Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit E un ensemble quelconque, et soit $\phi : E \to \mathbb{R}$. À quelle condition sur ϕ définit-on une distance sur E en posant $d(u,v) := |\phi(v) - \phi(u)|$?

Exercice 2. Soit E l'ensemble des stations du métro de New York. Montrer qu'on définit une distance sur E en notant $d(u,v)$ la longueur du plus court trajet en métro pour aller de u à v (longueur mesurée en "nombre d'arrêts").

Exercice 3. Soit $\mathbf{C} := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'ensemble de toutes les suites de 0 et de 1. Montrer qu'on définit une distance sur $\mathbf{C}$ en posant $d(u,u) := 0$ et, pour $u = (u_i)_{i\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_i)_{i\in\mathbb{N}}$ différents, $d(u,v) := 2^{-i(u,v)}$, où $i(u,v)$ est le plus petit indice i tel que $u_i \neq v_i$.

Exercice 4. Soit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$ le "cercle unité" de $\mathbb{C}$. Montrer qu'on définit une distance sur $\mathbb{T}$ en notant $d(u,v)$ la longueur du plus petit arc de cercle joignant u à v (mesurée en radians).

Exercice 5. Soit $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Pour $u, v \in \mathbb{D}$, on pose

$$d(u,v) := \left| \frac{u - v}{1 - \overline{v}u} \right|.$$

Le but de l'exercice est de montrer que d est une distance sur $\mathbb{D}$ (qu'on appelle la **distance pseudo-hyperbolique**).

(1) Vérifier les propriétés "immédiates" dans la définition d'une distance.

(2) Montrer que si $u, v \in \mathbb{D}$, alors

$$1 - d(u,v)^2 = \frac{(1 - |v|^2)(1 - |u|^2)}{|1 - \overline{v}u|^2}.$$

(3) Déduire de (2) que si $u, v \in \mathbb{D}$, alors

$$d(u,v) \leqslant \frac{|u| + |v|}{1 + |u||v|} \leqslant |u| + |v|.$$

(4) Pour $w \in \mathbb{D}$, on définit $\phi_w : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ par

$$\phi_w(z) := \frac{z-w}{1-\overline{w}z}\cdot$$

Montrer à l'aide de (1) que ϕ_w envoie $\mathbb{D}$ dans $\mathbb{D}$; puis montrer que ϕ_w est une isométrie pour la distance d : pour tous $u, v \in \mathbb{D}$,

$$d(u,v) = d\big(\phi_w(u), \phi_w(v)\big).$$

(5) Observer que si $z, w \in \mathbb{D}$, alors $d(z,w) = |\phi_w(z)|$; puis déduire de (3) et (4) que d vérifie l'inégalité triangulaire.

Exercice 6. Soit E un ensemble quelconque, et soit d une distance sur E. Soit également $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

(i) $\Phi(0) = 0$ et $\Phi(t) > 0$ pour tout $t > 0$;

(ii) Φ est croissante sur $\mathbb{R}^+$;

(iii) $\Phi(s+t) \leqslant \Phi(s) + \Phi(t)$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}^+$

Montrer qu'on définit une distance δ sur E en posant $\delta(u,v) := \Phi\big(d(u,v)\big)$.

Exercice 7. Soit E un ensemble quelconque, et soit d une distance sur E. Soit également α tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer qu'on définit une distance δ sur E en posant $\delta(u,v) := d(u,v)^\alpha$.

Exercice 8. Soit E un ensemble quelconque, et soit d une distance sur E. Montrer qu'on définit une distance δ sur E en posant $\delta(u,v) := \min\big(1, d(u,v)\big)$.

Exercice 9. Soit d une distance sur un espace vectoriel E. Montrer que d est associée à une norme si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $d(u+h, v+h) = d(u,v)$ pour tous $u, v, h \in E$ (*invariance par translations*) ;
- $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda|\, d(u,v)$ pour tous $u, v \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$ (*homogénéité*).

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel, $E \neq \{0\}$. Montrer que la distance discrète sur E n'est pas associée à une norme.

Exercice 11. Soit E un espace vectoriel normé réel dont la norme provient d'un produit scalaire. Montrer que pour tous $u, v \in E$ on a l'**identité du parallèlogramme**

$$\|u+v\|^2 + \|u-v\|^2 = 2(\|u\|^2 + \|v\|^2).$$

Exercice 12. Soit E un espace vectoriel normé réel dont la norme provient d'un produit scalaire. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tous $x_1, \dots x_n \in E$, on a

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.$$

Exercice 13. Soit E un espace vectoriel normé réel dont la norme provient d'un produit scalaire. Montrer que si $u, v \in E$ vérifient $\|u\| = 1 = \|v\|$ et $u \neq v$, alors $\left\| \frac{u+v}{2} \right\| < 1$.

Exercice 14. En utilisant l'Exercice 13, montrer que les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ ne proviennent pas de produits scalaires. Montrer de même que la norme $\| \cdot \|_\infty$ sur $\mathcal{C}([0,1])$ ne provient pas d'un produit scalaire.

Exercice 15. Soit I un ensemble non vide, et soit F un espace vectoriel normé. Une application $u : I \to F$ est dite *bornée* s'il existe une constante M telle que $\forall t \in I \;:\; \|u(t)\| \leqslant M$. On note $\ell^\infty(I, F)$ l'ensemble de toutes les applications bornées $u : I \to F$. Montrer que $\ell^\infty(I, F)$ est un espace vectoriel, et qu'on définit une norme sur $\ell^\infty(I, F)$ en posant $\|u\|_\infty := \sup \{\|u(t)\|;\; t \in I\}$.

Exercice 16. Soit $\phi : [0,1] \to \mathbb{K}$ une fonction bornée. Pour toute fonction $f \in \mathcal{C}([0,1])$, on pose $\|f\|_\phi := \|\phi f\|_\infty$. Montrer que $\| \cdot \|_\phi$ est une norme sur $\mathcal{C}([0,1])$ si et seulement si l'ensemble $Z(\phi) := \{t \in [0,1];\; \phi(t) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non réduit à un point.

Exercice 17. Dessiner la boule $\overline{B}(0,1)$ dans $E := (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_\infty)$. Même question avec $E := (\mathbb{R}^2, \| \cdot \|_1)$.

Exercice 18. Pour $u = (x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $\|u\| := |x| + |y| + \max(|x|, |y|)$. Montrer que $\| \cdot \|$ est une norme sur $\mathbb{R}^2$, puis dessiner la boule $B := \overline{B}(0,1)$ pour la norme $\| \cdot \|$. (Commencer par dessiner $B \cap \{(x,y);\; x \geqslant 0, y \geqslant 0\}$.)

Exercice 19. Soit E un espace métrique, soient $u, v \in E$ et soit $r > 0$.

(1) On suppose que $B(u,r) = B(v,r)$. Peut-on en déduire que $u = v$?

(2) Même question que (1) en supposant de plus que E est un evn.

Exercice 20. Soit E un espace métrique, soient $u, v \in E$ et soient $r, s > 0$.

(1) Montrer que si $B(u,r) \cap B(v,s) \neq \varnothing$, alors $d(u,v) < r + s$.

(2) La réciproque de (1) est-elle vraie ?

(3) La réciproque de (1) est-elle vraie si on suppose que E est un evn ?

Exercice 21. Soit E un espace vectoriel. Montrer que si $(C_i)_{i\in I}$ est une famille de parties convexes de E, alors $C := \bigcap_{i\in I} C_i$ est convexe.

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Montrer que f est une fonction convexe si et seulement si l'ensemble $\mathrm{Epi}(f) := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y \geqslant f(x)\}$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 23. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et soit $N : E \to \mathbb{R}$. On suppose que N vérifie les propriétés suivantes :

(i) $N(0) = 0$, et $N(u) > 0$ pour tout $u \neq 0$;

(ii) $N(\lambda u) = |\lambda| N(u)$ pour tout $u \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$;

(iii) L'ensemble $B := \{x \in E;\ N(x) \leqslant 1\}$ est une partie convexe de E.

(1) Montrer que si $u \in E\backslash\{0\}$, alors $\frac{u}{N(u)} \in B$.

(2) Montrer que si $u, v \in E$ sont $\neq 0$, alors il existe $\lambda \in [0,1]$ tel que
$$\frac{u+v}{N(u)+N(v)} = (1-\lambda)\,\frac{u}{N(u)} + \lambda\,\frac{v}{N(v)}\cdot$$

(3) Montrer que N est une norme.

Exercice 24. Soit p un nombre réel $\geqslant 1$. En utilisant l'Exercice 23 et la convexité de la fonction $t \mapsto t^p$ sur $\mathbb{R}^+$, montrer qu'on définit une norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathbb{K}^N$ en posant, pour tout $u = (u_1, \ldots, u_N) \in \mathbb{K}^N$:
$$\|u\|_p := \left(\sum_{j=1}^{N} |u_j|^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 25. Soit $[a,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit p un nombre réel $\geqslant 1$. En utilisant l'Exercice 23, montrer qu'on définit une norme $\|\cdot\|_p$ sur $\mathcal{C}([a,b])$ en posant, pour toute $f \in \mathcal{C}([a,b])$:
$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(t)|^p dt\right)^{1/p}.$$

Exercice 26. Soit $E := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$. Déterminer $\mathrm{dist}(u, A)$ pour $u := (2,4)$ et $A := \{(x,y) \in E;\ x^2 + y^2 \leqslant 1\}$. (Commencer par dessiner quelques boules de centre u.)

Exercice 27. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $A \subseteq E$. Montrer que
$$A \text{ est borné} \iff \mathrm{diam}(A) < \infty \iff A \text{ est contenu dans une boule.}$$

Exercice 28. Montrer que pour tout ensemble borné (non-vide) $A \subseteq \mathbb{R}$, on a $\operatorname{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$.

Exercice 29. Soit E un espace métrique, soit $a \in E$ et soit $r > 0$. Montrer que $\operatorname{diam}(B(a,r)) \leqslant 2r$, qu'on n'a pas nécessairement égalité, et qu'on a égalité si E est un espace vectoriel normé.

Exercice 30. Soit $E := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, et soit $f : \mathbb{R} \to E$ définie par $f(x) := (x, \sin(x))$. Montrer que f est une isométrie.

Exercice 31. Soient E et F deux espaces vectoriels normés, et soit $T : E \to F$ une application linéaire. Montrer que T est une isométrie si et seulement si $\|T(u)\| = \|u\|$ pour tout $u \in E$.

Exercice 32. Montrer que $E := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ et $F := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ sont isométriques. (Considérer l'application $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $T(x,y) := (x+y, x-y)$.)

Exercice 33. Soit (M,d) un espace métrique quelconque. Le but de l'exercice est de montrer que M est isométrique à une partie d'un espace vectoriel normé.

(1) Soit $a \in M$. Pour $u \in M$, on note $\varphi_u : M \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\varphi_u(x) := d(u,x) - d(x,a)$. Montrer que la fonction φ_u est bornée.

(2) On garde les notations de (1). Montrer que si $u, v \in M$, alors $\|\varphi_v - \varphi_u\|_\infty = d(u,v)$.

(3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 34. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}^N \ : \ \|u\|_2 \leqslant \|u\|_1 \leqslant \sqrt{N}\,\|u\|_2$, et que la constante $\sqrt{N}$ ne peut pas être améliorée.

Exercice 35. Soit E un espace vectoriel, et soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E. Montrer que si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ ne sont pas équivalentes, alors ou bien il existe une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $\|u_k\| \to 0$ et $\|u_k\|' \to \infty$, ou bien il existe une suite $(u_k) \subseteq E$ telle que $\|u_k\| \to \infty$ et $\|u_k\|' \to 0$.

Exercice 36. Soit $[a,b]$ un segment (non trivial) de $\mathbb{R}$. Pour $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on pose $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)|\,dt$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ est une norme sur $\mathcal{C}([a,b])$, et qu'elle n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|_\infty$. (Pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra considérer la fonction $f_n \in \mathcal{C}([a,b])$ définie par $f_n(t) := \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n$.)

Exercice 37. Soit $\mathbb{K}[X]$ l'espace vectoriel constitué par tous les polynômes à coefficients dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si $P \in \mathbb{K}[X]$, on écrit $P = \sum_{i\in\mathbb{N}} c_i(P)X^i$, où tous les $c_i(P)$ sauf un nombre fini valent 0.

(1) Montrer qu'on définit deux normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ sur $\mathbb{K}[X]$ en posant
$$\|P\|_1 := \sum_{i\in\mathbb{N}} |c_i(P)| \qquad \text{et} \qquad \|P\|_\infty := \max_{i\in\mathbb{N}} |c_i(P)|.$$

(2) Montrer que les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas équivalentes. (Pour $n \in \mathbb{N}$, on pourra considérer le polynôme $P_n := \sum_{i=0}^n X^i$.)

Exercice 38. On admet que tout espace vectoriel (sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) possède une base. En s'inspirant de l'Exercice 37, montrer que sur tout espace vectoriel E de dimension infinie, on peut définir deux normes qui ne sont pas équivalentes

Exercice 39. Soit $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de degré $\leqslant 348974$. On suppose que $\int_{-1/10}^{1/10} |P_k(t)|\, dt \to 0$ quand $k \to \infty$. Montrer que $\int_{-3000}^{3000} |P_k(t)|\, dt \to 0$.

Exercice 40. Soit E un espace vectoriel. Montrer que deux normes sur E sont équivalentes si et seulement si les distances associées sont Lipschitz-équivalentes.