z - a)^n$ convergent normalement sur le cercle $\{|z - a| = \rho\}$ par le raisonnement de (iii), donc la série $\sum c'_n \rho^n e^{int}$ converge normalement sur $\mathbb{R}$. Par conséquent, on a nécessairement $c'_n \rho^n = c_n(f_\rho)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, et donc $c'_n = c_n$. $\square$

Remarque 4.2. Soit f une fonction holomorphe dans une couronne $C = C(a, r, R)$, et notons c_n ses coefficients de Laurent pour la couronne C. La preuve du Théorème 4.1 a établi le fait suivant : pour tout $r < \rho < R$, les $c_n \rho^n$ sont les coefficients de Fourier de la fonction 2π-périodique $f_\rho : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par $f_\rho(t) := f(a + \rho e^{it})$. Autrement dit, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, on a

$$c_n \rho^n = \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{it}) e^{-int} \frac{dt}{2\pi},$$

pour n'importe quel ρ tel que $r < \rho < R$.

Exemple 4.3. Pour déterminer un développement en série de Laurent dans une couronne centrée en a, une stratégie souvent efficace est la suivante : on exprime tout en fonction de $u = z - a$ et on essaye de se ramener à des expressions du type $\frac{1}{1-cu}$ avec $|cu| < 1$ ou $\frac{1}{1-(c/u)}$ avec $|c/u| < 1$.

Cherchons par exemple les développements en série de Laurent de $f(z) = \frac{1}{z^2-4}$ dans les couronnes $C_2 = \{0 < |z-2| < 4\}$ et $C_{-2} = \{0 < |z+2| < 4\}$.

Pour $z \in C_2$, on écrit

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{1}{(z-2)(z+2)} &= \frac{1}{z-2} \times \frac{1}{4+(z-2)} \\ &= \frac{1}{4(z-2)} \times \frac{1}{1+\frac{z-2}{4}} \\ &= \frac{1}{4(z-2)} \times \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{z-2}{4}\right)^k \\ &= \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+2}} (z-2)^n . \end{aligned}$$

Pour $z \in C_{-2}$, le raisonnement est analogue et les détails laissés en exercice.

Application. Singularités “éliminables”.

Comme illustration de l'existence du développement de Laurent, on va démontrer l'important résultat suivant. (On parlera plus en détails des “singularités isolées” d'une fonction holomorphe dans la prochaine section).

Proposition 4.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, soit $a \in \Omega \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega \backslash \{a\}$. On suppose que f est* ***bornée*** *au voisinage de a. Alors f se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω. On dit que le point a est une* ***singularité éliminable*** *pour f.*

Démonstration. Choisissons $r > 0$ et une constante M tels que $D(a, r) \subset \Omega$ et $|f(z)| \leqslant M$ pour tout $z \in D(a, r) \backslash \{a\}$. D'après le théorème 4.1, on peut développer la fonction f en série de Laurent dans la *couronne* $D(a, r) \backslash \{a\} = \{0 < |z - a| < r\}$:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-a)^n .$$

On sait que pour tout $\rho \in]0, r[$, on a $c_n \rho^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta$. Comme de plus $|f(a + \rho e^{i\theta})| \leqslant M$ sur $[0, 2\pi]$, on a donc $\left|\int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta})\, e^{-in\theta} d\theta\right| \leqslant 2\pi M$, et par suite

$$|c_n| \leqslant M\, \rho^{-n}$$

pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Si $n < 0$, on en déduit $|c_n| \leqslant 0$ en faisant tendre ρ vers 0. Ainsi, on a $c_n = 0$ pour tout $n < 0$. Par conséquent :

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

pour tout $z \in D(a, r) \backslash \{a\}$. La série entière $\sum_{n \geqslant 0} c_n (z-a)^n$ converge en tout point de $D(a, r) \backslash \{a\}$, et aussi bien sûr pour $z = a$; elle définit donc une fonction holomorphe $g : D(a, r) \to \mathbb{C}$ qui coïncide avec f sur $D(a, r) \backslash \{a\}$ par définition. Si maintenant on pose $\widetilde{f}(a) = g(a)$ et $\widetilde{f}(z) = f(z)$ pour $z \neq a$, alors $\widetilde{f}$ est holomorphe sur $\Omega \backslash \{a\}$ et aussi au voisinage de a car $\widetilde{f} \equiv g$ sur $D(a, r)$. Donc $\widetilde{f} \in H(\Omega)$, et $\widetilde{f}$ prolonge f par définition. $\square$

COROLLAIRE 4.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $a \in \Omega$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction* ***continue*** *sur Ω et holomorphe* ***sur*** *$\Omega \backslash \{a\}$, alors f est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. Par continuité, f est bornée au voisinage de a, donc a est une singularité éliminable pour $f_{|\Omega\backslash\{a\}}$. Il existe ainsi une fonction $\widetilde{f}$ holomorphe sur Ω qui coïncide avec f sur $\Omega\backslash\{a\}$. Par continuité, on a aussi $\widetilde{f}(a) = f(a)$, donc $f = \widetilde{f}$ et par suite f est holomorphe sur Ω. $\square$

Chapitre 4

Intégrale curviligne

1. Définition et propriétés élémentaires

1.1. Définitions.

DÉFINITION 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Un* ***chemin dans*** *Ω est une application continue $\gamma : [a,b] \to \Omega$, où $[a,b]$ est intervalle compact de $\mathbb{R}$. On dit qu'un chemin $\gamma : [a,b] \to \Omega$ est* ***fermé*** *(ou encore que γ est un* ***lacet****) si on a $\gamma(b) = \gamma(a)$.*

On dit qu'un chemin γ est **de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux** si on peut subdiviser son intervalle de paramétrage $[a,b]$ en intervalles $[a_0,a_1],[a_1,a_2],\dots,[a_{N-1},a_N]$ sur lesquels γ est de classe $\mathcal{C}^1$.

DÉFINITION 1.2. *Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image Γ et si ω est une 1-forme différentielle continue sur un ouvert Ω contenant Γ, on définit l'****intégrale de*** *ω* ***sur*** *γ par la formule*

$$\int_\gamma \omega := \int_a^b \omega(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\,.$$

Remarque 1. Cette définition a bien un sens car la fonction sous l'intégrale (qui est définie sauf en un nombre fini de points) est continue par morceaux sur $[a,b]$.

Remarque 2. Pour que l'intégrale curviligne $\int_\gamma \omega$ ait un sens, il suffit en fait que ω soit définie et continue sur l'image Γ de γ.

PRATIQUE DU CALCUL.

(1) *Cas où ω s'écrit $Pdx + Qdy$.*

En écrivant $\gamma(t) = (x(t),y(t))$, on a $\omega(\gamma(t)) = P(x(t),y(t))\pi_1 + Q(x(t),y(t))\pi_2$ pour tout $t \in [a,b]$, où π_1 et π_2 sont les deux "applications linéaires coordonnées". Donc $\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = P(x(t),y(t))x'(t) + Q(x(t),y(t))y'(t)$, et on obtient

$$\int_\gamma Pdx + Qdy = \int_a^b P(x(t),y(t))\,x'(t)dt + \int_a^b Q(x(t),y(t))\,y'(t)dt\,.$$

Pour calculer $\int_\gamma Pdx + Qy$, on procède donc "mécaniquement" comme suit : on pose

$$x = x(t)\ ,\ y = y(t)\ ,\ dx = x'(t)dt\ ,\ dy = y'(t)dt\,,$$

et on intègre entre a et b.

Exemple. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et notons $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $P(x,y) = f(x)$. Soit également $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $v \in \mathbb{R}$. Si on note $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ le chemin défini par $\gamma(t) := t + iv = (t,v)$, alors

$$\int_\gamma Pdx = \int_a^b f(x)\,dx\,.$$

Ainsi, l'intégrale des fonctions d'une variable est un cas particulier d'intégrale curviligne.

(2) *Cas où ω s'écrit $Adz + Bd\bar{z}$.*

Dans ce cas, on a $\omega(\gamma(t)) = A(\gamma(t))I + B(\gamma(t))\bar{I}$ pour tout $t \in [a,b]$, où $I(h) = h$ et $\bar{I}(h) = \bar{h}$. Donc $\omega(\gamma(t))\gamma'(t) = A(\gamma(t)) \times \gamma'(t) + B(\gamma(t)) \times \overline{\gamma'(t)}$ et donc

$$\int_\gamma Adz + Bd\bar{z} = \int_a^b A(\gamma(t))\,\gamma'(t)dt + \int_a^b B(\gamma(t))\,\overline{\gamma'(t)}dt\,.$$

Ainsi, pour calculer $\int_\gamma Adz + Bd\bar{z}$, on pose

$$z = \gamma(t) \quad , \quad dz = \gamma'(t)dt \quad , \quad d\bar{z} = \overline{\gamma'(t)}\,dt,$$

et on intègre entre a et b.

Exemple. Soit $R > 0$, et soit $\gamma_R : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin (fermé) défini par $\gamma(t) := Re^{it}$. Alors

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z} = 2i\pi\,.$$

Démonstration. On pose $z = Re^{it}$, $dz = iRe^{it}dt$, ce qui donne

$$\int_{\gamma_R} \frac{dz}{z} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{it}dt}{Re^{it}} = \int_0^{2\pi} i\,dt = 2i\pi\,.$$

□

Exercice. Pour $n \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_{\gamma^n} \frac{dz}{z}$, où $\gamma^n : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ est défini par $\gamma^n(t) := e^{int}$.

1.2. Propriétés de l'intégrale curviligne. Dans ce qui suit, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$, et tous les chemins $\gamma : [a,b] \to \Omega$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Proposition 1.3. (additivité)
Soit $\gamma : [a,b] \to \Omega$ un chemin dans Ω. Si $c \in [a,b]$, alors

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_{|[a,c]}} \omega + \int_{\gamma_{|[c,b]}} \omega$$

pour toute 1-forme différentielle ω continue sur Ω.

Démonstration. C'est évident par définition de l'intégrale curviligne. □

Remarque. Un des intérêts de ce résultat est qu'il permet de se ramener à des chemins *de classe $\mathcal{C}^1$*.

Proposition 1.4. (théorème fondamental de l'analyse)
Soit $F \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Pour tout chemin $\gamma : [a,b] \to \Omega$, on a

$$\int_\gamma dF = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a))\,.$$

En particulier, $\int_\gamma dF$ ne dépend que des extrémités du chemin γ.

Démonstration. Supposons d'abord que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$. Alors la fonction $F\circ\gamma$ est de classe $\mathcal{C}^1$, avec $(F\circ\gamma)'(t)=dF(\gamma(t))\gamma'(t)$. On a donc

$$\int_\gamma dF=\int_a^b (F\circ\gamma)'(t)\,dt=[F\circ\gamma]_a^b\,,$$

ce qui est la formule souhaitée.

Dans le cas général, choisissons une subdivision $a=a_0<a_1\cdots<a_N=b$ de l'intervalle $[a,b]$ telle que γ soit de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a_i,a_{i+1}]$, pour tout $i\in[\![0,N-1]\!]$. D'après la proposition 1.3 et le "cas $\mathcal{C}^1$", on a

$$\begin{aligned}\int_\gamma dF &= \sum_{i=0}^{N-1}\int_{\gamma_{|[a_i,a_{i+1}]}} dF\\ &= \Big(F(\gamma_1)-F(\gamma_0)\Big)+\Big(F(\gamma_2)-F(\gamma_1)\Big)+\cdots+\Big(F(\gamma_N)-F(\gamma_{N-1})\Big)\\ &= F(\gamma(a_N))-F(\gamma(a_0))\,,\end{aligned}$$

d'où le résultat.

□

Corollaire 1.5. *Si $\gamma:[a,b]\to\Omega$ est un chemin* ***fermé****, alors $\int_\gamma dF=0$ pour toute fonction $F\in\mathcal{C}^1(\Omega)$.*

Démonstration. C'est évident puisque $\gamma(b)=\gamma(a)$. □

Définition 1.6. (changement de paramètre)

(1) *Un* ***changement de paramètre*** *est une bijection continue $s:[a,b]\to[c,d]$ entre deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$.*

(2) *On dit que deux chemins $\gamma_1:[a,b]\to\Omega$ et $\gamma_2:[c,d]\to\Omega$ sont*
   - ***équivalents*** *s'il existe un changement de paramètre* ***croissant*** *$s:[a,b]\to[c,d]$ tel que $\gamma_1(t)=\gamma_2(s(t))$ pour tout $t\in[a,b]$;*
   - ***anti-équivalents*** *s'il existe un changement de paramètre* ***décroissant*** *tel que $\gamma_1=\gamma_2\circ s$.*

Remarque. Intuitivement, deux chemins sont équivalents s'ils décrivent la même courbe, dans le même sens (mais peut-être pas à la même vitesse) ; et deux chemins sont anti-équivalents s'ils décrivent la même courbe "en sens contraire".

Exemples.

(i) Les chemins $\gamma_1:[0,2\pi]\to\mathbb{C}^*$ et $\gamma_2:[0,\pi]\to\mathbb{C}^*$ définis par $\gamma_1(t)=e^{it}$ et $\gamma_2(s)=e^{2is}$ sont équivalents.

(ii) Les chemins $\gamma_1:[0,2\pi]\to\mathbb{C}^*$ et $\gamma_2:[0,2\pi]\to\mathbb{C}^*$ définis par $\gamma_1(t)=e^{it}$ et $\gamma_2(t)=e^{-it}$ sont anti-équivalents.

(iii) Pour tout chemin $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$, on définit le **chemin inverse** $\check{\gamma}:[a,b]\to\mathbb{C}$ par la formule $\check{\gamma}(t)=\gamma(a+b-t)$. Alors γ et $\check{\gamma}$ sont anti-équivalents. Lorsque $[a,b]=[0,1]$, on a $\check{\gamma}(t)=\gamma(1-t)$.

Proposition 1.7. (invariance de l'intégrale par changement de paramètre)
Soient $\gamma_1:[a,b]\to\Omega$ et $\gamma_2:[c,d]\to\Omega$ deux chemins dans Ω.

(1) *Si* γ_1 *et* γ_2 *sont équivalents, alors* $\int_{\gamma_1}\omega = \int_{\gamma_1}\omega$ *pour toute* 1*-forme différentielle* ω *continue sur* Ω*.*

(2) *Si* γ_1 *et* γ_2 *sont anti-équivalents, alors* $\int_{\gamma_1}\omega = -\int_{\gamma_1}\omega$ *pour toute* 1*-forme* ω*.*

Démonstration. Soit $s:[a,b]\to[c,d]$ un changement de paramètre tel que $\gamma_1 = \gamma_2\circ s$, croisant dans le cas (1) et décroissant dans le cas (2). Soit également ω une 1-forme continue sur Ω.

Supposons d'abord que γ_1,γ_2 et s soient de classe $\mathcal{C}^1$. On a alors $\gamma_1'(t) = \gamma_2'(s(t))s'(t)$ pour tout $t\in[a,b]$, et donc

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_1}\omega &= \int_a^b \omega(\gamma_1(t))(s'(t)\gamma_2'(s(t)))\,dt\\ &= \int_a^b \omega(\gamma_2(s(t))\gamma_2'((s(t))\times s'(t)dt\\ &= \int_{s(a)}^{s(b)} \omega(\gamma_2(s))\gamma'(s)\,ds\,,\end{aligned}$$

où on a effectué le changement de variable $s = s(t)$. Dans le cas (1), s est croissant, donc $s(a) = c$ et $s(b) = d$, et donc $\int_{\gamma_1}\omega = \int_c^d \omega(\gamma_2(s))\gamma'(s)\,ds = \int_{\gamma_2}\omega$. Dans le cas (2), on a $s(a) = d$ et $s(b) = c$, donc $\int_{\gamma_1}\omega = \int_d^c \omega(\gamma_2(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_c^d \omega(\gamma_2(s))\gamma'(s)\,ds = -\int_{\gamma_2}\omega$.

Si γ_1,γ_2 et s sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on se ramène au "cas $\mathcal{C}^1$" en subdivisant convenablement les intervalles $[a,b]$ et $[c,d]$: plus précisément, on subdivise $[a,b]$ en intervalles $[a_i,a_{i+1}]$ sur lesquels γ_1 et s sont de classe $\mathcal{C}^1$ et tels que γ_2 est $\mathcal{C}^1$ sur $s([a_i,a_{i+1}])$, et on utilise la proposition 1.3.

Le cas où le changement de paramètre s est seulement supposé continu est un peu plus délicat, et *on l'admettra.* □

Corollaire 1.8. *Si* γ *est un chemin dans* Ω*, alors* $\int_\gamma\omega = -\int_{\tilde\gamma}\omega$ *pour toute* 1*-forme* ω *continue sur* Ω*.*

1.3. Courbes simples.

Définition 1.9. *Une* ***courbe simple*** *dans le plan est un compact* $\Gamma\subset\mathbb{C}$ *qui est l'image d'un chemin* $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ injectif (*on dit encore* ***sans point double***)*, avec un intervalle* $[a,b]$ *non réduit à point. On dit alors que* γ *est un* ***paramétrage*** *de la courbe* Γ*.*

Remarque. Si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ est une application continue et injective, alors γ est un *homéomorphisme* de $[a,b]$ sur $\gamma([a,b])$, par compacité de $[a,b]$. Donc, toute courbe simple $\Gamma\subset\mathbb{C}$ est homéomorphe à l'intervalle $[0,1]$. En particulier, Γ possède deux **extrémités** p et q, qui correspondent aux extrémités 0 et 1 de $[0,1]$. On peut les caractériser de la façon suivante : ce sont les deux seuls points de Γ tels que $\Gamma\backslash\{p\}$ et $\Gamma\backslash\{q\}$ sont *connexes.*

Définition 1.10. *Soit* $\Gamma\subset\mathbb{C}$ *une courbe simple d'extrémités* p *et* q*. On dit qu'on a* ***orienté*** Γ *si on a choisi un "sens de parcours" sur* Γ *: de* p *vers* q*, ou de* q *vers* p*. Il y a donc exactement 2 manières d'orienter* Γ*.*

Remarque. Tout paramétrage $\gamma:[a,b]\to\mathbb{C}$ de Γ définit une orientation de Γ ("de $\gamma(a)$ vers $\gamma(b)$").

Lemme 1.11. *Soient γ_1 et γ_2 deux paramétrages d'une même courbe simple $\Gamma \subset \mathbb{C}$.*

(1) *Si γ_1 et γ_2 définisent la même orientation de Γ, alors γ_1 et γ_2 sont équivalents.*

(2) *Si γ_1 et γ_2 définisent des orientations inverses, alors ils sont anti-équivalents.*

Démonstration. En notant $[a, b]$ et $[c, d]$ les intervalles de définition de γ_1 et γ_2, on sait que $\gamma_1 : [a, b] \to \Gamma$ et $\gamma_2 : [c, d] \to \Gamma$ sont des homéomorphismes. Donc l'application $s = \gamma_2^{-1} \circ \gamma_1 : [a, b] \to [c, d]$ est un changement de paramètre tel que $\gamma_1 = \gamma_2 \circ s$. Si γ_1 et γ_2 définissent la même orientation de Γ, alors $\gamma_1(a) = \gamma_2(c)$ et $\gamma_1(b) = \gamma_2(d)$, donc $s(a) = c$ et $s(b) = d$, et s est croissant. Si γ_1 et γ_2 définissent des orientations inverses, alors $\gamma_1(a) = \gamma_2(d)$ et $\gamma_1(b) = \gamma_2(c)$, donc $s(a) = d$ et $s(b) = c$, et s est décroissant. □

Ce lemme rend légitime la définition suivante.

Définition 1.12. *Soit $\Gamma \subset \mathbb{C}$ une courbe simple* ***orientée****. Si ω est une 1-forme différentielle continue au voisinage de Γ, on définit l'intégrale de ω* sur Γ *par $\int_\Gamma \omega = \int_\gamma \omega$, où $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ est n'importe quel paramétrage de Γ compatible avec l'orientation.*

Exemple. (segments orientés)

(1) Si $p, q \in \mathbb{C}$, on notera $[p, q] \subset \mathbb{C}$ le segment d'extrémités p et q, et $[pq]$ (sans la virgule) le segment $[p, q]$ orienté de p vers q. On a alors

$$\int_{[pq]} \omega = -\int_{[qp]} \omega$$

pour toute 1-forme différentielle ω continue au voisinage de $[p, q]$.

(2) On peut paramétrer un segment orienté $[pq]$ par le chemin $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) := p + t(q - p) = (1 - t)p + tq$. Le chemin inverse $\check{\gamma}(t) = tp + (1 - t)q$ paramètre le segment orienté $[qp]$. On a ainsi

$$\int_{[pq]} \omega = \int_0^1 \omega((1 - t)p + tq) \cdot (p - q)\, dt = -\int_{[qp]} \omega.$$

(3) Si $[p, q]$ est un segment horizontal de la forme $[a, b] \times \{v\}$, il est plus naturel de paramétrer $[pq]$ directement par l'intervalle $[a, b]$, i.e. de poser $\gamma(x) := (x, v)$, $x \in [a, b]$. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une forme différentielle continue au voisinage de $[p, q]$, on a alors

$$\int_{[pq]} Pdx + Qdy = \int_a^b P(x, v)\, dx \quad \text{et} \quad \int_{[qp]} Pdx + Qdy = -\int_a^b P(x, v)\, dx\,.$$

De même, si $[p, q]$ est un segment vertical $\{u\} \times [c, d]$ alors $[pq]$ se paramètre par $\gamma(y) := (u, y)$, $y \in [a, b]$, et donc

$$\int_{[pq]} Pdx + Qdy = \int_c^d Q(u, y)dy \quad \text{et} \quad \int_{[qp]} Pdx + Qdy = -\int_c^d Q(u, y)dy\,.$$

(4) Si $\xi \in \mathbb{C}$, alors le segment orienté $[0\xi]$ se paramètre par $\gamma(t) := t\xi$, $t \in [0, 1]$, et donc

$$\int_{[0\xi]} \omega = \int_0^1 \omega(t\xi) \cdot \xi\, dt.$$

1.4. Longueur d'un chemin.

DÉFINITION 1.13. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. La* ***longueur*** *de γ est le nombre $l(\gamma)$ défini par $l(\gamma) := \int_a^b |\gamma'(t)|\, dt$.*

EXEMPLES.

(1) Soient $p, q \in \mathbb{C}$ et soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ le paramétrage naturel du segment $[p,q]$, i.e. $\gamma(t) = (1-t)p + tq = p + t(q-p)$. On a $\gamma'(t) = q - p$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $l(\gamma) = \int_0^1 |q-p|\, dt = |q-p|$, ce qui est bien la valeur attendue pour la longueur de $[p,q]$.
(2) Soient $a \in \mathbb{C}$ et $R > 0$. Le chemin $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma(t) = a + Re^{it}$ paramètre le cercle $\{z \in \mathbb{C};\ |z-a| = R\}$, donc on s'attend à trouver $l(\gamma) = 2\pi R$. Et de fait, on a $|\gamma'(t)| = iRe^{it}$ pour tout $t \in [0,1]$, donc $|\gamma'(t)| = R$ et $l(\gamma) = \int_0^{2\pi} R\, dt = 2\pi R$.

PROPOSITION 1.14. *Deux chemins équivalents ou anti-équivalents ont la même longueur.*

Démonstration. Soient $\gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ et $\gamma_2 : [c,d] \to \mathbb{C}$ deux chemins équivalents ou anti-équivalents, et soit $s : [a,b] \to [c,d]$ un changement de paramètre tel que $\gamma_1(t) = \gamma_2(s(t))$.

Si s est de classe $\mathcal{C}^1$ (ou $\mathcal{C}^1$ par morceaux), on peut montrer que $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$ en utilisant la formule de changement de variable, exactement comme dans la preuve de la proposition 1.7 : c'est un bon exercice.

Pour un changement de paramètre seulement continu, on doit procéder différemment. Tout repose sur le fait suivant, que l'on admettra :

FAIT. Soit $[u,v]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Appelons *subdivision* de $[u,v]$ toute suite finie de la forme $\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_N)$, avec ou bien $u = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = v$ ou bien $v = t_0 > t_1 > \cdots > t_N = u$. Soit également $\gamma : [u,v] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux. Pour toute subdivision $\bar{t} = (t_0, t_1, \dots, t_N)$ de $[u,v]$, posons

$$l(\gamma, \bar{t}) := \sum_{i=0}^{N-1} |\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)|\,.$$

Avec ces notations, on a $l(\gamma) = \sup\big\{l(\gamma, \bar{t});\ \bar{t} \text{ subdivision de } [u,v]\big\}$.

En admettant ce fait, la preuve de la proposition est immédiate. En effet, quand $\bar{t} = (t_0, \dots, t_N)$ décrit l'ensemble des subdivisions de $[a,b]$, alors $s\,\bar{t} := (s(t_0), \dots, s(t_N))$ décrit l'ensemble des subdivisions de $[c,d]$ car s est une bijection strictement monotone de $[a,b]$ sur $[c,d]$, et on a $l(\gamma_1, \bar{t}) = l(\gamma_2, s\,\bar{t})$ pour toute subdivision $\bar{t}$; donc la formule précédente donne directement $l(\gamma_1) = l(\gamma_2)$. □

Exercice. Essayer de donner une preuve de la proposition 1.7 en s'inspirant de la démonstration précédente.

COROLLAIRE 1.15. *On peut définir la longueur d'une* ***courbe*** *(simple) $\Gamma \subset \mathbb{C}$: c'est la longueur de n'importe quel paramétrage de Γ.*

Exercice. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ joignant les points $(0,0)$ et $(1,1)$.

Notation. Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux, d'image Γ. Pour toute fonction continue φ définie sur Γ, on posera

$$\int_\gamma \varphi(z)\,|dz| := \int_a^b \varphi(\gamma(t))\,|\gamma'(t)|\,dt\,.$$

En particulier, on a $l(\gamma) = \int_\gamma \mathbf{1}\,|dz| = \int_\gamma |dz|$.

La notation est utile lorsqu'on veut majorer le module d'une intégrale curviligne : c'est le contenu du lemme suivant.

Lemme 1.16. *Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un chemin de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux d'image Γ. Si f est une fonction continue sur un ouvert contenant Γ, alors*

$$\left|\int_\gamma f(z)dz\right| \leqslant \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \leqslant l(\gamma) \times \sup_{z\in\Gamma} |f(z)|\,.$$

Démonstration. Il suffit d'écrire $\int f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$ et de majorer le module de l'intégrale par l'intégrale du module.

□

2. Formule de Green-Riemann

Le but de cette section est d'établir une "formule magique" sur laquelle on pourrait baser toute la théorie des fonctions holomorphes (ce qu'on ne fait pas réellemet dans ce cours).

2.1. Domaines élémentaires.

Définition 2.1. *On dit qu'un compact $\Gamma \subset \mathbb{C}$ est une* ***courbe de Jordan fermée*** *si Γ est l'image d'un chemin $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ fermé et "sans points doubles", i.e. tel que $\gamma_{|[a,b[}$ est injectif.*

Par exemple : un cercle, le bord d'un triangle, le bord d'un rectangle sont des courbes de Jordan fermées.

Exercice. Montrer qu'un compact Γ est une courbe de Jordan fermée si et seulement si Γ est homéomorphe au cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$.

Définition 2.2. *On dit qu'un compact $K \subset \mathbb{C}$ est un* ***domaine élémentaire*** *si les conditions suivantes sont satisfaites.*

(1) *K est l'adhérence de son intérieur, et sa frontière ∂K est réunion d'un nombre fini de courbes de Jordan fermés deux-à-deux disjointes $\Gamma_1, \dots, \Gamma_N$.*
(2) *Chaque courbe Γ_j admet un paramétrage γ_j possédant les propriétés suivantes :*
    (a) *γ_j est de classe $\mathcal{C}^2$ par morceaux, et $\gamma_j'(t) \neq 0$ en tout point de dérivabilité ;*
    (b) *lorsqu'on parcourt Γ_j en suivant le paramétrage γ_j, on a constamment l'intérieur du domaine K "à sa gauche".*

Remarque 1. La signification mathématiquement précise de (2) est la suivante. Soit $[a_j, b_j]$ l'intervalle de définition de γ_j. En tout point $t \in\,]a_j, b_j[$ où γ_j est dérivable, notons $\mathbf{n}_j(t)$ le vecteur unitaire orthogonal à $\gamma_j'(t)$ tel que $(\gamma_j'(t), \mathbf{n}_j(t))$ soit orienté dans le sens direct. Alors le vecteur $\mathbf{n}_j(t)$ "pointe vers l'intérieur de K" : on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $]\gamma_j(t), \gamma_j(t) + \varepsilon\,\mathbf{n}_j(t)] \subset \mathring{K}$ et $[\gamma_j(t) - \varepsilon\,\mathbf{n}_j(t), \gamma_j(t)[\, \cap K = \varnothing$. Il est bien entendu vivement conseillé de faire un dessin.

Remarque 2. Si γ_j vérifie (2), on dira que γ_j est un **paramétrage admissible** de Γ_j ; et si $\gamma_1, \dots, \gamma_N$ vérifient tous (2), on dira que $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ est un paramétrage admissible *de* ∂K.

Exemple 1. Un disque fermé, un rectangle fermé, un triangle fermé sont des domaines élémentaires. Dans chaque cas, un paramétrage admissible de ∂K fait parcourir ∂K dans le sens trigonométrique.

Exemple 2. Si $a \in \mathbb{C}$ et si r et R vérifient $0 < r < R$, alors la **couronne fermée** $K = \overline{D}(a, R) \backslash D(a, r) = \{z \in \mathbb{C};\ r \leqslant |z - a| \leqslant R\}$ est un domaine élémentaire, avec $\partial K = \partial D(a, R) \cup \partial D(a, r)$. Un paramétrage admissible de ∂K fait parcourir le "grand" cercle $\partial D(a, R)$ dans le sens trigonométrique, et le "petit" cercle $\partial D(a, r)$ dans le sens anti-trigonométrique.

Exemple 3. Plus généralement, si $D, D_1, \dots, D_n$ sont des disques ouverts tels que $\overline{D}_j \subset D$ pour tout j et les $\overline{D}_j$ sont deux à deux disjoints, alors le "disque à trous" $K = \overline{D} \backslash (D_1 \cup \cdots \cup D_n)$ est un domaine élémentaire, avec $\partial K = \partial D \cup \bigcup_1^n \partial D_j$. Le grand cercle ∂D doit être orienté dans le sens trigonométrique, et les petits cercles ∂D_j dans le sens anti-trigonométrique.

Lemme 2.3. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire de frontière $\partial K = \Gamma_1 \cup \cdots \cup \Gamma_N$, et soit ω une 1-forme différentielle continue sur un ouvert contenant K. Pour tout $j \in \{1, \dots, N\}$, l'intégrale $\int_{\gamma_j} \omega$ est indépendante du paramétrage admissible γ_j de Γ_j.*

Preuve abrégée. Fixons $j \in \{1, \dots, N\}$. Il s'agit de montrer que si $\gamma^1 : [a^1, b^1] \to \mathbb{C}$ et $\gamma^2 : [a^2, b^2] \to \mathbb{C}$ sont deux paramétrages admissibles de Γ_j, alors $\int_{\gamma^1} \omega = \int_{\gamma^2} \omega$.

Pour ne pas perdre de temps, on *admettra* qu'on peut se ramener au cas où γ^1 et γ^2 sont de classe $\mathcal{C}^1$ et ont le même point de départ (i.e. $\gamma^1(a^1) = \gamma^2(a^2)$), et que dans ce cas il existe un changement de paramètre $s : [a^1, b^1] \to [a^2, b^2]$ tel que $\gamma^1 = \gamma^2 \circ s$. Il reste à voir que ce changement de paramètre est *croissant*, car on pourra alors conclure que γ^1 et γ^2 sont équivalents et appliquer la proposition 1.7.

Le point clé est que le changement de paramètre s (apriori seulement continu) est dérivable en tout point $t \in]a^1, b^1[$. Pour le voir, il suffit d'écrire

$$\begin{aligned} \frac{\gamma^1(t+h) - \gamma^1 1(t)}{h} &= \frac{\gamma^2(s(t+h)) - \gamma^2(s(t))}{h} \\ &= \frac{\gamma^2(s(t+h)) - \gamma^2(s(t))}{s(t+h) - s(t)} \times \frac{s(t+h) - s(t)}{h} \cdot \end{aligned}$$

Quand h tend vers 0, le membre de gauche tend vers $(\gamma^1)'(t)$, et $\frac{\gamma^2(s(t+h)) - \gamma^2(s(t))}{s(t+h) - s(t)}$ tend vers $(\gamma^2)'(s(t))$ car $s(t+h)$ tend vers $s(t)$ par continuité de s. Comme $(\gamma^2)'(s(t)) \neq 0$ (par définition d'un paramétrage admissible), on en déduit que $\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$ tend vers $\frac{(\gamma^1)'(t)}{(\gamma^2)'(s(t))}$, et donc que s est dérivable au point t.

Maintenant qu'on sait que s est dérivable, on peut écrire

$$(\gamma^1)'(t) = s'(t) \times (\gamma^2)'(s(t)). \tag{2.1}$$

Cette identité montre que pour tout point $t \in]a^1, b^1[$, les vecteurs $(\gamma^1)'(t)$ et $(\gamma^2)'(s(t))$ sont colinéaires, et donc que les vecteurs "normaux" $\mathbf{n}_{\gamma^1}(t)$ et $\mathbf{n}_{\gamma^2}(s(t))$ le sont également. Comme ces deux vecteurs (attachés au même point $\xi = \gamma^1(t) = \gamma^2(s(t))$ de Γ_j pointent tous les deux vers l'intérieur de K par définition d'un paramétrage admissible, ils sont nécessairement *de même sens*. Par conséquent, $(\gamma^1)'(t)$ et $(\gamma^2)'(s(t))$ sont eux aussi de même sens, et en revenant à (2.1) on en conclut que $s'(t) \geqslant 0$, pour tout $t \in]a^1, b^1[$. Ainsi, le changement de paramètre s est croissant, ce qui achève la démonstration. □

DÉFINITION 2.4. *Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire. Si ω est une 1-forme différentielle continue sur un ouvert contenant K, on définit l'**intégrale de** ω **sur** ∂K par la formule*

$$\int_{\partial K} \omega = \sum_{j=1}^{N} \int_{\gamma_j} \omega\,,$$

où $(\gamma_1, \dots, \gamma_N)$ est n'importe quel paramétrage admissible de ∂K.

Remarque. Comme K est l'adhérence de son intérieur, on a $\partial K = \partial(\mathring{K})$, donc on peut écrire $\int_{\partial(\mathring{K})}$ au lieu de $\int_{\partial K}$. On le fera systématiquement lorsque K est un disque fermé $\overline{D}$; autrement dit, on écrira toujours $\int_{\partial D}$ au lieu de $\int_{\partial \overline{D}}$.

Exemple 1. Si $D = D(a, r)$ est un disque ouvert et si ω est de la forme $f dz$, alors

$$\int_{\partial D} f(z)\, dz = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, ire^{it}\, dt\,.$$

Exemple 2. Soit R un rectangle $[a, b] \times [c, d]$. Notons A, B, C, D les sommets de R, en commençant par le sommet inférieur gauche $A = (a, c)$ et en “tournant dans le sens trigonométrique”. On obtient un paramétrage admissible de ∂R en “mettant bout à bout” des paramétrages des segments orientés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DA]$. Si $\omega = Pdx + Qdy$, on obtient donc (d'après la propriété d'additivité)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial R} Pdx + Qdy &= \int_{[AB]} + \int_{[BC]} + \int_{[CD]} + \int_{[DA]} \\
&= \int_a^b P(x, c)\, dx + \int_c^d Q(b, y)\, dy - \int_a^b P(x, d)\, dx - \int_c^d Q(a, y)\, dy\,.
\end{aligned}$$

Exemple 3. Si K est un“disque à trous”, $K = \overline{D} \setminus \bigcup_1^n D_j$, alors (compte tenu des conventions d'orientation)

$$\int_{\partial K} \omega = \int_{\partial D} \omega - \sum_{j=1}^{n} \int_{\partial D_j} \omega\,.$$

EXERCICE. Montrer que si f est une fonction holomorphe dans un disque $D(a, R)$ et si on écrit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N} \ :\ c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz,$$

pour n'importe que r tel que $0 < r < R$. Montrer de même que si f est une fonction holomorphe dans une couronne $C(a, r, R)$ et si on note c_n les coefficients de son développement de Laurent dans cette couronne, alors

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ :\ c_n = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,\rho)} \frac{f(z)}{(z - a)^{n+1}}\, dz,$$

pour n'importe que ρ tel que $r < \rho < R$.

2.2. La formule. On peut maintenant énoncer la formule de Green-Riemann.

THÉORÈME 2.5. (formule de Green-Riemann)
Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire. Si $\omega = Pdx + Qdy$ est une 1-forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert contenant K, alors

$$\int_{\partial K} Pdx + Qdy = \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,.$$

Remarque. Si $\omega = Adz + Bd\bar{z}$, alors la formule de Green-Riemann s'écrit

$$\int_{\partial K} Adz + Bd\bar{z} = -2i \int_K \left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}\right) dxdy\,.$$

Démonstration. D'après les formules de "changement de base", on a $Adz + Bd\bar{z} = Pdx + Qdy$, où $P = A + B$ et $Q = i(A - B)$. Il s'agit donc de vérifier qu'on a

$$\frac{\partial(i(A-B))}{\partial x} - \frac{\partial(A+B)}{\partial y} = -2i\left(\frac{\partial B}{\partial z} - \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}\right),$$

ce qui n'est pas dificile.

□

COROLLAIRE 2.6. *Si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ au voisinage d'un domaine élémentaire K, alors*

$$\int_{\partial K} A\,dz = 2i \int_K \frac{\partial A}{\partial \bar{z}}\, dxdy\,.$$

La preuve de la formule de Green-Riemann va se faire en considérant plusieurs cas, de plus en plus généraux. Pour plus de "lisibilité", on s'abstiendra de démontrer en détail certains points techniques.

CAS 1. Le domaine K est un rectangle $[a, b] \times [c, d]$.

Dans ce cas, c'est un calcul assez facile, mais cependant non-trivial et en fait très instructif :

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} Pdx + Qdy &= \int_a^b P(x,c)\,dx + \int_c^d Q(b,y)\,dy - \int_a^b P(x,d)\,dx - \int_c^d Q(a,y)\,dy \\
&= \int_c^d \Big[Q(b,y) - Q(a,y)\Big] dy - \int_a^b \Big[P(x,d) - P(x,d)\Big] dx \\
& \int_c^d \left(\int_a^b \frac{\partial Q}{\partial x}(x,y)\,dx\right) dy - \int_a^b \left(\int_c^d \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dy\right) dx \\
&= \int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy\,,
\end{aligned}$$

où on a utilisé le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini.

La suite de la preuve de Green-Riemann n'a pas été faite en cours.

CAS 2. Le domaine K est un "rectangle déformé".

De façon précise, supposons que K soit de la forme $K = \Phi(R)$, où $R = [a, b] \times [c, d]$ est un rectangle et Φ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^2$ d'un ouvert $U \subset \mathbb{C}$ contenant R sur un ouvert $U' \subset \mathbb{C}$. On va se ramener au cas 1 au prix de quelques calculs et à l'aide de la **formule de changement de variables**.

Comme le rectangle R est connexe, on peut supposer que U est connexe, quitte à remplacer U par la composante connexe de U contenant R. Comme Φ est un difféomorphisme, le déterminant jacobien J_Φ ne s'annule pas, et garde donc un signe constant sur U par connexité (et par continuité de J_Φ). Quitte à remplacer R par $R^* = [c,d] \times [a,b]$ et Φ par le difféomorphisme Φ^* défini par $\Phi^*(u,v) = \Phi(v,u)$ (qui vérifie $J_{\Phi^*}(u,v) = -J_\Phi(v,u)$, on peut supposer qu'on a $J_\Phi(u,v) > 0$ pour tout $(u,v) \in U$.

La condition $J_\Phi(u,v) > 0$ signifie que le difféomorphime Φ "préserve l'orientation en tout point". Cela rend plausible fait suivant, que l'on admettra car sa preuve n'est pas particulièrement éclairante.

Fait. Si γ est un paramétrage admissible de ∂R, alors $\Phi \circ \gamma$ est un paramétrage admissible de ∂K.

On va se contenter d'établir la formule de Green-Riemann dans le cas d'une forme différentielle du type $\omega = Pdx$, où P est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. (Le cas $\omega = Qdy$ se traite de la même façon, et le cas général s'obtient en faisant la somme de ces deux cas particuliers). Il s'agit donc de vérifier qu'on a

$$\int_{\partial K} P\,dx = -\int_K \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy\,.$$

Dans la suite, on écrira

$$\Phi(u,v) = (X(u,v), Y(u,v))\,.$$

Avec ces notations, le déterminant jacobien J_Φ est donné par la formule

$$J_\Phi = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}\,,$$

ce qui servira plus bas.

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un paramétrage admissible de ∂R. D'après le fait, on a

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} P\,dx &= \int_{\Phi\circ\gamma} P\,dx\\ &= \int_a^b P(\Phi\circ\gamma(t))\,(X\circ\gamma)'(t)\,dt\\ &= \int_a^b (P\circ\Phi)(\gamma(t))\,dX(\gamma(t))\gamma'(t)\,dt\\ &= \int_\gamma (P\circ\Phi)\,dX\,.\end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} P\,dx &= \int_{\partial R} (P\circ\Phi)\,dX\\ &= \int_{\partial R} (P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\,du + (P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\,dv\,.\end{aligned}$$

D'après le cas 1 et comme la forme différentielle $(P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}du + (P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}dv$ est de classe $\mathcal{C}^1$ (car P est $\mathcal{C}^1$ et X est $\mathcal{C}^2$), on a donc

$$\int_{\partial K} P\,dx = \int_R \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\right)\right\} dudv\,. \tag{2.2}$$

Il s'agit maintenant de montrer que le membre de droite est égal à $-\int_{\partial K} \frac{\partial P}{\partial y}\, dxdy$, ce qui n'est pas immédiatement apparent !

D'après les formules pour les dérivées partielles d'une fonction composée, on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\right) &= \frac{\partial}{\partial u}\left(P(X,Y)\,\frac{\partial X}{\partial v}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial u}\,(P(X,Y))\,\frac{\partial X}{\partial v}+P(X,Y)\,\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}\\ &= \left(\frac{\partial P}{\partial x}(X,Y)\,\frac{\partial X}{\partial u}+\frac{\partial P}{\partial y}(X,Y)\,\frac{\partial Y}{\partial u}\right)\frac{\partial X}{\partial v}+P(X,Y)\,\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}\,;\end{aligned}$$

et de même :

$$\frac{\partial}{\partial v}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\right)=\left(\frac{\partial P}{\partial x}(X,Y)\,\frac{\partial X}{\partial v}+\frac{\partial P}{\partial y}(X,Y)\,\frac{\partial Y}{\partial v}\right)\frac{\partial X}{\partial u}+P(X,Y)\,\frac{\partial^2 X}{\partial v\partial u}\cdot$$

Comme $\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}=\frac{\partial^2 X}{\partial v\partial u}$ d'après le théorème de Schwarz, on obtient donc, après simplification :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial u}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left((P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\right) &= \frac{\partial P}{\partial y}(X,Y)\times\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)\\ &= -\left(\frac{\partial P}{\partial y}\circ\Phi\right)J_\Phi\,.\end{aligned}$$

Comme de plus $J_\Phi=|J_\Phi|$ puisqu'on suppose depuis le début que $J_\Phi>0$, on peut alors conclure en revenant à (2.2) et en utilisant la formule de changement de variable :

$$\begin{aligned}\int_{\partial K} P\,dx &= -\int_R \frac{\partial P}{\partial y}(\Phi(u,v))\,|J_\Phi(u,v)|\,dudv\\ &= -\int_{\Phi(R)}\frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,dxdy\\ &= -\int_K \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy\,.\end{aligned}$$

Cela termine la preuve de la formule de Green-Riemann dans le cas d'un "rectangle déformé".

Cas 3. Le domaine K peut se "quadriller" par des rectangles déformés.

De façon précise, on suppose qu'on peut décomposer K sous la forme

$$K=K_1\cup\cdots\cup K_N\,,$$

où les K_j sont des rectangles déformés et, pour tous $j,j'\in\{1,\dots,N\}$, ou bien $K_j\cap K_{j'}=\varnothing$, ou bien K_j et $K_{j'}$ se rencontrent selon un "côté" commun. *Un dessin est indispensable ici* !

Dans ce cas, on il n'est pas très difficile de montrer que toutes les intersections $K_j\cap K_{j'}$ sont de mesure de Lebesgue nulle, car ce sont des réunions finies de courbes de classe $\mathcal{C}^1$. On a donc

$$\int_K f(x,y)\,dxdy=\sum_{j=1}^N\int_{K_j} f(x,y)\,dxdy$$

pour toute fonction f continue sur K.

D'autre part, si deux rectangles déformés K_j et $K_{j'}$ se rencontrent selon un "côté" commun $\Gamma_{j,j'}$, on voit que $\Gamma_{j,j'}$ est parcouru en sens inverse selon qu'on parcourt ∂K_j ou $\partial K_{j'}$. Par conséquent, si ω est une forme différentielle continue au voisinage de K, alors les deux intégrales sur $\Gamma_{j,j'}$ se détruisent lorsqu'on calcule $\int_{K_j} \omega + \int_{K_{j'}} \omega$. Ceci étant vrai pour tous j, j', il est alors facile de se convaincre qu'on a

$$\sum_{j=1}^{N} \int_{\partial K_j} \omega = \int_{\partial K} \omega\,,$$

pour toute forme différentielle ω continue au voisinage de K.

D'après le cas 2, on en déduit immédiatement le résultat souhaité : si $\omega = Pdx + Qdy$, alors

$$\begin{aligned}
\int_{\partial K} \omega &= \sum_{j=1}^{N} \int_{\partial K_j} \omega \\
&= \sum_{j=1}^{N} \int_{K_j} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy \\
&= \int_{K} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy\,.
\end{aligned}$$

Cas 4. Le domaine K est quelconque.

On peut montrer, et on l'admettra, que *tout* domaine élémentaire $K \subset \mathbb{C}$ admet un quadrillage par rectangles déformés. Donc le cas général est en fait le cas 3, et la démonstration est terminée.

2.3. Un cas particulier (pas fait en cours). Dans cette sous-section, on va donner une preuve directe de la formule de Green-Riemann dans le cas où le domaine K est un *disque* $\overline{D}(a, R)$. C'est un calcul suffisamment intéressant pour être détaillé. On se contente de faire la preuve pour une forme différentielle du type $\omega = Pdx$.

Écrivons $a = (x_0, y_0)$. Le bord de K se paramètre par le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ défini par

$$\gamma(\theta) := a + Re^{i\theta} = (x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta).$$

Donc

$$\int_{\partial K} Pdx = \int_0^{2\pi} P(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta) \times (-R\sin\theta d\theta).$$

En notant $P^* : [0, R] \times [0, 2\pi]$ la fonction définie par

$$P^*(r, \theta) := P(x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta),$$

on a donc

$$\int_{\partial K} Pdx = -\int_0^{2\pi} RP^*(R, \theta) \sin\theta\, d\theta.$$

Ensuite, on a pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned} RP^*(R,\theta) &= RP^*(R,\theta) - 0P^*(0,\theta) \\ &= \int_0^R \frac{d}{dr}\big(rP^*(r,\theta)\big)\,dr \\ &= \int_0^R \left(r\frac{\partial P^*}{\partial r}(r,\theta) + P^*(r,\theta)\right) drd\theta \end{aligned}$$

Donc

$$\int_{\partial K} Pdx = -\int_0^{2\pi}\int_0^R \left(r\frac{\partial P^*}{\partial r}(r,\theta) + P^*(r,\theta)\right)\sin\theta\, drd\theta.$$

Enfin, par le théorème de Fubini, on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi}\int_0^R P^*(r,\theta)\sin\theta\,drd\theta &= \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} P^*(r,\theta)\sin\theta\,d\theta\right) dr \\ &= \int_0^R \left(\Big[\cos\theta P^*(r,\theta)\Big]_{\theta=0}^{\theta=2\pi} - \int_0^{2\pi}\cos\theta\,\frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r,\theta)\right) dr \\ &= -\int_0^R\int_0^{2\pi}\cos\theta\,\frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r,\theta)\,dr. \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \int_{\partial K} Pdx &= -\int_0^R\int_0^{2\pi}\left(r\sin\theta\,\frac{\partial P^*}{\partial r}(r,\theta) + \cos\theta\,\frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r,\theta)\,dr\right) d\theta dr \\ &= -\int_{]0,R[\times[0,2\pi]}\left(\sin\theta\,\frac{\partial P^*}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r,\theta)\,dr\right) rdrd\theta \end{aligned}$$

Mais d'après les formules de dérivation partielle "en coordonnées polaires", on a pour tout $(r,\theta) \in]0,R[\times[0,2\pi]$:

$$\sin\theta\,\frac{\partial P^*}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\cos\theta}{r}\,\frac{\partial P^*}{\partial\theta}(r,\theta) = \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta).$$

D'où finalement

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(a,r)} Pdx &= -\int_{]0,R[\times[0,2\pi]} \frac{\partial P}{\partial y}(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\, rdrd\theta \\ &= -\int_{D(a,r)} \frac{\partial P}{\partial y}\,dxdy, \end{aligned}$$

d'après la formule de changement de variables.

3. Théorème de Cauchy et formule de Cauchy

3.1. Préambule : "convergence dominée". On aura très souvent l'occasion de "passer à la limite" sous des intégrales $\int_I f_\lambda(t)\,dt$ dépendant d'un paramètre λ. Pour cela, on utilisera systématiquement la version suivante du *théorème de convergence dominée.*

Théorème de convergence dominée. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable et soit $(f_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une famille de fonctions intégrables ($f_\lambda : I \to \mathbb{C}$) avec un ensemble d'indices $\Lambda \subset \mathbb{R}$. Enfin, soit $\lambda_0 \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ un "point d'accumulation" de Λ. On fait les hypothèses suivantes.*

(i) $f_\lambda(t) \to f(t)$ *quand* $\lambda \to \lambda_0$*, pour tout* $t \in I$ *sauf peut-être un nombre fini.*

(ii) Hypothèse de domination. *il existe une fonction mesurable* $g : I \to \mathbb{R}^+$ ***indépendante de*** $\lambda \in \Lambda$ *telle que* $\forall \lambda \in \Lambda\ :\ |f_\lambda(t)| \leqslant g(t)$ *et* $\int_I g(t)\,dt < \infty$.

Alors on peut conclure que $\int_I f(t)\,dt = \lim_{\lambda\to\lambda_0} f_\lambda(t)\,dt$.

Remarque 1. Lorsque l'intervalle I est **borné**, l'hypothèse de domination (ii) est satisfaite s'il existe une **constante** M indépendante de λ telle que $|f_\lambda(t)| \leqslant M$ pour tout λ et pour tout $t \in I$.

Remarque 2. On en déduit que si I est un intervalle compact $[a, b]$, si les f_λ sont continues et si $f_\lambda(t) \to f(t)$ **uniformément** sur $[a, b]$ quand $\lambda \to \lambda_0$, alors on peut passer à la limite sous l'intégrale. En particulier, si $\sum u_k$ est une série de fonctions qui converge **normalement** sur $[a, b]$, alors les sommes partielles $f_n = \sum_0^n u_k$ convergent uiniformément sur $[a, b]$, et on obtient donc

$$\int_a^b \left(\sum_{k=0}^{\infty} u_k(t)\right) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_a^b u_k(t)\,dt\,.$$

Exercice. Démontrer directement ce qui est dit dans la remarque 2, sans utiliser le théorème de convergence dominée.

On appliquera très souvent le théorème de convergence dominée à des intégrales curvilignes, sous la forme suivante.

Corollaire 3.1. *Soit* $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ *un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux d'image* Γ*, soit* $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ *une fonction continue, et soit* $(\varphi_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ *une famille de fonctions continues sur* Γ*. On suppose que* $\varphi_\lambda(z) \to \varphi(z)$ *pour tout* $z \in \Gamma$ *(quand* $\lambda \to \lambda_0$*) et qu'il existe une constante* M *telle que* $|\varphi_\lambda(z)| \leqslant M$ *pour tout* $z \in \Gamma$ *et pour tout* $\lambda \in \Lambda$*. Alors on peut conclure que* $\int_\gamma \varphi_\lambda(z)\,dz$ *tend vers* $\int_\gamma \varphi(z)\,dz$*.*

Démonstration. C'est immédiat en écrivant la définition des intégrales curvilignes : comme on intègre sur l'intervalle borné $[a, b]$, on peut utiliser la remarque 1. □

3.2. Le "théorème de Cauchy".

Le résultat suivant est une conséquence immédiate de la formule de Green-Riemann.

Théorème 3.2. (théorème de Cauchy)
Si f *est une fonction holomorphe sur un ouvert* $\Omega \subset \mathbb{C}$*, alors* $\int_{\partial K} f(z)\,dz = 0$ *pour tout domaine élémentaire* $K \subset \Omega$*.*

Démonstration. D'après la formule de Green-Riemann, on a

$$\int_{\partial K} f(z)dz = 2i \int_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\,dxdy\,,$$

d'où le résultat puisque $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$. □

Corollaire 3.3. *Si* $K \subset \mathbb{C}$ *est un domaine élémentaire, alors*

$$\forall a \in \mathbb{C}\backslash K\ :\ \int_{\partial K} \frac{dz}{z-a} = 0\,.$$

Démonstration. On applique le théorème de Cauchy à $f(z) = \frac{1}{z-a}$, qui est holomorphes sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash\{a\}$, ouvert de $\mathbb{C}$ contenant K. □

Remarque. Dans le théorème de Cauchy, il est essentiel que le domaine élémentaire K soit **entièrement contenu** dans l'ouvert Ω sur lequel f est holomorphe : il ne suffit pas d'avoir $\partial K \subset \Omega$. Par exemple, $f(z) := \frac{1}{z}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et $K := \overline{\mathbb{D}}$ vérifie $\partial K = \partial\mathbb{D} \subset \mathbb{C}^*$, mais on a vu plus haut que $\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$.

Application. Pour illustrer le théorème de Cauchy, on va montrer que l'intégrale "généralisée" $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ existe et calculer cette intégrale.

Soit $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ la fonction (holomorphe) définie par

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z} \cdot$$

Pour ε et R vérifiant $0 < \varepsilon < R$, notons $K_{\varepsilon,R}$ le domaine élémentaire défini par

$$K_{\varepsilon,R} = \{z \in \mathbb{C};\ \varepsilon \leqslant |z| \leqslant R \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}\,.$$

Comme $K_{\varepsilon,R} \subset \mathbb{C}^*$, on a $\int_{\partial K_{\varepsilon,R}} f(z)\, dz = 0$, d'après le théorème de Cauchy. En paramétrant les 4 "morceaux" de $\partial K_{\varepsilon,R}$, cela s'écrit

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}\, dt + \int_0^\pi \frac{e^{iRe^{it}}}{Re^{it}}\, iRe^{it} dt + \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{it}}{t}\, dt - \int_0^\pi \frac{e^{i\varepsilon e^{it}}}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it} dt \\ &= \int_\varepsilon^R \frac{e^{it}}{t}\, dt + i\int_0^\pi e^{iRe^{it}}\, dt - \int_\varepsilon^R \frac{e^{-it}}{t}\, dt - i\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}}\, dt\,. \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$2i\int_\varepsilon^R \frac{\sin t}{t}\, dt = -i\underbrace{\int_0^\pi e^{iRe^{it}} dt}_{I_R} + i\underbrace{\int_0^\pi e^{i\varepsilon e^{it}} dt}_{I_\varepsilon}\,. \tag{3.1}$$

Examinons maintenant le comportement de I_ε quand $\varepsilon \to 0$ et de I_R quand $R \to \infty$.

Pour $t \in [0, \pi]$ fixé, $e^{i\varepsilon e^{it}}$ tend vers 1 quand $\varepsilon \to 0$. De plus, on a

$$\left|e^{i\varepsilon e^{it}}\right| = \left|e^{i\varepsilon\cos t - \varepsilon \sin t}\right| = e^{-\varepsilon \sin t} \leqslant 1$$

pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $t \in [0, \pi]$, car $\sin t \geqslant 0$ sur $[0, \pi]$. D'après le théorème de convergence dominée, on en déduit

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon = \int_0^\pi dt = \pi\,.$$

D'autre part, on a $|I_R| \leqslant \int_0^\pi \left|e^{iRe^{it}}\right| dt = \int_0^\pi e^{-R\sin t} dt$, et $\lim_{R\to\infty} e^{-R\sin t} = 0$ pour tout $t \in]0, \pi[$ car $\sin t > 0$ sur $]0, \pi[$. Comme $\left|e^{-R\sin}\right| \leqslant 1$ pour tout R et pour tout $t \in [0, \pi]$, on en déduit (à nouveau par convergence dominée)

$$\lim_{R\to\infty} I_R = 0\,.$$

Au total, on voit que le membre de droite de (3.1) tend vers $-i \times 0 + i\pi = i\pi$ quand $\varepsilon \to 0$ et $R \to \infty$. Donc le membre de gauche tend également vers $i\pi$: autrement dit, $I = \int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée et on a $2i\, I = i\pi$. D'où finalement

$$\int_0^\infty \frac{\sin t}{t}\, dt = \frac{\pi}{2} \cdot$$

Exercice 1. Montrer que I_ε tend vers π quand $\varepsilon \to 0$ sans utiliser le théorème de convergence dominée.

Exercice 2. En utilisant la concavité de la fonction sinus sur $[0, \pi/2]$, montrer qu'on a $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi} t$ pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, et en déduire l'inégalité

$$\int_0^\pi e^{-R\sin t} dt \leqslant \frac{\pi}{R}\cdot$$

Exercice 3. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_0^{(N+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt \geqslant \sum_{n=0}^{N} \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{(n+1)\pi}\,,$$

et en déduire que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.

3.3. La "formule de Cauchy". Le théorème suivant est peut-être le résultat le plus important de toute la théorie des fonctions holomorphes.

Théorème 3.4. (formule de Cauchy)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f \in H(\Omega)$. Si $K \subset \Omega$ est un domaine élémentaire, alors

$$\forall a \in \mathring{K} \;:\; f(a) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz\,.$$

Démonstration. Fixons un domaine élémentaire $K \subset \Omega$ et un point $a \in \mathring{K}$. Fixons également $\varepsilon_0 > 0$ tel que $\overline{D}(a, \varepsilon_0) \subset \mathring{K}$.

Pour ε vérifiant $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_0$, posons $K_\varepsilon = K \backslash D(a, \varepsilon)$. En faisant un dessin, on voit que K_ε est un domaine élémentaire, avec $\partial K_\varepsilon = \partial K \cup \partial D(a, \varepsilon)$. De plus, si on veut calculer une intégrale curviligne sur ∂K_ε, il faut orienter $\partial D(a, \varepsilon)$ dans le sens *anti*-trigonométrique.

Pour $z \in \Omega\backslash\{a\}$, posons

$$g(z) = \frac{f(z)}{z-a}\cdot$$

La fonction g est holomorphe sur l'ouvert $\Omega\backslash\{a\}$, qui contient le domaine élémentaire K_ε, pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$. D'après le théorème de Cauchy, on a donc $\int_{\partial K_\varepsilon} g(z)\, dz = 0$, ce qui s'écrit (compte tenu de l'orientation)

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz - \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = 0\,. \tag{3.2}$$

En paramétrant le cercle $\partial D(a, \varepsilon)$ par $\gamma(t) = a + \varepsilon e^{it}$, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz &= \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}}\, i\varepsilon e^{it}\, dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(a+\varepsilon e^{it})\, dt\,. \end{aligned}$$

Comme $f(a+\varepsilon e^{it})$ tend vers $f(a)$ quand $\varepsilon \to 0$ et qu'on a de plus $|f(a+\varepsilon e^{it})| \leqslant M := \sup\{|f(z)|;\; z \in \overline{D}(a, \varepsilon_0)\}$ pour tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$, on en déduit (par convergence dominée)

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = i \int_0^{2\pi} \varepsilon\, dt = 2i\pi\, f(a)\,;$$

d'où la formule de Cauchy en faisant tendre ε vers 0 dans (3.2).

□

Corollaire 3.5. *Si $K \subset \mathbb{C}$ est un domaine élémentaire, alors*

$$\forall a \in \mathring{K} \ : \ \int_{\partial K} \frac{dz}{z-a} = 2i\pi\,.$$

Démonstration. On applique la formule de Cauchy avec $f(z) = 1$. □

Exercice. Déduire la formule de la moyenne de la formule de Cauchy. Autrement dit, montrer à l'aide de la formule de Cauchy que si f est une fonction holomorphe dans un disque $D(a,R)$, alors on a pour tout $0 < r < R$:

$$f(a) = \int_0^{2\pi} f(a + re^{it})\, \frac{dt}{2\pi}\cdot$$

3.4. Analyticité des fonctions holomorphes. Comme application de la formule de Cauchy, on va donner la preuve "classique" du fait que toute fonction holomorphe dans un disque $D(a,R)$ se développe en série entière dans ce disque. Cette preuve n'utiliser pas la téorie des séries de Fourier.

Soit f une fonction holomorphe dans $D(a,R)$. Notons d'abord le fait suivant.

Fait. Si $k \in \mathbb{N}$, alors l'intégale $\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^k}\, dz$ ne dépend pas de r tel que $0 < r < R$.

Preuve du Fait. Soient $0 < r < r' < R$, et soit $K := \overline{D}(a,r')\backslash D(a,r)$, qui est certainement un domaine élémentaire. Comme $a \notin K$, la fonction $z \mapsto \frac{f(z)}{(z-a)^k}$ est holomorphe au voisinage de K. Donc $\int_{\partial K} \frac{f(z)}{(z-a)^k}\, dz = 0$ par le Théorème de Cauchy ; autrement dit $\int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^k}\, dz = \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(z)}{(z-a)^k}\, dz$. □

Fixons maintenant un point $z \in D = D(a,R)$, et choisissons r tel que $|z-a| < r < R$. D'après la formule de Cauchy, on a

$$f(z) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\,.$$

De plus, si $\xi \in \partial D(a,r)$ alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi-a)-(z-a)} \\ &= \frac{1}{\xi-a} \times \frac{1}{1 - \frac{z-a}{\xi-a}}\,, \end{aligned}$$

et on a $\left|\frac{z-a}{\xi-a}\right| = \frac{|z-a|}{r} < 1$. On peut donc écrire

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - a} &= \frac{1}{\xi - z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z-a}{\xi-a}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+}}\,, \end{aligned}$$

où la série converge normalement sur $\partial D(a,r)$.

En revenant à la formule de Cauchy, on en déduit

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{\partial D(a,r)} \left(\frac{1}{2i\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-a)^n}{(\xi-a)^{n+}} f(\xi) \right) d\xi \\ &= \sum \int \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \, d\xi \right) (z-a)^n \,, \end{aligned}$$

où l'interversion de la somme infinie et de l'intégrale est justifiée par la convergence normale de la série sur $\partial D(a,r)$. Comme $\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(a,r)} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} \, d\xi$ dépend uniquement de n d'après le Fait, on peut le noter c_n. Ainsi, on a trouvé une suite de coefficients $(c_n)_{n \geqslant 0}$ indépendante de z telle que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \, (z-a)^n.$$

Chapitre 5

Résidus

1. La "formule des résidus"

DÉFINITION 1.1. *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe dans un* voisinage épointé de *a, c'est-à-dire un ouvert de la forme $W\backslash\{a\}$, où W est un voisinage de a. Le* ***résidu*** *de f au point a est le coefficient de $\frac{1}{z-a}$ dans le développement de Laurent de f dans n'importe quel disque épointé $D(a,r)\backslash\{a\}$; on le note* $\mathrm{Res}(f,a)$. *Autrement dit, si $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(z-a)^n$ dans un disque épointé $D(a,r)\backslash\{a\}$, alors*

$$\mathrm{Res}(f,a) = c_{-1}\,.$$

Le lemme suivant a essentiellement déjà été démontré.

LEMME 1.2. *Soit, $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $W\backslash\{a\}$, où W est un voisinage ouvert de a. Si $r > 0$ est tel que $\overline{D}(a,r) \subset W$, alors*

$$\int_{\partial D(a,r)} f(z)\,dz = 2i\pi\,\mathrm{Res}(f,a)\,.$$

Démonstration. Par l'Exemple 4.2 du Chapitre 3 (avec $n = -1$), on a

$$\mathrm{Res}(f,a)r^{-1} = \int_0^{2\pi} f(a+re^{it})e^{+it}\,\frac{dt}{2\pi};$$

donc

$$\mathrm{Res}(f,a) = \frac{1}{2i\pi}\int_0^{2\pi} f(a+re^{it})\,ire^{it}dt = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(a,r)} f(z)\,dz.$$

□

Mentionnons également deux faits évident mais très utiles :

Exercice 1. Montrer que si f et g sont holomorphe dans un voisinage épointé de a, alors $\mathrm{Res}(f+g,a) = \mathrm{Res}(f,a) + \mathrm{Res}(g,a)$.

Exercice 2. Montrer que si le point a est une singularité éliminable pour f, alors $\mathrm{Res}(f,a) = 0$.

Voici maintenant le résultat principal du chapitre.

THÉORÈME 1.3. (formule des résidus)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash S$, où S est une partie finie de Ω. Soit également $K \subset \Omega$ un domaine élémentaire, et supposons que ∂K ne contienne aucun point de S. Dans ces conditions, on a

$$\int_{\partial K} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} \mathrm{Res}(f,a)\,.$$

Démonstration. Par hypothèse, les points de $K \cap S$ sont tous dans $\mathring{K}$. Comme ces points sont en nombre fini, on peut donc trouver $r > 0$ tel que $\overline{D}(a,r) \subset \mathring{K}$ pour tout $a \in S \cap K$. Posons alors $L = K \backslash \bigcup_{a \in S \cap K} D(a,r)$. Par définition, L est un domaine élémentaire contenu dans $\Omega \backslash S$, donc f est holomorphe au voisinage de L. D'après le théorème de Cauchy, on a donc $\int_{\partial L} f(z)\, dz = 0$. Autrement dit :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\partial K} f(z)\, dz - \sum_{a \in S \cap K} \int_{\partial D(a,r)} f(z)\, dz \\ &= \int_{\partial K} f(z)\, dz - 2i\pi \sum_{a \in S \cap K} \operatorname{Res}(f,a)\,, \end{aligned}$$

d'après le lemme 1.2. □

Remarque. Lorsque $S = \varnothing$, *i.e.* f est holomorphe sur Ω, la formule des résidus donne $\int_{\partial K} f(z) dz = 0$, autrement dit le théorème de Cauchy. De même, lorsque f est holomorphe sur Ω et qu'on applique la formule des résidus à $g(z) := \frac{f(z)}{z-a}$, où $a \in \mathring{K}$ (donc avec $S = \{a\}$), on obtient la formule de Cauchy. Ainsi, le théorème des résidus est formellement une généralisation du théorème de Cauchy et de la formule de Cauchy.

2. Calcul pratique d'un résidu dans le cas d'un pôle

DÉFINITION 2.1. *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $W \backslash \{a\}$ où W est un voisinage ouvert de a. Soit également p un entier $\geqslant 1$. On dit que a est un* ***pôle de multiplicité*** *p pour f si on peut écrire $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$, où u est holomorphe au voisinage de a avec $u(a) \neq 0$, et v est holomorphe au voisinage de a avec un zéro de multiplicité p en a.*

REFORMULATION. Il revient au même de dire qu'on peut écrire

$$f(z) = \frac{u(z)}{(z-a)^p v_1(z)}$$

au voisinage de a, où u et v sont holomorphes avec $u(a) \neq 0$ et $v_1(a) \neq 0$; ou encore qu'on peut écrire

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$$

au voisinage de a, où g est holomorphe et $g(a) \neq 0$.

REMARQUE. Si a est un pôle de multiplicité p, alors il existe une constante $c \neq 0$ telle que $f(z) \sim \frac{c}{(z-a)^p}$ au voisinage de a. En particulier, a ne peut pas être un pôle de multiplicité $p' \neq p$ (de sorte qu'on peut parler de p comme étant **la** multiplicité de a comme pôle de f), et $|f(z)|$ tend vers l'infini quand $z \to a$.

EXEMPLE 2.2. Si f est une fonction rationnelle, $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ avec $\operatorname{pgcd}(P,Q) = 1$, alors les pôles de f sont les zéros du polynômes Q, et la multiplicité d'un point $a \in Z(Q)$ comme pôle de f est la multiplicité de a comme zéro de Q.

LEMME 2.3. *Supposons que a soit un* ***pôle simple*** *pour f, i.e. un pôle de multiplicité $p = 1$.*

- *Si f s'écrit sous la forme $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)}$, avec g holomorphe au voisinage de a, alors*

(PS1)
$$\operatorname{Res}(f, a) = g(a) = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)\,.$$

- *Si f s'écrit sous la forme $f(z) = \frac{u(z)}{(z-a)v_1(z)}$ avec u, v holomorphes au voisinage de a et $v_1(a) \neq 0$, alors*

(PS2)
$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{u(a)}{v_1(a)}\cdot$$

- *Si f s'écrit sous la forme $f(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$ ave u, v holomorphe au voisinage de a et v ayant un zéro simple en a, alors*

(PS2')
$$\operatorname{Res}(f, a) = \frac{u(a)}{v'(a)}\cdot$$

Démonstration. Pour (PS1), on développe g en série entière,

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^n\,.$$

On en déduit $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n(z-a)^{n-1}$, autrement dit

$$f(z) = \sum_{n=-1}^{\infty} d_{n+1}(z-a)^n\,.$$

Le résidu de f en a vaut donc $d_0 = g(a)$, ce qui prouve (PS1). La formule (PS2) s'en déduit immédiatement en posant $g = \frac{u}{v_1}\cdot$

Pour (PS2'), on écrit $v(z) = (z-a)v_1(z)$, où v_1 est holomorphe au voisinage de a avec $v_1(a) \neq 0$, et on applique (PS2) en remarquant que $v_1(a) = \lim_{z\to a} \frac{v(z)}{z-a} = v'(a)$. □

Les trois formules (PS1), (PS2) et et (PS2') sont très efficaces pour calculer un résidu en un pôle simple, et avec un peu d'habitude on voit immédiatement sur un exemple donné laquelle est la plus facile à utiliser. Il faut cependant impérativement garder à l'esprit que *ces formules ne sont valables que pour un pôle simple.* (En réalité, ce n'est pas tout à fait vrai : comme on n'a jamais utilisé le fait que $u(a) \neq 0$, les formules sont encore vraies si a est une singularité éliminable).

Exemple 1. Soit $f(z) = \tan z = \frac{\sin z}{\cos z}\cdot$

La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash S$, où $S = \{(2k+1)\frac{\pi}{2};\ k \in \mathbb{Z}\}$. Si $a = (2k+1)\frac{\pi}{2} \in S$, alors $\cos z$ a un zéro simple en a car $\cos'(a) = -\sin a = (-1)^{k+1} \neq 0$. D'après (PS2), on a donc $\operatorname{Res}(f, a) = \frac{\sin a}{\cos'(a)} = \frac{\sin a}{-\sin a} = -1$, pour tout $a \in S$.

Exemple 2. Soit $f(z) = \frac{1}{1+z^6}\cdot$

La fonction f est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash S$, où S est l'ensemble des racines 6-ièmes de -1, autrement dit $S = \{e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)};\ 0 \leqslant k \leqslant 5\}$. Si $a = e^{i\left(\frac{\pi}{6}+k\frac{\pi}{3}\right)} \in S$, alors a est un zéro simple de $v(z) = 1+z^6$, avec $v'(a) = 6a^5 = -\frac{6}{a}$ puisque $a^6 = -1$. Donc $\operatorname{Res}(f, a) = -\frac{a}{6}$ pour tout $a \in S$.

Lemme 2.4. *Supposons que a soit un pôle de multiplicité $p \geqslant 1$ pour f, et écrivons $f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^p}$, où g est holomorphe au voisinage de a. Notons $c_n(g)$ les coefficients du développement en série entière de g au voisinage de a. Alors*

$$\text{(PM)} \qquad \operatorname{Res}(f,a) = c_{p-1}(g) = \frac{g^{(p-1)}(a)}{(p-1)!}\,\cdot$$

Démonstration. Comme $g(z) = \sum_0^\infty c_n(g)(z-a)^n$, le développement de Laurent de f en a s'écrit

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(g)(z-a)^{n-p} = \sum_{n=-p}^{\infty} c_{n+p}(g)(z-a)^n\,,$$

d'où le résultat. □

Remarque. La deuxième identité dans (PM) est peu utilisable si p est grand puisqu'il faut dériver $p-1$ fois la fonction g, mais elle fonctionne assez bien pour $p=2$ ou 3. Si p est vraiment grand, il faut se débrouiller pour calculer le coefficient $c_{p-1}(g)$ sans dériver g, par exemple en déterminant directement le développement en série entière de g ; cf l'exemple donné à la fin de la sous-section 4 du Chapitre 3.

Exemple. Soit $f(z) = \frac{1}{z^3+3z^2-4}\cdot$

La fonction polynomiale $v(z) = z^3+3z^2-4$ admet 1 comme racine "évidente" ; et en factorisant par $z-1$, on trouve $v(z) = (z-1)(z+2)^2$. Donc $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+2)^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{1,-2\}$, avec un pôle simple en 1 et un pôle double en -2. D'après (PS2), on a $\operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{v_1(1)}$ avec $v_1(z) = (z+2)^2$, i.e. $\operatorname{Res}(f,1) = \frac{1}{9}\cdot$ D'après (PM), on a $\operatorname{Res}(f,2) = \frac{g'(-2)}{1!}$ avec $g(z) = \frac{1}{z-1}$, i.e. $\operatorname{Res}(f,-2) = -\frac{1}{9}\cdot$

3. Exemples de calculs d'intégrales

Dans cette section, on donne trois exemples montrant que le théorème des résidus peut se révéler remarquablement efficace pour calculer certaines intégrales n'ayant a priori aucun lien avec l'analyse complexe.

La stratégie est toujours la même pour calculer une intégrale inconnue I. On applique le théorème des résidus à une fonction holomorphe f bien choisie (en général facile à trouver) sur le bord d'un domaine élémentaire K également bien choisi (et parfois difficile à trouver) *dépendant d'un ou plusieurs paramètres.* Le bord de K se décompose en un certain nombre de morceaux, et l'intégrale de f sur le bord de K est la somme des intégrales sur chacun des morceaux. En général, l'une de ces intégrales tend vers l'intégrale cherchée I quand les paramètres tendent vers certaines bornes. Si on a de la chance, on sait aussi déterminer les limites des autres intégrales (parfois en fonction de I), et on obtient alors la valeur de I en passant à la limite dans la formule des résidus.

3.1. Fonctions rationnelles sans pôles réels.

Proposition 3.1. *Soit $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ une fraction rationnelle sans pôles réels, avec $\deg(Q) \geqslant \deg(P)+2$. On note $\mathcal{P}^+$ l'ensemble des pôles de f à partie imaginaire strictement positive. Alors*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = 2i\pi \sum_{a\in\mathcal{P}^+} \operatorname{Res}(f,a)\,.$$

Démonstration. L'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est bien définie car f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(t) = O(1/t^2)$ en $\pm\infty$, par hypothèse sur P et Q.

Posons $R_0 = \max\{|a|;\ a \text{ pôle de } f\}$, et pour $R > R_0$, considérons le domaine élémentaire

$$K_R = \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leqslant R \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}\,.$$

La fonction f est visiblement holomorphe au voisinage de $K_R \backslash \mathcal{P}^+$. D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{\partial K_R} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a \in \mathcal{P}^+} \mathrm{Res}(f,a)\,,$$

autrement dit

$$\int_{-R}^{R} f(t)\,dt + \int_{\gamma_R} f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a \in \mathcal{P}^+} \mathrm{Res}(f,a)\,,$$

où $\gamma_R : [0,\pi] \to \mathbb{C}$ est défini par $\gamma_R(t) = Re^{it}$. Pour conclure, il suffit donc de montrer que l'intégrale $\int_{\gamma_R} f(z)\,dz$ tend vers 0 quand $R \to \infty$.

En posant $M(R) = \sup\{|f(z)|;\ |z| = R\}$, on a

$$\begin{aligned} \left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| &\leqslant \int_{\gamma_R} |f(z)|\,|dz| \\ &\leqslant M(R) \times \pi R\,. \end{aligned}$$

Comme $M(R) = O(1/R^2)$ quand $R \to \infty$, on en déduit $\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,dz\right| = O(1/R)$, d'où le résultat.

□

Exemple. Calcul de $I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^6}\cdot$

La fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^6}$ vérifie les hypothèses de la proposition, avec $\mathcal{P}^+ = \{e^{i\pi/6}, e^{i\pi/2}, e^{i5\pi/6}\} = \{e^{i\pi/6}, i, e^{i5\pi/6}\}$. De plus, on a vu que si a est un pôle de f, alors $\mathrm{Res}(f,a) = -\frac{a}{6}$. On a donc

$$\begin{aligned} I &= 2i\pi \times -\frac{1}{6}\left(e^{i\pi/6} + i + e^{i5\pi/6}\right) \\ &= -\frac{i\pi}{3}\left(i + 2i\sin\frac{\pi}{6}\right) \\ &= \frac{2\pi}{3}\,\cdot \end{aligned}$$

3.2. Transformées de Fourier. Si f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, sa **transformée de Fourier** est la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\widehat{f}(\alpha) = \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\alpha t}\,dt\,.$$

Cette définition a un sens : la fonction intégrée est effectivement intégrable sur $\mathbb{R}$ puisque $|f(t)e^{-i\alpha t}| = |f(t)|$.

PROPOSITION 3.2. *Soit f une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$. On suppose que f se prolonge en une fonction holomorphe (encore notée f) au voisinage de $\overline{U}\backslash S$, où U est* *le demi-plan* $\{\mathrm{Im}(z)>0\}$ *et* S *est une partie finie de* U*, avec* $\lim_{|z|\to\infty}|f(z)|=0$. *Sous ces hypothèses, on a pour tout* $\alpha>0$ *:*

$$\widehat{f}(-\alpha)=2i\pi\sum_{a\in S}\mathrm{Res}(f(z)e^{i\alpha z},a)\,.$$

Démonstration. Fixons $\alpha>0$. Pour $R>R_0=\max\{|a|;\ a\in S\}$, on considère à nouveau le demi-disque

$$K_R=\{z\in\mathbb{C};\ |z|\leqslant R \text{ et } \mathrm{Im}(z)\geqslant 0\}\,.$$

La fonction $g(z)=f(z)e^{i\alpha z}$ est holomorphe au voisinage de $K_R\backslash S$, et tous les points de S sont dans $\mathring{K}_R$. D'après le théorème des résidus, on a donc

$$\int_{-R}^{R}f(t)e^{i\alpha t}\,dt+\int_{\gamma_R}f(z)e^{i\alpha z}\,dz=2i\pi\sum_{a\in S}\mathrm{Res}(f(z)e^{i\alpha z},a)\,.$$

où $\gamma_R:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ est défini par $\gamma_R(t)=Re^{it}$. L'intégrale $\int_{-R}^{R}f(t)e^{i\alpha t}\,dt$ tend vers $\widehat{f}(-\alpha)$, donc il suffit de montrer que $\int_{\gamma_R}f(z)e^{i\alpha z}\,dz\to 0$ quand $R\to\infty$.

On a

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_R}f(z)e^{i\alpha z}\,dz\right| &= \left|\int_0^{\pi}f(Re^{it})\,e^{i\alpha Re^{it}}\,iRe^{it}\,dt\right|\\ &\leqslant \int_0^{\pi}|f(Re^{it})|\,|e^{i\alpha Re^{it}}|\,R\,dt\\ &= R\int_0^{\pi}|f(Re^{it})|\,e^{-R\alpha\sin t}\,dt\\ &\leqslant R\,M(R)\int_0^{\pi}e^{-R\alpha\sin t}\,dt\,,\end{aligned}$$

où on a posé $M(R)=\sup\{|f(z)|;\ |z|=R\}$.

De plus, l'intégrale $\int_0^{\pi}e^{-R\alpha\sin t}\,dt$ est égale à $2\int_0^{\pi/2}e^{-R\alpha\sin t}\,dt$, comme on le voit en écrivant $\int_0^{\pi}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ et en changeant t en $\pi-t$ dans l'intégrale $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$. Comme $\sin t\geqslant\frac{2}{\pi}t$ pour $t\in[0,\pi/2]$ par concavité du sinus, on en déduit

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}e^{-R\alpha\sin t}\,dt &\leqslant 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{-\alpha R\frac{2}{\pi}t}\,dt\\ &= 2\left[-\frac{\pi}{2\alpha R}\,e^{-\frac{2\alpha R}{\pi}t}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\ &= \frac{\pi}{\alpha}\left(1-e^{-\alpha R}\right)\\ &\leqslant \frac{\pi}{\alpha R}\,.\end{aligned}$$

Au total, on obtient donc

$$\left|\int_{\gamma_R}f(z)e^{i\alpha z}\,dz\right|\leqslant\frac{\pi}{\alpha}\,M(R)\,,$$

d'où le résultat puisque $M(R)$ tend vers 0 quand $R\to\infty$, par hypothèse sur f. □

Exercice. Peut-on montrer que $\int_{\gamma_R}f(z)\,dz$ tend vers 0 par une application directe du théorème de convergence dominée ?

Exemple. Calcul de $I(x)=\int_0^{\infty}\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\,dt$ pour $x\in\mathbb{R}$.

La fonction à intégrer est effectivement intégrable sur $[0,\infty[$ car $\left|\frac{\cos(xt)}{1+t^2}\right| \leqslant \frac{1}{1+t^2}$; donc $I(x)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction I est visiblement paire, et on a $I(0) = \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{2}\cdot$

Pour $x = \alpha > 0$, on a

$$I(\alpha) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha t)}{1+t^2}\, dt = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha t}}{1+t^2}\, dt\right).$$

Autrement dit : $I(\alpha) = \frac{1}{2}\,\mathrm{Re}\,\widehat{f}(-\alpha)$, où $f(t) = \frac{1}{1+t^2}\cdot$

La fonction $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{i,-i\}$, et $f(z)$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$. On peut donc appliquer la proposition précédente avec $S = \{i\}$. Le point i est un pôle simple pour $f(z)e^{i\alpha z}$, donc

$$\mathrm{Res}(f(z)e^{i\alpha z}, i) = \frac{e^{i\alpha\times i}}{2i} = \frac{e^{-\alpha}}{2i}\cdot$$

On en déduit $\widehat{f}(-\alpha) = 2i\pi \times \frac{e^{-\alpha}}{2i} = \pi\, e^{-\alpha}$, d'où $I(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{-\alpha}$ pour $\alpha > 0$. Comme I est paire, on obtient ainsi

$$I(x) = \frac{\pi}{2}\, e^{-|x|}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3.3. Un exemple plus compliqué. Dans cette sous-section, on va calculer pour tout $\alpha \in\,]0,1[$, l'intégrale

$$I_\alpha = \int_0^\infty \frac{dt}{t^\alpha\,(1+t)}\cdot$$

Notons que I_α est bien définie et strictement positive, en tant qu'intégrale d'une fonction mesurable strictement positive (!). Mais évidemment, I_α est une "vraie" intégrale (i.e. $I_\alpha < \infty$) car la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est continue sur $]0,\infty[$ et équivalente à $\frac{1}{t^\alpha}$ en 0 et à $\frac{1}{t^{\alpha+1}}$ en $+\infty$, donc intégrable sur $]0,\infty[$ puisque $\alpha \in\,]0,1[$.

Suivant la stratégie exposée plus haut, on a envie d'appliquer le théorème des résidus à $f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$ sur des domaines élémentaires bien choisis. Cela étant, deux problèmes se posent immédiatement :

- donner un sens à z^α ;
- trouver des domaines élémentaires bien adaptés au problème.

Donner un sens à z^α n'est pas difficile : on choisit une demi-droite Δ d'origine 0 et on prend la détermination principale de z^α dans $\mathbb{C}\backslash\Delta$. Maintenant, on a le choix de la demi-droite Δ, et c'est la recherche du "bon" choix qui va en fait donner l'idée des domaines élémentaires à considérer.

Si on regarde la définition de I_α, on voit que la demi-droite $\Delta = [0,\infty[$ doit jouer un rôle. Paradoxalement, c'est cette demi-droite qu'on va enlever pour définir z^α alors qu'on veut calculer une intégrale *sur* Δ. On définit donc officiellement la fonction f sur $\Omega = \mathbb{C}\backslash([0,\infty[\cup\{-1\})$ par

$$f(z) = \frac{1}{z^\alpha(1+z)}\,,$$

où z^α est défini en prenant l'argument dans $]0,2\pi[$, puisque la demi-droite $[0,\infty[$ correspond à l'argument $\theta = 0$ (modulo 2π).

Ce choix n'est pas si surprenant si on garde à l'esprit la recherche des domaines élémentaires, qui doivent dépendre de certains paramètres appelés à tendre vers certaines limites : pour retrouver $\Delta = [0, \infty[$ (et donc I_α) dans le processus de passage à la limite, il suffira de prendre des domaines élémentaires dont certains morceaux "tendent" vers $[0, \infty[$. D'autre part, ces domaines doivent contenir le point $a = -1$ (le seul pôle de $f(z)$) dans leur intérieur si on veut que le théorème des résidus donne une information intéressante, et ils doivent être disjoints de $[0, \infty[$ puisque f n'est pas définie sur $[0, \infty[$.

Ces remarques devraient rendre moins "parachutée" la définition qui suit : pour ε et R vérifiant $0 < \varepsilon < 1 < R$, on notera $K_{\varepsilon R}$ le domaine élémentaire de type "pac-man" délimité par le demi-cercle $C_\varepsilon = \{|z| = \varepsilon,\ \mathrm{Re}(z) \leqslant 0\}$, les deux segments $I^+_{\varepsilon R} = [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$, $I^-_{\varepsilon R} = [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$, et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} = \{Re^{i\theta};\ \theta \in [-\pi; \pi],\ |\theta| \geqslant \theta_{\varepsilon R}\}$, où $\theta_{\varepsilon R} = \arctan(\varepsilon/\sqrt{R^2 - \varepsilon^2})$. Bien entendu, *un dessin est indispensable ici* !

La fonction f est holomorphe dans Ω et possède un pôle simple en -1, avec

$$\mathrm{Res}\,(f, -1) = \frac{1}{(-1)^\alpha} = e^{-i\pi\alpha}\,.$$

Comme $-1 \in \mathring{K}_{\varepsilon R}$, la formule des résidus s'écrit donc

$$\int_{\partial K_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha}\,. \tag{3.1}$$

Quand ε tend vers 0, l'intégrale $\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz$ tend vers 0 car

$$\begin{aligned}
\left|\int_{C_\varepsilon} f(z)\,dz\right| &= \left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{1}{(\varepsilon e^{it})^\alpha(1+\varepsilon e^{it})}\, i\varepsilon e^{it}\,dt\right| \\
&\leqslant \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\frac{\pi}{2}} \frac{\varepsilon\,dt}{\varepsilon^\alpha\,|1+\varepsilon e^{it}|} \\
&\leqslant \frac{1}{\varepsilon^\alpha(1-\varepsilon)} \times \pi\varepsilon \\
&= \frac{\pi\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\varepsilon}
\end{aligned}$$

et $\alpha < 1$.

L'intégrale $\int_{\Gamma_{\varepsilon R}} f(z)\,dz = \int_{\theta_{\varepsilon R}}^{2\pi-\theta_{\varepsilon R}} iR^{1-\alpha}\,\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ tend vers $\int_0^{2\pi} iR^{1-\alpha}\,\frac{e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta$ quand $\varepsilon \to 0$ (d'après le théorème de convergence dominée) car $\theta_{\varepsilon,R}$ tend vers 0 et la fonction apparaissant sous l'intégrale est intégrable sur $[0, 2\pi]$.

Si $t \in]0, \infty[$, alors $(t + i\varepsilon)^\alpha$ tend vers t^α et $(t - i\varepsilon)^\alpha$ tend vers $e^{2i\pi\alpha}t^\alpha$ quand ε tend vers 0^+, car l'argument de $t + i\varepsilon$ tend vers 0 et celui de $t - i\varepsilon$ tend vers 2π. Comme de plus $|f(t+iy)| \leqslant \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ pour tout $y \in \mathbb{R}$ et comme la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha(1+t)}$ est intégrable sur $]0, R]$ (car $\alpha < 1$), on en déduit, à l'aide du théorème de convergence dominée, que les intégrales $\int_{I^+_{\varepsilon R}} f(z)\,dz$ et $\int_{I^-_{\varepsilon R}} f(z)\,dz$ tendent respectivement vers $\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ et $e^{-2i\pi\alpha}\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)}$ quand ε tend vers 0.

En faisant tendre ε vers 0 dans (3.1), on obtient donc

$$\left(1 - e^{-2i\pi\alpha}\right)\int_0^R \frac{dt}{t^\alpha(1+t)} + i\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha}e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}}\,d\theta = 2i\pi\, e^{-i\pi\alpha} \tag{3.2}$$

pour tout $R > 1$. Enfin, on a

$$\left| \int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta}}{1 + Re^{i\theta}} \, d\theta \right| \leqslant \frac{R^{1-\alpha}}{R-1} \times 2\pi \,,$$

et comme $\alpha > 0$, on en déduit que l'intégrale $\int_0^{2\pi} \frac{R^{1-\alpha} e^{i(1-\alpha)\theta}}{1+Re^{i\theta}} \, d\theta$ tend vers 0 quand R tend vers $+\infty$. En faisant tendre R vers l'infini dans (3.2), on obtient ainsi

$$(1 - e^{-2i\pi\alpha}) I_\alpha = 2i\pi \, e^{-i\pi\alpha} \,,$$

d'où finalement, en écrivant $1 - e^{-2i\pi\alpha} = e^{-i\pi\alpha}(e^{i\pi\alpha} - e^{-i\pi\alpha}) = e^{-i\pi\alpha} \times 2i \sin(\pi\alpha)$:

$$I_\alpha = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} \cdot$$

4. Comptage de zéros

4.1. Zéros et dérivée logarithmique. Dans ce qui suit, on dira qu'une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ est **non triviale** si elle n'est constante sur aucune composante connexe de Ω. D'après le principe des zéros isolés, cela entraine en particulier que l'ensemble des zéros de f n'a pas de point d'accumulation dans Ω ; et donc que f n'a qu'un nombre fini de zéros sur tout compact.

Notation. Soit f une fonction holomorphe non triviale sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Pour tout ensemble $K \subset \Omega$, on note $N_Z(f, K)$ le nombre de zéros de f dans K, comptés avec leurs multiplicités.

Remarque 1. Si K est **compact**, alors f n'a qu'un nombre **fini** de zéros et de pôles sur K, car l'ensemble des zéros et l'ensemble des pôles de f n'ont pas de point d'accumulation dans Ω.

Remarque 2. Le sens de l'expression "comptés avec leurs multiplicités" est le suivant : si $a \in K$ est un zérode multiplicité m, alors a doit être compté m fois dans le calcul de $N_Z(f, K)$.

Exercice. Calculer $N_Z(f, \overline{D}(0, 2))$ et $N_Z(f, \overline{D}(0, 5))$ pour la fonction f définie par $f(z) := (z-1)^2(z-3)^3 \cos(z)$.

Définition 4.1. *Soit f une fonction holomorphe non triviale sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. La **dérivée logarithmique** de f est la fonction f'/f.*

Remarque. La fonction f'/f est définie et holomorphe sur $\Omega \backslash Z(f)$, qui est bien un ouvert de $\mathbb{C}$ car $Z(f)$ est un fermé de Ω.

L'expression "dérivée logarithmique" vient de la remarque suivante.

Exercice 1. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω et prenant ses valeurs dans $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}_-$, alors $f'/f = (\log(f))'$.

Par ailleurs, la dérivation logarithmique change les produits en somme (ce qui n'est bien entendu pas surprenant) :

Exercice 2. Montrer que si f et g sont deux fonctions holomorphes non triviales définies sur un même ouvert Ω, alors $(fg)'/fg = f'/f + g'/g$.

Le lien entre dérivée logarithmique et nombre de zéros est donnée par la proposition suivante.

Proposition 4.2. *Soit f une fonction holomorphe non triviale sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $K \subset \Omega$ un domaine élémentaire. On suppose que ∂K ne contient aucun zéro de f. Alors*

$$N_Z(f,K) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz.$$

La preuve repose sur le théorème des résidus et sur le lemme suivant.

Lemme 4.3. *Soit $a \in \mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $W\backslash\{a\}$, où W est un voisinage de a. Si a est un zéro de f avec multiplicité m, alors* $\mathrm{Res}(f'/f, a) = m$.

Démonstration. On peut écrire

$$f(z) = (z-a)^m g(z)\,,$$

où g est holomorphe au voisinage de a et $g(a) \neq 0$. On a donc

$$\begin{aligned}\frac{f'(z)}{f(z)} &= \frac{\big((z-a)^m\big)'}{(z-a)^m} + \frac{g'(z)}{g(z)}\\ &= \frac{m}{z-a} + \frac{g'(z)}{g(z)}\,\cdot\end{aligned}$$

De plus, comme g'/g est holomorphe au voisinage de a, on a $\mathrm{Res}(g'/g, a) = 0$. Donc

$$\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a\right) = \mathrm{Res}\left(\frac{m}{z-a}, a\right) + 0 = m.$$

□

Preuve de la proposition 4.2. Notons $a_1, \ldots, a_N$ les zéros de f dans K, et $m_1, \ldots, m_N$ les multiplicités.

La fonction f'/f est holomorphe au voisinage de $K\backslash\{a_1, \ldots, a_N\}$. D'après le théorème des résidus et le lemme 4.3, on a donc

$$\begin{aligned}\int_{\partial K}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= 2i\pi\sum_{i=1}^{N}\mathrm{Res}\left(\frac{f'}{f}, a_i\right)\\ &= 2i\pi\sum_{i=1}^{M} m_i\\ &= 2i\pi\, N_Z(f,K).\end{aligned}$$

□

4.2. Le théorème de Rouché. Le résultat suivant signifie que si on veut calculer le nombre de zéros d'une fonction holomorphe f dans un certain domaine élémentaire K, on peut remplacer f par n'importe quelle fonction holomorphe g suffisamment proche de f. Évidemment, ceci n'est intéressant que si $N_Z(g,K)$ est facile à calculer. On aura donc intérêt à chercher une fonction g la plus "simple" possible.

Théorème 4.4. ("théorème de Rouché")
Soit f une fonction holomorphe non identiquement nulle sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $K \subset \Omega$ un domaine élémentaire. Soit également $g \neq 0$ une autre fonction holomorphe sur Ω. On suppose qu'on a $|f(\xi) - g(\xi)| < |g(\xi)|$ pour tout $\xi \in \partial K$. Alors g a le même nombre de zéros que f dans K. De plus, tous ces zéros sont dans $\mathring{K}$.

Exemple. Cherchons le nombre de zéros de $f(z) = z^7 + 3z^4 - 2z^3 + 1$ dans le disque $K = \overline{D}(0,2)$. Si on pose $g(z) = z^7$ et si $\xi \in \partial K$, i.e. $|\xi| = 3$, alors $|f(\xi) - g(\xi)| = |3\xi^4 - 2\xi^3 + 1| \leqslant 3 \times 2^4 + 2 \times 2^3 + 1 = 65$ et $|g(\xi)| = 2^7 = 128$. D'après Rouché, on a donc $N_Z(f,K) = N_Z(g,K) = 7$ (car g possède un zéro de multiplicité 7 en $z = 0$).

Remarque 1. Il est essentiel que l'inégalité $|f(\xi) - g(\xi)| < |g(\xi)|$ soit **stricte** pour que la conclusion soit valable. Par exemple, si on prend $f(z) = z + 1$, $g(z) = 1$ et $K = \overline{\mathbb{D}}$, alors f a un zéro dans K (à savoir $z = -1$) mais g n'en a aucun. Pourtant, on a $|f(\xi) - g(\xi)| = |\xi| \leqslant 1 = |g(\xi)|$ pour tout $\xi \in \partial\mathbb{D}$.

Remarque 2. Bien entendu, f et g n'ont pas nécessairement les *mêmes* zéros, et les multiplicités n'ont pas de raisons d'être conservées. Par exemple, si $f(z) = z^3 - 1$ et $g(z) = z^3$, alors Rouché s'applique dans le disque $K = \overline{D}(0,2)$ et on en "déduit" que f et g ont 3 zéros dans K ; mais f a 3 zéros simples (les racines cubiques de 1) et g un zéro triple en 0.

Preuve du théorème de Rouché. Remarquons d'abord que f et g n'ont aucun zéro sur ∂K : si on avait $f(\xi) = 0$ pour un certain $\xi \in \partial K$, on obtiendrait $|0 - g(\xi)| < |g(\xi)|$; et si on avait $g(\xi) = 0$, on obtiendrait $|f(\xi) - 0| < 0$.

On veut montrer qu'on a $N_Z(f,K) = N_Z(g,K)$. Par la Proposition 4.2, il s'agit donc de voir qu'on a

$$\int_{\partial K} \left(\frac{f'(z)}{f(z)} - \frac{g'(z)}{g(z)} \right) dz = 0;$$

et comme $\frac{f'}{f} - \frac{g'}{g} = \frac{(f/g)'}{f/g}$ (exo), cela revient à montrer que

$$\int_{\partial K} \frac{(f/g)'(z)}{(f/g)(z)}\, dz = 0$$

La fonction f/g est bien définie et holomorphe au voisinage de ∂K. De plus, on a par hypothèse $|(f/g)(\xi) - 1| < 1$ pour tout $\xi \in \partial K$. Par continuité, cela reste vrai au voisinage de ∂K. Il existe ainsi un ouvert $V \supset \partial K$ tel que $(f/g)(z) \in D(1,1)$ pour tout $z \in V$. Alors, la fonction $\phi = \log(f/g)$ est bien définie et holomorphe sur V, et on a $\phi' = \frac{(f/g)'}{(f/g)}$. Par conséquent,

$$\int_{\partial K} \frac{(f/g)'(z)}{(f/g)(z)}\, dz = \int_{\partial K} \phi'(z)\, dz = 0,$$

puisque ∂K est constitué de courbes fermées et que $\int_\gamma \phi'(z) dz = \int_\gamma d\phi = 0$ pour tout chemin fermé γ dans V. □

COROLLAIRE 4.5. *Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, et soit $K \subset \Omega$ un domaine élémentaire. Pour tout $w \in \mathbb{C}$, notons $N(f,w,K)$ le nombre de solutions de l'équation $f(z) = w$ dans K, comptées avec leurs multiplicités :*

$$N(f,w,K) = N_Z(f - w, K).$$

*Alors l'application $w \mapsto N(f,w,K)$ est **localement constante** sur l'ouvert $\mathbb{C}\backslash f(\partial K)$: pour tout point $w_0 \in \mathbb{C}\backslash f(\partial K)$, on a $N(f,w,K) \equiv N(f,w_0,K)$ au voisinage de w_0.*

Démonstration. Fixonx $w_0 \in \mathbb{C}\backslash f(\partial K)$. Comme ∂K est compact, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $|f(\xi) - w_0| \geqslant \varepsilon$ pour tout $\xi \in \partial K$. Si $w \in \mathbb{C}$ vérifie $|w - w_0| < \varepsilon$, alors $w \notin f(\partial K)$ par définition de ε, et on a

$$|(f(\xi) - w) - (f(\xi) - w_0)| = |w - w_0| < |f(\xi) - w_0|$$

pour tout $\xi \in \partial K$. D'après le théorème de Rouché, on a donc

$$N(f,w,K) = N_Z(f-w,K) = N_Z(f-w_0,K) = N(f,w_0,K)$$

pour tout $w \in D(w_0,\varepsilon)$. $\square$

4.3. Trois exemples d'application.

Exemple 1. Le théorème fondamental de l'algèbre.

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_N z^N$ un polynôme de degré $N \geqslant 1$ (à coefficients complexes). On va montrer à l'aide du théorème de Rouché que P possède N racines complexes (comptées avec leur multiplicité).

En écrivant $P(z) = a_N z^N \left(1 + \frac{a_{N-1}}{a_N} \times \frac{1}{z} + \cdots + \frac{a_0}{a_N} \times \frac{1}{z^{N-1}}\right)$, on voit que $P(z) \sim a_N z^N$ quand $|z| \to \infty$. On peut donc trouver $R > 0$ tel que

$$|z| \geqslant R \implies |P(z) - a_N z^N| \leqslant \frac{1}{2}\,|a_N z^N|\,.$$

Posons alors $K = \overline{D}(0,R)$. Si $\xi \in \partial K$, on a

$$|P(\xi) - a_N \xi^N| \leqslant \frac{1}{2}\,|a_N \xi^N| < |a_N \xi^N|$$

car évidemment $a_N \xi^N \neq 0$. D'après Rouché appliqué avec $f = P$ et $g(z) = a_N z^N$, on en déduit

$$N(P(z),0,K) = N(a_N z^N,0,K) = N$$

car $z = 0$ appartient à K et est racine de z^N avec multiplicité N. Ainsi, P a au moins N racines complexes, et bien entendu au plus N puisque $\deg P = N$.

Exemple 2. Le "théorème de l'application ouverte".

Le théorème suivant a déjà été démontré à l'aide du principe du maximum. On va en donner une autre preuve basée sur le corollaire 4.5.

Théorème 4.6. *Si f est une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors f est une application* ***ouverte*** *: l'image par f de tout ouvert $V \subset \mathbb{C}$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.*

Démonstration. Fixons un ouvert $V \subset \Omega$ et un point $a \in V$, et posons $b = f(a)$. On cherche $\varepsilon > 0$ tel que $D(b,\varepsilon) \subset f(V)$.

Comme f n'est pas constante et que Ω connexe, le principe des zéros isolés (appliqué à $g(z) = f(z) - b$) permet de choisir $r > 0$ tel que $\overline{D}(a,r) \subset V$ et $f(z) \neq b$ pour tout $z \in \overline{D}(a,r)\backslash\{a\}$. En posant $K = \overline{D}(a,r)$, on a donc $b \notin f(\partial K)$.

D'après le corollaire 4.5, on peut trouver $\varepsilon > 0$ tel que $N(f,w,K) = N(f,b,K)$ pour tout $w \in D(b,\varepsilon)$. Comme $b = f(a)$ et $a \in K$, on a $N(f,a,K) \geqslant 1$, et donc $N(f,w,K) \geqslant 1$ pour $w \in D(b,\varepsilon)$. Ainsi, pour tout $w \in D(b,\varepsilon)$, l'équation $f(z) = w$ possède au moins une solution dans K, et donc dans V. Autrement dit, $D(b,\varepsilon) \subset f(V)$. $\square$

Exercice. Déduire le principe du maximum du théorème de l'application ouverte.

Exemple 3. Fonctions holomorphes injectives.

Comme autre illustration du corollaire 4.5, on va maintenant démontrer le résultat suivant.

Proposition 4.7. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si f est une fonction holomorphe **injective** sur Ω, alors f' ne s'annule pas sur Ω.*

Démonstration. En considérant séparément chaque composante connexe de Ω, on se ramène au cas où Ω est connexe.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe injective, et supposons qu'on ait $f'(a) = 0$ pour un certain $a \in \Omega$. Comme f n'est pas constante (et donc $f' \neq 0$), le principe des zéros isolés permet de trouver $r > 0$ avec $\overline{D}(a, r) \subset \Omega$ tel que les deux propriétés suivantes soient vérifiées : $f(z) \neq f(a)$ pour tout $z \in \overline{D}(a, r)\backslash\{a\}$, et f' ne s'annule pas sur $\overline{D}(a, r)\backslash\{a\}$.

Posons $K = \overline{D}(a, r)$ et $b = f(a)$, de sorte que $b \notin f(\partial K)$. Si on pose $g(z) = f(z)-b$, alors $g(a) = 0$ et $g'(a) = f'(a) = 0$. Donc le point a est un zéro de $g = f - b$ avec une multiplicité au moins égale à 2, et comme $a \in K$ on en déduit $N(f, b, K) \geqslant 2$. D'après le corollaire 4.5, on a $N(f, w, K) \geqslant 2$ pour tout w suffisamment proche de b ; en particulier, on peut trouver $w_0 \neq b$ tel que $N(f, w_0, K) \geqslant 2$.

Deux cas sont alors possibles : ou bien on peut trouver 2 points distincts $z_1, z_2 \in K$ tels que $f(z_1) = w_0 = f(z_2)$; ou bien on peut trouver un point $z_0 \in K$ tel que $f(z_0) = w_0$ et $f'(z_0) = 0$. Le premier cas est exclu par injectivité de f ; et le deuxième est également exclu car la seule racine de f' dans K est la point a et $f(a) = b \neq w_0$. On a ainsi obtenu une contradiction. □

Corollaire 4.8. *Si $f : \Omega \to \Omega'$ est une bijection holomorphe d'un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ sur un ouvert Ω', alors f^{-1} est holomorphe sur Ω'.*

Démonstration. La fonction f n'est constante sur aucune composante connexe de Ω, donc $f(V)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ (et donc de Ω') pour tout ouvert $V \subset \Omega$, d'après le théorème de l'application ouverte. Autrement dit : $(f^{-1})^{-1}(V)$ est ouvert pour tout ouvert $V \subset \Omega$, ce qui signifie que f^{-1} est *continue* sur Ω.

La continuité de f étant acquise, on peut maintenant montrer, exactement comme dans le cas des fonctions d'une variable réelle, que f^{-1} est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, avec

$$(f^{-1})'(z) = \frac{1}{f'(f^{-1}(z))}$$

pour tout $z \in \Omega'$. (Les détails sont laissés en exercice). Comme $f' \circ f^{-1}$ est continue, $(f^{-1})'$ est continue, donc f^{-1} est holomorphe. (On peut aussi appliquer Cauchy-Goursat, mais ce n'est pas indispensable). □

Remarque. On aurait pu procéder très différemment, en utilisant le **théorème d'inversion locale**. En effet, comme f est holomorphe le déterminant jacobien de f en tout point $z \in \Omega$ est égal à $|f'(z)|^2$ (voir le chapitre 2, corollaire 2.11) ; donc J_f ne s'annule jamais, et d'après le théorème d'inversion locale on en déduit que f est un difféomorphisme de Ω sur Ω', autrement dit que $g = f^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$. En différentiant la relation $f \circ g(z) = z$, on obtient alors $(f' \circ g)\, dg = dz$, autrement dit $dg = \frac{dz}{f'(g(z))}$ · Cela montre que $g = f^{-1}$ est holomorphe, avec la formule attendue pour $(f^{-1})'$.

Corollaire 4.9. *Si f est une fonction holomorphe injective sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$, alors $\Omega' = f(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{C}$ et f est un difféomorphisme de Ω sur Ω'.*

Démonstration. Le fait que Ω' soit ouvert vient par exemple du théorème de l'application ouverte, donc on peut appliquer le corollaire précédent. On peut aussi appliquer la proposition et le théorème d'inversion locale. □

Exercice. Soit f une fonction holomorphe injective sur le disque unité $\mathbb{D}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \,.$$

En utilisant le théorème de changement de variable, un passage en coordonnées polaires et l'identité de Parseval, montrer que l'aire de $f(\mathbb{D})$ est donnée par la formule

$$aire(f(\mathbb{D})) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n \, |c_n|^2 \,.$$

Chapitre 6

Suites, séries et intégrales

1. Majoration de la dérivée

NOTATION. Pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$, on posera

$$K^\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{C};\ \mathrm{dist}(\xi, K) \leqslant \varepsilon\}.$$

LEMME 1.1. *Étant donné $\varepsilon > 0$, il existe une constante $C(\varepsilon)$ vérifiant la propriété suivante : pour tout compact $K \subset \mathbb{C}$ et pour toute fonction f holomorphe au voisinage de K^ε, on a*

$$\sup_{z \in K} |f'(z)| \leqslant C(\varepsilon) \sup_{\xi \in K^\varepsilon} |f(\xi)|\,.$$

Démonstration. Soit K un compact de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur un ouvert Ω contenant K^ε. Fixons également $z \in K$.

Le disque $\overline{D}(z, \varepsilon)$ est contenu dans K^ε, donc dans Ω. On peut donc trouver $r_z > \varepsilon$ tel que $D(z, r_z) \subseteq \Omega$. Comme f est holomorphe, on peut la développer en série entière dans le disque $D(z, r),$; autrement dit, on peut écrire

$$\forall h \in D(0, r_z)\ :\ f(z + h) = \sum_{n-0}^{\infty} c_n(z) h^n,$$

où on sait que les coefficients $c_n(z)$ vérifient $c_n(z) = \frac{f^{(n)}(z)}{n!}$ et $|c_n(z)| r^n \leqslant M(r) = \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial D(z, r)\}$ pour tout $r < r_z$ (inégalités de Cauchy). En particulier, pour $n := 1$ et $r := \varepsilon$, on obtient

$$|f'(z)| = |c_1(z)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\, M(\varepsilon) \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\, \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in K^\varepsilon\},$$

puisque $\partial D(z, \varepsilon) \subseteq \overline{D}(z, \varepsilon) \subseteq K^\varepsilon$. Ceci étant vrai pour tout $z \in K$, on voit ainsi qu'on peut prendre $C(\varepsilon) := 1/\varepsilon$.

□

Remarque. Le point essentiel est que la constante $C(\varepsilon)$ **ne dépend pas de la fonction** f holomorphe au voisinage de K^ε.

2. Suites de fonctions holomorphes

On sait bien que si une suite (f_n) de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle de $\mathbb{R}$ converge uniformément, alors sa limite f n'a aucune raison d'être encore de classe $\mathcal{C}^1$: pour pouvoir conclure à coup sur que f est de classe $\mathcal{C}^1$, on doit par exemple supposer que la suite des *dérivées* (f'_n) converge uniformément. La situation est très différente lorsqu'on considère des fonctions holomorphes : il n'est plus nécessaire de faire une hypothèse sur les dérivées, car la propriété que l'on souhaite est *automatiquement* satisfaite. C'est le contenu du théorème suivant.

Théorème 2.1. *Soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que la suite (f_n) converge* ***uniformément sur tout compact*** *vers une fonction $f : \Omega \to \mathbb{C}$. Alors f est holomorphe et $f_n' \to f'$ uniformément sur tout compact.*

Démonstration. Soit K un compact quelconque de Ω, et choisissons $\varepsilon > 0$ tel que $K^\varepsilon \subset \Omega$. D'après le lemme 1.1, on a

$$\sup_K |f_q' - f_p'| \leqslant C(\varepsilon) \sup_{K^\varepsilon} |f_q - f_p|$$

pour tous $p, q \in \mathbb{N}$. Comme la suite (f_n) converge uniformément sur le compact K^ε, on en déduit que la suite des dérivées (f_n') vérifie le **critère de Cauchy uniforme** sur tout compact $K \subset \Omega$. Par conséquent, la suite (f_n') converge uniformément sur tout compact vers une fonction $g : \Omega \to \mathbb{C}$, nécessairement continue car les f_n' le sont. Par le Lemme 3.11 du Chapitre 2, on en déduit que f est holomorphe et que $f' = g$. □

Remarque. Pour montrer que la fonction f est holomorphe, on peut également utiliser le **théorème de Morera** (*cf* Chapitre 8). Tout d'abord, la convergence uniforme sur tout compact entraine la continuité de f, car les f_n sont continues. Ensuite, si T est un triangle fermé contenu dans Ω, alors $\int_{\partial T} f_n(z)\, dz$ tend vers $\int_{\partial T} f(z)\, dz$ quand $n \to \infty$, par convergence uniforme de (f_n) sur le compact ∂T ; et donc $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$ puisque $\int_{\partial T} f_n(z)\, dz = 0$ pour tout n (d'après le théorème de Cauchy). En revanche, la convergence des dérivées ne se déduit pas du théorème de Morera.

Corollaire 2.2. *Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. Si la série $\sum u_k$ converge* ***normalement sur tout compact de*** *Ω, alors la fonction $f = \sum_0^\infty u_k$ est holomorphe sur Ω.*

Démonstration. On applique le théorème aux sommes partielles $f_n = \sum_{k=0}^n u_k$. □

Exemple 2.3. La série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^s}$ converge normalement sur tout compact de $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$. Par conséquent, la formule

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^s}$$

définit une fonction holomorphe sur Ω. Cette fonction s'appelle la **fonction Zeta de Riemann**.

Démonstration. Si K est un compact de $\Omega = \{\mathrm{Re}(s) > 1\}$, on peut trouver $\alpha > 1$ tel que $\mathrm{Re}(s) \geqslant \alpha$ pour tout $s \in K$. On a alors $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\mathrm{Re}(s)}} \leqslant \frac{1}{n^\alpha}$ pour tout $s \in K$, ce qui prouve la convergence normale de la série. □

3. Intégrales à paramètres

Théorème 3.1. *Soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On fait les hypothèses suivantes .*

(i) *$F(t, z)$ est intégrable en $t \in I$, et holomorphe en $z \in \Omega$; autrement dit : pour tout $z \in \Omega$, la fonction $t \mapsto F(t, z)$ est intégrable sur I, et pour tout $t \in I$, la fonction $z \mapsto F(t, z)$ est holomorphe sur Ω.*

(ii) *Pour tout compact $K \subset \Omega$, on peut majorer $|F(t, z)|$ pour $z \in K$ par une fonction $g_K(t)$* ***indépendante de*** *z et intégrable sur I.*

Alors la formule

$$f(z) := \int_I F(t,z)\,dt$$

définit une fonction holomorphe sur Ω*. De plus, on peut dériver sous l'intégrale : pour tout* $z \in \Omega$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, la fonction* $t \mapsto \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(t,z)$ *est intégrable sur* I *et*

$$f^{(n)}(z) = \int_I \frac{\partial^n F}{\partial z^n}(t,z)\,dt\,.$$

Remarque. L'hypothèse de domination (ii) est satisfaite si l'intervalle I est **borné** et si on peut majorer $|F(t,z)|$ **par une constante** pour $z \in K$. En particulier : *si* I *est un intervalle* ***compact*** *et si* $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ *est* ***continue*** *par rapport au couple de variables* (t,z) *et holomorphe par rapport à* $z \in \Omega$*, alors le théorème s'applique.*

Preuve du théorème. Soit K un compact quelconque de Ω, et soit $\varepsilon = \varepsilon_K > 0$ tel que $K^\varepsilon \subset \Omega$. D'après le lemme 1.1, on a

$$\begin{aligned} \sup_{z\in K}\left|\frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\right| &\leqslant C(\varepsilon)\sup_{\xi\in K^\varepsilon}|F(t,\xi)| \\ &\leqslant C(\varepsilon)\,g_{K^\varepsilon}(t) \end{aligned}$$

pour tout $t \in I$. Comme $\frac{\partial F}{\partial x}(t,\cdot) = \frac{\partial F}{\partial z}(t,\cdot)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(t,\cdot) = i\,\frac{\partial F}{\partial z}(t,\cdot)$, on a donc

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}(t,z)\right| \leqslant h_K(t) \quad \text{et} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial y}(t,z)\right| \leqslant h_K(t)$$

pour tout $t \in I$ et pour tout $z \in K$, où $h_K := C(\varepsilon)\,g_{K^\varepsilon}$ est intégrable sur I et indépendante de $z \in K$.

Ceci étant vrai pour tout compact $K \subset \Omega$, cela montre que la fonction F vérifie les hypothèses du théorème "usuel" concernant la dérivabilité des intégrales à paramètres. Par conséquent, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω et ses dérivées partielles s'obtiennent en dérivant sous l'intégrale.

En particulier, on a

$$\frac{\partial f}{\partial \bar z}(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial \bar z}(t,z)\,dt = 0$$

pour tout $z \in \Omega$, donc f est holomorphe ; et on a

$$f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z) = \int_I \frac{\partial F}{\partial z}(t,z)\,dt\,.$$

Enfin, ce qui précède montre que la fonction $\frac{\partial F}{\partial z}$ vérifie les mêmes hypothèses (i) et (ii) que F, et par récurrence on voit qu'il en est de même pour toutes les $\frac{\partial^n F}{\partial z^n}$. On peut donc calculer les dérivées successives de f en dérivant sous l'intégrale. □

Corollaire 3.2. *Soit* $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ *un chemin de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux d'image* Γ*, et soit* Ω *un ouvert de* $\mathbb{C}$*. Si* $F : \Gamma \times \Omega \to \mathbb{C}$ *est une fonction continue telle que, pour tout* $\xi \in \Gamma$*, la fonction* $z \mapsto F(\xi,z)$ *est holomorphe sur* Ω*, alors la formule* $f(z) = \int_\gamma F(\xi,z)\,d\xi$ *définit une fonction holomorphe sur* Ω*.*

Démonstration. Par définition, on a $f(z) = \int_a^b F(\gamma(t),z)\,\gamma'(t)\,dt$. Si K est un compact de Ω, la fonction continue $(t,z) \mapsto F(\gamma(t),z)$ est *bornée* sur le compact $[0,2\pi]\times K$, disons $|F(t,z)| \leqslant M_K$; et on a alors $|F(\gamma(t),z)\,\gamma'(t)| \leqslant M_K\,|\gamma'(t)| = g_K(t)$ pour $z \in K$. La fonction g_K est intégrable sur $[a,b]$ car continue par morceaux, et par conséquent le théorème s'applique. □

Remarque 1. Le théorème 3.1 reste valable, avec la même démonstration, en remplaçant l'intervalle I muni de la mesure de Lebesgue par un espace mesuré $(I, \mathfrak{A}, \mu)$.

Remarque 2. Comme pour le théorème 2.1, l'holomorphie de la fonction f peut se déduire du théorème de Morera (*cf* Chapitre 7). Les détails constituent un bon exercice : il faut d'abord vérifier la continuité de f, puis utiliser le théorème de Fubini pour montrer que $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$ pour tout triangle $T \subset \Omega$.

EXEMPLE 3.3. Soit $\Omega = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. La formule

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt$$

définit une fonction holomorphe sur Ω. Cette fonction s'appelle la **fonction Gamma d'Euler**.

Démonstration. La fonction $F :]0, \infty[\times \Omega \to \mathbb{C}$ définie par $F(t, z) = t^{z-1} e^{-t}$ est mesurable en $t \in]0, \infty[$ et holomorphe en $z \in \Omega$. De plus, on a

$$|F(t, z)| = t^{\mathrm{Re}(z)-1} e^{-t}$$

pour tout $(t, z) \in]0, \infty[\times \Omega$.

Si K est un compact de Ω, on peut trouver $a > 0$ et $b < \infty$ tels que $a \leqslant \mathrm{Re}(z) \leqslant b$ pour tout $z \in K$. On a alors $t^{\mathrm{Re}(z)-1} \leqslant t^{a-1}$ si $t \in]0, 1[$ et $t^{\mathrm{Re}(z)-1} \leqslant t^{b-1}$ si $t \geqslant 1$, pour tout $z \in K$. On obtient ainsi $|F(t, z)| \leqslant g_K(t)$, où

$$g_K(t) = \begin{cases} t^{a-1} e^{-t} & \text{si} \quad 0 < t \leqslant 1 \\ t^{b-1} e^{-t} & \text{si} \qquad t \geqslant 1 \end{cases}$$

La fonction g_K est intégrable sur $]0, 1]$ car elle est continue avec $g_k(t) \sim t^{a-1}$ au voisinage de 0 et $a - 1 > -1$; et elle est intégrable sur $[1, \infty[$ car $g_K(t) = O(1/t^2)$ en $+\infty$. Donc g_K est intégrable sur $]0, \infty[$.

D'après le théorème 3.1, on peut donc conclure que Γ est (bien définie et) holomorphe sur Ω. □

Exercice. Montrer qu'on a $\Gamma(z + 1) = z\,\Gamma(z)$ pour tout $z \in \Omega$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

4. Produits infinis

DÉFINITION 4.1. *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0)}$ une suite de nombres complexes. On dit que **le produit infini** $\prod a_n$ **est convergent** si la suite des "produits partiels" $P_N = \prod_{n=0}^N a_n$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $N \to \infty$. Cette limite se note alors $\prod_{n=0}^\infty a_n$.*

Le lemme suivant et sa preuve contiennent essentiellement tout ce qu'il faut savoir sur les produits infinis. Comme toujours, on note log la détermination principale du logarithme ; et on rappelle que la fonction log est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ avec $\log'(z) = 1/z$.

LEMME 4.2. *Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres complexes. Si la série $\sum |1 - a_n|$ est convergente, alors le produit infini $\prod a_n$ est convergent. Si de plus $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la série $\sum \log(a_n)$ est convergente et $\prod_{n=0}^\infty a_n = e^{\sum_{n=0}^\infty \log(a_n)}$; en particulier, $\prod_{n=0}^\infty a_n \neq 0$.*

Démonstration. La preuve repose sur le fait suivant.

Fait 4.3. *Si $h \in \mathbb{C}$ vérifie $|h| \leqslant 1/2$, alors $|\log(1+h)| \leqslant 2\,|h|$.*

Preuve du Fait 4.3. Le segment $[1, 1+h]$ est contenu dans le disque $\overline{D}(1, 1/2)$, donc dans $\mathbb{C} \backslash \mathbb{R}^-$. Par le TFA holomorphe, on a donc

$$\log(1+h) = \log(1) + \int_0^1 \log'(1+th)\, h dt = \int_0^1 + \frac{h}{1+th}\, dt;$$

et par conséquent

$$|\log(1+h)| \leqslant \int_0^1 \frac{|h|}{1-|th|}\, dt \leqslant 2\,|h|\,,$$

où la deuxième inégalité vient du fait que $|th| \leqslant |h| \leqslant 1/2$. □

Démontrons maintenant le lemme. Comme la série $\sum |1-a_n|$ est convergente, on sait que $a_n \to 1$. Donc, on peut trouver un entier N_0 tel que $|a_n - 1| \leqslant 1/2$ pour tout $n > N_0$. Alors $a_n \neq 0$ pour tout $n > N$, et par le lemme appliqué à $h := a_n - 1$, on a $|\log(a_n)| \leqslant 2|a_n - 1|$ pour tout $n > N_0$. Par conséquent, la série $\sum_{n>N_0} \log(a_n)$ est absolument convergente, et donc convergente.

Pour $n > N_0$, on a

$$\prod_{n,=0}^{N} a_n = \prod_{n=0}^{N_0} a_n \times \prod_{n=N_0+1}^{N} a_n = \prod_{n=0}^{N_0} a_n \times \exp\left(\sum_{n=N_0+1}^{N} \log(a_n)\right).$$

Par continuité de l'exponentielle, on en déduit que le produit infini $\prod a_n$ est convergent, et qu'on a

$$\prod_{n=0}^{\infty} a_n = \prod_{n=0}^{N_0} a_n \times \exp\left(\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \log(a_n)\right).$$

Si de plus $a_n \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on peut écrire $a_n = e^{\log(a_n)}$ pour tout n, donc $\prod_{n=0}^{N_0} a_n = \exp\left(\sum_{n=0}^{N_0} \log(a_n)\right)$, et donc $\prod_{n=0}^{\infty} a_n = e^{\sum_{n=0}^{\infty} \log(a_n)}$ □

Théorème 4.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $(f_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que la série $\sum(1-f_n)$ converge* ***normalement sur tout compact de*** *Ω.*

(1) *Le produit infini $\prod f_n(z)$ converge uniformément sur tout compact de Ω, et la fonction $f = \prod_0^\infty f_n$ est holomorphe sur Ω.*

(2) *On a $Z(f) = \bigcup_{n\geqslant 0} Z(f_n)$, et la multiplicité d'un zéro $a \in Z(f)$ est la somme des multiplicités de a comme zéro des f_n.*

(3) *Si les f_n ne s'annulent pas, alors f ne s'annule pas et le dérivée logarithmique de f est donnée par la formule*

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n' z)}{f_n(z)},$$

où la série converge uniformément sur tout compact de Ω.

Démonstration. (1) Par le Lemme 4.2, on peut dire tout de suite que le produit infini $\prod f_n(z)$ converge pour tout $z \in \Omega$. Montrons que la convergence est uniforme sur tout compact. Soit K un compact de Ω. Comme la série $\sum(1-f_n(z))$ converge normalement (donc uniformément) sur K, on sait que $1 - f_n(z) \to 0$ uniformément sur K ; donc on peut trouver un entier N_0 tel que $\forall z \in K\ :\ |f_n(z)-1| \leqslant 1/2$. Par la preuve du Lemme 4.2, on a alors

$$\forall z \in K\ :\ \prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \prod_{n=0}^{N_0} f_n(z) \times \exp\left(\sum_{n=N_0+1}^{\infty} \log\bigl(f_n(z)\bigr)\right).$$

De plus, on a $|\log\bigl(f_n(z)\bigr)| \leqslant 2|f_n(z)-1|$ pour tout $n > N_0$ et pour tout $z \in K$, d'après le Fait 4.3. Donc la série $\sum_{n>N_0} \log\left(f_n(z)\right)$ converge normalement (et donc uniformément) sur K. Comme la fonction exponentielle est uniformément continue sur les parties bornées de $\mathbb{C}$, on en déduit (exo) que la convergence du produit infini $\prod f_n(z)$ est uniforme sur K.

Comme les f_n sont holomorphes, les produits partiels $P_N = \prod_{n=0}^{N} f_n$ sont holomorphes ; donc la fonction $f = \prod_{n=0}^{\infty} f_n$ est holomorphe puisque $P_N \to f$ uniformément sur tout compact.

(2) Il est évident que $\bigcup_{n=0}^{\infty} Z(f_n) \subseteq Z(f)$. Inversement, si $z \notin \bigcup_{n=0}^{\infty} Z(f_n)$, *i.e* $f_n(z) \neq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $f(z) = \prod_{n=0}^{\infty} f_n(z) \neq 0$ par le Lemme 4.2. Il reste à montrer l'assertion concernant les multiplicités.

Soit $a \in Z(f)$, et soit D un disque ouvert de centre a tel que $\overline{D} \subset \Omega$. Comme $f_n(z) \to 1$ uniformément sur $\overline{D}$, on peut trouver un entier N tel que $f_n(z) \neq 0$ pour tout $n > N$ et pour tout $z \in \overline{D}$. Par le Lemme 4.2, on a alors

$$\forall z \in D\ :\ f(z) = \prod_{n=0}^{N} f_n(z) \times \exp\left(\sum_{n>N} f_n(z)\right) =: f_0(z)\cdots f_N(z) \times g(z),$$

où la fonction g est holomorphe et ne s'annule pas sur D. On en déduit immédiatement que la multiplicité de a comme zéro de f est égale à la somme des multiplicités de a comme zéro de $f_0, \dots, f_N$, et donc à la somme des multiplicités de a comme zéro des f_n puisque $f_n(a) \neq 0$ pour $n > N$.

(3) Soit K un compact de Ω. On veut montrer que

$$\forall z \in K\ :\ \frac{f'(z)}{f(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n' z)}{f_n(z)},$$

où la série converge uniformément sur K.

Remarquons d'abord que par le Lemme 4.2, on sait que f ne s'annule pas sur Ω et que

$$\forall z \in \Omega\ :\ f(z) = \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \log\bigl(f_n(z)\bigr)\right).$$

Maintenant, choisissons un ouvert U tel que $\overline{U}$ est compact et $K \subseteq U \subseteq \overline{U} \subseteq \Omega$. Comme $f_n(z) - 1 \to 0$ uniformément sur le compact $\overline{U}$, on peut trouver un entier N_0 tel que $f_n(z) \in \overline{D}(1, 1/2) \subseteq \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$ pour tout $n > N_0$ et pour tout $z \in U$. Alors la fonction $\log(f_n)$ est holomorphe sur U pour tout $n > N_0$, et la série $\sum_{n>N_0} \log(f_n)$ converge normalement (donc uniformément) sur U car $|\log(f_n(z))| \leqslant 2|1 - f_n(z)|$ sur U.

Si on pose $S_0(z) := \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \log\bigl(f_n(z)\bigr)$ pour $z \in U$, alors la fonction S_0 est holomorphe sur U par le théorème 2.1, avec

$$\forall z \in U\ :\ S_0'(z) = \sum_{n=N_0+1}^{\infty} \frac{f_n'(z)}{f_n(z)},$$

où la série converge uniformément sur tout compact de U, donc en particulier sur K

Comme $f = \prod_{n=0}^{N_0} f_n \times e^{S_0}$ et comme, de façon générale, la dérivée logarithmique d'un produit est la somme des dérivées logarithmiques des termes du produit (autrement dit : $\frac{(uv)'}{uv} = \frac{u'}{u} + \frac{v'}{v}$), on en déduit que sur l'ouvert U (et donc sur K), on a

$$\begin{aligned} \frac{f'}{f} &= \sum_{n=0}^{N_0} \frac{f_n'}{f_n} + \frac{(e^{S_0})'}{e^{S_0}} \\ &= \sum_{n=0}^{N_0} \frac{f_n'}{f_n} + S_0' \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f_n'}{f_n}, \end{aligned}$$

où la série converge uniformément sur tout compact de U (et donc sur K). □

Définition 4.5. *Sous l'hypothès du théorème (convergence normale de la série $\sum(1 - f_n)$ sur tout compact), on dira que le produit infini $\prod f_n$* ***converge normalement*** *sur tout compact de Ω.*

Chapitre 7

Primitives, homotopie

Dans ce chapitre, on adopte la convention suivante pour éviter d'écrire trop souvent "$\mathcal{C}^1$ par morceaux" : sauf mention contraire,

tous les chemins sont de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

De plus, on rappelle qu'un **lacet** est un chemin fermé, *i.e.* un chemin $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ tel que $\gamma(b) = \gamma(a)$.

1. Primitives

Définition 1.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On dit qu'une fonction $F : \Omega \to \mathbb{C}$ est une* ***primitive de f sur*** *Ω si F est holomorphe sur Ω et $F' = f$.*

Remarque 1. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ admet une primitive, alors f est nécessairement *holomorphe* sur Ω.

Remarque 2. La réciproque n'est pas vraie ! Par exemple, la fonction f définie ar $f(z) = 1/z$ est holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C}^*$, mais elle n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$.

Démonstration. Si f admet une primitive, elle en admet une qui vérifie $F(1) = 0$; donc on a une fonction F homomorphe sur $\mathbb{C}^*$ telle que $F(1) = 0$ et $F'(z) = 1/z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Alors la fonction g définie par $g(z) := ze^{-F(z)}$ vérifie $g'(z) = (1 - zF'(z))e^{-F(z)} = 0$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ et $g(1) = 1$. Donc $g(z) = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$ car $\mathbb{C}^*$ est connexe ; autrement dit $e^{F(z)} = z$ pour tout $z \in \mathbb{C}^*$. Mais ceci est impossible car on sait qu'il n'existe pas de détermination continue du logarithme sur $\mathbb{C}^*$. □

Remarque 3. Si Ω est un **disque** $D(a, R)$, alors toute fonction holomorphe sur Ω admet une primitive.

Démonstration. Supposons que f soit holomorphe dans le disque $D(a, R)$. On peut alors développer f en série entière dans $D(a, R)$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n .$$

La série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{c_n}{n+1} w^{n+1}$ a alors un rayon de convergence au moins égal à R, et la fonction F définie par

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} (z - a)^{n+1}$$

est une primitive de f sur $D(a, R)$. □

Proposition 1.2. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. La fonction f admet une primitive si et seulement si on a $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout lacet γ dans Ω.*

Démonstration. Si f admet une primitive F, alors $dF = fdz$, donc $\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma dF = 0$ pour tout lacet γ dans Ω, d'après le Théorème fondamental de l'analyse.

Inversement, supposons qu'on ait $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout lacet dans Ω, et montrons que f admet une primitive. En considérant séparément chaque composante connexe de Ω, on se ramène au cas où Ω est connexe.

Fixons un point $a \in \Omega$. Comme Ω est un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, il est connexe par arcs. Donc, pour tout $z \in \Omega$, on peut trouver un chemin γ reliant a à z dans Ω. De plus, si γ_1 et γ_2 sont deux tels chemins, alors $\int_{\gamma_1} f(\xi)\,d\xi = \int_{\gamma_2} f(\xi)\ d\xi$. En effet, le chemin $\gamma :=$"γ_1 suivi de $\overleftarrow{\gamma_2}$" est un chemin *fermé* dans Ω, donc $0 = \int_\gamma f(\xi)\,d\xi = \int_{\gamma_1} f(\xi)\,d\xi - \int_{\gamma_2} f(\xi)\,d\xi$ par hypothèse sur f.

Pour tout $z \in \Omega$, on peut donc poser

$$F(z) := \int_{\gamma_z} f(\xi)\ d\xi,$$

où γ_z est n'importe quel chemin reliant a à z dans Ω. On va montrer que F est une primitive de f sur Ω.

Fixons $z \in \Omega$, et choisissons $r > 0$ tel que $\overline{D}(z,r) \subset \Omega$. Si $h \in \mathbb{C}$ vérifie $|h| \leqslant r$, alors le segment $[z, z+h]$ est contenu dans $\overline{D}(z,r)$, donc dans Ω. Donc, pour calculer $F(z+h)$, on peut prendre $\gamma_{z+h} =$"γ_z suivi de $[z(z+h)]$". Par conséquent,

$$F(z+h) = \int_{\gamma_z} f(\xi)\,d\xi + \int_{[z(z+h)]} f(\xi)\,d\xi = F(z) + \int_0^1 f(z+th)\,hdt.$$

Pour $0 < |h| \leqslant r$, on a donc

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} = \int_0^1 f(z+th)\,dt;$$

et comme f est continue, on en déduit (exo) que

$$\frac{F(z+h)-F(z)}{h} \to f(z) \qquad \text{quand } h \to 0.$$

Ainsi, F est $\mathbb{C}$-dérivable en tout point $z \in \Omega$, avec $F'(z) = f(z)$ (et donc F st holomorphe puisque f est supposée continue). $\square$

Remarque. La partie "facile" de la proposition permet de redémontrer que la fonction $z \mapsto 1/z$ n'admet pas de primitive sur $\mathbb{C}^*$: en effet, en notant $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ le lacet défini par $\gamma(t) = e^{it}$, on a $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$.

2. Homotopie

2.1. Invariance de l'intégrale curviligne par homotopie.

Définition 2.1. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soient γ_0 et γ_1 deux* lacets *dans Ω, paramétrés par le même intervalle $[a,b]$. On dit que γ_0 et γ_1 sont **homotopes dans** Ω s'il existe une application continue $H : [0,1] \times [a,b] \to \Omega$ vérifiant les deux propriétés suivantes.*

(a) *Pour tout $s \in [0,1]$, le chemin $\Gamma_s : [a,b] \to \Omega$ défini par $\Gamma_s(t) = H(s,t)$ est un lacet.*

(b) $\Gamma_0 = \gamma_0$ *et* $\Gamma_1 = \gamma_1$.

On dit alors que H est une ***homotopie*** *de γ_0 à γ_1.*

Remarques.

(o) En termes un peu vagues mais imagés, γ_0 et γ_1 sont homotopes dans Ω si “on peut passer continûment de γ_0 à γ_1 en restant dans Ω”.

(i) On voit immédiatement que si H est une homotopie de γ_0 à γ_1, alors l'application $(s,t) \mapsto H(1-s,t)$ est une homotopie de γ_1 à γ_0. Donc la définition de l'homotopie est symétrique en γ_0 et γ_1, ce qui justifie la terminologie “sont homotopes” (qui est d'emblée symétrique).

(ii) En fait, la relation “être homotopes dans Ω” est une relation d'équivalence. La preuve est laissée en exercice.

(iii) La définition **dépend de l'ouvert** Ω puisque l'homotopie H doit prendre ses valeurs dans Ω.

Exemples.

(1) Deux lacets quelconques $\gamma_0, \gamma_1 : [a,b] \to \mathbb{C}$ sont toujours homotope **dans** $\mathbb{C}$.

(2) Le lacet $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ défini par $\gamma(t) = e^{it}$ n'est pas homotope **dans** $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant.

Démonstration. (1) Si on définit $H : [0,1] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ par $H(s,t) = (1-s)\gamma_0(t) + s\,\gamma_1(t)$, alors H est une homotopie de γ_0 à γ_1

(2) Le résultat est intuitivement évident : on ne peut pas déformer continûment sur un point un cercle centré en 0 sans passer par 0. Pour une preuve rigoureuse, il faut attendre un peu. □

Exercice. Soient $0 < r < R$. Montrer que les lacets définis sur $[0, 2\pi]$ par $\gamma_r(t) = re^{it}$ et $\gamma_R(t) = Re^{it}$ sont homotopes dans $\mathbb{C}^*$.

Le résultat suivant est fondamental.

Théorème 2.2. (invariance de l'intégrale curviligne par homotopie)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si γ_0 et γ_1 sont deux lacets homotopes dans Ω, alors $\int_{\gamma_0} f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$ pour toute fonction f holomorphe sur Ω.

Démonstration. On va faire la preuve en supposant qu'il existe une homotopie $H : [0,1] \times [a,b] \times \Omega$ de γ_0 à γ_1 qui est *de classe $\mathcal{C}^2$ sur* $[0,1] \times [a,b]$, ce qui veut dire que H admet des dérivées partielles d'ordre 2 continues sur $[0,1] \times [a,b]$. (Cela suppose en particulier que γ_0 et γ_1 soient de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[a,b]$). Dans la suite, on fixe une fonction $f \in H(\Omega)$.

Pour $s \in [0,1]$, soit Γ_s le lacet défini par $\Gamma_s(t) := H(s,t)$; et soit $\Phi : [0,1] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\Phi(s) := \int_{\Gamma_s} f(z)\,dz.$$

On a $\Phi(0) = \int_{\gamma_0} f(z)\,dz$ et $\Phi(1) = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz$, donc il s'agit de montrer que $\Phi(1) = \Phi(1)$. On va en fait montrer que la fonction Φ est constante sur $[0,1]$.

Par définition, on a

$$\Phi(s) = \int_a^b f\big(H(s,t)\big)\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\,dt.$$

Comme l'homotopie H est de classe $\mathcal{C}^2$ et que f est holomorphe, la fonction Φ est donc de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$ avec

$$\begin{aligned}\Phi'(s) &= \int_a^b \frac{d}{ds}\left[f\big(H(s,t)\big)\frac{\partial H}{\partial t}(s,t)\right]dt\\ &= \int_a^b \left(f'\big(H(s,t)\big)\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t) + f\big(H(s,t)\big)\,\frac{\partial^2 H}{\partial s\partial t}(s,t)\right)dt\end{aligned}$$

De plus, comme $f'\big(H(s,t)\big)\frac{\partial H}{\partial s}(s,t) = \frac{d}{dt}\left[f\big(H(s,t)\big)\right]$, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}\int_a^b f'\big(H(s,t)\big)\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\,\frac{\partial H}{\partial t}(s,t) &= \left[f\big(H(s,t)\big)\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,t)\right]_{t=a}^{t=b} - \int_a^b f\big(H(s,t)\,\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial s}(s,t)\,dt\\ &= -\int_a^b f\big(H(s,t)\,\frac{\partial^2 H}{\partial t\partial s}(s,t)\,dt,\end{aligned}$$

car $f\big(H(s,b)\big)\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,b) = f\big(H(s,a)\big)\,\frac{\partial H}{\partial s}(s,a)$. On obtient donc

$$\Phi'(s) = -\int_a^b \frac{\partial^2 H}{\partial t\partial s}(s,t)\,dt + \int_a^b \frac{\partial^2 H}{\partial s\partial t}(s,t)\,dt = 0,$$

ce qui termine la preuve du théorème. □

Corollaire 2.3. ("théorème de Cauchy homotopique")
Si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout lacet $\gamma : [a,b] \to \Omega$ homotope dans Ω à un lacet constant.

Démonstration. C'est évident par le théorème. □

Corollaire 2.4. *Le lacet γ défini sur $[0,2\pi]$ par $\gamma(t) = e^{it}$ n'est pas homotope dans $\mathbb{C}^*$ à un lacet constant.*

Démonstration. On a $\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2i\pi \neq 0$, d'où le résulat par le théorème de Cauchy homotopique.

□

Exercice. Soient $m,n \in \mathbb{Z}$ et soient γ_m et γ_n les lacets définis sur $[0,2\pi]$ par $\gamma_m(t) = e^{imt}$ et $\gamma_n(t) = e^{int}$. A quelle condition γ_m et γ_n sont-ils homotopes dans $\mathbb{C}^*$?

2.2. Ouverts simplement connexes.

Définition 2.5. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit que Ω est* ***simplement connexe*** *s'il est connexe et si tout lacet dans Ω est homotope dans Ω à un lacet constant.*

Remarque. Appelons **trou** d'un ouvert Ω toute composante connexe bornée de $\mathbb{C}\backslash\Omega$. Si un ouvert Ω possède un trou, on voit bien qu'un lacet entourant ce trou ne peut pas être déformé continûment sur un point en restant dans Ω, i.e. n'est pas homotope dans Ω à un lacet constant. Intuitivement, il est donc clair qu'un ouvert simplement connexe n'a pas pas de trous. Il est peut-être moins clair que les trous sont la seule obstruction à la simple connexité, i.e. que tout ouvert sans trous est simplement connexe. C'est effectivement vrai, mais la démonstration est loin d'être évidente.

Exemples.

(0) $\mathbb{C}$ est simplement connexe, mais $\mathbb{C}^*$ ne l'est pas.

(1) Tout ouvert Ω **étoilé** par rapport à un point p (i.e. $[p,z] \subset \Omega$ pour tout $z \in \Omega$) est simplement connexe. En particulier :

   (i) tout ouvert **convexe** est simplement connexe ;

   (ii) si L est une demi-droite de $\mathbb{C}$, alors $\Omega = \mathbb{C}\backslash L$ est simplement connexe.

(2) Si K est un compact *non vide* de $\mathbb{C}$, alors $\Omega = \mathbb{C}\backslash K$ n'est pas simplement connexe.

Démonstration. (1) Si $\gamma : [a,b] \to \Omega$ est un lacet dans Ω, on définit une homotopie (dans Ω) de γ au lacet constant égal à p en posant

$$H(s,t) = s\,p + (1-s)\gamma(t)\,.$$

Les cas particuliers : il est évident que tout ouvert convexe est étoilé ; et pour $\mathbb{C}\backslash L$, il suffit d'observer que si on note a l'origine de L, alors $\mathbb{C}\backslash L$ est étoilé par rapport à tout point $p \in L^*\backslash\{a\}$, où L^* est la demi-droite symétrique de L par rapport à a.

(2) Choisissons un point $a \in K$ et $R > 0$ tel que $K \subset D(a,R)$. Si on pose $\gamma(t) = a + Re^{it}$, $t \in [0,2\pi]$, alors γ est un lacet dans Ω et $\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 2i\pi \neq 0$. Comme la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ est holomorphe sur Ω (puisque $a \notin \Omega$), cela montre que γ n'est pas homotope dans Ω à un lacet constant, d'après le théorème de Cauchy homotopique. Donc Ω n'est pas simplement connexe. □

Théorème 2.6. *Si $\Omega \subset \mathbb{C}$ est un ouvert simplement connexe, alors toute fonction holomorphe sur Ω possède des primitives holomorphes.*

Démonstration. Si $f \in H(\Omega)$, alors $\int_\gamma f(z)\,dz = 0$ pour tout lacet dans Ω par le Théorème de Cauchy homotopique, donc f possède des primitives par la Proposition 1.2. □

Corollaire 2.7. *Si Ω est simplement connexe, alors toute fonction f holomorphe sur Ω et* ***ne s'annulant pas*** *possède un* ***logarithme holomorphe****. Autrement dit, si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est holomorphe et si $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$, alors il existe une fonction holomorphe h telle que $e^h = f$.*

Démonstration. Comme f ne s'annule pas, la fonction $g := f'/f$ est bien définie et holomorphe sur Ω ; elle possède donc une primitive holomorphe G. On a alors

$$(e^{-G}f)' = e^{-G}(-G'f + f') = 0,$$

donc la fonction $\varphi = e^{-G}f$ est constante puisque Ω est connexe. Ainsi, on a une constante C telle que $\forall z \in \Omega\ :\ f(z) = Ce^{G(z)}$. On a $C \neq 0$ car $f \neq 0$, donc on peut choisir $l \in \mathbb{C}$ tel que $C = e^l$; et alors $f(z) = e^{l+G(z)} =: e^{h(z)}$. □

Remarque. On peut montrer qu'un ouvert connexe Ω est simplement connexe *si et seulement si* toute fonction $f \in H(\Omega)$ possède des primitives. On peut aussi montrer que si Ω est simplement connexe et $\Omega \neq \mathbb{C}$, alors il existe une bijection holomorphe de Ω sur le disque unité $\mathbb{D}$: c'est ce qu'on appelle le **théorème de représentation conforme de Riemann**.

3. Indice d'un lacet par rapport à un point

3.1. Définition.

LEMME 3.1. *Soit $p \in \mathbb{C}$. Si $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ est un lacet* ***ne passant pas par*** *p, i.e. $\gamma(t) \neq p$ pour tout $t \in [a,b]$, alors $\int_\gamma \frac{dz}{z-p}$ est un multiple entier de $2i\pi$.*

Démonstration. On la fait en supposant γ de classe $\mathcal{C}^1$. Soit $l : [a,b] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$l(t) := \int_a^t \frac{\gamma'(s)}{\gamma(s)-p}\, ds.$$

Par définition, l est de classe $\mathcal{C}^1$ et $l'(t) = \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t)-p}\cdot$ Si on pose $\varphi(t) = e^{-l(t)}(\gamma(t)-p)$, alors

$$\varphi'(t) = (-l'(t)(\gamma(t)-p) + l(t)\gamma'(t)) = 0,$$

donc φ est constante sur $[a,b]$. Ainsi, on a une constante C telle que $e^{l(t)} = C(\gamma(t)-p)$ sur $[a,b]$. Comme $\gamma(b) = \gamma(a)$, on a donc $e^{l(b)} = e^{l(a)}$. Mais $l(a) = 0$, donc $e^{l(b)} = 1$. Donc $l(b)$ est multiple entier de $2i\pi$, ce qui est la conclusion souhaitée. □

DÉFINITION 3.2. *Soit $p \in \mathbb{C}$, et soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un lacet ne passant pas par p. L'**indice de** γ **par rapport à** p est le nombre entier $I(\gamma,p)$ défini par*

$$I(\gamma,p) = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{dz}{z-p}\cdot$$

EXEMPLE. Soient $R > 0$ et $n \in \mathbb{Z}$, et soit $\gamma : [0,2\pi] \to \mathbb{C}$ le lacet défini par $\gamma(t) := p + Re^{int}$. On a $I(\gamma,p) = n$.

Cet exemple justifie la remarque suivante, à laquelle on pourrait donner un sens précis et qu'on pourrait démontrer proprement ; ce qu'on ne fera pas faute de temps.

REMARQUE. Géométriquement, $I(\gamma,p)$ peut s'interpréter comme le **nombre de tours** effectués par le lacet γ autour de p dans le sens trigonométrique.

3.2. Formule de Cauchy "homotopique". L'importance de l'indice en analyse complexe vient du résultat suivant, qui est une autre version de la formule de Cauchy.

THÉORÈME 3.3. (formule de Cauchy homotopique)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit γ un lacet dans Ω, d'image Γ. On suppose que γ est homotope dans Ω à un lacet constant. Si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors

$$\forall a \in \Omega\backslash\Gamma \ : \ \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz = I(\gamma,a)\, f(a).$$

Démonstration. Fixons f et un point $a \in \Omega\backslash\Gamma$. Soit $g : \Omega \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{f(z)-f(a)}{z-a} & \text{si } z \neq a \\ f'(a) & \text{si } z = a \end{cases}$$

La fonction g est continue sur Ω et holomorphe sur $\Omega\backslash\{a\}$; elle est donc holomorphe *sur* Ω (singularité éliminable). Comme γ est homotope à un lacet constant, on a donc

$\int_\gamma g(z)\,dz = 0$ d'après le théorème de Cauchy homotopique. Comme γ ne passe pas par a, cela s'écrit

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = \int_\gamma \frac{f(a)}{z-a}\,dz = f(a) \times 2i\pi\, I(\gamma, a)\,.$$

□

Remarque. Si l'ouvert Ω est **simplement connexe**, alors la formule de Cauchy homotopique et le théorème de Cauchy homotopique sont valables pour **tout** lacet γ dans Ω.

3.3. Théorème des résidus "homotopique". Le théorème suivant est la version homotopique de la formule des résidus.

THÉORÈME 3.4. *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur $\Omega\backslash S$, où S est un ensemble fini. Si γ est un lacet dans Ω ne passant par aucun point de S et homotope dans Ω à un lacet constant, alors*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2i\pi \sum_{a\in S} I(\gamma, a)\,\mathrm{Res}(f, a).$$

Démonstration. Pour $a \in S$, notons $c_n(a)$, $n \in \mathbb{Z}$ les coefficients du développement en série de Laurent de f au voisinage de a. On sait que la série $\sum_{n<0} c_n(a)(z-a)^n$ converge en tout point $z \in \mathbb{C}\backslash\{a\}$. Comme il s'agit d'une série entière en $w = (z-a)^{-1}$, on en déduit que la fonction g_a définie par

$$g_a(z) := \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(a)(z-a)^{-n}$$

est holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{a\}$. Donc la fonction h définie par

$$h(z) := f(z) - \sum_{a\in S} g_a(z)$$

est holomorphe sur $\Omega\backslash S$. De plus, *par définition*, h possède une singularité éliminable en tout point $a \in S$; donc h est holomorphe sur Ω. Par le théorème de Cauchy homotopique, on a donc $\int_\gamma h(z)\,dz = 0$, autrement dit

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{a\in S} \int_\gamma g_a(z)\,dz. \tag{3.1}$$

Par ailleurs, comme la série définissant $g_a(z)$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}\backslash\{a\}$ et que γ ne passe par a, on peut écrire pour tout $a \in S$:

$$\int_\gamma g_a(z)\,dz = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n(a) \int_\gamma (z-a)^n dz.$$

De plus, si $n < -1$, alors $(z-a)^n$ possède une primitive holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash\{a\}$, à savoir $\frac{1}{n+1}\,(z-a)^{n+1}$. Comme γ est un lacet, on a donc $\int_\gamma (z-a)^n dz = 0$ pour tout $n < -1$. Par conséquent,

$$\int_\gamma g_a(z)\,dz = c_{-1}(a) \int_\gamma (z-a)^{-1} dz = \mathrm{Res}(f, a) \times 2i\pi I(\gamma, a).$$

Ceci étant vrai pour tout $a \in S$, on voit que (3.1) est la formule annoncée. □

3.4. Calcul pratique de l'indice. Pour pouvoir utiliser la formule de Cauchy homotopique ou le théorème des résidus homotopique, il faut être capable de calculer des indices. La proposition suivante donner une méthode géométrique très facile à utiliser. On ne donnera pas de définition précise des expressions utilisées ; mais cette proposition est très facile à utiliser...

Proposition 3.5. (calcul pratique de l'indice)
Soit $p \in \mathbb{C}$ et soit $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ un lacet ne passant pas par p, d'image Γ. Soit également L une demi-droite d'origine p qui ne rencontre Γ qu'en un nombre fini de points, et supposons que ces points ne sont pas des "points multipless" de γ. Notons n^+ le nombre de points où "γ traverse L dans le sens trigonométrique", et n^- le nombre de points où γ "traverse L dans le sens anti-trigonométrique". Alors

$$I(\gamma, p) = n^+ - n^- .$$

Démonstration. Il faudrait d'abord donner un sens précis à l'énoncé, et on pourrait alors le démontrer en utilisant l'interprétation géométrique de l'indice. Faute de temps, on ne la fera pas. □

Exercice. Dessiner (l'image d')un lacet un peu tarabiscoté, et calculer $I(\gamma, p)$ pour divers points p.

Chapitre 8

Morera et Cauchy-Goursat

Pour terminer dignement ce cours, on va démontre deux résultats célèbres : le "théorème de Morera", qui est un réciproque utile du théorème de Cauchy, et le "théorème de Cauchy-Goursat", d'après lequel une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en tout point est automatiquement holomorphe (et donc infiniment $\mathbb{C}$-dérivable).

Lemme. ("théorème de Morera")
*Soit f une fonction **continue** sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose qu'on a $\int_{\partial T} f(z)\, dz = 0$ pour tout triangle fermé $T \subset \Omega$. Alors f est holomorphe.*

Démonstration. Il suffit de montrer que f est holomorphe dans tout disque ouvert $D \subset \Omega$; fixons un tel disque $D = D(a, r)$.

Soit $F : D \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$F(z) := \int_{[az]} f(\xi)\ d\xi.$$

On va montrer que F est une primitive holomorphe de f sur D, ce qui entrainera en particulier que f est holomorphe sur D.

Soit $z \in D$ fixé. Si $h \in \mathbb{C}$ est tel que $z + h \in D$, alors le triangle T de sommets a, z, $z + h$ est contenu dans D, donc dans Ω. On a donc $\int_{\partial T} f(\xi)\, d\xi = 0$ par hypothèse sur f. Autrement dit

$$\int_{[az]} f(\xi)\, d\xi + \int_{[z(z+h)]} f(\xi)\, d\xi - \int_{[a(z+h)]} f(\xi)\, d\xi = 0;$$

et donc, par définition de F :

$$F(z + h) - F(z) = \int_{[z(z+h)]} f(\xi)\, d\xi = \int_0^1 f(z + th)\, hdt.$$

On a ainsi

$$\frac{F(z + h) - F(z)}{h} = \int_0^1 f(z + th)\, dt$$

pour tout $h \neq 0$ tel que $z + h \in D$; et on en déduit que F est $\mathbb{C}$-dérivable au point z avec $F'(z) = f(z)$ (et donc F est holomorphe puisque f est continue). □

Remarque. La "subtilité" de l'énoncé vient du fait que la fonction f n'est pas supposée de classe $\mathcal{C}^1$, mais seulement continue.

Voici maintenant le théorème tant attendu disant que dans la définition de l'holomorphie, il était inutile d'imposer la continuité de la dérivée.

Théorème. ("théorème de Cauchy-Goursat")
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $f : \Omega \to \mathbb{C}$ est une fonction $\mathbb{C}$-dérivable en tout point, alors f est holomorphe (et donc infiniment $\mathbb{C}$-dérivable).

Démonstration. Comme f est continue, il suffit (d'après Morera) de montrer qu'on a $\int_{\partial T} f(z)\,dz = 0$ pour tout triangle $T \subset \Omega$. Fixons un tel triangle T, et posons $\alpha := \left|\int_{\partial T} f(z)\,dz\right|$. Il s'agit de montrer que $\alpha = 0$.

Posons $T_0 = T$, et découpons le triangle T_0 en 4 triangles T^1, T^2, T^3, T^4 deux fois plus petits en traçant le "triangle des milieux". D'après les conventions d'orientation, on a

$$\int_{\partial T_0} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{4} \int_{\partial T^k} f(z)\,dz;$$

et donc

$$\alpha \leqslant \sum_{k=1}^{4} \left|\int_{\partial T^k} f(z)\,dz\right|.$$

On peut donc trouver $k_0 \in \{1, \dots, 4\}$ tel que $\left|\int_{\partial T^{k_0}} f(z)\,dz\right| \geqslant \frac{1}{4}\alpha$. On pose alors $T_1 = T^{k_0}$; et on a ainsi

$$\begin{cases} T_1 \subset T_0 = T \\ \mathrm{diam}(T_1) = 2^{-1}\mathrm{diam}(T) \\ l(\partial T_1) = 2^{-1} l(\partial T) \\ \left|\int_{\partial T_1} f(z)\,dz\right| \geqslant 4^{-1}\,\alpha \end{cases}$$

Si on répète ce raisonnement en remplaçant T_0 par T_1, on obtient un triangle $T_2 \subset T_1$, auquel on peut à nouveau applique le même raisonnement et ainsi de suite. De cette façon, on construit par récurrence une suite de triangles fermés $(T_n)_{n\geqslant 0}$ vérifiant les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} T_{n+1} \subset T_n \\ \mathrm{diam}(T_n) = 2^{-n}\mathrm{diam}(T) \\ l(\partial T_n) = 2^{-n} l(\partial T) \\ \left|\int_{\partial T_n} f(z)\,dz\right| \geqslant 4^{-n}\,\alpha \end{cases}$$

D'après le théorème des fermés emboités, l'intersection de tous les rectangles T_n est non vide, réduite à un point $\{a\}$. Ce point a appartient à $T_0 = R$, donc à Ω ; donc f est $\mathbb{C}$-dérivable en a. Posons $\lambda = f'(a)$, et écrivons

$$f(z) = f(a) + \lambda\,(z - a) + v(z).$$

Par définition de la $\mathbb{C}$-dérivabilité, on a ainsi $v(z) = o(|z-a|)$ quand $z \to a$.

Comme la fonction $z \mapsto f(a) + \lambda(z-a)$ est holomorphe sur $\mathbb{C}$ (et en fait admet de manière évidente une primitive holomorphe), on a

$$\int_{\partial T_n} (f(a) + \lambda(z-a))\,dz = 0,$$

donc $\int_{\partial T_n} f(z)\,dz = \int_{\partial T_n} v(z)\,dz$ et donc

$$\left|\int_{\partial T_n} v(z)\,dz\right| \geqslant 4^{-n}\,\alpha \qquad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Soit maintenant $\varepsilon > 0$. Comme $v(z) = o(|z-a|)$ quand $z \to a$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|v(z)| \leqslant \varepsilon\,|z-a|$ pour tout $z \in D(a, \delta)$; et comme $a \in T_n$ et $\mathrm{diam}(T_n) \to 0$, on peut trouver un entier n tel que $T_n \subset D(a, \delta)$. On a alors

$$\left|\int_{\partial T_n} v(z)\,dz\right| \leqslant \int_{\partial T_n} |v(z)|\,|dz| \leqslant \varepsilon \times \mathrm{diam}(T_n) \times l(\partial T_n)\,,$$

puisque $|v(z)| \leqslant \varepsilon\,|z-a|$ et $|z-a| \leqslant \mathrm{diam}(T_n)$ pour tout $z \in \partial T_n$. Autrement dit :

$$\left|\int_{\partial T_n} v(z)\,dz\right| \leqslant \varepsilon \times 4^{-n}\mathrm{diam}(T)\,l(\partial T). \tag{2}$$

En posant $C = \mathrm{diam}(R)\,l(\partial R)$ et en comparant (1) et (2), on obtient donc finalement

$$\alpha \leqslant C\,\varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout $\varepsilon > 0$, on peut donc (enfin) conclure que $\alpha = 0$. □

Remarque. Le théorème de Cauchy-Goursat est philosophiquement très satisfaisant et la démonstration est très belle. Mais le résultat ne présente pas un grand intérêt pratique : la plupart du temps, si on sait montrer qu'une fonction est $\mathbb{C}$-dérivable, on sait en général aussi montrer que sa dérivée est continue (!)