Feuille d'exercices n^{o} 4

Exercice 1. Soit $R > 0$, et soit $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin défini par $\gamma(t) := Re^{it}$.

(1) Calculer $\int_\gamma \omega_0$, où $\omega_0 := \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

(2) Retrouver la valeur de $\int_\gamma \omega_0$ en utilisant l'identité $\frac{dz}{z} = d(\log|z|) + i\omega_0$.

Exercice 2. Calculer la longueur de l'arc de la parabole d'équation $y = x^2$ compris entre $(0, 0)$ et $M = (1, 1)$.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. Le but de l'exercice est de donner une preuve du fait que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

(1) En utilisant la formule de Green-Riemann, montrer que pour tout rectangle $R = [a, b] \times [c, d] \subseteq \Omega$, on a

$$\int_R \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) dxdy = 0.$$

(2) En déduire le résultat souhaité.

Exercice 4. Montrer que si $K \subset \mathbb{C}$ est un domaine élémentaire, alors l'aire de K est donnée par les formules suivantes :

$$\text{aire}(K) = \frac{1}{2} \int_{\partial K} (xdy - ydx) = \int_{\partial K} xdy = -\int_{\partial K} ydx = \frac{1}{2i} \int_{\partial K} \bar{z}dz\,.$$

Exercice 5. (formule de Cauchy-Pompeiu)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Soit également K un domaine élémentaire contenu dans Ω.

(1) Soit $a \in \mathring{K}$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(a, \varepsilon) \subset \mathring{K}$. Montrer qu'on a

$$\int_{\partial K} \frac{f(z)}{z-a}\, dz = \int_{\partial D(a,\varepsilon)} \frac{f(z)}{z-a}\, dz + 2i \int_{K \setminus D(a,\varepsilon)} \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \frac{dxdy}{z-a}\,.$$

(2) En passant en coordonnées polaires, montrer que la fonction $w \mapsto 1/w$ (définie arbitrairement en 0) est intégrable sur tout disque $D(0, R)$. En déduire que si $a \in \mathbb{C}$, alors la fonction $z \mapsto \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z) \times \frac{1}{z-a}$ (définie arbitrairement en a) est intégrable sur K.

(3) Montrer que pour tout point $a \in \mathring{K}$, on a
$$f(a) = \frac{1}{2i\pi}\int_{\partial K}\frac{f(z)}{z-a}\,dz - \frac{1}{\pi}\int_K \frac{\partial f}{\partial \bar z}\,\frac{dxdy}{z-a}.$$

Exercice 6. Soient $R \subset \mathbb{C}$ un rectangle (fermé) de centre $a \in \mathbb{C}$ et D un disque ouvert de centre a et contenant R. Montrer que si f est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus \{a\}$, alors $\int_{\partial R} f(z)\,dz = \int_{\partial D} f(z)\,dz$.

Exercice 7. (transformée de Fourier de la Gaussienne)

(1) Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$. On supose qu'il existe une fonction continue $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ telle que
$$\forall z = x + iy \in \mathbb{C} \ : \ |f(z)| \leq \frac{C(y)}{1+x^2}.$$
 (a) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+ib)\,dt$ est bien définie.
 (b) Soit $b \in \mathbb{R}$ et $R > 0$. En appliquant le théorème de Cauchy, montrer qu'on a $\int_{-R}^{R} f(t)\,dt - \int_{-R}^{R} f(t+ib)\,dt = i\int_0^b f(-R+is)\,ds - i\int_0^b f(R+is)\,ds$.
 (c) Montrer que pour tout $b \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t+ib)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt\,.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(t+ix)^2}{2}}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt\ .$$
Quelle est la valeur de l'intégrale de droite?

(3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $I(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} e^{-ixt}dt$.

Exercice 8. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale
$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

(1) Justifier l'existence de I.

(2) Pour tout $\alpha > 0$, on note $\gamma_\alpha : [0, \pi] \to \mathbb{C}^*$ le chemin défini par $\gamma_\alpha(t) := \alpha e^{it}$. En appliquant le théorème de Cauchy à la fonction $g(z) := \frac{e^{2iz}-1}{z^2}$, montrer que si $0 < \varepsilon < R$, alors
$$\int_{\gamma_R} g(z)\,dz - \int_{\gamma_\varepsilon} g(z)\,dz = 4\int_\varepsilon^R \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx\,.$$

(3) En déduire la valeur de I.

Exercice 9. En considérant la fonction $z \mapsto \frac{e^{iz}-iz-1}{z^3}$ calculer l'intégrale
$$I := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x - \sin x}{x^3}\, dx,$$
après avoir (bien entendu) justifié son existence.

Exercice 10. En intégrant e^{-z^2} sur le bord des secteurs angulaires
$$\Sigma_R := \left\{ re^{i\theta};\ 0 \leq r \leq R\ ,\ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4} \right\}\ ,\quad R > 0\,,$$
montrer que les intégrales $\int_0^\infty \cos(t^2)\, dt$ et $\int_0^\infty \sin(t^2)\, dt$ existent en un sens à préciser, et qu'on a
$$\int_0^\infty \cos(t^2)\, dt = \sqrt{\frac{\pi}{8}} = \int_0^\infty \sin(t^2)\, dt\ .$$

Exercice 11. Pour $\alpha \in]-1, 1[$, on pose $I_\alpha := \int_0^\infty \frac{x^\alpha \log x}{x^2-1}\, dx$.

(1) Justifier l'existence de I_α.
(2) Pour $0 < \varepsilon < 1/2 < 1 < R$, dessiner le domaine élémentaire
$$K_{\varepsilon,R} := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Im}(z) \geq 0\,,\ \varepsilon \leq |z| \leq R\ ,\ |z-1| \geq \varepsilon \text{ et } |z+1| \geq \varepsilon\}\,.$$
(3) Pour $z \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{R}^-$, on pose $f(z) := \frac{z^\alpha \log z}{z^2-1}$, où $\log z$ et z^α sont calculés en prenant l'argument dans $]-\pi/2, 3\pi/2[$. En appliquant le théorème de Cauchy à f, calculer l'intégrale I_α.

Exercice 12. Dans tout l'exercice, $c_0, \ldots, c_n$ sont des nombres complexes fixés.

(1) On pose $P(z) := c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$.
   (a) Calculer l'intégrale $\int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2\, dt$ en fonction des coefficients c_j.
   (b) Calculer $\int_0^1 P(x)^2\, dx$ en fonction des c_j.
(2) Soit toujours $P(z) = c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n$
   (a) On suppose que tous les c_j sont réels. En intégrant $f(z) = P(z)^2$ sur le bord des domaines élémentaires $K^+ := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$ et $K^- := \{z \in \mathbb{C};\ |z| \leq 1 \text{ et } \mathrm{Im}(z) \leq 0\}$, montrer qu'on a
$$\int_{-1}^1 P(x)^2 dx \leq \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} |P(e^{it})|^2 dt.$$
   (b) On ne fait plus d'hypothèse sur les c_j. En écrivant $c_j = a_j + ib_j$ où $a_j, b_j \in \mathbb{R}$, déduire de (a) et (1a) qu'on a $\int_{-1}^1 |P(x)|^2 dx \leq \pi \sum_{j=0}^n |c_j|^2$.
(3) Établir l'inégalité suivante :
$$\left| \sum_{j,k=0}^n \frac{c_j c_k}{j+k+1} \right| \leq \pi \sum_{j=0}^n |c_j|^2.$$

Exercice 13. Soit $\mathbb{D}$ le disque unité, et soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| \neq 1$.

(1) Calculer l'intégrale $I(a) := \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{z-a}$ en appliquant le théorème de Cauchy et la formule de Cauchy.

(2) Calculer directement $I(a)$ en développant $\frac{1}{z-a}$ en série.

Exercice 14. Calculer les intégrales $I := \int_{\partial D(0,3)} \frac{\sin z}{z}\, dz$ et $J := \int_{\partial D(\frac{5}{2},1)} \frac{e^{-z}}{z(z^2-4)}\, dz$.

Exercice 15. Soit ω_0 la 1-forme différentielle $\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$, définie sur $\mathbb{C}^*$.

(1) Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire tel que $0 \in \mathring{K}$, et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\overline{D}(0,\varepsilon) \subset \mathring{K}$. En appliquant convenablement la formule de Green-Riemann, montrer qu'on a $\int_{\partial K} \omega_0 = \int_{\partial D(0,\varepsilon)} \omega_0$.

(2) Déduire de (1) que si K est un domaine élémentaire tel que $0 \in \mathring{K}$, alors

$$\int_{\partial K} \omega_0 = 2\pi\,.$$

(3) Retrouver le résultat de (2) en utilisant l'identité $\frac{dz}{z} = d(\log|z|) + i\omega_0$ et la formule de Cauchy.

(4) Effectuer directement le calcul de $\int_{\partial K} \omega_0$ lorsque K est le carré $[-1,1]\times[-1,1]$.

Exercice 16. Soit $a \in \mathbb{C}$ vérifiant $|a| < 1$. On pose $I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{|e^{it}-a|^2}$.

(1) Montrer qu'on a $I(a) = \frac{1}{i} \int_{\partial\mathbb{D}} \frac{dz}{(z-a)(1-\bar{a}z)}$.

(2) En déduire la valeur de $I(a)$.

Exercice 17. Soit $f = \frac{P}{Q}$ une fraction rationnelle, avec $\deg(P) < \deg(Q)$ et Q sans racines dans le demi-plan $\{\mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Montrer que si $z_0 \in \mathbb{C}$ vérifie $\mathrm{Im}(z_0) > 0$, alors la fonction $t \mapsto \frac{f(t)}{t-z_0}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$, et qu'on a $f(z_0) = \frac{1}{2i\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)}{t-z_0}\, dt$.

Exercice 18. Soit $K \subset \mathbb{C}$ un domaine élémentaire.

(1) Soit $z_0 \in \mathring{K}$. En utilisant la formule de Cauchy, montrer qu'il existe une constante $C = C(z_0)$ vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction f holomorphe au voisinage de K, on a $|f(z_0)| \leq C \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial K\}$.

(2) Soit f une fonction holomorphe au voisinage de K. En appliquant (1) à f^n pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que pour tout $z \in K$, on a

$$|f(z)| \leq \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial K\}.$$