Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que si d est la distance discrète, alors toute suite convergente $(u_k) \subset E$ est constante à partir d'un certain rang. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2. Soit E un espace métrique et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite (u_k) converge.

Exercice 3. Soit E un espace métrique et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Montrer que si la suite (u_k) converge, alors $d(u_k, u_{k+1}) \to 0$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $a \in E$. Soit également $x_0 \in E$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + a$. Montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 5. Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E. On suppose que toute suite $(u_k) \subseteq E$ convergeant pour d converge également pour d'. Montrer que toute suite (u_k) convergeant pour d converge nécessairement *vers la même limite* pour d'.

Exercice 6. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_n := \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n).$$

Montrer que si la suite (u_k) converge, alors la suite (x_n) converge et a la même limite que (u_k). Comment s'appelle ce résultat ?

Exercice 7. On note $c_0(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les suites $u = (u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0. On munit $c_0(\mathbb{N})$ de la norme $\| \cdot \|_\infty$.

(1) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $c_0(\mathbb{N})$, et soit $u \in c_0(\mathbb{N})$. Montrer que si $u_k \to u$ pour la norme $\| \cdot \|_\infty$, alors $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $c_0(\mathbb{N})$, et soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On fait les hypothèses suivantes :

- $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;
- Il existe $g \in c_0(\mathbb{N})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i\ :\ |u_k(i)| \leqslant |g(i)|$.

Montrer que $u \in c_0(\mathbb{N})$ et que $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 8. On note $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ tendant vers 0 en $\pm\infty$.

(1) Montrer que $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

(2) Soit (f_n) une suite d'éléments de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$. On suppose que $f_n(t) \to f(t)$ uniformément sur tout segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, et qu'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}\, \forall t \in \mathbb{R}\ :\ |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$. Montrer que $f \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ et que $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Exercice 9. On note $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les suites $(u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u(i)$ est absolument convergente. On munit $\ell^1(\mathbb{N})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|u\|_1 := \sum_{i=0}^{\infty} |u(i)|.$$

(1) Justifier que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme.

(2) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$, et soit $u \in \ell^1(\mathbb{N})$. Montrer que si $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, alors $\sum_{i=0}^\infty u_k(i) \to \sum_{i=0}^\infty u(i)$ quand $k \to \infty$.

(3) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$, et soit $u \in \ell^1(\mathbb{N})$. On suppose que $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Peut-on affirmer que $\sum_{i=0}^\infty u_k(i) \to \sum_{i=0}^\infty u(i)$?

(4) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$, et soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On fait les hypothèses suivantes :

- $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;
- Il existe $g \in \ell^1(\mathbb{N})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i\ :\ |u_k(i)| \leqslant |g(i)|$.

Montrer que $u \in \ell^1(\mathbb{N})$ et que $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. En particulier (par (1)), $\sum_{i=0}^\infty u_k(i) \to \sum_{i=0}^\infty u(i)$ quand $k \to \infty$.

Exercice 10. Soit I un ensemble infini, et soit (t_k) une suite d'éléments de I deux à deux distincts.

(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(t) := 0$ si $t \neq t_k$ et $f_k(t_k) := 1$. Montrer que si (λ_k) est une suite quelconque de nombres réels, alors $\lambda_k f_k(t) \to 0$ pour tout $t \in I$.

(2) Montrer qu'*il n'existe pas* de norme $\|\cdot\|$ sur $\ell^\infty(I)$ possédant la propriété suivante : une suite $(u_k) \subseteq \ell^\infty(I)$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si $u_k(t) \to 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 11. Soit E l'ensemble de toutes les suites $u = (u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $|u(i)| \leqslant 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; autrement dit, E est la boule unité fermée de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Pour $u, v \in E$, on pose

$$d(u,v) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\,|v(i) - u(i)|.$$

(1) Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur E.

(2) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E, et soit $u \in E$. Montrer que $u_k \to u$ pour la distance d si et seulement si $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel de dimension infinie, et soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. Soient également $a, b \in E$ avec $a \neq b$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une autre norme $\|\cdot\|'$ sur E et une suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ telles que $x_n \to a$ pour $\|\cdot\|$ et $x_n \to b$ pour $\|\cdot\|'$.

(1) Justifier qu'il existe une suite $(e_n) \subseteq E$ telle que les e_n sont linéairement indépendants, $b - a \notin \mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$ et $\|e_n\| \to 0$.

(2) On pose $X := \mathrm{vect}(e_n, n \in \mathbb{N})$, et on choisit un sous-espace vectoriel Y de E tel que $E = X \oplus Y$ et $b - a \in Y$ (on admet qu'un tel sous-espace existe). Soit $L : E \to E$ l'unique application linéaire telle que $L(e_n) = b - a + e_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $L(y) = y$ pour tout $y \in Y$. Montrer que L est injective.

(3) Pour $u \in E$, on pose $\|u\|' = \|L(u)\|$. Montrer que $\|\cdot\|'$ est une norme sur E.

(4) Conclure en posant $x_n := a + e_n$.

Exercice 13. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que si d est la distance discrète, alors toute application de E dans un espace métrique quelconque est continue. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 14. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la fonction $u \mapsto \|u\|$ est continue sur E.

Exercice 15. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que la fonction d est continue sur $E \times E$.

Exercice 16. Montrer que les fonctions $(x, y) \mapsto \max(x, y)$ et $(x, y) \mapsto \min(x, y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto \max(x_1, \ldots, x_N)$ et $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto \min(x_1, \ldots, x_N)$ sont continues sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 17. Soit $[a, b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}([a, b])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'application $(f, g) \mapsto fg$ est continue de $\mathcal{C}([a, b]) \times \mathcal{C}([a, b])$ dans $\mathcal{C}([a, b])$. (On pourra commencer par vérifier que si $f, g \in \mathcal{C}([a, b])$, alors $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.)

Exercice 18. Montrer que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_N(\mathbb{K})$.

Exercice 19. Soient E et F deux evn, et soit $L : E \to F$ une application continue et *additive*, c'est-à-dire vérifiant $L(u+v) = L(u) + L(v)$ pour tous $u, v \in E$.

(1) Montrer qu'on a $L(nu) = nL(u)$ pour tout $u \in E$ et pour tout $n \in \mathbb{Z}$, puis que $L(ru) = rL(u)$ pour tout u et pour tout $r \in \mathbb{Q}$.
(2) Montrer que L est linéaire.

Exercice 20. Soient E et F deux espace vectoriel normés sur $\mathbb{R}$, et soit $T : E \to F$. On suppose que $T(0) = 0$, et que T *conserve les milieux*, *i.e.*

$$\forall x, y \in E \;:\; T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{T(x) + T(y)}{2}.$$

(1) Montrer que T est *additive* : $\forall u, v \in E \;:\; T(u+v) = T(u) + T(v)$.
(2) On suppose de plus que T est continue. Montrer que T est linéaire.

Exercice 21. Soit E un evn réel dont la norme provient d'un produit scalaire. En utilisant l'Exercice 20, montrer que si $\Phi : E \to E$ est une isométrie telle que $\Phi(0) = 0$, alors Φ est linéaire. (On pourra commencer par montrer que si $u, v \in E$, alors le milieu de $[u, v]$ est l'unique point $m \in E$ vérifiant $\|m - u\| = \frac{1}{2}\|v - u\| = \|v - m\|$.)

Exercice 22. (Théorème de Mazur-Ulam)
Soient E et F deux espace vectoriel normé, et soit $J : E \to F$. On suppose que J est une isométrie bijective, et que $J(0) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que J est linéaire.

(1) Soient $u, v \in E$. On définit une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E et une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ de la façon suivante :

$$K_0 := \left\{x \in E;\ \|x - u\| = \frac{1}{2}\|v - u\| = \|v - x\|\right\} \quad \text{et} \quad d_0 := \operatorname{diam}(K_0);$$

$$K_{n+1} := \left\{x \in K_n;\ K_n \subseteq \overline{B}(x, d_n/2)\right\} \quad \text{et} \quad d_{n+1} := \operatorname{diam}(K_{n+1}).$$

Enfin, on note m le milieu de $[u, v]$.
   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \;:\; m \in K_n$ et K_n est symétrique par rapport à m.
   (b) Montrer que $d_{n+1} \leqslant d_n/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) Conclure que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{m\}$.
(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant l'Exercice 20.

Exercice 23. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé réel. On suppose que la norme $\|\cdot\|$ vérifie l'identité du parallèlogramme. Le but de l'exercice est de montrer que $\|\cdot\|$ provient d'un produit scalaire.

(1) Pour $x, y \in E$, on pose
$$B(x,y) := \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right).$$
Vérifier qu'on a $B(x,y) = B(y,x)$, et $B(x,x) = \|x\|^2$.

(2) Soit $y \in E$ fixé. Pour $x \in E$, on pose $\Phi(x) := B(x,y)$.

(a) Montrer que pour tous $a, b \in E$, on a
$$\Phi(a+b) + \Phi(a-b) = 2\Phi(a).$$

(b) Calculer $\Phi(0)$, puis déduire de (a) que pour tous $a, b \in E$, on a
$$\Phi(a+b) + \Phi(a-b) = \Phi(2a).$$

(c) Montrer que pour tous $u, v \in E$, on a
$$\Phi(u+v) = \Phi(u) + \Phi(v).$$

(3) Montrer que l'application B est bilinéaire, et conclure.

Exercice 24. Montrer que la composée de deux applications lipschitziennes est une application lipschitzienne.

Exercice 25. Soit (E,d) un espace métrique. On note $\mathrm{Lip}(E)$ l'ensemble de toutes les fonctions lipschitziennes sur E, à valeurs réelles. Montrer que $\mathrm{Lip}(E)$ est un espace vectoriel. Montrer également que si $f, g : E \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions lipschitziennes et *bornés*, alors fg est lipschitzienne.

Exercice 26. On garde les notations de l'Exercice 25. Pour toute fonction $f \in \mathrm{Lip}(E)$, on note $Lip(f)$ la constante de Lipschitz de f.

(1) Montrer que $\forall f, g \in \mathrm{Lip}(E)\ :\ Lip(f+g) \leqslant Lip(f) + Lip(g)$.

(2) L'application $f \mapsto Lip(f)$ est-elle une norme sur $\mathrm{Lip}(E)$?

(3) Soit $a \in E$. Montrer qu'on définit une norme $\|\cdot\|_a$ sur $\mathrm{Lip}(E)$ en posant $\|f\|_a := |f(a)| + Lip(f)$.

(4) Montrer que si $a, b \in E$, alors les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes .

Exercice 27. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application 1-lipschitzienne. Montrer que l'application $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $J(x) := (x, f(x))$ est une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 28. Soit (E,d) un espace métrique, et soit $k \in \mathbb{R}^+$. Soit également $(f_i)_{i\in I}$ une famille de fonctions, $f_i : E \to \mathbb{R}$. On suppose que chaque f_i est k-lipschitzienne, et que pour tout $x \in I$, l'ensemble $\{f_i(x);\ i \in I\}$ est majoré. Montrer que la fonction $f : E \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \sup\{f_i(x);\ i \in I\}$ est k-lipschitzienne.

Exercice 29. Soit (E,d) un espace métrique, et soit $M \subseteq E$, $M \neq \varnothing$. Soit également $k \in \mathbb{R}^+$, et soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction k-lipschitzienne $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{f}_{|M} = f$.

(1) Soit $z_0 \in M$. Montrer que si $x \in E$, alors $\forall z \in M \;\; : \;\; f(z) + k\,d(x,z) \geqslant f(z_0) - k\,d(x,z_0)$.

(2) Soit $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$\forall x \in E \; : \; \widetilde{f}(x) := \inf\big\{f(z) + k\,d(x,z);\; z \in M\big\}.$$

  (a) Justifier la définition, puis montrer que $\widetilde{f}_{|M} = f$.

  (b) Montrer que $\widetilde{f}$ est k-lipschitzienne.

Exercice 30. Soit (E,d) un espace métrique, et soit $f : E \to E$. On suppose que f est k-lipschitzienne pour un certain $k < 1$.

(1) On dit qu'un point $a \in E$ est un **point fixe** de f si $f(a) = a$. Montrer que f admet au plus 1 point fixe.

(2) Dans cette question, on suppose que f admet un point fixe a. Soit $x_0 \in E$ quelconque, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) converge vers a et qu'on a $d(x_n, a) \leqslant k^n d(x_0, a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Soit $x_0 \in E$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'on a $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n d(x_0, x_1)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que si $p, q \in \mathbb{N}$ et $p < q$, alors

$$d(x_p, x_q) \leqslant d(x_0, x_1) \sum_{n=p}^{q-1} k^n \leqslant \frac{k^p}{1-k}\, d(x_0, x_1).$$

(4) Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{R}$. Montrer que f admet un et un seul point fixe, et que pour tout $x_0 \in E$, la suite (x_n) définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ce point fixe.

Exercice 31. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la suite définie par $x_0 := 3$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = \frac{1}{4}\arctan(x_n) + \frac{5}{8}\sin(x_n) + 41$. En utilisant l'Exercice 30, montrer que la suite (x_n) est convergente.

Exercice 32. Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue de $\mathbb{T}$ sur $[0, 2\pi[$. En particulier, $\mathbb{T}$ et $[0, 2\pi[$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 33. Montrer que les intervalles suivants sont homéomorphes : (i) $[0,1]$ et $[a,b]$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; (ii) $]0,1[$ et $]1,\infty[$; (iii) $]0,1]$ et $[1,\infty[$; (iv) $]-1,1[$, $\mathbb{R}$ et $]0,\infty[$.

Exercice 34. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si B_1 et B_2 sont deux boules fermées de E de rayons > 0, alors B_1 et B_2 sont homéomorphes.

Exercice 35. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $\Phi : E \to B(0,1)$ définie comme suit : $\Phi(0) := 0$ et $\Phi(u) := \frac{2}{\pi}\arctan(\|u\|)\frac{u}{\|u\|}\cdot$ Justifier que Φ envoie bien E dans $B(0,1)$, puis montrer que Φ est un homéomorphisme. (Ainsi, tout espace vectoriel normé est homéomorphe à sa boule unité ouverte.)

Exercice 36. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E. Soit $\Phi : E \to E$ l'application définie comme suit : $\Phi(0) := 0$, et $\Phi(u) := \frac{\|u\|'}{\|u\|}u$ pour $u \neq 0$. Montrer que Φ est un homéomorphisme. En déduire que $B := \overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ et $B' := \overline{B}_{\|\cdot\|'}(0,1)$ sont homéomorphes.