Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. (prolongement de ζ)

(1) Montrer que si $s \in \mathbb{C}$ et $\mathrm{Re}(s) > 1$, alors

$$\zeta(s) - \frac{1}{s-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt\,.$$

(2) Montrer que pour tout $n \geq 1$, la formule $\varphi_n(s) = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{n^s} - \frac{1}{t^s} \right) dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(3) Soit $n \geq 1$, et soit $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) \geq -1$.

(a) En considérant la fonction ψ définie par $\psi(t) = \frac{1}{t^s}$, montrer que

$$\forall t \in [n, n+1] \;:\; \left| \frac{1}{t^s} - \frac{1}{n^s} \right| \leq \frac{|s|}{n^{\mathrm{Re}(s)+1}}\,.$$

(b) En déduire une majoration pour $|\varphi_n(s)|$.

(4) Montrer que la fonction ζ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus \{1\}$, où $\Omega = \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}$.

Exercice 2. (prolongement de Γ)

(1) Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Re}(z) > 0$, alors

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt\,.$$

(2) Montrer que la formule $\Phi(z) = \int_1^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

(3) Montrer que la fonction Γ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.

Exercice 3. (transformée de Fourier de la Gaussienne)

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$, on définit sa **transformée de Fourier** $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par la formule

$$\widehat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt\,.$$

Le but de l'exercice est de déterminer la transformée de Fourier de la fonction $\mathbf{g}$ définie par $\mathbf{g}(t) := e^{-\frac{t^2}{2}}$.

(1) Montrer que la formule $\Phi(z) := \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{g}(t)\, e^{-itz}\, dt$ définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.
(2) Calculer $\Phi(iy)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$.
(3) Déduire de (1) et (2) qu'on a $\widehat{\mathbf{g}} = \sqrt{2\pi}\, \mathbf{g}$.

Exercice 4. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

(1) On suppose que f est bornée et à support compact. Montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ se prolonge de manière unique en une fonction Φ holomorphe sur $\mathbb{C}$, et donner une expression intégrale pour les dérivées de Φ en 0.
(2) On suppose que f est continue à support compact, et que $\widehat{f}$ est également à support compact.
   (a) Montrer que $\Phi = 0$.
   (b) En déduire qu'on a $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)P(t)\, dt = 0$ pour tout polynôme P.
   (c) Montrer que $f = 0$.

Exercice 5. (injectivité de la transformation de Fourier)
Dans tout l'exercice, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$ et on note $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier.

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$ fixé. On note U le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) > 0\}$, et pour $z \in \overline{U}$, on pose
$$F_a(z) := \int_{-\infty}^{a} f(t)\, e^{-iz(t-a)} dt\ .$$
   (a) Montrer que F_a est bien définie, continue bornée sur $\overline{U}$ et holomorphe sur U.
   (b) Déterminer $\lim_{y \to +\infty} F_a(iy)$.
(2) On suppose qu'on a $\widehat{f}(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et on fixe $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Montrer qu'on a $F_a(x) = -\int_a^{+\infty} f(t)\, e^{-ix(t-a)} dt$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire que F_a se prolonge en une fonction entière bornée.
   (c) Montrer qu'on a $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt = 0$.
(3) On suppose f continue. Montrer que si $\widehat{f} = 0$, alors $f = 0$.

Exercice 6. (transformée de Laplace)
Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose que l'intégrale $\int_0^\infty f(t)dt$ existe, au sens où $\int_0^X f(t)dt$ admet une limite dans $\mathbb{C}$ quand $X \to \infty$. On ne suppose *pas* que l'intégrale est absolument convergente. Dans la suite, on pose
$$\Omega := \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 0\}\,.$$

(1) Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) := \int_x^\infty f(t)dt$. Quelle est la limite de $F(x)$ quand $x \to +\infty$?

(2) En utilisant une intégration par parties, montrer qu'il existe une constante $M < \infty$ telle que : pour tous A, B tels que $0 < A < B$ et pour tout $s \in \Omega$, on a
$$\left| \int_A^B f(t) e^{-st} dt \right| \le |F(B)| + |F(A)| + M \, \frac{|s|}{\mathrm{Re}(s)} \, e^{-\mathrm{Re}(s) A} \, .$$

(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $L_n : \Omega \to \mathbb{C}$ par $L_n(s) := \int_0^n f(t) e^{-st} dt$. Montrer que L_n est holomorphe sur Ω.

(4) Déduire de (2) et (3) que la formule
$$\mathcal{L}f(s) := \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$
a un sens pour tout $s \in \Omega$, et que la fonction $\mathcal{L}f$ est holomorphe sur Ω.

Exercice 7. (une preuve de l'inégalité de Hölder)
Dans tout l'exercice, I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g sont des fonctions boréliennes strictement positives sur I.

(1) On note V la bande $\{z \in \mathbb{C};\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$. Montrer que si f et g sont *intégrables* sur I, alors la formule
$$\Psi(z) := \int_I f(t)^{1-z} g(t)^z \, dt$$
définit une fonction continue sur $\overline{V}$ et holomorphe sur V.

(2) On suppose que f et g sont intégrables sur I. Pour $z \in \overline{V}$, on pose
$$\Phi(z) := \frac{\int_I f(t)^{1-z} g(t)^z \, dt}{\left(\int_I f(t)\, dt\right)^{1-z} \left(\int_I g(t)\, dt\right)^z} \, .$$

(a) Montrer que Φ est continue sur $\overline{V}$ et holomorphe sur V.

(b) Montrer que si $z = x + iy \in \overline{V}$, alors $|\Phi(z)| \le |\Phi(x)|$. En déduire d'une part que Φ est bornée sur $\overline{V}$, et d'autre part qu'on a $|\Phi(\xi)| \le 1$ pour tout $\xi \in \partial V$.

(c) Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\Phi_\varepsilon(z) := \Phi(z) e^{\varepsilon z^2}$.

(i) Montrer que $|\Phi_\varepsilon(z)|$ tend vers 0 quand $|z| \to \infty$, et qu'on a $|\Phi_\varepsilon(\xi)| \le e^\varepsilon$ pour tout $\xi \in \partial V$.

(ii) En déduire, en utilisant le principe du maximum sur des ouverts du type $]0,1[\times] - R, R[$, qu'on a $|\Phi_\varepsilon(z)| \le e^\varepsilon$ pour tout $z \in V$.

(d) Montrer qu'on a $|\Phi(z)| \le 1$ pour tout $z \in \overline{V}$, et conclure que si $\alpha \in [0,1]$, alors
$$\int_I f(t)^{1-\alpha} g(t)^\alpha \, dt \le \left(\int_I f(t)\, dt \right)^\alpha \left(\int_I g(t)\, dt \right)^{1-\alpha} .$$

(3) Démontrer l'inégalité de Hölder pour f et g.

Exercice 8. (formule des compléments)

(1) En utilisant convenablement la formule de changement de variables, montrer que pour tout $\alpha \in]0,1[$, on a
$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty \frac{dv}{v^{1-\alpha}(1+v)}.$$
(2) En utilisant un calcul fait en TD, en déduire la formule suivante : si $z \in \mathbb{C}$ vérifie $0 < \mathrm{Re}(z) < 1$, alors
$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}.$$

Exercice 9. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$, on a
$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} = \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 .$$
(1) Montrer qu'on définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ en posant
$$g(z) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2} .$$
(2) Montrer que si $w = a + ib \in \mathbb{C}$ (où a et b sont réels), alors $|\sin(w)|^2 \geq \mathrm{sh}^2\, b$.

(3) On définit $\Phi : \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ par
$$\Phi(z) := \left(\frac{\pi}{\sin(\pi z)}\right)^2 - g(z) .$$
  (a) Montrer que la fonction Φ est 1-périodique (i.e. $\Phi(z+1) = \Phi(z)$).

  (b) Montrer à l'aide d'un développement limité que $(\pi/\sin(\pi z))^2 - 1/z^2$ admet une limite en 0.

  (c) En déduire que la fonction Φ se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$ et 1-périodique. Dans la suite, on note encore Φ cette fonction.

  (d) Montrer que si $z = x + iy$ avec $|y| > 1$ et $-1/2 \leq x \leq 1/2$, alors
$$|\Phi(z)| \leq \left(\frac{\pi}{\mathrm{sh}(\pi)}\right)^2 + 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1/2)^2}.$$
  En déduire que Φ est bornée sur la bande $\{-1/2 \leq \mathrm{Re}(z) \leq 1/2\}$.

  (e) Montrer que la fonction Φ est constante.

(4) Montrer qu'on a $\lim_{y\to+\infty} g(iy) = 0$ et $\lim_{y\to+\infty} |\sin(\pi i y)| = +\infty$.

(5) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 10. Montrer que pour tout $\alpha > 1$, le produit infini $\prod n^{\frac{1}{n^\alpha}}$ est convergent.

Exercice 11. Soit $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres positifs telle que $\sum_0^\infty \alpha_n^2 < \infty$. Montrer que le produit infini $\prod |1 + i\alpha_n|$ est convergent.

Exercice 12. Montrer que le produit infini $\prod_{n\geq 2}\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ est convergent, puis déterminer la valeur de $\prod_2^\infty \left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$ en remarquant que $1 - \frac{2}{n(n+1)} = \frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}$.

Exercice 13. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n := 1 + \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

(1) Calculer $u_{2k}u_{2k-1}$ pour tout $k \geq 1$.
(2) Montrer que le produit infini $\prod u_n$ est convergent et déterminer $\prod_1^\infty u_n$.

Exercice 14. Soit $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$.

(1) Montrer que les produits infinis $\prod_{n\geq 1}(1 + z^n)$ et $\prod_{n\geq 1} \frac{1}{1-z^{2n-1}}$ sont convergents.
(2) Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\prod_{k=1}^{2N}(1 - z^k) = \prod_{n=1}^{N}(1 - z^n) \times \prod_{n=1}^{N}(1 - z^{2n-1})(1 + z^n)\,.$$

(3) En déduire l'identité

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1 + z^n) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z^{2n-1}}.$$

Exercice 15. Montrer que le produit infini $\prod_{k\geq 0}(1 + z^{2^k})$ converge normalement sur tout compact du disque unité $\mathbb{D} = \{|z| < 1\}$, et qu'on a

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1 + z^{2^k}) = \frac{1}{1 - z}.$$

Exercice 16. On note $(p_n)_{n\geq 0}$ la suite des nombres premiers : $p_0 = 2$, $p_1 = 3$, $p_2 = 5$, ... Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $s \in \mathbb{C}$ vérifiant $\mathrm{Re}(s) > 1$, on a $\zeta(s) \neq 0$ et

$$\frac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right).$$

(1) Justifier que le produit infini $\prod \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$ converge normalement sur tout compact de $\Omega := \{s \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(s) > 1\}$.

(2) Pour $s \in \Omega$ et $N \in \mathbb{N}$, on pose $P_N(s) := \prod_0^N \left(1 - \frac{1}{p_n^s}\right)$. Montrer par récurrence qu'on a

$$\zeta(s)P_N(s) = \sum_{m \in A_N} \frac{1}{m^s},$$

où A_N est l'ensemble des entiers $m \geq 1$ qui ne sont divisibles par aucun des nombres premiers $p_0, \ldots, p_N$.

(3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 17. Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes non nuls et deux à deux distincts telle que $\sum_{n=0}^{\infty} 1/|\lambda_n| < \infty$. Montrer que la formule

$$f(z) := \prod_{n=0}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right)$$

définit une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont exactement les λ_n.

Exercice 18. (théorème de Weierstrass)

Soit (λ_n) une suite de nombres complexes non nuls vérifiant $\lim_{n\to\infty}|\lambda_n| = +\infty$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction f holomorphe sur $\mathbb{C}$ dont les zéros sont exactement les λ_n.

(1) Soit ψ une fonction entière, et soit $w : [0,1] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que la formule $\varphi(z) := \int_0^1 w(t)\psi(tz)\,dt$ définit une fonction entière, et exprimer les coefficients a_n du développement en série entière de φ en fonction de w et des dérivées de la fonction ψ en 0.

(2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $\psi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$\psi(z) := \exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right).$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on peut écrire $\psi^{(n)}(z) = Q_n(z)\psi(z)$, où Q_n est un polynôme à coefficients positifs.

(3) On pose $W_0(z) = 1 - z$, et pour $p \in \mathbb{N}^*$, on définit $W_p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ par

$$W_p(z) := (1 - z)\exp\left(\sum_{k=1}^{p} \frac{z^k}{k}\right).$$

(a) Calculer $W_p'(z)$ pour $p \in \mathbb{N}$ et $z \in \mathbb{C}$.

(b) En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et les questions précédentes, montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$ on peut écrire

$$1 - W_p(z) = z^{p+1}\varphi_p(z),$$

où φ_p est une fonction entière s'écrivant $\varphi_p(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ avec des coefficients a_n *positifs*.

(c) Déduire de (b) que si $|z| \leq 1$, alors

$$|1 - W_p(z)| \leq |z|^{p+1} .$$

(4) Montrer que la série $\sum (\frac{z}{\lambda_n})^{n+1}$ converge normalement sur tout compact de $\mathbb{C}$.

(5) Démontrer le résultat souhaité.