Feuille d'exercices n°1

Exercice 1. Soit $T > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction T-périodique et localement intégrable. Montrer que pour tous intervalles fermés bornés $I, J \subseteq \mathbb{R}$ de longueur T, on a

$$\int_I f(t)\, dt = \int_J f(t)\, dt.$$

Exercice 2. Soit $T > 0$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne T-périodique. Montrer que si f est intégrable sur *un* intervalle de longueur T, alors f est localement intégrable.

Exercice 3. Soit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2π-périodique, alors il existe une unique fonction $\widetilde{f} : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ telle que $\forall t \in \mathbb{R} \ :\ f(t) = \widetilde{f}(e^{it})$; et montrer que si f est continue, alors $\widetilde{f}$ est continue.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Montrer que $G = \{T \in \mathbb{R};\ f \text{ est } T\text{-périodique}\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$; et en déduire que si f est continue, 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique, alors f est constante.

Exercice 5. Montrer que si $f \in L^1_{2\pi}$ est π-périodique, alors $c_{2n+1}(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 6. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\alpha_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(kt)\, dt \qquad \text{et} \qquad \beta_k(f) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt)\, dt.$$

(1) Montrer que si f est *paire* sur $]-\pi, \pi[$, alors

$$c_k(f) = \alpha_k(f) \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}$$

et

$$S_n f(x) = c_0(f) + 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k(f) \cos(kx) \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

(2) Montrer que si f est *impaire* sur $]-\pi,\pi[$, alors
$$c_k(f) = -i\beta_k(f) \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{Z}$$
et
$$S_n f(x) = 2\sum_{k=1}^{n} \beta_k(f)\sin(kx) \qquad \text{pour tout } n \geq 1.$$

Exercice 7. Soient I et J deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale $\int_{I\times J} e^{2i\pi(x+y)}dxdy$ est égale à 0 si et seulement si $|I| \in \mathbb{N}$ ou $|J| \in \mathbb{N}$.

Exercice 8. Soit R un rectangle dans le plan, et soit $(R_1,\dots,R_N)$ un “pavage” de R en rectangles. On suppose que chaque rectangle R_j a au moins un côté entier (c.à.d. dont la longueur est un nombre entier). Montrer que R a un côté entier.

Exercice 9. Soit $1 < p < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que si $f \in L^1_{2\pi}$ et $g \in L^p_{2\pi}$, alors $f * g \in L^p_{2\pi}$ et $\|f*g\|_p \leq \|f\|_1\,\|g\|_p$. Dans ce qui suit, on fixe $f \in L^1_{2\pi}$ et $g \in L^p_{2\pi}$.

(1) Soit q l'exposant conjugué de p. En utilisant l'inégalité de Hölder, montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)g(x-t)|\,\frac{dt}{2\pi} \leq \|f\|_1^{1/q}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)|\,|g(x-t)|^p\,\frac{dt}{2\pi}\right)^{1/p}.$$

(2) En déduire que
$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi}|f(t)g(x-t)|\,\frac{dt}{2\pi}\right)^p\frac{dx}{2\pi} \leq \|f\|_1^{\frac{p}{q}+1}\,\|g\|_p^p,$$
et conclure.

Exercice 10. Montrer que si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors
$$\forall k \in \mathbb{Z}\ :\ c_k(f*g) = c_k(f)c_k(g).$$

Exercice 11. Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, la **transformée de Fourier** de f est la fonction $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par
$$\widehat{f}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

(1) Montrer que $\widehat{f}$ est une fonction continue bornée, et que $\|\widehat{f}\|_\infty \leq \|f\|_1$.

(2) Dans cette question, on veut montrer que $\widehat{f}(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to \pm\infty$, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$.

  (a) Démontrer le résultat souhaité lorsque f est la fonction indicatrice d'un intervalle borné $I = (a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

(b) On *admet* que le sous-espace vectoriel $\mathcal{E}$ de $L^1(\mathbb{R})$ engendré par les fonctions indicatrices d'intervalles bornés est dense dans $L^1(\mathbb{R})$. Démontrer le résultat souhaité pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$.

(3) Expliquer pourquoi le résultat de (2) est plus général que le Lemme de Riemann-Lebesgue.

(4) Dans cette question, on veut redémontrer le résultat de (2) par une autre méthode. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$ fixée.

(a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a

$$\widehat{f}(\lambda) = -\int_{\mathbb{R}} f\left(t - \frac{\pi}{\lambda}\right) e^{-i\lambda t} du.$$

(b) On *admet* que $\int_{\mathbb{R}} |f(t-\varepsilon) - f(t)|\, dt \to 0$ quand $\varepsilon \to 0$. En utilisant ce fait, déduire de (a) que $\widehat{f}(\lambda) \to 0$ quand $\lambda \to \pm\infty$.

Exercice 12. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Montrer que pour tout $N \geq 0$, on a

$$\sigma_N f(x) = \sum_{k=-N}^{N} \left(1 - \frac{|k|}{N+1}\right) c_k(f) e^{ikx}.$$

Exercice 13. Montrer que si $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ et $M \in \mathbb{N}$, alors

$$\sum_{m=0}^{M} e^{imt} = e^{iM\frac{t}{2}} \frac{\sin\big((M+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

Exercice 14. Pour $n, N \in \mathbb{N}$, on note D_n et K_N les noyaux de Dirichlet et de Fejér. En utilisant l'Exercice 13, démontrer les formules données en cours :

$$D_n(t) = \frac{\sin\big((2n+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin\big(\frac{t}{2}\big)} \qquad \text{et} \qquad K_N(t) = \frac{1}{N+1} \frac{\sin^2\big((N+1)\frac{t}{2}\big)}{\sin^2\big(\frac{t}{2}\big)}.$$

Exercice 15. Soit $1 \leq p < \infty$. Montrer que si $f \in L^p_{2\pi}$, alors $\sigma_N f \to f$ en norme L^p. (*Raisonner par approximation en utilisant l'Exercice 9.*)

Exercice 16. Dans cet exercice, f est une fonction intégrable sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique, alors

$$\int_{\mathbb{R}} f(t) g(\lambda t)\, dt \xrightarrow{\lambda \to \infty} c_0(g) \int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt.$$

(*Commencer par le cas où g est un polynôme trigonométrique.*)

(2) Montrer que pour tout intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$, on a
$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t)\,|\sin(nt)|\,dt = \frac{2}{\pi}\int_a^b f(t)\,dt.$$

Exercice 17. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\alpha}{2\pi} \notin \mathbb{Q}$. Le but de l'exercice est de montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique, alors
$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) \to \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt \qquad \text{quand } N \to \infty.$$

(1) On pose $\omega := e^{i\alpha}$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \,:\, \omega^k \neq 1$.
(2) Démontrer le résultat souhaité pour une fonction $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ de la forme $f(t) = e^{ikt}$, où $k \in \mathbb{Z}$.
(3) En déduire le résultat souhaité lorsque f est un polynôme trigonométrique.
(4) On munit $\mathcal{C}_{2\pi}$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note $L_N : \mathcal{C}_{2\pi} \to \mathbb{C}$ la forme linéaire définie par
$$L_N(f) := \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n\alpha) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\,dt.$$
Montrer que L_N est continue et $\|L_N\| \leq 2$.
(5) Conclure.

Exercice 18. Soit $0 \leq r < 1$, et soit $P_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par
$$P_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} e^{ikt}.$$
Justifier la définition, montrer que $P_r \in \mathcal{C}_{2\pi}$, et montrer qu'on a
$$P_r(t) = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2}.$$

Exercice 19. Soit $f \in L^1_{2\pi}$. Pour $0 \leq r < 1$, on définit $f_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par
$$f_r(t) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|} c_k(f) e^{ikt}.$$

(1) Justifier la définition.
(2) Avec les notations de l'Exercice 18, montrer qu'on a $f_r = f * P_r$.
(3) En déduire que $f_r \to f$ en norme L^1 quand $r \to 1^-$, et que si f est continue, alors $f_r \to f$ uniformément.

Exercice 20. Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ des nombres réels tous différents. Montrer que pour tous $c_1, \dots, c_N \in \mathbb{C}$, on a

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| \sum_{k=1}^{N} c_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt = \sum_{k=1}^{N} |c_k|^2.$$

Exercice 21. Démontrer le lemme de Riemann-Lebesgue en utilisant l'inégalité de Bessel et la densité de $L^2_{2\pi}$ dans $L^1_{2\pi}$.

Exercice 22. Montrer que si $f, g \in L^2_{2\pi}$, alors on a pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$c_k(fg) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, c_{k-n}(g),$$

où la série converge absolument.

Exercice 23. Montrer que si $f, g \in L^2_{2\pi}$, alors

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, \overline{c_k(g)},$$

où la série converge absolument.

Exercice 24. Montrer que si $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et 2π-périodique, alors

$$\int_{-\pi}^{\pi} |g(t)|^2 dt - \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, dt \right|^2 \leq \int_{-\pi}^{\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

Exercice 25. En utilisant l'Exercice 24, montrer que si $[a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$ et si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $f(b) = f(a)$ et $\int_a^b f(t)\, dt = 0$, alors

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leq \left(\frac{b-a}{2\pi} \right)^2 \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

Exercice 26. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique, impaire, et de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi]$.

(1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on a $|c_k(g'')| = k^2\, |c_k(g)|$.
(2) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|g(x)| \leq \frac{\pi^2}{3\sqrt{5}}\, \|g''\|_2.$$

Exercice 27. Montrer que si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ telle que $f(a) = 0 = f(b)$, alors
$$\|g\|_\infty \leq \frac{(b-a)^3}{3\sqrt{5}} \|g''\|_{L^2([a,b])}$$

Exercice 28. Montrer que si $f \in L^2_{2\pi}$, alors
$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(v) - f(u)|^2 \, dudv = 8\pi^2 \sum_{k \neq 0} |c_k(f)|^2.$$

Exercice 29. (matrice de Hilbert)

(1) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique telle que $\varphi(t) = \pi - t$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier de φ.

(2) On pose $H^2 := \{f \in L^2_{2\pi};\ c_k(f) = 0 \text{ pour tout } k < 0\}$.

  (a) Montrer que l'application $f \mapsto \overline{\varphi} f$ est linéaire continue de H^2 dans L^2, et majorer sa norme.

  (b) Soit $f(t) = \sum_0^d a_k e^{ikt}$ un polynôme trigonométrique appartenant à H^2. Pour $j \in [\![0, d]\!]$, exprimer $c_{-j-1}(\overline{\varphi} f)$ à l'aide des a_k.

(3) Soit $d \in \mathbb{N}$. On munit $\mathbb{R}^{d+1}$ de la norme euclidienne, et on munit $M_{d+1}(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée. Montrer que la matrice $A := (\frac{1}{k+j+1})_{0 \leq j,k \leq d}$ vérifie $\|A\| \leq \pi$.

Exercice 30. Soit $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalle borné d'extrémités a et b et de longueur $T = b - a > 0$, et soit $f \in L^1(I)$. Pour $k \in \mathbb{Z}$, on pose
$$c_{k,T}(f) := \frac{1}{T} \int_I f(t) e^{-ik\frac{2\pi}{T}t} dt.$$

(1) Montrer que si $f \in L^2(I)$, alors
$$\int_I |f(t)|^2 dt = T \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_{k,T}(f)|^2.$$

(2) Montrer que si I est compact, $I = [a,b]$, et si f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur I, avec $f(b) = f(a)$, alors
$$\forall x \in I \ : \ f(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{k,T}(f) e^{ik\frac{2\pi}{T}x},$$
où la série converge normalement sur I.

Exercice 31. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^\infty$ alors, pour tout $\alpha > 0$, on a $|c_k(f)| = o\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right)$ quand $k \to \pm\infty$.

Exercice 32. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue 2π-périodique. On suppose que pour tout $\alpha > 0$, on a $|c_k(f)| = o\left(\frac{1}{|k|^\alpha}\right)$ quand $k \to \pm\infty$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 33. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^\infty$. Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$R_N(f) := \frac{2\pi}{N} \sum_{j=0}^{N-1} f\left(j\,\frac{2\pi}{N}\right).$$

(1) Quelle est la limite de $R_N(f)$ quand $N \to \infty$?
(2) Dans cette question, on veut montrer que

$$\forall \alpha > 0 \ : \ \left| R_N(f) - \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \right| = o\left(\frac{1}{N^\alpha}\right) \qquad \text{quand } N \to \infty.$$

(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Calculer la somme $\sum_{j=0}^{N-1} \left(e^{i\frac{2k\pi}{N}}\right)^j$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.
(b) En développant f en série de Fourier, montrer à l'aide de (a) que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$R_N(f) = 2\pi \sum_{k \in N\mathbb{Z}} c_k(f).$$

(c) En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\left| R_N(f) - \int_0^{2\pi} f(t)\,dt \right| \leq 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} \big(|c_{Nl}(f)| + |c_{-Nl}(f)| \big).$$

(d) Conclure à l'aide de l'Exercice 31.

Exercice 34. Soit $\lambda \in]0, \pi[$. En considérant la fonction $\mathbf{1}_{[-\lambda,\lambda]}$, montrer qu'on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k\lambda)}{k} = \frac{\pi - \lambda}{2} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(k\lambda)}{k^2} = \frac{\lambda(\pi - \lambda)}{2}.$$

Exercice 35. En considérant la fonction 2π-périodique et impaire f valant 1 sur $]0, \pi[$, calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \qquad \text{et} \qquad S_2 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 36. En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = |t|$ sur $[-\pi, \pi]$, calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \qquad \text{et} \qquad S_2 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4}.$$

Exercice 37. En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = t^2$ sur $[-\pi, \pi]$, calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}\ , \quad S_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \quad \text{et} \quad S_3 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Exercice 38. En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = \mathrm{ch}(t)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$, calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{1+k^2} \qquad \text{et} \qquad S_2 := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$

Exercice 39. Montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$, on a

$$x(\pi - x) = \frac{8}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)x)}{(2n+1)^3};$$

et calculer les sommes

$$S_1 := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6} \qquad \text{et} \qquad S_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6}.$$

Exercice 40. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = e^{iat}$ pour $t \in [0, 2\pi[$, montrer qu'on a

$$\pi \,\mathrm{cotan}(\pi a) = \frac{1}{a} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2a}{a^2 - k^2}.$$

Exercice 41. Soit $a > 0$. En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = e^{at}$ pour $t \in [-\pi, \pi[$, montrer qu'on a

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{k^2 + a^2} = \frac{\pi}{a} \coth(\pi a).$$

Exercice 42. Soit $\alpha \in]0, 1[$. En considérant la fonction 2π-périodique f telle que $f(t) = \cos(\alpha t)$ pour $t \in [-\pi, \pi]$, montrer qu'on a

$$\frac{\pi}{\sin(\pi\alpha)} = \frac{1}{\alpha} - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2 - \alpha^2}.$$

Exercice 43. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$|\sin(x)| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2nx)}{4n^2 - 1} = \frac{8}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2(nx)}{4n^2 - 1}.$$

Exercice 44. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a
$$|\cos(x)| = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos(2nx)}{4n^2 - 1}\cdot$$

Exercice 45. Montrer que
$$\forall t \in]-\pi, \pi[: \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\sin(kt)}{k} = \frac{t}{2};$$
et en déduire que
$$\forall x \in]0, 2\pi[: \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2}\cdot$$

Exercice 46. En considérant $f(t) := \max(0, \sin(t))$, calculer les sommes
$$S_1 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{4k^2 - 1}\ , \quad S_2 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \quad \text{et} \quad S_3 := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2 - 1)^2}\cdot$$

Exercice 47. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, on a
$$x - E(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2\pi kx)}{k}\cdot$$

Exercice 48. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := \dfrac{1}{1 + \cos^2 t}\cdot$

(1) Montrer qu'on a $c_{2n+1}(f) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $c_{2n} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\cos(2nt)}{1+\cos^2 t}\, dt =: \frac{1}{\pi} I_n$.
(2) Calculer I_0 et établir la relation de récurrence $I_{n+1} + I_{n-1} = -6 I_n$.
(3) Conclure que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$f(t) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (\sqrt{2} - 1)^{2n} \cos(2nt).$$

Exercice 49. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction 2π-périodique et *lipschitzienne*. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty$.

(1) Soit M la constante de Lipschitz de f. En appliquant la formule de Parseval à la fonction $t \mapsto f(t + \alpha) - f(t - \alpha)$, montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a
$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\sin(k\alpha)|^2 |c_k(f)|^2 \leq M^2 \alpha^2.$$

(2) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer à l'aide de (1) qu'on a

$$\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |c_k(f)|^2 \leq \frac{M^2\pi^2}{2^{2p+1}},$$

et en déduire

$$\sum_{2^{p-1} \leq |k| < 2^p} |c_k(f)| \leq \frac{M\pi}{2^{p/2}}.$$

(3) Conclure.

Exercice 50. Montrer que si $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ vérifie $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R} \ : \ f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) e^{ikt}.$$

Exercice 51. On note W l'ensemble des fonctions continues 2π-périodiques $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telles que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)| < \infty$. Pour $f \in W$, on pose

$$\|f\|_W := \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(f)|.$$

(1) Montrer que W est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_{2\pi}$, et que $\| \cdot \|_W$ est une norme sur W. Montrer également que $\|f\|_W \geq \|f\|_\infty$ pour toute $f \in W$.
(2) Montrer que $(W, \| \cdot \|_W)$ est complet.
(3) Montrer que si $f, g \in W$, alors $fg \in W$.

Exercice 52. Montrer que si $f \in L^1_{2\pi}$ et $g \in W$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ f * g(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f) c_k(g) e^{ikx},$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 53. Montrer que si $f, g \in L^1_{2\pi}$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} S_n f(x)\, g(x)\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, S_n g(t)\, dt;$$

et en déduire que si $f \in L^1_{2\pi}$, alors

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^1_{2\pi} \ : \ \int_{-\pi}^{\pi} S_n f(x)\, \varphi(x)\, dx \xrightarrow{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \varphi(t)\, dt.$$

(On exprime cela en disant que “$S_n f$ tend vers f au sens des distributions”.)

Exercice 54. Dans cet exercice, $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction continue 2π-périodique telle que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k(\varphi)| < \infty$.

(1) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus i\mathbb{Z}$. Montrer que l'équation différentielle $x'(t) + ax(t) = \varphi(t)$ possède une unique solution 2π-périodique.
(2) Soit $a \in \mathbb{C} \setminus \{k^2;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Montrer que l'équation différentielle $x''(t) + ax(t) = \varphi(t)$ possède une unique solution 2π-périodique.
(3) Généraliser (1) et (2) au cas d'une équation différentielle linéaire de la forme $x^{(d)}(t) + a_{d-1}x^{(d-1)}(t) + \cdots + a_0 x(t) = \varphi(t)$.

Exercice 55. Soit $\omega \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + \omega^2 x(t) = \sin(2t) + \cos(5t)$.

Exercice 56. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$, à valeurs réelles, alors il existe une suite de nombres réels $(a_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$\forall x \in [0, \pi] \ : \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos(nx),$$

où la série converge normalement sur $\mathbb{R}$. Déterminer une telle suite (a_n) pour la fonction $f(x) := \sin(x)$.

Exercice 57. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose qu'on a $|f(t)| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $|f'(t)| = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ quand $|t|$ tend vers l'infini.

(1) Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose

$$f_{\mathrm{per}}(t) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t + 2\pi n).$$

   (a) Justifier la définition, et montrer que $f_{\mathrm{per}} \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.
   (b) Exprimer les coefficients de Fourier de f_{per} à l'aide de la transformée de Fourier de f.

(2) Montrer qu'on peut écrire

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(2\pi n).$$

Cette formule s'appelle la **formule sommatoire de Poisson**.

Exercice 58. Pour $s > 0$, on pose

$$\theta(s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi s n^2}.$$

Justifier la définition, puis montrer en utilisant la formule sommatoire de Poisson que la fonction θ vérifie l'équation fonctionnelle $\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}\,\theta\left(\frac{1}{s}\right)$.

Exercice 59. Dans cet exercice, on *admettra* que pour tout $\xi \in \mathbb{R}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} e^{-i\xi t} dt = \sqrt{2\pi}\, e^{-\xi^2/2}.$$

(1) Pour $\alpha > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} e^{i\lambda x} dx$.

(2) Soit $\alpha > 0$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha(x-2n\pi)^2}.$$

  (a) Justifier la définition, puis montrer que $\varphi \in \mathcal{C}^1_{2\pi}$.

  (b) Calculer les coefficients de Fourier de φ.

(3) Pour $t > 0$, on définit $G_t : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$G_t(x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

Justifier la définition et montrer que $G_t \in \mathcal{C}_{2\pi}$; puis montrer à l'aide de (2) qu'on a également

$$G_t(x) = \sqrt{\frac{\pi}{t}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-2n\pi)^2}{4t}}.$$

Exercice 60. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ continue 2π-périodique. On définit $u :]0;\infty[\times\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ par

$$u(t,x) := \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(f) e^{-n^2 t} e^{inx}.$$

(1) Justifier la définition, et montrer que pour tout $t > 0$, la fonction $x \mapsto u(t,x)$ appartient à $\mathcal{C}_{2\pi}$.

(2) Montrer que u est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[\times\mathbb{R}$ et vérifie l'**équation de la chaleur**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

(3) Avec les notations de l'Exercice 59, montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$u(t,x) = G_t * f(x).$$

(4) Montrer que $u(t,x) \to f(x)$ uniformément sur $\mathbb{R}$ quand $t \to 0^+$.

Exercice 61. (inégalité de Bernstein)
Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *si P est un polynôme trigonométrique de degré N, alors*

$$\|P'\|_\infty \leq N\,\|P\|_\infty.$$

(1) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction impaire 2π-périodique telle que $f(t) = t$ pour $t \in [0, \pi/2]$ et $f(t) = \pi - t$ pour $x \in [\pi/2, \pi]$. Calculer les coefficients de Fourier de f.

(2) Soit $a > 0$. Déduire de (1) que pour tout $x \in [-a, a]$, on peut écrire

$$x = \frac{4}{\pi^2}\, ia \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2} \exp\left(\frac{i\pi}{2a}(2n-1)x\right).$$

(3) Montrer à l'aide de (2) que si $P(t) = \sum_{j=-N}^{N} \lambda_j e^{ijt}$ est un polynôme trigonométrique de degré N, alors

$$P'(t) = -\frac{4N}{\pi^2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n-1)^2}\, P\left(t + \frac{2n-1}{2N}\pi\right).$$

(4) Conclure.

Exercice 62. Le but de l'exercice est de donner un exemple de fonction $f \in \mathcal{C}_{2\pi}$ dont la série de Fourier diverge en 0, autrement dit telle que la suite $(S_n f(0))$ diverge.

(1) Pour $u, v > 0$, on pose

$$K(u, v) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin(u\theta)\, \sin(v\theta)}{\sin(\theta/2)}\, d\theta.$$

Montrer qu'il existe des constantes $a > 0$ et $b < \infty$ telles que

$$\begin{cases} |K(u, v)| \leq b\, \log(u) & \text{pour } 2 \leq u \leq v, \\ K(u, u) \geq a\, \log(u) & \text{pour tout } u \geq 2. \end{cases}$$

(2) On définit $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ par

$$f(t) := \sum_{k=1}^{\infty} (k!)^{-1/2} \sin\left[(2^{k!} + 1/2)|t|\right].$$

(a) Vérifier que f est continue et $f(\pi) = f(-\pi)$. On peut donc prolonger f en une fonction de $\mathcal{C}_{2\pi}$, encore notée f.
(b) Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $S_{2^{n!}} f(0)$ à l'aide de la fonction K.
(c) Montrer que la série de Fourier de f diverge en 0.