Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Calculer les intégrales $I_1 := \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ et $I_2 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $I_1(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t^4+1}\, dt$ et $I_2(x) := \int_0^\infty \frac{\cos(xt)}{(t^2+1)^2}\, dt$.

Exercice 3. Pour $a > 1$, on pose $I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$.

(1) Mettre $I(a)$ sous la forme $\int_{\partial\mathbb{D}} f_a(z)\, dz$, où $\mathbb{D}$ est le disque unité et la fonction f_a est à déterminer.

(2) Calculer l'intégrale $I(a)$.

Exercice 4. Pour $r \in [0,1[$, calculer $I(r) := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale $I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$.

Exercice 6. Montrer que pour tout $a > 0$, on a $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin^2 t} = \frac{2\pi}{\sqrt{a(1+a)}}$.

Exercice 7. En intégrant $\frac{1}{z^3+1}$ sur le bord des domaines élémentaires

$$K_{\varepsilon,R} := \left\{ re^{i\theta};\ \varepsilon \le r \le R\,,\ 0 \le \theta \le \frac{2\pi}{3} \right\},$$

où $0 < \varepsilon < 1 < R$, calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$.

Exercice 8. Calculer l'intégrale $J := \int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^3+1}\, dx$.

Exercice 9. Calculer les intégrales $I := \int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2}\, dx$ et $J := \int_0^\infty \frac{(\log(x))^2}{1+x^2}\, dx$ en utilisant les domaines élémentaires

$$K_{\varepsilon,R} := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \ge 0\,, \varepsilon \le |z| \le R\}.$$

Exercice 10. Soit n un entier au moins égal à 2, et soit α vérifiant $1-n < \alpha < 1$.

(1) Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, dessiner le domaine élémentaire

$$K_{\varepsilon,R} := \left\{ re^{i\theta};\ \varepsilon \le r \le R\,,\ 0 \le \theta \le \frac{2\pi}{n} \right\}.$$

(2) Calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x^n)}$.

Exercice 11. Soit $\alpha \in]0,1[$. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale
$$I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

(1) Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, dessiner le domaine élémentaire $K_{\varepsilon R}$ (de type "pac-man") délimité par le demi-cercle $C_\varepsilon := \{|z| = \varepsilon,\ \mathrm{Re}(z) \leq 0\}$, les deux segments $I_{\varepsilon R}^+ := [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$ et $I_{\varepsilon R}^- := [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2-\varepsilon^2}]$, et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} := \{Re^{i\theta};\ \theta \in [-\pi;\pi],\ |\theta| \geq \theta_{\varepsilon R}\}$, où $\theta_{\varepsilon R} := \arctan\left(\varepsilon/\sqrt{R^2-\varepsilon^2}\right)$.

(2) Calculer $I(\alpha)$ en appliquant le théorème des résidus à $f(z) := \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$, où z^α est défini en prenant l'argument dans $]0, 2\pi[$.

Exercice 12. (fractions rationnelles sur $\mathbb{R}^+$)

(1) Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle sans pôles dans $\mathbb{R}^+$, avec $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des pôles de F. En considérant des domaines élémentaires de type "pac-man", établir la formule suivante :
$$\int_0^\infty F(x)\,dx = -\sum_{a\in\mathcal{P}} \mathrm{Res}\Big(F(z)\log(z), a\Big),$$
où log est la détermination du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ obtenue en prenant l'argument dans $]0, 2\pi[$.

(2) Calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

Exercice 13. Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$. En intégrant $\frac{(\log(z))^2}{(z+a)(z+b)}$ sur le bord de domaines de type "pac-man", montrer qu'on a
$$\int_0^\infty \frac{(\log(x))^2}{(x+a)(x+b)}\,dx = \frac{(\log(a))^2 - (\log(b))^2}{2(a-b)}.$$

Exercice 14. Pour $\alpha \in]-1, 1[$, calculer l'intégrale $I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{x^\alpha}{(1+x)^2}\,dx$.

Exercice 15. Calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{\log(x)}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,dx$.

Exercice 16. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a
$$\mathrm{cotan}(z) = \frac{1}{z} + 2z\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

(1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ fixé. Montrer que $F(\xi) := \frac{\text{cotan}(\xi)}{\xi(\xi-z)}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus S$, où l'ensemble S est à déterminer, et calculer les résidus de F aux points de S.

(2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note R_N le carré de sommets $\pm a_N \pm i a_N$, où $a_N = N\pi + \frac{\pi}{2}$. Dessiner R_N, puis montrer que pour tout $z \in \mathring{R}_N \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R_N} \frac{\text{cotan}(\xi)}{\xi(\xi - z)} \, d\xi = \frac{\text{cotan}(z)}{z} - \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^{N} \frac{2}{z^2 - n^2\pi^2} \right).$$

(3) On rappelle que si $\xi = x + iy$, alors $|\sin \xi|^2 = \text{sh}^2 y + \sin^2 x$ et $|\cos \xi|^2 = \text{sh}^2 y + \cos^2 x$. Montrer qu'il existe une constante C (indépendante de N) telle que $|\text{cotan}(\xi)|^2 \leq C$ pour tout N et pour tout $\xi \in \partial R_N$, et en déduire que $\int_{\partial R_N} \frac{\text{cotan}(\xi)}{\xi(\xi-z)} \, d\xi$ tend vers 0 quand $N \to \infty$.

(4) Conclure.

Exercice 17. Le but de l'exercice est de calculer, pour $k = 1$ et $k = 2$, la somme

$$S_k := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

(1) Pour $N \in \mathbb{N}$, on note R_N le carré de sommets $\pm a_N \pm i a_N$, où $a_N = N\pi + \frac{\pi}{2}$.

   (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque, déterminer la limite de $\int_{\partial R_N} \frac{\text{cotan}(z)}{z^{2k}} \, dz$ quand $N \to \infty$.

   (b) Pour $k = 1$ et $k = 2$, déterminer les pôles de $F_k(z) := \frac{\text{cotan}(z)}{z^{2k}}$ à l'intérieur du rectangle R_N, et calculer les résidus correspondants.

(2) Calculer la somme S_k pour $k = 1$ et pour $k = 2$.

Exercice 18. (somme binomiale)

(1) Montrer que pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} \, dz$.

(2) Montrer qu'on a $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Calculer l'intégrale $I := \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$.

(4) Établir la formule $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n} \binom{2n}{n} = \sqrt{5}$.

Exercice 19. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$ à l'aide du théorème des résidus.

(1) Pour $R > 0$, on pose $a_R := (-R + 1/2) - iR$, $b_R := (R + 1/2) + iR$, $c_R := (R - 1/2) + iR$, $d_R := (-R - 1/2) - iR$, et on note K_R le parallèlogramme $a_R b_R c_R d_R$. D'autre part, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on pose

$$f(z) := \frac{e^{i\pi(z-\frac{1}{2})^2}}{1 - e^{-2i\pi z}}.$$

(a) Calculer l'intégrale $\int_{\partial K_R} f(z)\, dz$ à l'aide du théorème des résidus.

(b) Montrer que $\int_{[a_R b_R]} f(z)dz - \int_{[d_R c_R]} f(z)dz$ tend vers $(1+i)\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} dt$ quand $R \to \infty$. (*Il pourra être judicieux de paramétrer les segments à l'aide de l'intervalle* $[-R, R]$.)

(2) Calculer l'intégrale I.

Exercice 20. Trouver le nombre de zéros de $P(z) := z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 3z + 5$ dans le disque $\overline{D}(0, 2)$.

Exercice 21. Trouver le nombre de solutions de l'équation $z^5+12z^3+3z^2+20z+3 = 0$ dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

Exercice 22. Le but de l'exercice est de donner une preuve du théorème fondamental de l'algèbre. On fixe donc un polynôme P de degré $d \geq 1$, qu'on suppose unitaire et qu'on écrit $P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0$. Il s'agit de montrer que P possède au moins une racine complexe.

(1) Justifier qu'il existe $R > 0$ tel que $|P(z) - z^d| \leq \frac{1}{2}|z|^d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| \geq R$.

(2) Conclure en utilisant le théorème de Rouché.

Exercice 23. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| < 1$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on a $|(\xi-1)^n e^\xi| > |\lambda|$ sur le cercle $\{|\xi-1| = 1\}$, et en déduire que l'équation $(z-1)^n e^z = \lambda$ possède n solutions dans le disque $\overline{D}(1, 1)$.

Exercice 24. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > e$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(z) := az^n - e^z$ admet n zéros simples dans le disque unité $\mathbb{D}$.

Exercice 25. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(z) := \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$.

(1) On pose $R_n := \min\{|z|;\ z \in Z(P_n)\}$, où $Z(P_n)$ est l'ensemble des zéros de P_n. En raisonnant par l'absurde, montrer que R_n tend vers l'infini avec n.

(2) Montrer qu'on a $|P_n(\xi) - \frac{\xi^n}{n!}| < \frac{(2n)^n}{n!}$ pour tout $\xi \in \partial D(0, 2n)$.

(3) Montrer que les zéros de P_n appartiennent tous au disque $D(0, 2n)$.

Exercice 26. (fonctions implicites)

(1) Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D}(0,r)$ et sans zéros sur $\partial D(0,r)$. On suppose que f admet un seul zéro a dans le disque $D(0,r)$, et que ce zéro est simple. Montrer qu'on a

$$a = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial D(0,r)} \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)}\, d\xi\,.$$

(2) Soit $r = 1/\sqrt{3}$, et soit V le disque $D(0, 2r/3)$.

(a) En utilisant le théorème de Rouché, montrer que si $\lambda \in V$, alors il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < r$ et $z^3 + z = \lambda$. On note $z = a(\lambda)$.

(b) Montrer que la fonction a est holomorphe sur V.

Exercice 27. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit f une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(\Omega) \subset \Omega$.

(1) On pose $A := \{w \in \mathbb{C};\ f(w) = w\}$. Que peut-on dire de f si A est d'intérieur non vide?

(2) On suppose que f est non constante et vérifie $f \circ f = f$. Montrer qu'on a $f(z) = z$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 28. (théorèmes d'Hurwitz)

Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω. On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction (holomorphe) f.

(1) On suppose que f n'est pas identiquement nulle. En utilisant le théorème de Rouché, montrer que pour tout $a \in \Omega$ on peut trouver $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que f et f_n ont le même nombre de zéros dans le disque $\overline{D}(a,r)$.

(2) Montrer que si les f_n ne s'annulent jamais, alors ou bien f est identiquement nulle, ou bien f ne s'annule jamais.

(3) On suppose que les fonctions f_n sont injectives. Montrer que la fonction f est soit injective, soit constante. (*Fixer $a \in \Omega$ et appliquer (2) aux fonctions* $g_n : \Omega \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ définies par $g_n(z) := f_n(z) - f_n(a)$).

Exercice 29. Soit f une fonction holomorphe non constante dans le disque unité $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a

$$\sum_{n=2}^\infty n|c_n| \le |c_1|\,.$$

(1) En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $h(z) := f(z) - c_1 z$, montrer que si z_0 est un point quelconque de $\mathbb{D}$ et si r vérifie $|z_0| < r < 1$, alors

$$|f(\xi) - f(z_0) - c_1(\xi - z_0)| < |c_1(\xi - z_0)|$$

pour tout $\xi \in \partial D(0,r)$.

(2) Montrer que la fonction f est injective.

Exercice 30. Soit f une fonction holomorphe injective sur le disque unité $\mathbb{D}$.

(1) Montrer que l'aire de $f(\mathbb{D})$ est égale à $\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 \, dxdy$.

(2) On écrit $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Exprimer l'aire de $f(\mathbb{D})$ à l'aide des c_n.