

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Montrer que si u est une fonction de classe \mathcal{C}^1 à valeurs réelles sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ et si φ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert de \mathbb{R} contenant $u(\Omega)$, alors $d(\varphi \circ u) = (\varphi' \circ u)du$. Que devient cette formule lorsque $\varphi(t) = \log(t)$?

Exercice 2. Déterminer df , $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ dans les cas suivants, en précisant sur quel domaine la fonction f est de classe \mathcal{C}^1 : $f(z) := |z|^2$; $f(z) := \log |z|$; $f(z) := |z|$.

Exercice 3. Montrer que sur $\Omega := \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{dz}{z} = d(\log |z|) + i \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}.$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Montrer que si $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ est une fonction de classe \mathcal{C}^1 , alors

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}.$$

Exercice 5. Le but de l'exercice est de justifier le fait suivant : si f est une fonction de classe \mathcal{C}^1 sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, de la forme $f(z) = \frac{P(z, \bar{z})}{Q(z, \bar{z})}$ où P et Q sont des polynômes à 2 variables, alors on peut calculer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en "dérivant par rapport à z et à \bar{z} ".

(1) Vérifier que si u et v sont des fonctions de classe \mathcal{C}^1 sur Ω , alors

$$\frac{\partial(uv)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z} v + u \frac{\partial v}{\partial z}.$$

(2) Dédire de (1) que si $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et si v ne s'annule pas sur Ω , alors

$$\frac{\partial(u/v)}{\partial z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} v - u \frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}.$$

(3) Montrer que si $l \in \mathbb{N}$, alors

$$\frac{\partial(\bar{z}^l)}{\partial z} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial(z^k \bar{z}^l)}{\partial z} = kz^{k-1} \bar{z}^l \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$

(4) Conclure.

Exercice 6. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de \mathbb{C} , et soient $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

- (1) Exprimer $d(g \circ f)$ à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$, f , df et $d\bar{f}$.
 (2) En déduire les formules suivantes :

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}},$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f \right) \frac{\partial f}{\partial z}.$$

Exercice 7. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, le **laplacien** de u est la fonction Δu définie par

$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Montrer qu'on a

$$\Delta u = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}.$$

Exercice 8. (coordonnées polaires)

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, et soit $\tilde{\Omega} := \{(r, \theta) \in]0, \infty[\times \mathbb{R}; (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \Omega\}$. Si f est une fonction sur Ω , on note encore f la fonction $(r, \theta) \mapsto f(r \cos \theta, r \sin \theta)$ définie sur $\tilde{\Omega}$.

- (1) Lorsque f est de classe \mathcal{C}^1 , montrer qu'on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta}.$$

- (2) Lorsque f est de classe \mathcal{C}^2 , montrer qu'on a

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}.$$

Exercice 9. Écrire l'équation de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.

Exercice 10. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que la fonction f^* définie par $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur l'ouvert $\Omega^* := \{z; \bar{z} \in \Omega\}$, avec $(f^*)'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(0) := 0$ et $f(z) := \frac{z^3}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 , et déterminer ses points de \mathbb{C} -dérivabilité.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $f(0) := 0$ et $f(z) := e^{-1/z^4}$ si $z \neq 0$.

- (1) Montrer que f admet des dérivées partielles en 0, et que l'équation de Cauchy-Riemann est vérifiée en ce point.

(2) La fonction f est elle holomorphe?

Exercice 13. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\Omega \subseteq \mathbb{C}$. On suppose que f ne prend que des valeurs réelles. Montrer que f est constante.

Exercice 14. Soit f une fonction holomorphe, supposée de classe \mathcal{C}^2 . Montrer que f' est holomorphe.

Exercice 15. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , et soit $a \in \Omega$. Montrer que si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω telles que $f(a) = 0 = g(a)$ et $g'(a) \neq 0$, alors $g(z) \neq 0$ pour $z \neq a$ suffisamment proche de a et

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}.$$

Exercice 16. En utilisant l'Exercice 15, déterminer $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$ et $\lim_{z \rightarrow i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}$.

Exercice 17. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Pour $p \in \Omega$, on note $J_f(p)$ le déterminant Jacobien de f au point p .

(1) Montrer que pour tout $p \in \Omega$, on a

$$J_f(p) = \left| \frac{\partial f}{\partial z}(p) \right|^2 - \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p) \right|^2.$$

(2) Que devient cette formule lorsque f est holomorphe?

Exercice 18. Soit $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective. En admettant qu'on a $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$, exprimer l'aire de $f(\Omega)$ à l'aide de f' .

Exercice 19. (fonctions harmoniques)

Dans cet exercice, on *admettra* que toute fonction holomorphe est de classe \mathcal{C}^2 . Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . On dit qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est **harmonique** si elle vérifie $\Delta u = 0$.

(1) Montrer que toute fonction holomorphe est harmonique, et que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction harmonique sont des fonctions harmoniques.

(2) On suppose que Ω est un disque ou un rectangle, de centre $z_0 = (x_0, y_0)$. Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique, et soit $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$v(x, y) := \int_{y_0}^y \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) dt - \int_{x_0}^x \frac{\partial u}{\partial y}(s, y_0) ds.$$

Montrer que la fonction $f := u + iv$ est holomorphe sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

- (3) Montrer que si Ω est un disque ou un rectangle, alors une fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si u est la partie réelle d'une fonction holomorphe.
- (4) On suppose que Ω est connexe, et on fixe un point $z_0 \in \Omega$. Soit $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction harmonique, et soit $f \in H(\Omega)$. Montrer qu'on a $\operatorname{Re}(f) = u$ si et seulement si $\operatorname{Re}(f(z_0)) = u(z_0)$ et $f' = 2\frac{\partial u}{\partial z}$.

Exercice 20. Soit $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x, y) := e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$. Montrer que u est harmonique et trouver une fonction $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f := u + iv$ soit holomorphe.

Exercice 21. Soit $\mathbb{D} := D(0, 1)$, et soit $P : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$P(z) := \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}.$$

- (1) Calculer $\frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}$.
- (2) Montrer que P est harmonique et trouver une fonction holomorphe f telle que $\operatorname{Re}(f) = P$.

Exercice 22. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

- (1) Montrer qu'on a $d(\log |f|) = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}} \right)$.
- (2) Dédire de (1) que si f est holomorphe, alors $\log |f|$ est harmonique.

Exercice 23. Soient V_1, V_2 deux ouverts de \mathbb{C} , et soient $f : V_1 \rightarrow V_2$ et $u : V_2 \rightarrow \mathbb{C}$ deux fonctions de classe \mathcal{C}^1 .

- (1) Montrer que si f est holomorphe, alors $\frac{\partial(u \circ f)}{\partial z} = f' \times \left(\frac{\partial u}{\partial z} \circ f \right)$ et $\frac{\partial(u \circ f)}{\partial \bar{z}} = \bar{f}' \times \left(\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f \right)$.
- (2) On suppose que u et f sont de classe \mathcal{C}^2 , et que f est holomorphe. Dédire de (1) qu'on a $\Delta(u \circ f) = |f'|^2 \times ((\Delta u) \circ f)$.
- (3) Conclure que si f est holomorphe (de classe \mathcal{C}^2) et u harmonique, alors $u \circ f$ est harmonique.

Exercice 24. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} . Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors

$$\Delta(|f|^2) = 4 \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 + 2 \operatorname{Re}(\bar{f} \Delta f) + 4 \left| \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} \right|^2.$$

Que devient cette formule lorsque f est holomorphe?

Exercice 25. Soient f_1, \dots, f_n des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de \mathbb{C} . On suppose que la fonction $\sum_1^n |f_i|^2$ est constante. Montrer que toutes les f_i sont constantes.

Exercice 26. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

- | | |
|--|--|
| (1) $\Sigma_1(z) := \sum \frac{n^\alpha}{n!} z^n, \alpha > 0;$ | (4) $\Sigma_4(z) := \sum (1 + (-1)^n)^n z^n ;$ |
| (2) $\Sigma_2(z) := \sum \frac{n^n}{n!} z^n;$ | (5) $\Sigma_5(z) := \sum \frac{z^{n^p}}{n^n}, p \in \mathbb{N}^*;$ |
| (3) $\Sigma_3(z) := \sum \frac{1+a^n}{1+n^a} z^n, a > 0 ;$ | (6) $\Sigma_6(z) := \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n .$ |

Exercice 27. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

- (1) Calculer les dérivées successives de $f(z) := \frac{1}{1-z}$ sur son domaine de définition.
- (2) Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p}$ se développe en série entière dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0, 1)$, et trouver les coefficients de son développement.

Exercice 28. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ la somme d'une série entière dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0, 1)$.

- (1) On note Ω le demi-plan $\{\operatorname{Re}(z) < 1/2\}$. Montrer que la formule

$$F(z) = \frac{1}{1-z} f\left(\frac{z}{1-z}\right)$$

a un sens pour tout $z \in \Omega$, et définit une fonction holomorphe dans Ω .

- (2) Montrer que dans le disque $D(0, 1/2)$, on a

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k \right) z^n .$$

Exercice 29. Soit $\mathbf{a} = (a_n)$ une suite de nombres complexes admettant une limite $l \in \mathbb{C}$.

- (1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!} z^n$? Dans la suite, on posera $S_{\mathbf{a}}(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$.
- (2) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$|e^{-x} S_{\mathbf{a}}(x) - l| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^N \frac{|a_n - l|}{n!} x^n + \sup_{n>N} |a_n - l| .$$

- (3) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} S_{\mathbf{a}}(x)$.

Exercice 30. (critères d'Abel)

Soit (a_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un même ensemble X , et soit (b_n) une suite de fonctions définies sur un même ensemble Y . Montrer que dans les deux cas suivants, la série de fonctions $\sum a_n(x) b_n(y)$ converge uniformément sur $X \times Y$.

- (1) Les sommes partielles de la série $\sum a_n(x)$ sont uniformément bornées sur X , la suite $(b_n(y))$ tend vers 0 uniformément sur Y , et $\sum_{n=N}^{\infty} |b_{n+1}(y) - b_n(y)|$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$, uniformément sur Y .
- (2) La série $\sum a_n(x)$ converge uniformément sur X , la suite $(b_n(y))$ est uniformément bornée sur Y , et il existe une constante C telle que $\forall y \in Y : \sum_0^{\infty} |b_{n+1}(y) - b_n(y)| \leq C$.

Exercice 31. (théorème d'Abel)

Soit $S(z) = \sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que la série $\sum c_n$ converge.

- (1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 30), montrer que la série $S(r)$ converge uniformément par rapport à $r \in [0, 1]$.
- (2) On note f la somme de la série S dans le disque $\mathbb{D} = D(0, 1)$. Montrer que $f(r)$ tend vers $\sum_0^{\infty} c_n$ quand r tend vers 1^- .

Exercice 32. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Exercice 33. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $0 \leq c < d \leq \pi$. Déterminer et dessiner l'image du rectangle $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ par la fonction exponentielle.

Exercice 34. Soit $z \in \mathbb{C}$ Le but de l'exercice est de montrer, de deux façons différentes, qu'on a

$$e^z = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

- (1) Développer $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme, et en déduire la formule souhaitée en utilisant le théorème de convergence dominée pour les séries.
- (2) Démontrer la formule souhaitée en utilisant le logarithme complexe.

Exercice 35. Énoncer et démontrer les formules "bien connues" pour $\cos(u + v)$ et $\sin(u + v)$, où $u, v \in \mathbb{C}$.

Exercice 36. Montrer que pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a les identités suivantes :

$$\begin{cases} \cos z &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin z &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

$$|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x \quad \text{et} \quad |\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x.$$

Exercice 37. (forme complexe de l'arctangente)

- (1) Montrer que si $t \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1+it}{1-it} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
- (2) Soient $w, z \in \mathbb{C}$, et soit $\xi := e^{iw}$. Montrer qu'on a $\tan(w) = z$ si et seulement si $\xi^2 = \frac{1+iz}{1-iz}$.
- (3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\arctan(t) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$.

Exercice 38. Résoudre l'équation $\cos z = 2$. (Poser $\xi := e^{iz}$).

Exercice 39. Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite $(\tan(nz))$.

Exercice 40. Soit $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C}; x + y > 0\}$. Dessiner Ω , vérifier que $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et déterminer l'image de Ω par la fonction \log .

Exercice 41. Soient L une détermination holomorphe du logarithme et Θ une détermination \mathcal{C}^1 de l'argument sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. Déterminer L' et $d\Theta$.

Exercice 42. Soit L une détermination *continue* du logarithme dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$.

- (1) Montrer que pour tout point $z_0 \in \Omega$, on peut trouver $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $D(z_0, r) \subset \Omega \cap (\mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha)$, où Δ_α est la demi-droite $\mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$.
- (2) Avec les notations de (1), montrer que la fonction $L - \log_\alpha$ est constante sur $D(z_0, r)$.
- (3) Montrer que L est holomorphe sur Ω .

Exercice 43. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) g est un logarithme de f , i.e. $e^{g(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$;
- (ii) $g' = f'/f$ et $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ pour au moins un point $z_0 \in \Omega$.

Exercice 44. (deux formules classiques)

- (1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 30), montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$.
- (2) En déduire que pour tout point $\zeta \in \mathbb{T} \setminus \{1\}$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} = -\log(1 - \zeta).$$

- (3) Déduire de (2) que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, on a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\log \left| 2 \sin \left(\frac{x}{2} \right) \right| \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}.$$

Exercice 45. A-t-on toujours $\log(uv) = \log(u) + \log(v)$ pour $u, v \in \mathbb{C}^*$?

Exercice 46. Calculer $\sqrt{4i}$ (en utilisant la détermination principale du logarithme).

Exercice 47. Calculer i^i et $(i^i)^i$.

Exercice 48. Déterminer l'image du demi-plan $U = \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re}(z) > 0\}$ par la fonction $z \mapsto z^{1/4}$.

Exercice 49. On note \sqrt{z} la détermination principale de $z^{1/2}$ dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$. Montrer que la fonction $z \mapsto \cos(\sqrt{z})$, définie a priori sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, se prolonge en une fonction holomorphe sur \mathbb{C} .

Exercice 50. En utilisant (ou pas) l'Exercice 15, déterminer les limites suivantes.

$$(1) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{z^2} \qquad (2) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z - z}{z^3} \qquad (3) \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos z}{\sin(z^2)}$$

Exercice 51. Déterminer $\lim_{z \rightarrow 0} (\cos z)^{1/z^2}$, après avoir précisé ce que signifie $(\cos z)^{1/z^2}$.

Exercice 52. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue de $z^{1/k}$ sur le cercle \mathbb{T} .

Exercice 53. Soit Ω un ouvert de \mathbb{C} , et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. On suppose que f est holomorphe et qu'on a $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Sous ces hypothèses, on a vu dans l'Exercice 20 que la fonction $\log |f|$ est harmonique. Le but du présent exercice est de redémontrer ce résultat avec une autre méthode.

- (1) Montrer que pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 et une fonction g holomorphe sur U tels que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in U$.
- (2) Avec les notations de (1), exprimer $\log |f(z)|$ à l'aide de $g(z)$ pour $z \in U$.
- (3) Démontrer le résultat souhaité.