Calculus 2

Licence de Mathématiques, 1ère année

Table des matières

Chapitre 1

Fonctions réciproques, fonctions usuelles

1. Généralités sur les fonctions réciproques

1.1. Bijection, bijection réciproque.

Rappel. Soient A et B deux ensembles (non vides), et soit f une application de A dans B.

(1) On dit que f est une **bijection de** A **sur** B si : pour tout $y \in B$, il existe un et un seul $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Avec des symboles mathématiques :

$$\forall y \in B\, \exists! x \in B \ : \ f(x) = y.$$

(2) Si f est une bijection de A sur B, on note $f^{-1} : B \to A$ l'application qui à $y \in B$ associe l'unique $x \in A$ tel que $f(x) = y$. On a donc

$$\forall y \in B \ : \ f(f^{-1}(y)) = y \qquad \text{et} \qquad \forall x \in A \ : \ f^{-1}(f(x)) = x.$$

On dit que f^{-1} est la **réciproque** de la fonction f.

Attention. On ne peut écrire $x = f^{-1}(y)$ que si on sait déjà que f est une bijection.

Remarque importante. Supposons que $f : A \to B$ soit une application **injective**, *i.e.* deux éléments de A distincts n'ont jamais la même image par f. En symboles :

$$\forall x, x' \in A \ : \Big[\big(f(x) = f(x')\big) \implies (x = x') \Big];$$

ou bien, si on préfère :

$$\forall x, x' \in A \ : \Big[(x \neq x') \implies \big(f(x) \neq f(x')\big) \Big].$$

Alors, en posant $B' := f(A) = \{f(x); x \in A\} = \{y \in B;\ \exists x \in A \ : \ f(x) = y\}$ et *en considérant f comme une application de A dans $B' = f(A)$*, on voit que f est une bijection de A sur $f(A)$.

1.2. Fonctions définies sur un intervalle de $\mathbb{R}$. Le résultat suivant s'appelle parfois le “Théorème de la bijection”.

Proposition 1.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, d'extrémités a et b avec $a < b$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction* continue *et* strictement monotone, *alors $J := f(I)$ est un intervalle d'extrémités $\alpha := \lim_{x \to a^+} f(x)$ et $\beta := \lim_{x \to b^-} f(x)$ et de même nature que I (ouvert, semi-ouvert ou fermé borné), et f est une bijection de I sur J.*

Démonstration. On suppose par exemple que f est strictement croissante (et continue).

(i) Montrons d'abord que f est une bijection de I sur J, autrement dit que f est injective. Soient $x, x' \in I$ avec $x \neq x'$. On a alors par exemple $x < x'$, donc $f(x) < f(x')$

puisque f est strictement croissante, et donc $f(x) \neq f(x')$. Par conséquent, f est injective. Dans ce raisonnement, on n'avait pas besoin de la continuité de f.

(ii) Montrons maintenant que J est un intervalle d'extrémités α et β. Comme f est croissante, α existe dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, β existe dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, et on a $f(I) \subseteq [\alpha, \beta]$. De plus, $f(I)$ contient l'intervalle ouvert $]\alpha, \beta[$. En effet, si $y \in]\alpha, \beta[$ alors, par définition de α et β, on peut trouver $x_1, x_2 \in I$ tels que $f(x_1) < y < f(x_2)$. Alors $x_1 < x_2$ car f est croissante. D'après le *Théorème des valeurs intermédiaires*, on peut trouver $x \in]x_1, x_2[$ (donc $x \in I$) tel que $f(x) = y$; et donc $y \in f(I)$. On voit ainsi qu'on a $]\alpha, \beta[\subseteq f(I) \subseteq [\alpha, \beta]$. Donc $f(I)$ est égal à $]\alpha, \beta[$, $[\alpha, \beta[$, $]\alpha, \beta]$ ou $[\alpha, \beta]$, et en tous cas $f(I)$ est un intervalle d'extrémités α et β.

(iii) En utilisant la croissance stricte de f, on vérifie (exo) que $f(I)$ contient α si et seulement si I contient a, et que $f(I)$ contient β si et seulement si I contient b. Donc $f(I)$ est de même nature que I. $\square$

Exemple. La fonction $t \mapsto t^2$ est une bijection de $[0, \infty[$ sur $[0, \infty[$. Sa réciproque est par définition la fonction "racine carrée", notée $x \mapsto \sqrt{x}$.

Démonstration. Posons $f(t) := t^2$ pour $t \in [0, \infty[$. On sait que f est continue et strictement croissante sur $[0, \infty[$, avec $f(0) = 0$ et $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$. Donc $f\big([0, \infty[\big) = [0, \infty[$ et f est une bijection de $[0, \infty[$ sur $[0, \infty[$. $\square$

Remarque 1. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable sur I, alors les choses suivantes sont équivalentes :

(i) f est strictement croissante sur I.

(ii) $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$, et l'ensemble $Z(f') := \{x \in I;\ f'(x) = 0\}$ ne contient aucun intervalle non trivial.

En particulier, si $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ et si f' n'a qu'un nombre fini de "zéros", alors f est strictement croissante.

Démonstration. Supposons (i) vérifiée. Alors f est croissante et donc $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$. De plus, f ne peut pas être constante sur un intervalle non trivial, et donc $Z(f')$ ne contient aucun intervalle non trivial. Ainsi, (ii) est vérifiée.

Inversement, supposons (ii) vérifiée. Alors f est croissante puisque $f' \geqslant 0$. Si f n'était pas *strictement* croissante, on pourrait trouver $u, v \in I$ avec $u < v$ tels que $f(u) = f(v)$. Alors f serait constante sur l'intervalle $[u, v]$ car elle est croissante, donc on aurait $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [u, v]$, *i.e.* $[u, v] \subseteq Z(f')$, ce qui contredirait (ii). $\square$

Remarque 2. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to \mathbb{R}$ est *continue*, alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ strictement monotone.}$$

Démonstration. Ce résultat n'est absolument pas évident. D'après la Proposition 1.1, il suffit de montrer que si f est injective, alors f est strictement monotone. On va en fait raisonner par contraposée et supposer que f n'est pas strictement monotone : il s'agit alors de montrer que f n'est pas injective.

Comme f n'est pas strictement croissante, on peut trouver $x_0, x_0' \in I$ tels que $x_0 < x_0'$ et $f(x_0) \geqslant f(x_0')$; et comme f n'est pas strictement décroissante, on peut trouver $x_1, x_1' \in I$ tels que $x_1 < x_1'$ et $f(x_1) \leqslant f(x_1')$. Pour tout $t \in [0, 1]$, posons $x_t := (1-t)x_0 + tx_1$ et $x_t' := (1-t)x_0' + tx_1'$. Les notations sont cohérentes pour $t = 0$

et pour $t = 1$. De plus, comme $x_0 < x'_0$ et $x_1 < x'_1$, on a $x_t < x'_t$ pour tout $t \in [0,1]$ (exo). Soit alors $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(t) := f(x'_t) - f(x_t).$$

Comme les fonctions $t \mapsto x_t$ et $t \mapsto x'_t$ sont continues et que f est continue, la fonction φ est continue sur $[0,1]$. De plus, on a $\varphi(0) = f(x'_0) - f(x_0) \leqslant 0$ et $\varphi(1) = f(x'_1) - f(x_1) \geqslant 0$. D'après le Théorème des valeurs intermédiaires, on peut donc trouver $t \in [0,1]$ tel que $\varphi(t) = 0$, *i.e.* $f(x'_t) = f(x_t)$. Et comme $x_t \neq x'_t$, on a ainsi montré que f n'est pas injective. □

Exercice. (Théorème de Darboux)

(1) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' ne s'annule pas sur I, alors f' est de signe constant. (*Suggestion* : montrer que si f' n'est pas de signe constant, alors on peut trouver un intervalle fermé borné $[a,b] \subseteq I$ tel que la restriction de f à $[a,b]$ atteint son maximum ou son minimum en un point intérieur à $[a,b]$.)

(2) Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ est une fonction dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle.

1.3. Graphe d'une fonction réciproque.

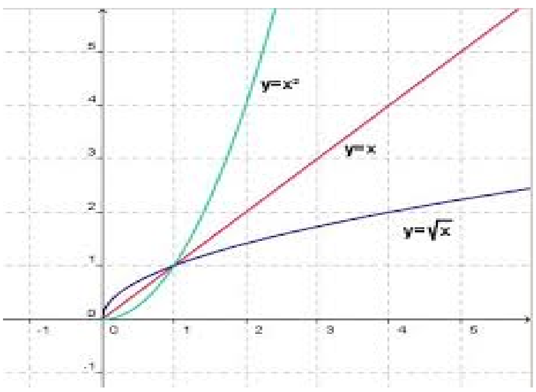
PROPOSITION 1.2. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to J$ est une bijection, alors le graphe de $f^{-1} : J \to I$ est symétrique du graphe de f par rapport à la droite d'équation $y = x$.*

Démonstration. En notant G_f et $G_{f^{-1}}$ les graphes de f et de f^{-1}, on a

$$\begin{aligned} G_{f^{-1}} &= \{(y,x) \in \mathbb{R}^2; y \in J\,,\ x \in I \text{ et } x = f^{-1}(y)\} \\ &= \{(y,x) \in \mathbb{R}^2;\ x \in I\ \ y \in J \text{ et } y = f(x)\} \\ &= \{(y,x) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y) \in G_f\}. \end{aligned}$$

Donc, on passe de G_f à $G_{f^{-1}}$ en échangeant les coordonnées, autrement dit en effectuant une symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$. □

Exemple. Graphes des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \sqrt{x}$.



2. Propriétés des fonctions réciproques

2.1. Sens de variation.

Proposition 2.1. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Si $f : I \to J$ est une bijection strictement monotone, alors $f^{-1} : J \to I$ est strictement monotone, de même sens de variation que f.*

Démonstration. Supposons que f soit croissante, et montrons que f^{-1} est strictement croissante. Soient $y, y' \in J$ avec $y < y'$. Si on avait $f^{-1}(y) \geqslant f^{-1}(y')$ alors, comme f est croissante, on en déduirait $y = f(f^{-1}(y)) \geqslant f(f^{-1}(y')) = y'$, ce qui est absurde. Donc $f^{-1}(y) < f^{-1}(y')$, ce qui prouve que f^{-1} est strictement croissante. On montre de même que si f est décroissante, alors f^{-1} est strictement décroissante. □

2.2. Continuité, dérivabilité.

Théorème 2.2. *Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to J$ une bijection continue strictement monotone.*

(1) *La fonction $g := f^{-1}$ est continue sur $J := f(I)$.*

(2) *Soit $x_0 \in J$, et supposons que f soit dérivable au point $t_0 := g(x_0)$.*

- *Si $f'(t_0) \neq 0$, alors $g = f^{-1}$ est dérivable en x_0 et*

$$g'(x_0) = \frac{1}{f'(t_0)} = \frac{1}{f'\big(g(x_0)\big)}.$$

- *Si $f'(t_0) = 0$, alors g* n'est pas *dérivable en x_0, et le graphe de g possède une tangente verticale au point (x_0, t_0).*

Démonstration. (1) Pour montrer que $g : J \to I$ est continue, on suppose par exemple que f est croissante, et donc que g est croissante également. On va montrer en détail que g est continue en tout point x_0 intérieur à J. (La preuve serait la même pour une extrémité de J.) Comme g est croissante, elle possède une limite à gauche et une limite à droite en x_0, notées $g(x_0^+)$ et $g(x_0^-)$, et on a $g(x_0^-) \leqslant g(x_0) \leqslant g(x_0^+)$. Supposons que g ne soit pas continue en x_0 ; par exemple, qu'on ait $g(x_0^-) < g(x_0)$. Soit t tel que $g(x_0^-) < t < g(x_0)$. Le point t appartient à I : en effet, si on choisit $x < x_0$, alors $g(x) \leqslant g(x_0^-) < t < g(x_0)$ par croissance de g, donc $t \in [g(x), g(x_0)]$, ce qui prouve que $t \in I$ car $g(x)$ et $g(x_0)$ sont dans $I = g(J)$ et I est un intervalle. Cependant, on a $g(x) \leqslant g(x_0^-) < t$ pour tout $x < x_0$, et $g(x) \geqslant g(x_0) > t$ pour tout $x \geqslant x_0$. Donc $g(x) \neq t$ pour tout $x \in J$, et ainsi $t \notin g(J) = I$. Cette contradiction prouve que g est continue en x_0.

(2) Comme $f(g(x)) = x$ pour tout $x \in J$, on a pour tout $x \neq x_0$ dans J :

$$\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(x) - g(x_0)}{f(g(x)) - f(g(x_0))}.$$

De plus, $g(x) \to g(x_0)$ quand $x \to x_0$ car g est continue par (1). On en déduit que si $f'(g(x_0)) \neq 0$, alors $\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \to \frac{1}{f'(g(x_0))}$ quand $x \to x_0$; et que si $f'(g(x_0)) = 0$, alors $\left|\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}\right| \to \infty$ quand $x \to x_0$. Ce qui démontre (2). □

Corollaire 2.3. *Si f est dérivable sur I avec $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$, alors $g = f^{-1}$ est dérivable sur $J = f(I)$, et on a*

$$\forall x \in J \ : \ g'(x) = \frac{1}{f'\big(g(x)\big)}.$$

Autrement dit : $\big(f^{-1}\big)' = \dfrac{1}{f' \circ f^{-1}}.$

COROLLAIRE 2.4. *Soit $k \in \mathbb{N}^* \cup \{\infty\}$. Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^k$ sur $J = f(I)$.*

Démonstration. Comme f^{-1} est continue et que f' est (au moins) continue puisque $k \geqslant 1$, la formule $(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}$ montre que $(f^{-1})'$ est continue ; donc f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$. Si on suppose que $k \geqslant 2$, alors f' est (au moins) de classe $\mathcal{C}^1$, et la même formule montre alors que $(f^{-1})'$ est de classe $\mathcal{C}^1$; donc f^{-1} est (au moins) de classe $\mathcal{C}^2$. Et ainsi de suite. (Exo : démontrer proprement le résultat par récurrence.) □

REMARQUE. Il est très important de savoir retrouver rapidement la formule pour $(f^{-1})'$ si on l'a oubliée. Voici comment faire. Soit $g := f^{-1}$. On a $f(g(x)) = x$ pour tout $x \in J$. En dérivant cette relation, on obtient $f'(g(x))g'(x) = 1$ et donc $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}\cdot$

Exemple. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0, \infty[$, et dérivable sur $]0, \infty[$ avec $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$ Elle n'est pas dérivable en 0.

Démonstration. Posons $f(t) := t^2$ pour $x \in [0, \infty[$ et $g(x) := \sqrt{x}$ pour $x \in [0, \infty[$. On sait que f est une bijection continue de $[0, \infty[$ sur $[0, \infty[$, donc $g = f^{-1}$ est continue sur $[0, \infty[$. De plus f est dérivable sur $[0, \infty[$ avec $f'(t) = 2t$; en particulier $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in]0, \infty[$. Comme $f\big(]0, \infty[\big) =]0, \infty[$, on en déduit que g est dérivable sur $]0, \infty[$, avec $\forall x > 0 \; : \; g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{2g(x)} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot$ □

Exercice. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $\varphi : I \to \mathbb{R}$ une fonction monotone. Montrer que si $\varphi(I)$ est un intervalle, alors φ est continue.

2.3. Imparité.

PROPOSITION 2.5. *Soient I et J des intervalle de $\mathbb{R}$ symétriques par rapport à 0. Si $f : I \to J$ est une bijection impaire, alors f^{-1} est impaire.*

Démonstration. Soit $y \in J$, et soit $x := f^{-1}(y)$. On a $f(-x) = -f(x) = -y$ puisque f est impaire ; donc $f^{-1}(-y) = -x = -f^{-1}(x)$. □

Remarque. Il n'y a pas d'énoncé de ce genre pour une fonction f *paire*, et c'est normal : une fonction paire n'est jamais injective.

3. Des fonctions connues

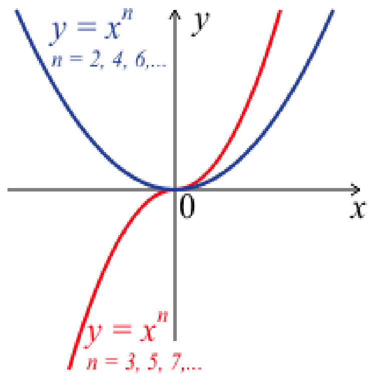
3.1. Puissances entières et racines n-ièmes.

RAPPEL. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) La fonction $t \mapsto t^n$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $\big(t^n\big)' = nt^{n-1}$.

(2) Si n est *impair*, la fonction $t \mapsto t^n$ est une bijection strictement croissante et impaire de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

(3) Si n est *pair*, la restriction de la fonction $t \mapsto t^n$ à $\mathbb{R}^+$ est une bijection strictement croissante de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}^+$.



puissances

DÉFINITION 3.1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La **fonction racine n-ième**, notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est définie comme suit.*

- *Si n est impair, c'est la réciproque de la fonction $t \mapsto t^n$.*
- *Si n est pair, c'est la réciproque de la restriction à $\mathbb{R}^+$ de la fonction $t \mapsto t^n$.*

REFORMULATION. $\sqrt[n]{x}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}^+$ si n est pair et pour tout $x \in \mathbb{R}$ si n est impair ; et on a les identités

$$\sqrt[n]{t^n} = t \qquad \text{et} \qquad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x,$$

qui sont valables : pour tous $t, x \in \mathbb{R}$ si n est impair, et pour $t, x \geqslant 0$ si n est pair.

Exercice 1. Montrer que si n est pair, alors $\forall t \in \mathbb{R} \ : \ \sqrt[n]{t^n} = |t|$.

Exercice 2. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}^+$, on a $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\,\sqrt[n]{b}$.

PROPOSITION 3.2. *Soit n un entier $\geqslant 2$.*

(i) *Si n est pair la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$, et dérivable sur $]0, \infty[$ avec*
$$\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}.$$

(ii) *Si n est impair, la fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est impaire, continue sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, avec la même formule que dans (i).*

(iii) *La fonction $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ n'est pas dérivable en 0, et son graphe possède une tangente verticale en $(0, 0)$.*

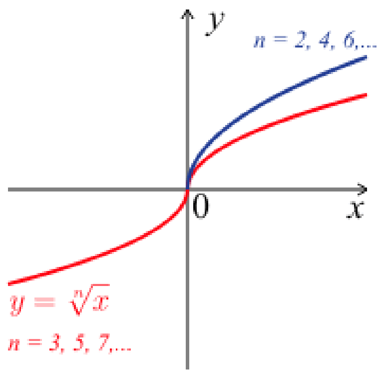
Démonstration. On démontre seulement (i), et on laisse (ii) et (iii) en exo. Posons $p_n(t) := t^n$ et $r_n(x) := \sqrt[n]{x}$.

Comme p_n est continue sur $\mathbb{R}^+$ et que $p_n(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$, on peut affirmer que $r_n = p_n^{-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Comme $p_n(t)$ est dérivable sur $]0, \infty[$ avec $p_n'(t) = nt^{n-1} \neq 0$ pour tout $t \in]0, \infty[$ et que $p_n\big(]0, \infty[\big) =]0, \infty[$, on voit que $r_n = p_n^{-1}$ est dérivable sur $]0, \infty[$, avec

$$r_n'(x) = \frac{1}{p_n'(r_n(x))} = \frac{1}{nr_n(x)^{n-1}} = \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}.$$

□



racines n-ièmes

3.2. Logarithme et exponentielle.

Définition 3.3. *La* ***fonction logarithme****, notée* ln*, est l'unique primitive F de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0,\infty[$ telle que $F(1) = 0$. Ainsi,* ln *est définie sur $]0,\infty[$, et on a*

$$\ln(1) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall t > 0 \;:\; \ln'(t) = \frac{1}{t}\cdot$$

Remarque 1. Le fait que toute fonction continue sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ possède des primitives sera démontré proprement en 2ème année. En admettant ce résultat, et en se souvenant que deux primitives d'une même fonction f sur un intervalle I diffèrent d'une constante, on voit que la fonction ln est bien définie. Si on connait déjà une définition de l'intégrale n'utilisant pas la notion de primitive, on peut écrire sans cercle vicieux :

$$\forall t > 0 \;:\; \ln(t) = \int_1^t \frac{ds}{s}\cdot$$

Remarque 2. Il ne faut jamais oublier que $\ln(t)$ est défini uniquement pour $t > 0$.

Théorème 3.4. (propriétés de la fonction ln)

(0) *La fonction* ln *est la seule fonction dérivable $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant $f'(t) = 1/t$ et $f(1) = 0$.*

(1) *La fonction* ln *change les produits en sommes :*

$$\forall u, v > 0 \;:\; \ln(uv) = \ln(u) + \ln(v).$$

Par conséquent, on a

$$\forall t > 0 \;:\; \ln(1/t) = -\ln(t),$$

et

$$\forall t > 0\ \forall n \in \mathbb{N}^* \;:\; \ln(t^n) = n\ln(t).$$

(2) *La fonction* ln *est strictement croissante sur $]0,\infty[$, avec $\lim_{t\to\infty}\ln(t) = \infty$ et $\lim_{t\to 0^+} = -\infty$.*

Démonstration. (0) est la définition de ln.

(1) Fixons $u > 0$, et notons $\varphi :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\varphi(v) := \ln(uv).$$

Par définition de ln, la fonction φ est dérivable sur $]0,\infty[$, avec
$$\varphi'(v) = u\ln'(uv) = u \times \frac{1}{uv} = \frac{1}{v}.$$
Donc φ est de la forme $\varphi(v) = C + \ln(v)$ pour une certaine constante C. En prenant $v := 1$, on a $\varphi(1) = \ln(u) = C + \ln(1)$, donc $C = \ln(u)$, et ainsi $\ln(uv) = \ln(u) + \ln(v)$ pour tout $v > 0$.

Si $t > 0$, alors $0 = \ln(1) = \ln\big(t\cdot(1/t)\big) = \ln(t) + \ln(1/t)$, donc $\ln(1/t) = -\ln(t)$. l'identité $\ln(t^n) = n\ln(t)$ se démontre par récurrence.

(2) Comme $\ln'(t) = \frac{1}{t} > 0$ pour tout $t > 0$, la fonction ln est strictement croissante sur $]0,\infty[$.

Montrons que $\ln(t) \to +\infty$ quand $t \to \infty$. Soit $A > 0$ quelconque : on cherche t_0 tel que $\forall t \geqslant t_0 \;:\; \ln(t) > A$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\ln(2^n) = n \times \ln(2)$; et comme $\ln(2) > 0$, on en déduit que $\ln(2^n) \to +\infty$ quand $n \to \infty$. Donc, on peut trouver un entier n_0 tel que $\ln\big(2^{n_0}\big) > A$; et comme la fonction ln est croissante, on a $\ln(t) > A$ pour tout $t \geqslant 2^{n_0}$. Donc $t_0 := 2^{n_0}$ convient.

Enfin, comme $\ln(t) = -\ln(1/t)$ et que $1/t \to +\infty$ quand $t \to 0^+$, on voit que $\ln(t) \to -\infty$ quand $t \to 0^+$. □

Corollaire 3.5. *La fonction* ln *est une bijection de* $]0,\infty[$ *sur* $\mathbb{R} =]-\infty,\infty[$.

Définition 3.6. *La* ***fonction exponentielle****, notée* $\exp : \mathbb{R} \to]0,\infty[$*, est la réciproque de la fonction* ln*. Donc* exp *est une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $]0,\infty[$*, et on a* $\exp(0) = 1$.

Remarque. Il ne faut jamais oublier qu'on a $e^x > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Théorème 3.7. (propriétés de la fonction exp)

(0) *La fonction* exp *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *et on a* $\exp' = \exp$*. C'est* la seule *fonction dérivable* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *vérifiant* $f' = f$ *et* $f(0) = 1$.

(1) *La fonction* exp *change les sommes en produits.*
$$\forall x, y \in \mathbb{R} \;:\; \exp(x+y) = \exp(x)\exp(y).$$
Par conséquent, on a
$$\forall x \in \mathbb{R} \;:\; \exp(-x) = 1/\exp(x),$$
et
$$\forall x \in \mathbb{R}\; \forall n \in \mathbb{N}^* \;:\; \exp(nx) = \exp(x)^n.$$

(2) *La fonction* exp *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, avec* $\lim_{x\to-\infty}\exp(x) = 0$ *et* $\lim_{x\to+\infty}\exp(x) = +\infty$.

Démonstration. (0) Comme $\ln'(t) = \frac{1}{t} \neq 0$ pour tout $t \in]0,\infty[$, la fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec
$$\exp'(x) = \frac{1}{\ln'(\exp(x))} = \frac{1}{1/\exp(x)} = \exp(x).$$

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une autre fonction dérivable vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$. Si on pose
$$\varphi(x) := \frac{f(x)}{\exp(x)},$$

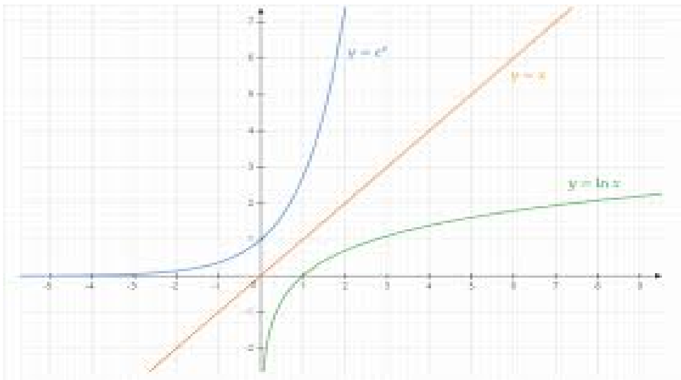
alors φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\varphi'(x) = \frac{f'(x)\exp(x) - f(x)\exp'(x)}{\exp(x)^2} = \frac{f(x)\exp(x) - f(x)\exp(x)}{\exp(x)^2} = 0.$$

Donc la fonction φ est constante sur $\mathbb{R}$. De plus, on a $\varphi(0) = 1$ puisque $f(0) = 1 = \exp(0)$; donc $\varphi(x) \equiv 1$, autrement dit $f = \exp$.

(1) Comme la fonction ln change les produits en sommes, sa réciproque exp change les sommes en produits (exo).

(2) est clair puisque ln est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ avec $\lim_{t\to 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{t\to+\infty} \ln(t) = +\infty$. □



logarithme et exponentielle

Notation. On pose $\boxed{e := \exp(1).}$ Autrement dit, e est l'unique nombre réel tel que $\boxed{\ln(e) = 1.}$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$e^x := \exp(x).$$

Remarque. La notation e^n est cohérente pour $n \in \mathbb{N}^*$: e^n est bien égal à "e à la puissance n".

Démonstration. On a $e^1 = \exp(1) = e$ puisque $\ln(e) = 1$; et si $n \geqslant 2$, alors $e^n = \exp(1 + \cdots + 1) = \exp(1)^n = e^n$. □

Exercice. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a $2,718 < e < 2,719$.

(1) En écrivant $\ln(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t}$ et en faisant un dessin, montrer que $\ln(2) > 1/2$. En déduire que $e < 4$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} e^t dt.$$

(3) Déduire de (1) et (2) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{4}{(n+1)!}.$$

(4) Expliciter l'encadrement obtenu pour $n = 6$ et conclure.

3.3. Puissances quelconques.

NOTATION. Pour $a > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$\boxed{a^x := e^{x \ln(a)}.}$$

On a donc par définion

$$a^x > 0 \qquad \text{et} \qquad \ln(a^x) = x \ln(a).$$

Remarque 1. La notation a^x est cohérente pour $a = e$.

Remarque 2. On a $1^x = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $a^1 = a$ pour tout $a > 0$. De plus, $a^0 = 1$ pour tout $a > 0$.

Résumons rapidement les propriétés des puissances. Toutes les preuves sont laissées en exo ; et il est important de *faire* ces exos, qui ne sont pas difficiles.

- La fonction $x \mapsto a^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $\boxed{(a^x)' = \ln(a)\, a^x.}$
- On a $\boxed{a^{x+y} = a^x a^y}$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, et donc $\boxed{a^{-x} = 1/a^x.}$
- Pour tous $a, b > 0$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{(ab)^x = a^x b^x.}$
- Pour tout $t > 0$ et pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a $\boxed{(t^\alpha)^\beta = t^{\alpha\beta}.}$
- Pour tout $t > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\boxed{\sqrt[n]{t} = t^{1/n}.}$
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est dérivable sur $]0, \infty[$, avec $\boxed{(t^\alpha)' = \alpha t^{\alpha-1}.}$
- Si $\alpha > 0$, alors t^α se prolonge par continuité en 0 en posant $\boxed{0^\alpha = 0.}$
- La fonction $x \mapsto x^x$ se prolonge par continuité en 0 en posant $\boxed{0^0 = 1}$.

4. Des fonctions nouvelles

4.1. Fonction arctangente.

RAPPEL. Pour tout $t \in \mathbb{R}$ qui n'est pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$, on pose

$$\tan(t) := \frac{\sin(t)}{\cos(t)}\cdot$$

La fonction tan est bien définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, avec

$$\tan'(t) = \frac{1}{\cos(t)^2} = 1 + \tan(t)^2.$$

En particulier, tan est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. De plus, on a $\lim_{t \to -\frac{\pi}{2}^+} \tan(t) = -\infty$ et $\lim_{t \to \frac{\pi}{2}^-} \tan(t) = +\infty$. Donc la restriction de la fonction tan à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$.

DÉFINITION 4.1. *La fonction* ***arctangente****, noté* arctan : $\mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*, est la réciproque de la restriction de la fonction* tan *à* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$*. Pour* $x, t \in \mathbb{R}$*, on a donc l'équivalence*

$$t = \arctan(x) \iff \tan(t) = x \quad \text{et} \quad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Autrement dit,

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \tan\big(\arctan(x)\big) = x \quad \text{et} \quad \forall t \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\ : \ \arctan\big(\tan(t)\big) = t.$$

ATTENTION. l'identité $\arctan\big(\tan(t)\big) = t$ est valable uniquement pour $t \in \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$

THÉORÈME 4.2. (propriétés de la fonction arctan)

(1) *La fonction* arctan *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$*, impaire, et tend vers* $\pm\frac{\pi}{2}$ *en* $\pm\infty$*.*

(2) *La fonction* arctan *est dérivable sur* $\mathbb{R}$*, avec*

$$\boxed{\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}.}$$

Par conséquent, on a

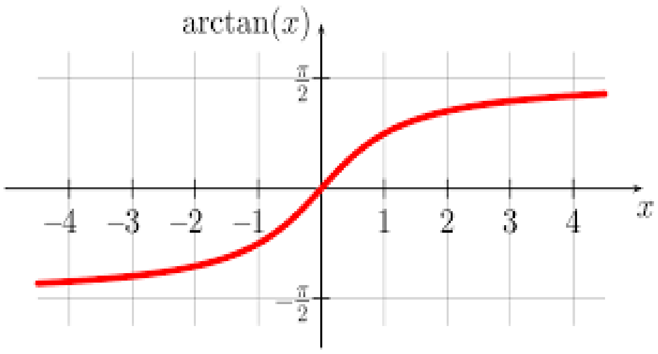
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \arctan(x) = \int_0^x \frac{du}{1+u^2}.}$$

Démonstration. (1) vient du fait que la fonction tan est strictement croissante et impaire sur $\big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$.

(2) Comme $\tan'(t) = 1 + \tan^2(t)$ ne s'annule pas sur $\big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$, la fonction arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec

$$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x)} = \frac{1}{1+\tan\big(\arctan(x)\big)^2} = \frac{1}{1+x^2}.$$

□



arctangente

COROLLAIRE 4.3. *On a* $\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty} \int_0^x \frac{du}{1+u^2} = \pm\frac{\pi}{2}.$

PROPOSITION 4.4. *On a les identités suivantes :*

$$\boxed{\forall x > 0 \ : \ \arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2},}$$

$$\boxed{\forall x < 0 \ : \ \arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}.}$$

Démonstration. On sait que si $t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $\frac{\pi}{2} - t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\tan(t)}$, car $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$ et $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t)$. Donc, si $x > 0$, alors $\frac{\pi}{2} - \arctan(x) \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $\tan\left(\frac{\pi}{2} - \arctan(x)\right) = \frac{1}{\tan(\arctan(x))} = \frac{1}{x}$, et par conséquent $\arctan(1/x) = \frac{\pi}{2} - \arctan(x)$. Ainsi, on a $\arctan(x) + \arctan(1/x) = \frac{\pi}{2}$ pour tout $x > 0$. Comme la fonction arctan est impaire, on en déduit qu'on a $\arctan(x) + \arctan(1/x) = -\frac{\pi}{2}$ pour tout $x < 0$. $\square$

Autre preuve. Pour $x \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, posons

$$\varphi(x) := \arctan(x) + \arctan(1/x).$$

Par composition, la fonction φ est dérivable sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$, avec

$$\begin{aligned}\varphi'(x) &= \arctan'(x) - \frac{1}{x^2}\arctan'(1/x)\\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2}\frac{1}{1+(1/x)^2}\\ &= \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{x^2+1} = 0.\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction φ est constante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, \infty[$. Comme $\varphi(x) \to \frac{\pi}{2}$ quand $x \to +\infty$ et $\varphi(x) \to -\infty$ quand $x \to -\infty$, on a donc $\varphi(x) \equiv \frac{\pi}{2}$ sur $]-\infty, 0[$ et $\varphi(x) \equiv -\frac{\pi}{2}$ sur $]0, \infty[$. $\square$

Exercice. En utilisant l'identité $\cos(t)^2 = \frac{1}{1+\tan(t)^2}$, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} \ : \ \cos\big(\arctan(x)\big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin\big(\arctan(x)\big) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

4.2. Fonctions arcsinus et arccosinus.

Rappel. La fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, avec $\sin(\pm\frac{\pi}{2}) = \pm 1$; donc c'est une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[-1, 1]$. La fonction cosinus est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$, avec $\cos(0) = 1$ et $\cos(\pi) = -1$; donc c'est une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-1, 1]$.

Définition 4.5. *La* ***fonction arcsinus****, notée* arcsin*, est la réciproque de la restriction de la fonction sinus à* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. *La* ***fonction arccosinus****, notée* arccos*, est la réciproque de la restriction de la fonction cosinus à* $[0, \pi]$. *Pour* $t \in \mathbb{R}$ *et* $x \in [-1, 1]$*, on a donc les équivalences suivantes :*

$$\begin{aligned} t = \arcsin(x) &\iff \sin(t) = x \quad \text{et} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],\\ t = \arccos(x) &\iff \cos(t) = x \quad \text{et} \quad t \in [0, \pi].\end{aligned}$$

Autrement dit

$$\forall x \in [-1, 1] \ : \ \sin\big(\arcsin(x)\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \ : \ \arcsin\big(\sin(t)\big) = t$$

$$\forall x \in [-1, 1] \ : \ \cos\big(\arccos(x)\big) = x \qquad \text{et} \qquad \forall t \in [0, \pi] \ : \ \arccos\big(\cos(t)\big) = t$$

Attention. L'identité $\arcsin\big(\sin(t)\big) = t$ est valable uniquement pour $t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, et l'identité $\arccos\big(\cos(t)\big) = t$ est valable uniquement pour $t \in [0, \pi]$.

Le résultat suivant montre que arcsin et arccos sont essentiellement la même fonction.

LEMME 4.6. *Pour tout $x \in [-1,1]$, on a* $\boxed{\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x).}$

Démonstration. On a $\cos\big(\frac{\pi}{2} - \arcsin(x)\big) = \sin\big(\arcsin(x)\big) = x$; et de plus $\frac{\pi}{2} - \arcsin(x) \in [0,\pi]$ car $\arcsin(x) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. □

Il suffit donc d'étudier la fonction arcsin pour bien connaitre à la fois arcsin et arccos.

THÉORÈME 4.7. (propriétés de la fonction arcsin)

(1) *La fonction* arcsin *est une bijection continue strictement croissante et impaire de* $[-1,1]$ *sur* $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$. *Elle est dérivable sur* $]-1,1[$*, avec*

$$\boxed{\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.}$$

Par conséquent, on a

$$\forall x \in\,]-1,1[\ :\ \arcsin(x) = \int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}.$$

(2) *Le graphe de la fonction* arcsin *possède des tangentes verticales en* $(-1, -\frac{\pi}{2})$ *et en* $(1, \frac{\pi}{2})$.

Démonstration. (1) Comme la restriction de sin à $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$ est une bijection continue strictement croissante et impaire de $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$ sur $[-1,1]$, la fonction arcsin est une bijection continue strictement décroissante de $[-1,1]$ sur $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$

On a $\sin'(t) = \cos(t) \neq 0$ pour tout $t \in \big]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big[$, la fonction arcsin est dérivable sur $]-1,1[$, avec

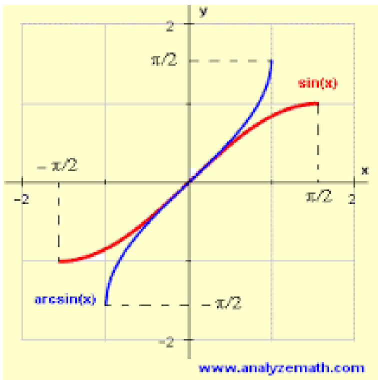
$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\cos\big(\arcsin(x)\big)}.$$

De plus, comme $\cos\big(\arcsin(x)\big)^2 + \sin\big(\arcsin(x)\big)^2 = 1$, on a $\cos\big(\arcsin(x)\big)^2 = 1 - x^2$, et donc $\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}$ pour tout $x \in [-1,1]$, car $\cos(t) \geqslant 0$ sur $\big[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\big]$. Donc on obtient bien

$$\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

(2) Comme $\arcsin(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{2}$ et $\sin'(\pm\frac{\pi}{2}) = \cos(\pm\frac{\pi}{2}) = 0$, le graphe de la fonction arcsin possède des tangentes verticales en $(-1, -\frac{\pi}{2})$ et en $(1, \frac{\pi}{2})$.

□



sinus et arcsinus

Remarque. La preuve du théorème a établi l'identité suivante, qu'il faut savoir retrouver : pour tout $x \in [-1,1]$, on a

$$\boxed{\cos\big(\arcsin(x)\big) = \sqrt{1-x^2}.}$$

Comme $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$, on en déduit (exo) qu'on a aussi

$$\boxed{\sin\big(\arccos(x)\big) = \sqrt{1-x^2}.}$$

Corollaire 4.8. *La fonction* arccos *est dérivable sur* $]-1,1[$, *avec*

$$\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Démonstration. C'est évident puisque $\arccos(x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin(x)$. □

Corollaire 4.9. *On a* $\displaystyle\lim_{x\to\pm 1}\int_0^x \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \pm\frac{\pi}{2}\cdot$

Exercice. Dériver la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$ sur $]0,1[$, et en déduire que

$$\forall x \in\ ]0,1[\ :\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^x \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = 2\arcsin(\sqrt{x}).$$

Plus généralement, montrer que si $a,b \in \mathbb{R}$ et $a<b$, alors

$$\forall x \in\ ]a,b[\ :\ \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^x \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)}} = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right).$$

4.3. Fonctions "trigonométriques hyperboliques". On sait que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\cdot$$

Si on remplace les exponentielles imaginaires par des exponentielles réelles, on obtient deux nouvelles fonctions.

Définition 4.10. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$\mathrm{ch}(x) := \frac{e^x+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \mathrm{sh}(x) := \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot$$

Les fonctions sh *et* ch *s'appellent les fonctions* ***sinus hyperbolique*** *et* ***cosinus hyperbolique***.

Remarque 1. Par définition, on voit qu'on a $\mathrm{ch}(x)+\mathrm{sh}(x) = e^x$ et $\mathrm{ch}(x)-\mathrm{sh}(x) = e^{-x}$.

Remarque 2. Par définition également, il est clair que la fonction ch est paire et que la fonction sh est impaire.

Les fonctions sh et ch possèdent des propriétés formelles analogues aux fonctions trigonométriques sin et cos, avec même des formules plus simples à retenir :

Proposition 4.11. (formules de trigonométrie hyperbolique)

(1) *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

(2) *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, on a*

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(a+b) &= \mathrm{ch}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{sh}(a)\mathrm{sh}(b),\\ \mathrm{sh}(a+b) &= \mathrm{sh}(a)\mathrm{ch}(b) + \mathrm{ch}(a)\mathrm{sh}(b)\end{aligned}$$

Démonstration. (1) On a

$$\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = \big(\mathrm{ch}(x) + \mathrm{sh}(x)\big)\,\big(\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\big) = e^x\, e^{-x} = 1.$$

(2) Pour $\mathrm{ch}(a+b)$, on écrit

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(a+b) &= \frac{1}{2}\left(e^{a+b} + e^{-(ab)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^a e^b + e^{-a}e^{-b}\right)\\ &= \frac{1}{2}\Big[\big(\mathrm{ch}(a)+\mathrm{sh}(a)\big)\big(\mathrm{ch}(a)+\mathrm{sh}(b)\big) + \big(\mathrm{ch}(a)-\mathrm{sh}(a)\big)\big(\mathrm{ch}(b)-\mathrm{sh}(b)\big)\Big];\end{aligned}$$

puis on développe tout et on simplifie. La preuve est analogue pour $\mathrm{sh}(a+b)$. Exo : écrire les détails. □

PROPOSITION 4.12. (propriétés des fonctions ch et sh)

(1) *Les fonctions* sh *et* ch *sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec* $\mathrm{sh}' = \mathrm{ch}$ *et* $\mathrm{ch}' = \mathrm{sh}$.

(2) *La fonction* ch *est paire, strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$, strictement croissante sur $[0, \infty[$, avec $\mathrm{ch}(0) = 1$ et $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{ch}(x) = +\infty$.*

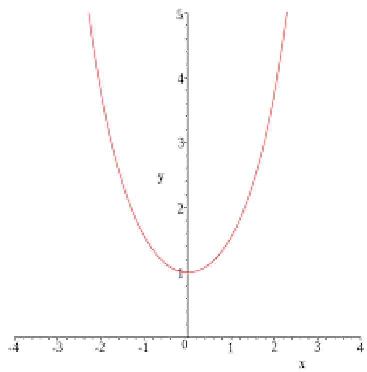
(3) *La fonction* sh *est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x\to\pm\infty} \mathrm{sh}(x) = \pm\infty$.*

Démonstration. (1) est "immédiat" (exo).

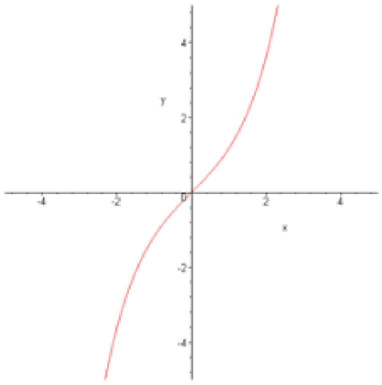
(2) On a déjà vu que ch est paire. Par (1), on a $\mathrm{ch}(x) = \mathrm{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}\cdot$ Si $x > 0$, alors $e^x > 1$ et $e^{-x} < 1$, donc $e^x - e^{-x} > 0$. Ainsi, on a $\mathrm{ch}'(x) > 0$ pour tout $x > 0$; et comme ch est continue sur $[0, \infty[$, cela montre que ch est strictement croissante sur $[0, \infty[$. Par parité, ch est donc strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$. Enfin, comme $e^x \to 0$ et $e^{-x} \to 0$ quand $x \to +\infty$, on voit que $\mathrm{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \to +\infty$ quand $x \to +\infty$; et donc (par parité) $\mathrm{ch}(x) \to +\infty$ quand $x \to -\infty$.

(3) est laissé en exo. □

COROLLAIRE 4.13. *La fonction* sh *est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$, et la restriction de la fonction* ch *à $[0, \infty[$ est une bijection de $[0, \infty[$ sur $[1, \infty[$.*



cosinus hyperbolique



sinus hyperbolique

Définition 4.14. *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose*

$$\mathrm{th}(x) := \frac{\mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

La fonction th *s'appelle la fonction* ***tangente hyperbolique****.*

Proposition 4.15. (propriétés de la fonction th)

(1) *On a $-1 < \mathrm{th}(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

(2) *La fonction* th *est dérivable sur $\mathbb{R}$, avec*

$$\mathrm{th}'(x) = 1 - \mathrm{th}(x)^2 = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}.$$

(3) *La fonction* th *est impaire, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $\lim_{x \to \pm\infty} \mathrm{th}(x) = \pm 1$.*

Démonstration. (1) Si $x \geqslant 0$, alors $0 \leqslant e^x - e^{-x} < e^x + e^{-x}$, donc $0 \leqslant \mathrm{th}(x) < 1$. Comme de plus th est visiblement impaire, on en déduit que si $x \leqslant 0$, alors $-1 < \mathrm{th}(x) \leqslant 0$.

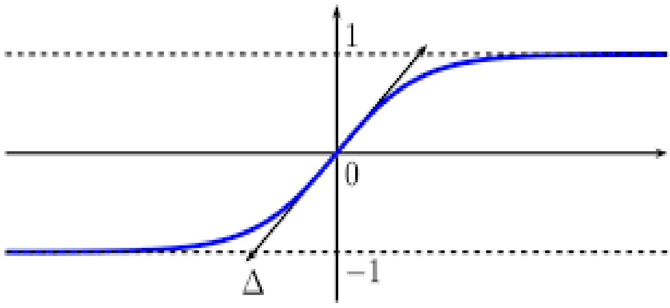
(2) La fonction $\mathrm{th} = \frac{\mathrm{sh}}{\mathrm{ch}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car ch et sh sont dérivable et ch ne s'annule pas, et on a

$$\mathrm{th}'(x) = \frac{\mathrm{sh}'(x)\mathrm{ch}(x) - \mathrm{sh}(x)\mathrm{ch}'(x)}{\mathrm{ch}(x)^2} = \frac{\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2}{\mathrm{ch}(x)^2} = 1 - \mathrm{th}(x)^2;$$

et aussi $\mathrm{th}'(x) = \frac{1}{\mathrm{ch}(x)^2}$ puisque $\mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$.

(3) est laissé en exo. □

Corollaire 4.16. *La fonction* th *est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1,1[$.*



tangente hyperbolique

Chapitre 2

Développements limités

1. Comparaison de fonctions et de suites

1.1. Cas des fonctions.

DÉFINITION 1.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ qui est ou bien un point de I, ou bien une extrémité de I. Soient également f et g deux fonctions à valeurs réelles ou complexes définies au moins sur $I \backslash \{a\}$.*

(1) *On dit que $f(x)$ **est dominé par** $g(x)$ **au voisinage de** a si*
- *$g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \backslash \{a\}$ assez proche de a, et*
- *il existe une constante C tellle que : $|f(x)| \leqslant C\,|g(x)|$ pour tout $x \in I \backslash \{a\}$ assez proche de a*

On écrit alors
$$f(x) \underset{a}{=} O(g(x)),$$
ce qui se lit "$f(x)$ est un grand "O" de $g(x)$ au voisinage de a".

(2) *on dit que $f(x)$ **est négligeable devant** $g(x)$ **quand** x **tend vers** a si*
- *$g(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \backslash \{a\}$ assez proche de a, et*
- *$\frac{f(x)}{g(x)} \to 0$ quand $x \to a$.*

On écrit alors
$$f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)),$$
ce qui se lit "$f(x)$ est un petit "o" de $g(x)$ quand x tend vers a".

(3) *On dit que $f(x)$ **est équivalent à** $g(x)$ **quand** x **tend vers** a si*
- *$g(x) \neq 0$ et $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in I \backslash \{a\}$ assez proche de a, et*
- *$\frac{f(x)}{g(x)} \to 1$ quand $x \to a$.*

On écrit alors
$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x).$$

REMARQUE. Si on sait déjà que $g(x) \neq 0$ pour $x \neq a$ assez proche de a, alors dire que $f(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$ signifie qu'on peut écrire $f(x) = \varepsilon(x) g(x)$, où $\varepsilon(x) \to 0$ quand $x \to a$.

USAGE DES NOTATIONS. La notation "$o(g(x))$" est synonyme de "quelque chose de négligeable devant $g(x)$" ; et de même, "$O(g(x))$" est synonyme de "quelque chose de dominé par $g(x)$". Ces notations sont extrêmement pratiques. Par exemple, on peut écrire des choses comme $o(g(x)) + o(g(x)) = o(g(x))$, ou $O(g(x)) + O(g(x)) = O(g(x))$, ou encore $6 \times o(g(x)) = o(g(x))$; et on peut écrire $u(x) \underset{x \to a}{=} v(x) + o(g(x))$ pour signifier que $u(x) - v(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x))$.

Exemple 1. Par définition, "$f(x) \underset{x\to a}{=} o(1)$" signifie que $f(x) \to 0$ quand $x \to a$, et "$f(x) \underset{a}{=} O(1)$" signifie que la fonction f est "bornée au voisinage de a".

Exemple 2. Si $0 \leqslant \alpha < \beta$, alors $x^\alpha \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\beta)$ et $x^\beta \underset{x\to 0^+}{=} o(x^\alpha)$.

Démonstration. $\frac{x^\alpha}{x^\beta} = \frac{1}{x^{\beta-\alpha}} \underset{x\to+\infty}{\to} 0$ car $\beta - \alpha > 0$; et $\frac{x^\beta}{x^\alpha} = x^{\beta-\alpha} \underset{x\to 0^+}{\to} 0$. □

Exemple 3. Si $P(x) = a_0 + \cdots + a_d x^d$ est une fonction polynomiale de degré d, alors $P(x) \underset{x\to\pm\infty}{\sim} a_d x^d$.

Démonstration. $\frac{P(x)}{a_d x^d} = \frac{a_0}{a_d x^d} + \frac{a_1}{a_d x^{d-1}} + \cdots + \frac{a_{d-1}}{a_d x} + 1 \underset{x\to\pm\infty}{\to} 1.$ □

Exemple 4. Dire que $f(x)$ admet une limite l quand $x \to a$ signifie que $f(x) \underset{x\to a}{=} l + o(1)$. Si $l \neq 0$, cela revient à dire que $f(x) \underset{x\to a}{\sim} l$.

Exemple 5. Dire qu'une fonction f définie au voisinage de a est dérivable en a signifie qu'il existe un nombre c tel que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + c \times (x-a) + o(x-a);$$

et dans ce cas on a $c = f'(a)$. De plus :

- si $f'(a) \neq 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{\sim} f'(a)(x-a)$;
- si $f'(a) = 0$, alors $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} o(x-a)$.

Démonstration. Si f est dérivable en a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x\to a}{=} f'(a) + o(1)$, et donc $f(x) - f(a) = f'(a)(x-a) + o(x-a)$. Inversement, si $f(x) - f(a) \underset{x\to a}{=} c(x-a) + o(x-a)$ alors, en divisant par $x - a$ et en faisant tendre x vers a, on voit que f est dérivable en a avec $f'(a) = c$. □

Remarque. En particulier, si on prend $f(x) := \sin(x)$ ou $f(x) := \ln(1+x)$, on a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ dans les deux cas ; donc

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{\sim} x \qquad \text{et} \qquad \ln(1+x) \underset{x\to 0}{\sim} x.$$

Exemple 6. ("croissance comparée des fonctions usuelles")

(1) La puissance l'emporte sur le logarithme : pour tout $\alpha > 0$, on a

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^\alpha} = 0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha \ln(x) = 0.$$

Autrement dit :

$$\ln(x) \underset{x\to+\infty}{=} o(x^\alpha) \qquad \text{et} \qquad \ln(x) \underset{x\to 0^+}{=} o(1/x^\alpha),$$

(2) L'exponentielle l'emporte sur la puissance : pour tous $\alpha, \beta, c > 0$, on a

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-cx^{\beta}} = 0$$

Autrement dit :

$$e^{-cx^{\beta}} \underset{x \to +\infty}{=} o(1/x^{\alpha}).$$

Démonstration. (1) On commence par observer que

$$\forall \rho > 1 \ : \ \frac{\rho^n}{n} \to +\infty \quad \text{quand } \mathbb{N} \ni n \to \infty.$$

En effet, en écrivant $\rho = 1 + h$ où $h > 0$, on a $\rho^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} h^k \geqslant \binom{n}{2} h^2 = \frac{n(n-1)}{2} h^2$ pour tout $n \geqslant 2$, donc $\frac{\rho^n}{n} \geqslant (n-1)\frac{h^2}{2} \to +\infty$.

Pour tout $x \geqslant 1$, notons $n(x)$ le plus grand entier n tel que $2^n \leqslant x$. Alors $n(x) \to \infty$ quand $x \to +\infty$, et on a

$$2^{n(x)} \leqslant x < 2^{n(x)+1} = 2^{n(x)+1}.$$

Donc $0 \leqslant \ln(x) \leqslant \ln(2)\,(n(x)+1)$ pour tout $x \geqslant 1$, et $x^{\alpha} \geqslant \left(2^{n(x)}\right)^{\alpha} = \rho^{n(x)}$ avec $\rho := 2^{\alpha} > 1$. Par conséquent

$$0 \leqslant \frac{\ln(x)}{x^{\alpha}} \leqslant \ln(2)\,\frac{n(x)+1}{\rho^{n(x)}} \xrightarrow{x \to +\infty} 0.$$

Si maintenant on pose $u := 1/x$, alors $x^{\alpha}\ln(x) = -\frac{\ln(u)}{u^{\alpha}}$ et $u \to +\infty$ quand $x \to 0^+$, donc $\lim_{x \to 0^+} x^{\alpha}\ln(x) = \lim_{u \to +\infty} -\frac{\ln(u)}{u^{\alpha}} = 0$.

(2) On a

$$x^{\alpha} e^{-cx^{\beta}} = e^{\alpha \ln(x)} e^{-cx^{\beta}} = \exp\left(\alpha \ln(x) - cx^{\beta}\right).$$

De plus $\alpha \ln(x) - cx^{\beta} = -cx^{\beta}\left(1 - \frac{\alpha}{c}\frac{\ln(x)}{x^{\beta}}\right)$, et $1 - \frac{\ln(x)}{x^{\beta}} \to 1$ quand $x \to +\infty$ par (1). Comme $-cx^{\beta} \to -\infty$, on en déduit que $\alpha \ln(x) - cx^{\beta} \to -\infty$ quand $x \to +\infty$; et donc $x^{\alpha} e^{-cx^{\beta}} = \exp\left(\alpha \ln(x) - cx^{\beta}\right) \to 0$. □

Le lemme suivant est presque évident, mais très utile en pratique.

LEMME 1.2. *Si f et g sont deux fonctions définies et ne s'annulant pas au voisinage de a (sauf peut-être en a), alors*

$$f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x)) \iff g(x) \underset{x \to a}{=} f(x) + o(f(x)).$$

Démonstration. Par définition,

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x \to a}{\sim} g(x) &\iff \frac{f(x)}{g(x)} - 1 \xrightarrow{x \to a} 0 \\ &\iff \frac{f(x) - g(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \to a} 0 \\ &\iff f(x) - g(x) \underset{x \to a}{=} o(g(x)) \\ &\iff f(x) \underset{x \to a}{=} g(x) + o(g(x)) \end{aligned}$$

La preuve de l'autre équivalence est identique. □

Exercice 1. Montrer que la relation $\underset{x\to a}{\sim}$ est une relation d'équivalence

Il est très important de faire l'exercice suivant pour se familiariser avec les notions qu'on vient d'introduire. Dans la suite, on utilisera toutes les propriétés énoncées sans forcément les rappeler explicitement.

EXERCICE 2. Démontrer les choses suivantes.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(f(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{a}{=} O(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{a}{=} O(g_1(x)g_2(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{a}{=} O(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x)g_2(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $1/f(x) \underset{x\to a}{\sim} 1/g(x)$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x)$ et $g(x)$ sont de même signe au voisinage de a.

REMARQUE. Les implications suivantes *ne sont pas vraies*.

- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} O(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g_2(x))$, alors $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g_1(x)+g_2(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_2(x))$, alors $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x)+g_2(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)+g_2(x)$.

Cependant, elles deviennent vraies si on suppose que $g_1(x)$ et $g_2(x)$ sont tous les deux de même signe pour x assez proche de a.

Démonstration. On le fait juste pour la 3ème implication ; le cas des autres implications est analogue (en plus simple).

On a $x \underset{x\to+\infty}{\sim} x$ et $-x+6 \underset{x\to+\infty}{\sim} -x$, mais il n'est pas vrai que $x+(-x+6) = 6 \underset{x\to+\infty}{\sim} x+(-x) = 0$.

Supposons que $g_1(x) > 0$ et $g_2(x) > 0$ pour x assez proche de a. Alors $0 < g_1(x) < g_1(x)+g_2(x)$ et $0 < g_2(x) < g_1(x)+g_2(x)$ pour x assez proche de a, donc

$$g_1(x) \underset{x\to a}{=} 0\big(g_1(x)+g_2(x)\big) \qquad \text{et} \qquad g_2(x) \underset{x\to a}{=} 0\big(g_1(x)+g_2(x)\big).$$

Si maintenant $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x) \underset{x\to a}{=} g_1(x)+o\big(g_1(x)\big) = g_1(x)+o\big(g_1(x)+g_2(x)\big)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} g_2(x)+o\big(g_2(x)\big) = g_2(x)+o\big(g_1(x)+g_2(x)\big)$, donc

$$f_1(x)+f_2(x) = g_1(x)+g_2(x)+o\big(g_1(x)+g_2(x)\big),$$

ce qui prouve que $f_1(x)+f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)+g_2(x)$. $\square$

1.2. Cas des suites. On peut définir les mêmes notions de comparaison pour des *suites* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que pour des fonctions. De plus, comme l'indice n ne peut tendre que vers $+\infty$, on peut simplifier les notations. Ainsi :

- "$u_n = O(v_n)$" signifie que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et qu'il existe une constante C telle que $|u_n| \leqslant C\,|v_n|$ pour tout n assez grand.
- "$u_n = o(v_n)$" signifie que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et que $u_n/v_n \to 0$.
- "$u_n \sim v_n$" signifie que $v_n \neq 0$ à partir d'un certain rang et que $u_n/v_n \to 1$, ou encore que $u_n = v_n + o(v_n)$.

2. Développements limités

2.1. Généralités.

Définition 2.1. *Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit f une fonction à valeurs réelles ou complexes définie au voisinage de a. Soit également $n \in \mathbb{N}$. On dit que f admet un* ***développement limité à l'ordre*** n ***au point*** a *s'il existe des nombres $c_0, \dots, c_n$ tels que*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k (x-a)^k + o\big((x-a)^n\big);$$

autrement dit, s'il existe un polynôme Q de degré $\leqslant n$ tel que

$$f(x) \underset{x\to a}{=} Q(x-a) + o\big((x-a)^n\big).$$

Remarque 1. On écrira systématiquement "DL" au lieu de "développement limité", et on pourra écrire "DL_n" au lieu de "DL à l'ordre n".

Remarque 2. Par "translation", on peut toujours se ramener au point 0 : une fonction f admet un DL_n au point a si et seulement si la fonction $h \mapsto f(a+h)$ admet un DL_n au point 0. Explicitement, si

$$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} c_0 + c_1 h + \cdots + c_n h^n + o(h^n),$$

alors

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n (x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

Remarque 3. Si f admet un DL à l'ordre $n \geqslant 1$ en a, alors f admet un DL à l'ordre m pour tout $m < n$, obtenu en "tronquant le DL_n de f à l'ordre m".

Démonstration. Si $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$ et si $m < n$, alors on peut écrire

$$\begin{aligned} f(x) \underset{x\to a}{=}\ & c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m \\ & \qquad + c_{m+1}(x-a)^{m+1} + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big) \\ =\ & c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_m(x-a)^m + o((x-a)^m), \end{aligned}$$

car $(x-a)^k \underset{x\to a}{=} o((x-a)^m)$ pour tout $k > m$. □

Exemple 1. Dire que f admet un DL à l'ordre 0 en a signifie que $f(x)$ admet une limite quand $x \to a$.

Démonstration. Un DL à l'ordre 0 en a s'écrit $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0(x-a)^0 + o\big((x-a)^0\big)$, autrement dit $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + o(1)$. □

Exemple 2. Supposons f continue au point a. Dire que f admet un DL à l'ordre 1 en a signifie que f est dérivable en a.

Démonstration. Si f est dérivable en a, alors on peut écrire $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, donc f admet un DL à l'ordre 1 en a. Inversement, supposons que $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + o(x-a)$. Comme f est supposée continue en 0, on voit en faisant tendre x vers a que $c_0 = f(a)$. Donc $f(x) \underset{x\to a}{=} f(a) + c_1(x-a) + o(x-a)$, et ainsi f est dérivable en a avec $f'(a) = c_1$. □

Lemme 2.2. *Si une fonction f admet un* DL *à l'ordre n en a, $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big)$, alors les coefficients $c_0, \ldots, c_n$ sont déterminés de manière unique. Ainsi, on a "unicité du* DL*" quand il existe.*

Démonstration. On procède par récurrence sur n.

Si f admet un DL à l'ordre 0, $f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + o(1)$, alors $f(x) \to c_0$ quand $x \to a$, donc c_0 est déterminé de manière unique par unicité de la limite.

Supposons le résultat démontré pour un certain $n \in \mathbb{N}$. Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre $n+1$ au point a,

$$(*) \qquad f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + \cdots + c_n(x-a)^n + c_{n+1}(x-a)^{n+1} + o\big((x-a)^{n+1}\big).$$

Comme $(x-a)^{n+1} \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^n\big)$, on a $c_{n+1}(x-a)^{n+1} + o\big((x-a)^{n+1}\big) \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^n\big)$, et donc

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

Par hypothèse de récurrence, les coefficients $c_0, \ldots, c_n$ sont déterminés de manière unique. En revenant à $(*)$, on voit que

$$\frac{1}{(x-a)^{n+1}}\left(f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k(x-a)^k\right) \underset{x\to a}{=} c_{n+1} + o(1) \xrightarrow{x\to a} c_{n+1}.$$

Donc le coefficient c_{n+1} est lui aussi déterminé de manière unique. □

Vocabulaire. Soit f une fonction admettant un DL à l'ordre n en a,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} Q(x-a) + o\big((x-a)^n\big)$$

où Q est un polynôme de degré $\leqslant n$, uniquement déterminé d'après le Lemme 2.2. L'expression $P(x) := Q(x-a)$ s'appelle la **partie principale** du DL_n de f en a.

Corollaire 2.3. *Soit f une fonction définie sur un intervalle symétrique par rapport à 0 et admettant un* DL_n *en $a = 0$, et soit $P(x)$ la partie principale de ce* DL*. Si f est paire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances paires de x ; et si f est impaire, alors $P(x)$ ne contient que des puissances impaires de x.*

Démonstration. Écrivons $P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$. On a ainsi

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k x^k + o(x^n),$$

et donc, comme $-x \to 0$ quand $x \to 0$ (!)

$$\begin{aligned} f(-x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} c_k(-x)^k + o\big((-x)^n\big) \\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k c_k x^k + o(x^n). \end{aligned}$$

Par unicité du DL, on en déduit que si f est paire, alors $(-1)^k c_k = c_k$ pour $k = 0, \dots, n$, et donc $c_k = 0$ pour tous les indices k impairs. De même, si f est impaire alors, comme $-f(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-c_k)x^k + o(x^n)$, on voit que $(-1)^k c_k = -c_k$ pour $k = 0, \dots, n$, et donc $c_k = 0$ pour tous les indices k pairs. $\square$

2.2. Formule de Taylor-Young.

THÉORÈME 2.4. *Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$ (donc $n \geqslant 1$). Si f est une fonction définie au voisinage de a et n fois dérivable en a, alors f admet un* DL *à l'ordre n en a,*

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big).$$

Les coefficients $c_0, \dots, c_n$ sont donnés par les formules suivantes :

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \qquad \text{pour } k = 0, \dots, n.$$

Ainsi, on a

$$f(x) \underset{x\to a}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + o\big((x-a)^n\big).$$

*Cette formule s'appelle la **formule de Taylor-Young**.*

Remarque. Par convention, $f^{(0)}(a) = f(a)$ et $0! = 1$; donc $c_0 = f(a)$.

Exercice. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := x^3 \sin(1/x^2)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un DL à l'ordre 2 en 0, mais qu'elle n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Pour la preuve du théorème, on a besoin du lemme suivant

LEMME 2.5. *Si g est une fonction n fois dérivable en a et telle que $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$, alors $g(x) \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^n\big)$.*

Preuve du Lemme 2.5. On procède par récurrence sur n. Il suffit de traiter le cas où g est à valeurs réelles (exo).

Pour $n = 1$, le résultat est déjà connu : si g est dérivable en a avec $g(a) = g'(a) = 0$, alors $g(x) \underset{x\to a}{=} g(a) + g'(a)(x-a) + o(x-a) \underset{x\to a}{=} 0 + 0 + o(x-a)$.

Supposons le résutat vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Soit g une fonction à valeurs réelles $n+1$ fois dérivable en a, avec $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n+1)}(a) = 0$. Alors la fonction $h := g'$ est n fois dérivable en a avec $h(a) = \cdots = h^{(n)}(a) = 0$. Donc

$$g'(x) \underset{x\to a}{=} o\big((x-a)^n\big).$$

Soit I un intervalle non trivial contenant a tel que g soit dérivable sur I (un tel intervalle existe car l'hypothèse faite sur g entraîne que g est au moins 2 fois dérivable en a, et donc que g' est définie au voisinage de a.) Pour tout $x \in I$, on peut écrire

$$g(x) = g(a) + g'(c_x)(x-a) = g'(c_x)(x-a),$$

pour un certain c_x compris entre a et x. (La formule des accroissements finis est valable puisque g est à valeurs réelles.) Pour $x \in I\backslash(a\}$, on a ainsi

$$\frac{g(x)}{x-a} = g'(c_x)$$

Comme $|c_x - a| \leqslant |x-a|$, on en déduit

$$\left|\frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}}\right| = \left|\frac{g'(c_x)}{(x-a)^n}\right| \leqslant \left|\frac{g'(c_x)}{(c_x-a)^n}\right|.$$

Mais comme $c_x \to a$ quand $x \to a$, on a $g'(c_x) \underset{x\to a}{=} o\big((c_x-a)^n\big)$. Donc on obtient

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{(x-a)^{n+1}} = 0,$$

ce qui est la conclusion souhaitée. □

Preuve du Théorème 2.4. Soit f une fonction définie au voisinage de a et n fois dérivable en a. Notons P le polynôme défini par

$$P(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Comme $\frac{d^l}{dx^l}\left((x-a)^k\right)_{x=a} = 0$ pour tout $k \neq l$ et $\frac{d^l}{dx^l}\left((x-a)^l\right)_{x=a} = l!$ (exo), on voit que

$$P^{(l)}(a) = f^{(l)}(a) \qquad \text{pour } l = 0, \dots, n.$$

Donc, si on pose

$$g(x) := f(x) - P(x),$$

alors (g est n fois dérivable en a et) $g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0$. D'après le Lemme 2.5, on a donc

$$g(x) \underset{x\to}{=} o\big((x-a)^n\big),$$

ce qui démontre le théorème. □

Remarque 2.6. La preuve de la formule de Taylor-Young a établi le résultat suivant : la partie principale $P(x)$ du DL_n de f en a est l'unique fonction polynomiale P de degré $\leqslant n$ telle que $P^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$ pour $k = 0, \dots, n$. On dit que P est le **polynôme de Taylor d'ordre n de f au point a.**

Corollaire 2.7. (formule de Taylor pour les polynômes*)*
Si f est un polynôme de degré n à coefficients réels ou complexes, alors on a pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, la formule "exacte"

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k.$$

Démonstration. C'est évident par la Remarque 2.6 : pour tout $a \in \mathbb{R}$ donné, f est égal à son polynôme de Taylor au point a. □

Exercice. Démontrer la formule de Taylor pour les polynômes de façon purement algébrique, sans utiliser la notion de développement limité.

COROLLAIRE 2.8. *Si f est une fonction dérivable en a, alors le* DL_1 *de f en a donne l'équation de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$.*

Démonstration. le DL_1 de f en a s'écrit $f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + o(x-a)$, et l'équation de la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$ est $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. $\square$

COROLLAIRE 2.9. (des DL à connaitre par coeur)

(1) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n) \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{1+x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+o(x^n).$$

(2) *Pour tout $n \in \mathbb{N}$,*

$$e^x \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n).$$

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$e^{\lambda x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda^k}{k!} x^k + o(x^n).$$

(3) *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Posons*

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \ , \quad \binom{\alpha}{1} := \alpha \quad \text{et} \quad \binom{\alpha}{k} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} \qquad \textit{pour } k \geqslant 2.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + o(x^n).$$

En particulier :

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \alpha x + o(x).$$

Démonstration. (1) La fonction $x \mapsto \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\infty, 1[$, avec $\left(\frac{1}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = (1-x)^{-2}$, $\left(\frac{1}{1-x}\right)'' = 2(1-x)^{-3}$, et par récurrence :

$$\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)} = k!\,(1-x)^{-k} \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$

En particulier, on a $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{(k)}(0) = k!$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, et donc, par la formule de Taylor-Young :

$$\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} x^k + o(x^n).$$

Comme $-x \to 0$ quand $x \to 0$, l'autre formule s'en déduit :

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-x)^k + o\big((-x)^n\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o(x^n).$$

(2) La fonction exponentielle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, avec $\exp^{(k)} = \exp$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier $\exp^{(k)}(0) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, ce qui donne (2) par la formule de Taylor-Young. Pour la formule plus générale, la preuve est la même : on *sait* que la fonction e_λ définie par $e_\lambda(x) := e^{\lambda x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $e'_\lambda(x) = \lambda e^{\lambda x}$ (si on ne le sait pas, le redémontrer en écrivant $\lambda = a + ib$) ; donc e_λ est $\mathcal{C}^\infty$ avec $e_\lambda^{(k)}(x) = \lambda^k e^{\lambda x}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. En particulier $e_\lambda^{(k)}(0) = \lambda^k$, et il ne reste qu'à appliquer la formule de Taylor-Young.

(3) La fonction f définie par $f(x) := (1+x)^\alpha$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, \infty[$, avec $f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$, et plus généralement $f^{(k)}(x) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$ pour $k \geqslant 2$. Donc $f(0) = 1$, $f'(0) = \alpha$ et $f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)$ pour $k \geqslant 2$. D'où le résultat par la formule de Taylor-Young. $\square$

Exercice. Soit $a \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer le DL_n en 0 de $\frac{1}{a+x}$.

COROLLAIRE 2.10. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{(2l)!} x^{2l} + o(x^{2n+1})$$

et

$$\sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!} x^{2l+1} + o(x^{2n+2}).$$

En particulier :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad \text{et} \qquad \sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^4).$$

Démonstration. On $\cos' = -\sin$, $\cos'' = -\cos$, $\cos''' = -\sin$, $\cos^{(4)} = \cos$; et de façon générale, pour $l \in \mathbb{N}$:

$$\cos^{(2l)} = (-1)^l \cos \qquad \text{et} \qquad \cos^{(2l+1)} = (-1)^{l+1} \sin .$$

Donc

$$\cos^{(2l)}(0) = (-1)^l \qquad \text{et} \qquad \cos^{(2l+1)}(0) = 0,$$

ce qui donne le DL annoncé pour $\cos(x)$.

De même, pour $l \in \mathbb{N}$ on a $\sin^{(2l)} = (-1)^l \sin$ et $\sin^{(2l+1)} = (-1)^l \cos$. Donc

$$\sin^{(2l)}(0) = 0 \qquad \text{et} \qquad \sin^{(2l+1)}(0) = (-1)^l,$$

ce qui donne le DL annoncé pour $\sin(x)$.

$\square$

COROLLAIRE 2.11. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a on a*

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{l=0}^{n} \frac{x^{2l}}{(2l)!} + o(x^{2n+1})$$

et

$$\mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{l=0}^{n} \frac{x^{2l+1}}{(2l+1)!} + o(x^{2n+2}).$$

En particulier,

$$\mathrm{ch}(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{sh}(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^4).$$

Démonstration. Exo. $\square$

2.3. Opérations sur les développements limités. En principe, la formule de Taylor-Young permet de déterminer le DL à l'ordre n n'importe quelle fonction n fois dérivable en un certain point a. Cependant, dans la pratique, appliquer la formule de Taylor-Young n'est pas toujours la meilleure façon de faire, car dériver n fois une fonction f compliquée peut prendre du temps. Il est souvent plus rapide de déterminer le DL de f en décomposant f à l'aide de fonctions plus simples. Dans cette section, on explique en détail les manipulations autorisées.

Pour simplifier les notations, on va considérer uniquement des DL en 0.

2.3.1. *Minimum vital.*

THÉORÈME 2.12. *Soient f et g deux fonctions n fois dérivables en 0, et notons $P(x)$ et $Q(x)$ les parties principales des DL_n de f et g en 0.*

(1) ***Somme*** *: On a $f(x)+g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+Q(x)+o(x^n)$; donc la partie principale du DL_n de $f+g$ en 0 est $P(x)+Q(x)$.*

(2) ***Produit*** *: On a $f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x)+o(x^n)$; donc, la partie principale du DL_n de fg en 0 s'obtient en calculant $P(x)Q(x)$ et en ne conservant que les termes de degré $\leqslant n$.*

(3) ***Inverse*** *: Si $g(0) \neq 0$, la partie principale du DL_n de $\frac{1}{g(x)}$ en 0* peut s'obtenir *en se ramenant au DL d'une fonction de la forme $\frac{1}{1+u(x)}$ où $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$.*

(4) ***Composition*** *: Si $f(0)=0$, alors $g(f(x)) \underset{x\to 0}{=} Q(P(x))+o(x^n)$; donc la partie principale du DL_n de $g(f(x))$ s'obtient en calculant $Q(P(x))$ et en ne conservant que les termes de degré $\leqslant n$.*

(5) ***Primitivation*** *: La partie principale du DL de $F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ à l'ordre $n+1$ en 0 est $\int_0^x P(t)\,dt$.*

(6) ***Dérivation*** *: Si $n \geqslant 2$, la partie principale du DL de $f'(x)$ à l'ordre $n-1$ en 0 est $P'(x)$.*

Démonstration. (1) On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x)+o(x^n)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} Q(x)+o(x^n)$. Donc, comme $o(x^n)+o(x^n)=o(x^n)$, on obtient

$$f(x)+g(x) = P(x)+Q(x)+o(x^n),$$

ce qui donne (1) puisque $P+Q$ est un polynôme de degré $\leqslant n$.

(2) On a

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &\underset{x\to 0}{=} \Big(P(x)+o(x^n)\Big)\Big(Q(x)+o(x^n)\Big) \\ &\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x) + \underbrace{\big(P(x)+Q(x)+o(x^n)\big)}_{\underset{0}{=} O(1)} \times o(x^n) \\ &\underset{x\to 0}{=} P(x)Q(x)+o(x^n). \end{aligned}$$

Le polynôme $P(x)Q(x)$ est de degré $\leqslant 2n$. En notant $A(x)$ le polynôme obtenu en ne conservant que les termes de degré $\leqslant n$ dans $P(x)Q(x)$, on a $P(x)Q(x) = A(x)+o(x^n)$ car $P(x)Q(x)-A(x)$ ne contient que des termes de degré $\geqslant n+1$. Ainsi, $f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} A(x)+o(x^n)$, ce qui démontre (2).

(3) Écrivons $Q(x) = d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n$, où $d_0 \neq 0$ par hypothèse. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{Q(x)+o(x^n)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{d_0}\,\frac{1}{1+\underbrace{d_1' x + \cdots + d_n' x^n + o(x^n)}_{=:u(x)}} \qquad \text{avec } d_k' := d_k/d_0.\end{aligned}$$

Comme le polynôme $A(x) := d_1' x + \cdots + d_n' x^n$ n'a pas de terme constant, $u(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Donc, en utilisant le DL_n de $\frac{1}{1+u}$ en 0, on peut écrire

$$\begin{aligned}\frac{1}{g(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{d_0}\,\frac{1}{1+u(x)} \\ &\underset{x\to 0}{=} \frac{1}{d_0}\left(1 - u(x) + u(x)^2 + \cdots + (-1)^n u(x)^n + o\big(u(x)^n\big)\right).\end{aligned}$$

Ensuite, on utilise (2) pour calculer les DL_n de $u(x)^2, \ldots, u(x)^n$, et on ajoute tout grâce à (1).

(4) Par définition de P et Q, on a $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$ et $g(u) \underset{u\to 0}{=} Q(u) + o(u^n)$.

Comme $f(0) = 0$, on sait que $f(x) \to 0$ quand $x \to 0$. Donc on peut prendre $u := f(x)$ dans le DL de g, ce qui donne

$$g\big(f(x)\big) \underset{x\to 0}{=} Q\big(f(x)\big) + o\big(f(x)^n\big).$$

En écrivant

$$Q(u) = \sum_{k=0}^{n} d_k u^k,$$

on a donc

$$g\big(f(x)\big) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k f(x)^k + o\big(f(x)^n\big).$$

Ensuite, $f(x) \underset{x\to 0}{=} P(x) + o(x^n)$. D'après (2), on a donc pour $k = 0, \ldots, n$:

$$f(x)^k \underset{x\to 0}{=} P(x)^k + o(x^n).$$

En particulier, comme $P(x) \underset{x\to 0}{=} O(x)$ puisque $P(0) = f(0) = 0$, on a $f(x)^n = O(x^n) + o(x^n) = O(x^n)$. Donc, on obtient

$$\begin{aligned}g(f(x)) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} d_k\big(P(x)^k + o(x^n)\big) + o(x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} d_k P(x)^k + o(x^n) \\ &= Q(P(x)) + o(x^n);\end{aligned}$$

ce qui termine la preuve de (3).

(6) La fonction f' est $n-1$ fois dérivable en 0, donc elle admet un DL à l'ordre $n-1$ en 0 car $n - 1 \geqslant 1$. On sait qu'on a $P^{(l)}(0) = f^{(l)}(0)$ pour $l = 0, \ldots, n$. Donc, pour $k = 0, \ldots, n-1$, on a $(P')^{(k)}(0) = P^{(k+1)}(0) = f^{(k+1)}(0) = (f')^{(k)}(0)$; et donc la partie principale du DL_{n-1} de f' est bien $P'(x)$.

(5) On peut le déduire de (6) : si on note $A(x)$ la partie principale du DL_{n+1} de F en 0, alors on doit avoir $A' = P$ puisque $F' = f$; et comme $A(0) = F(0) = 0$, cela entraine que $A(x) = \int_0^x P(t)\,dt$. □

Remarque. La partie (6) du théorème *n'est pas vraie* si $n = 1$. Par exemple, soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0) := 0$ et $f(x) := x^2 \sin(1/x)$ pour $x \neq 0$. Alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $f'(0) = 0$. Donc f admet un DL_1 en 0. Cependant, $f'(x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. Donc f' n'admet pas de DL_0 en 0.

Démonstration. Exo. □

Corollaire 2.13. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{(2l)!}\, x^{2l} + o(x^{2n+1}) \quad \text{et} \quad \sin(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{(2l+1)!}\, x^{2l+1} + o(x^{2n+2}).$$

Démonstration. Ces DL sont déjà connus (*cf* Corollaire 2.10) ; on va les retrouver en utilisant (1).

Traitons le cas de $\cos(x)$. L'idé est d'écrire

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

et d'utiliser les DL de e^{-x} et de e^{-ix}. On a

$$e^{ix} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(i)^k}{k!}\, x^k + o(x^{2n+1}) \qquad \text{et} \qquad e^{-ix} = \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{(-1)^k i^k}{k!}\, x^k + o(x^{2n+1}).$$

Donc

$$\begin{aligned} \cos(x) &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{2n+1} \frac{i^k + (-1)^k i^k}{2}\, \frac{x^{2k}}{k!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{l=0}^{n} i^{2l}\, \frac{x^{2l}}{(2l)!} + o(x^{2n+1}) \\ &= \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^l}{(2l)!}\, x^{2l} + o(x^{2n+1}). \end{aligned}$$

Le cas de $\sin(x)$ se traite de la même façon en écrivant

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\cdot$$

Les détails sont laissés en exo. □

Exercice. Retrouver les DL de $\mathrm{ch}(x)$ et de $\mathrm{sh}(x)$ en 0 en utilisant les DL de e^x et de e^{-x}.

Corollaire 2.14. *Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a*

$$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n) \qquad \text{et} \qquad \ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} -\sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n).$$

En particulier : $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ *et* $-\ln(1-x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$.

Démonstration. On utilise (5), *i.e.* la possibilité de “primitiver” un DL :

$$\begin{aligned}\ln(1+x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t}\\ &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k t^k + o(t^{n-1})\right) dt\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o(x^n);\end{aligned}$$

ce qui donne le DL annoncé. Le DL de $\ln(1-x)$ s'en déduit en changeant x en $-x$. □

Corollaire 2.15. *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).$$

En particulier : $\arctan(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + o(x^6)$.

Démonstration. On utilise à nouveau une “primitivation” :

$$\begin{aligned}\arctan(x) &= \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}\\ &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k (t^2)^k + O\big((t^2)^{n+1}\big)\right) dt\\ &= \int_0^x \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^{2k} + o\big(t^{2n+1}\big)\right) dt\\ &\underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o(x^{2n+2}).\end{aligned}$$

□

Exercice. Déterminer le DL de $\arcsin(x)$ à l'ordre 5 en 0.

Corollaire 2.16. *On a* $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{2}{15}x^5 + o(x^5)$

Démonstration. Comme $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$, on a

$$\begin{aligned}\tan(x) &\underset{x\to 0}{=} \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)}\\ &= \frac{x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)}{1-u(x)} \qquad \text{avec} \quad u(x) := \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5);\end{aligned}$$

et par ailleurs,

$$\frac{1}{1-u} \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + o(u^5).$$

De plus, comme $u(x) \underset{x\to 0}{=} O(x^2)$, on a $u(x)^k \underset{x\to 0}{=} O(x^{2k}) = o(x^5)$ pour tout $k \geqslant 3$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-u(x)} &= 1 + u(x) + u(x)^2 + o(x^5)\\ &= 1 + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\Big) + \Big(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\Big)^2 + o(x^5)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^4}{4} + o(x^5)\\ &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24} + o(x^5).\end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned}\tan(x) &= \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}\right)\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5x^4}{24}\right) + o(x^5)\\ &= x + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\right)x^3 + \Big(\frac{5}{24} - \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\Big)x^5 + o(x^5)\\ &= x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).\end{aligned}$$

$\square$

Autre preuve. On observe qu'on a

$$\tan(x) = -\big(\ln(\cos(x))\big)'$$

Pour obtenir le DL_5 de $\tan(x)$, il suffit donc de calculer le DL_6 de $\ln(\cos(x))$ et de dériver ce DL.

La calcul du DL de $\ln(\cos(x)$ se fait "par composition", *i.e.* en utilisant (4). On a

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + o(x^6) := 1 + u(x),$$

et

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} - \frac{u^4}{4} + \frac{u^5}{5} - \frac{u^6}{6} + o(u^6).$$

De plus, comme $u(x) = O(x^2)$, on a $u(x)^k \underset{x\to 0}{=} O(x^{2k}) = o(x^6)$ pour tout $k \geqslant 4$. Donc

$$\begin{aligned}&\ln(\cos(x))\\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{1}{2}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right)^3 + o(x^6)\\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{x^4}{8}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360}\right)^2 - \frac{x^6}{24}\left(1 - \frac{x^2}{12} + \frac{x^4}{360}\right)^3 + o(x^6)\\ &= \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720}\right) - \frac{x^4}{8}\left(1 - \frac{x^2}{6}\right) - \frac{x^6}{24} + o(x^6)\\ &= -\frac{x^2}{2} + \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{8}\right)x^4 + \left(-\frac{1}{720} + \frac{1}{48} - \frac{1}{24}\right)x^6 + o(x^6)\\ &= -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^6).\end{aligned}$$

Comme $\tan(x) = -\big(\ln(\cos(x))\big)'$, on obtient donc en utilisant (6) :

$$\tan(x) = x + \frac{4x^3}{12} + \frac{6x^5}{45} + o(x^5) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

□

Exercice. Déterminer le DL de $\mathrm{th}(x)$ à l'ordre 5 en 0.

2.3.2. *Complément pour le DL d'un quotient.* On va voir ici que le DL d'un quotient peut se calculer de manière "purement algébrique".

Lemme 2.17. *Soient P et Q deux polynômes, avec $Q(0) \neq 0$.*

(a) *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple de polynômes (A, B) tel que $P(x) = A(x)Q(x) + x^{n+1}B(x)$ avec $\deg(A) \leqslant n$. L'écriture $P(x) = A(x)Q(x) + x^{n+1}B(x)$ s'appelle la* ***division de P par Q à l'ordre n selon les puissances croissantes****, et on dit que A est le* ***quotient*** *de cette division.*

(b) *En fait, $A(x)$ est la partie principale du DL_n de $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en 0.*

Démonstration. (a) On montre seulement l'existence ; la preuve de l'unicité est laissée en exo. (Si on s'autorise à ne pas raisonner de façon entièrement algébrique, on peut aussi dire que l'unicité est une conséquence de (b).)

Écrivons $P(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_px^p$ et $Q(x) = d_0 + d_1x + \cdots + d_qx^q$. L'hypothèse $Q(0) \neq 0$ signifie que $d_0 \neq 0$. On va en fait montrer qu'il existe une suite de coefficients $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que si on pose $A_n(x) := a_0 + \cdots + a_nx^n$, alors $P(x) = A_n(x) + x^{n+1}B_{n+1}(x)$ pour un certain polynôme B_{n+1}.

Soit $a_0 := \frac{c_0}{d_0}$. Par définition, le terme constant de a_0Q est égal à celui de P. Donc le terme constant de $P - a_0Q$ est égal à 0, et donc on peut écrire $P(x) = a_0Q(x) + xB_1(x)$ pour un certain polynôme B_1.

Ensuite, on peut trouver un coefficient a_1 tel que $B_1(x) = a_1Q(x) + xB_2(x)$ pour un certain polynôme B_2. Alors $P(x) = a_0Q(x) + x\left(a_1Q(x) + xB_2(x)\right) = (a_0 + a_1x)Q(x) + x^2B_2(x)$. Et ainsi de suite.

(b) Comme $Q(0) \neq 0$, on a $Q(x) \neq 0$ au voisinage de 0, donc on peut écrire $P(x)/Q(x)$. Par définition de A, on a

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = A(x) + \frac{B(x)}{Q(x)}x^{n+1}.$$

De plus, comme la fonction $x \mapsto B(x)/Q(x)$ est continue en 0, elle est bornée au voisinage de 0, et donc $\frac{B(x)}{Q(x)}x^{n+1} \underset{0}{=} O(x^{n+1})$. En particulier

$$\frac{P(x)}{Q(x)} \underset{x\to 0}{=} A(x) + o(x^n),$$

ce qui prouve (b) puisque $\deg(A) \leqslant n$. □

Exemple. Division de $P(x) := x + 5$ par $Q(x) := x^3 + x^2 - 2$ à l'ordre 3 selon les puissances croissantes.

On procède exactement comme pour une division euclidienne, mais “à l’envers”, en écrivant $P(x)$ et $Q(x)$ selon les puissances croissantes de x : $P(x) = 5 + x$ et $Q(x) = -2 + x^2 + x^3$.

$$
\begin{array}{ccccccc|l}
5 & +x & & & & & & -2 \quad +x^2 \quad +x^3 \\
\cline{8-8}
5 & & -\frac{5}{2}\,x^2 & -\frac{5}{2}\,x^3 & & & & -\frac{5}{2} \quad -\frac{1}{2}\,x \quad -\frac{5}{4}\,x^2 \quad -\frac{1}{2}\,x^3 \\
\cline{1-4}
 & +x & +\frac{5}{2}\,x^2 & +\frac{5}{2}\,x^3 & & & & \\
 & +x & & -\frac{1}{2}\,x^3 & -\frac{1}{2}\,x^4 & & & \\
\cline{2-5}
 & & \frac{5}{2}\,x^2 & +\frac{1}{2}x^3 & +\frac{1}{2}\,x^4 & & & \\
 & & \frac{5}{2}\,x^2 & & -\frac{5}{4}\,x^4 & -\frac{5}{4}\,x^5 & & \\
\cline{3-6}
 & & & \frac{1}{2}\,x^3 & +\frac{7}{4}\,x^4 & +\frac{5}{4}\,x^5 & & \\
 & & & \frac{1}{2}\,x^3 & & -\frac{1}{2}\,x^5 & -\frac{1}{2}\,x^6 & \\
\cline{4-7}
 & & & & \frac{7}{4}\,x^4 & +\frac{7}{4}\,x^5 & +\frac{1}{2}\,x^6 &
\end{array}
$$

Ainsi, on voit que le quotient de la division selon les puissances croissantes à l’ordre 3 de $P(x) = x + 5$ par $Q(x) = 2 + x^2 + x^3$ est $A(x) = -\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\,x - \frac{5}{4}\,x^2 - \frac{1}{2}\,x^3$.

Proposition 2.18. *Soit $n \in \mathbb{N}$, et soient f et g des fonctions continues en 0 et admettant des* DL_n *en 0, de parties principales $P(x)$ et $Q(x)$. Si le terme constant du* DL *de g est $\neq 0$, i.e. $g(0) \neq 0$, alors f/g admet un* DL_n *en 0, dont la partie principale est le quotient de la division de $P(x)$ par $Q(x)$ à l’ordre n selon les puissances croissantes.*

Démonstration. Comme $g(0) \neq 0$ et que g est continue en 0, on a $g(x) \neq 0$ au voisinage de 0, et donc $f(x)/g(x)$ est bien défini au voisinage de 0. De plus, par définition de P et Q, on a

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{P(x) + o(x^n)}{Q(x) + o(x^n)}\cdot$$

Notons $A(x)$ le quotient le quotient de la division de $P(x)$ par $Q(x)$ à l’ordre n selon les puissances croissantes. On a donc $\deg(A) \leqslant n$ et $P(x) = A(x)Q(x)+x^{n+1}B(x)$ pour un certain polynôme B. En particulier, comme $B(x) \underset{x\to 0}{=} B(0) + o(1) \underset{0}{=} O(1)$, on a $P(x) \underset{x\to 0}{=} A(x)Q(x) + O(x^{n+1})$, et donc $P(x) \underset{x\to 0}{=} A(x)Q(x) + o(x^n)$.

Par conséquent

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{A(x)Q(x) + o(x^n)}{Q(x) + o(x^n)}\cdot$$

Ensuite, comme $Q(0) = g(0) \neq 0$, on peut écrire $\frac{1}{Q(x)} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{Q(0)} + o(1) = O(1)$, et donc

$$Q(x) + o(x^n) = Q(x)\left(1 + o\Big(\frac{x^n}{Q(x)}\Big)\right) = Q(x)(1 + o(x^n)).$$

De même,

$$A(x)Q(x) + o(x^n) = Q(x)\big(A(x) + o(x^n)\big)$$

On en déduit

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} &\underset{x\to 0}{=} \frac{Q(x)\big(A(x)+o(x^n)\big)}{Q(x)(1+o(x^n))} \\
&= (A(x)+o(x^n)) \times \frac{1}{1+o(x^n)} \\
&= (A(x)+o(x^n))(1+o(x^n)) \\
&= A(x)+o(x^n),
\end{aligned}
$$

ce qui termine la preuve puisque $\deg(A) \leqslant n$. □

Exemple. DL de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0.

On sait que $\sin(x) \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + o(x^5)$ et $\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)$. Comme $\cos(0) \neq 0$, le DL_5 de $\tan(x)$ en 0 est donc

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} A(x) + o(x^5),$$

où $A(x)$ est le quotient de la division de $P(x) := x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120}$ par $Q(x) := 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ à l'ordre 5 selon les puissances croissantes. Il ne reste qu'à effectuer cette division.

$$
\begin{array}{ccccc|ccc}
x & -\frac{1}{6}x^3 & +\frac{1}{120}x^5 & & & 1 & -\frac{1}{2}x^2 & +\frac{1}{24}x^4 \\ \cline{6-8}
x & -\frac{1}{2}x^3 & +\frac{1}{24}x^5 & & & x & +\frac{1}{3}x^3 & +\frac{2}{15}x^5 \\ \cline{1-3}
 & \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{30}x^5 & & & & & \\
 & \frac{1}{3}x^3 & -\frac{1}{6}x^5 & +\frac{1}{72}x^7 & & & & \\ \cline{2-4}
 & & \frac{2}{15}x^5 & -\frac{1}{72}x^7 & & & & \\
 & & \frac{2}{15}x^5 & -\frac{1}{15}x^7 & +\frac{1}{180}x^9 & & & \\ \cline{3-5}
 & & & \frac{19}{360}x^7 & -\frac{1}{180}x^9 & & &
\end{array}
$$

Ainsi $A(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5$, et donc

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

Exercice. Déterminer le DL de $\mathrm{th}(x)$ à l'ordre 5 en 0 en utilisant une division selon les puissances croissantes.

2.3.3. *Complément sur la primitivation.* Le résultat suivant montre qu'on peut toujours "primitiver" un DL, même si on ne se place pas sous le hypothèses de la formule de Taylor-Young.

Proposition 2.19. *Soit f une fonction continue sur un intervalle I contenant 0, pas forcément n fois dérivable en 0, mais admettant un DL_n en 0, de partie principale $p(x)$. Si F est une primitive de f sur I, alors F admet un DL à l'ordre $n+1$ en 0, dont la partie principale s'obtient en "primitivant" $p(x)$, i.e. $P(x) = c_0 + \int_0^x p(t)\,dt$, où $c_0 := F(0)$.*

Démonstration. Par hypothèse, on peut écrire $f(t) = p(t) + t^n u(t)$, où $u(t) \to 0$ quand $t \to 0$. Donc $F(x) = c_0 + \int_0^x f(t)\,dt = c_0 + \int_0^x p(t)\,dt + \int_0^x t^n u(t)\,dt$. Par conséquent, il suffit de montrer que $\int_0^x t^n u(t)\,dt \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Par hypothèse sur u, on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|u(t)| \leqslant \varepsilon$ pour tout t vérifiant $|t| \leqslant \delta$. Alors,

$$\forall x \in [0, \delta] \ : \ \left| \int_0^x t^n u(t)\,dt \right| \leqslant \int_0^x t^n |u(t)|\,dt \leqslant \varepsilon \int_0^x t^n dt = \varepsilon\, \frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant \varepsilon\, x^{n+1}.$$

Comme $\varepsilon > 0$ est arbitraire, on en déduit que $\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n u(t)\,dt \to 0$ quand $x \to 0^+$. On montre de même (exo) que $\frac{1}{x^{n+1}} \int_0^x t^n u(t)\,dt \to 0$ quand $x \to 0^-$. Ainsi, on a bien $\int_0^x t^n u(t)\,dt \underset{x\to 0}{=} o(x^{n+1})$. □

Exercice. Soit I un intervalle contenant 0, et soient α, β deux fonctions continues sur I. On suppose que $\alpha(t) \underset{t\to 0}{=} o(\beta(t))$. Montrer que $\int_0^x \alpha(t)\,dt \underset{x\to 0}{=} o\left(\int_0^x \beta(t)\,dt\right)$.

2.4. DL d'une fonction réciproque.

LEMME 2.20. *Soient I et J deux intervalles ouverts contenant 0, et soit $f : I \to J$ une bijection telle que $f(0) = 0$. Soit aussi $n \in \mathbb{N}^*$. Si f est n fois dérivable sur I avec $f'(x) \neq 0$ pour tout $x \in I$, alors $g := f^{-1}$ est n fois dérivable sur J, donc admet un* DL_n *en* 0.

Démonstration. On l'a déjà démontré. Comme f' ne s'annule pas, on sait que g est dérivable sur J avec $g' = \frac{1}{f'\circ g}\cdot$ Si $n \geqslant 2$, cette formule montre que g' est dérivable sur J puisque f' est au moins 2 fois dérivable et g est dérivable. Donc g est 2 fois dérivable. Si $n \geqslant 3$, la même formule montre maintenant que g est 3 fois dérivable ; et ainsi de suite. □

EXEMPLE. DL de $\tan(x)$ à l'ordre 5 en 0 (encore !)

L'idée est d'écrire qu'on a $\arctan(\tan(x)) = x$ au voisinage de 0, et d'utiliser le DL de la fonction arctan.

Comme la fonction tan est impaire, son DL_5 en 0 est de la forme

$$\tan(x) \underset{x\to 0}{=} ax + bx^3 + cx^5 + o(x^5).$$

On va déterminer a, puis b, puis c en écrivant $x = \arctan(\tan(x))$ et en utilisant les DL de $\tan(x)$ et $\arctan(u)$ à l'ordre 1, puis 3, puis 5 en 0.

On a $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} ax + o(x)$ et $\arctan(u) \underset{u\to 0}{=} u + o(u)$; donc

$$x = \arctan(\tan(x)) = ax + o(x),$$

ce qui donne $a = 1$ par unicité des coefficients d'un DL.

Maintenant, on a $\tan(x) = x + bx^3 + o(x^3)$ et $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + o(u^3)$; donc

$$\begin{aligned} x = \arctan(\tan(x)) &= (x + bx^3) - \frac{1}{3}\,(x + bx^3)^3 + o(x^3) \\ &= x + \left(b - \frac{1}{3}\right) x^3 + o(x^3), \end{aligned}$$

ce qui donne $b = \frac{1}{3}\cdot$

On a à présent $\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + cx^5 + o(x^5)$, et $\arctan(u) = u - \frac{u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + o(u^5)$. Donc

$$\begin{aligned}
x &= \arctan(\tan(x)) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3} + cx^5\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{x^3}{3} + cx^5\right)^3 + \frac{1}{5}\left(x + \frac{x^3}{3} + cx^5\right)^5 + o(x^5) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3} + cx^5\right) - \frac{x^3}{3}\left(1 + \frac{x^2}{3} + cx^4\right)^3 + \frac{x^5}{5}\left(1 + \frac{x^2}{3} + cx^4\right)^5 + o(x^5) \\
&= \left(x + \frac{x^3}{3} + cx^5\right) - \frac{x^3}{3}(1 + x^2) + \frac{x^5}{5} + o(x^5) \\
&= x + \left(c - \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right)x^5 + o(x^5);
\end{aligned}$$

ce qui donne $c = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}\cdot$ Ainsi, on obtient bien (heureusement)

$$\tan(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2}{15}x^5 + o(x^5).$$

2.5. Petit résumé de ce qu'il faut savoir et savoir faire.

- Les DL en 0 à connaitre impérativement par coeur :

$$\frac{1}{1 \pm u}\ ; \quad e^u\ ; \quad (1+u)^\alpha.$$

- Les DL en 0 qu'il est bon de connaitre par coeur, et à savoir retrouver très vite si on les a oubliés, ou bien avec la formule de Taylor-Young ou bien en utilisant le DL de l'exponentielle :

$$\sin(x)\ ,\ \cos(x)\ ; \quad \mathrm{ch}(x)\ ,\ \mathrm{sh}(x).$$

- Les DL en 0 qu'il est bon de connaitre par coeur, et à savoir retrouver très vite en primitivant si on les a oubliés :

$$\ln(1 \pm u)\ ; \quad \arctan(u).$$

- Savoir calculer des DL de sommes de produits et de quotients (avec les deux méthodes pour le DL d'un quotient : "à la main", ou en utilisant une division selon les puissances croissantes).
- Savoir composer deux DL.

3. Exemples d'utilisation des DL

3.1. Calculs de limites et recherche d'équivalents.

Exemple 1. On a $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{3}\cdot$

Démonstration. Comme $\lim_{x\to 0} \frac{1}{\sin(x)^2} = \infty = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}$, on a une indétermination de la forme $\infty - \infty$. Pour lever cette indétermination, on va faire un DL en 0 de

$\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2}$ selon les puissances de $\frac{1}{x}\cdot$ On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sin(x)} &= \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)} \\ &= \frac{1}{x}\frac{1}{1 - \frac{x^2}{6} + o(x^2)} \\ &= \frac{1}{x}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\frac{1}{(\sin(x))^2} &= \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{6} + o(x^2)\right)^2 \\ &= \frac{1}{x^2}\left(1 + \frac{x^2}{3} + o(x^2)\right) \\ &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{3} + o(1).\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient

$$\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} + o(1),$$

ce qui est le résultat annoncé. □

Variante. On écrit $\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 - \sin(x)^2}{x^2\sin(x)^2}$, ce qui entraine que

$$\frac{1}{\sin(x)^2} - \frac{1}{x^2} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{x^2 - \sin(x)^2}{x^4}$$

car $\sin(x) \sim x$ quand $x \to 0$. Puis on fait un DL de $x^2 - \sin(x)^2$ à l'ordre 4. Les détails sont laissés en exo (ce sont presque les mêmes calculs que précédemment).

□

Exemple 2. Si $b, c, b', c' \in \mathbb{R}$, alors

$$\sqrt{x^2 + bx + c} - \sqrt{x^2 + b'x + c'} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{b - b'}{2}\cdot$$

Si $b, c, c' \in \mathbb{R}$ et $c \neq c'$, alors

$$\sqrt{x^2 + bx + c} - \sqrt{x^2 + bx + c'} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{c - c'}{2x}\cdot$$

Démonstration. On va faire des "développements asymptotiques" de $\sqrt{x^2 + bx + c}$ et $\sqrt{x^2 + b'x + c'}$, de la forme

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2 + bx + c} &\underset{x\to+\infty}{=} \alpha x + \beta + \frac{\gamma}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right), \\ \sqrt{x^2 + b'x + c'} &\underset{x\to+\infty}{=} \alpha' x + \beta' + \frac{\gamma'}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

Si $x > 0$, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+bx+c} &= x\sqrt{1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}} \\
&= x\left(1+\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)^{1/2} \\
&\underset{x\to\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)^2+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to\infty}{=} x\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{x}+\frac{c}{x^2}\right)-\frac{1}{8}\frac{b^2}{x^2}+o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\
&\underset{x\to\infty}{=} x+\frac{b}{2}+\left(\frac{c}{2}-\frac{b^2}{8}\right)\times\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).
\end{aligned}$$

De même

$$\sqrt{x^2+b'x+c'} \underset{x\to\infty}{=} x+\frac{b'}{2}+\left(\frac{c'}{2}-\frac{b'^2}{8}\right)\times\frac{1}{x}+o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Donc

$$\begin{aligned}
&\sqrt{x^2+bx+c}-\sqrt{x^2+b'x+c'} \\
&\qquad \underset{x\to\infty}{=} \frac{b-b'}{2}+\left(c-c'-4(b^2-b'^2)\right)\times\frac{1}{2x}+o\left(\frac{1}{x}\right);
\end{aligned}$$

d'où on déduit immédiatement les résultats annoncés. □

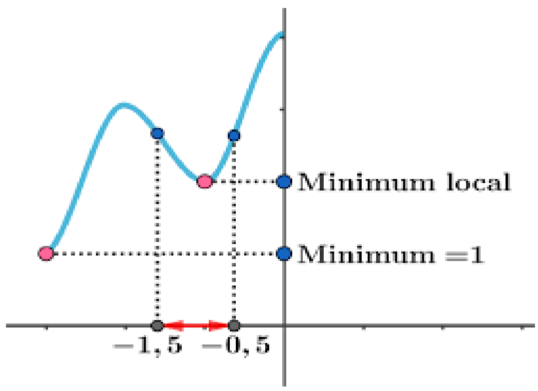
3.2. Extrema.

Définition 3.1. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, soit $f : I \to \mathbb{R}$, et soit $x_0 \in I$.*

(1) *On dit que f possède un **maximum** en x_0 si $\forall x \in I \ : \ f(x) \leqslant f(x_0)$.*

(2) *On dit que f possède un **maximum local** en x_0 si*
- *x_0 est intérieur à I ;*
- *on a $f(x) \leqslant f(x_0)$ au voisinage de x_0, autrement dit : il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[: \ f(x) \leqslant f(x_0)$*

*On définit de même les notions de **minimum** et de **minimum local**.*



Lemme 3.2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$.*

(1) *Si f possède un maximum en a et est dérivable en a, alors $f'(a) \leqslant 0$; et si f possède un minimum en a, alors $f'(a) \geqslant 0$. De même, si f possède un maximum en b, alors $f'(b) \geqslant 0$; et si f possède un minimum en b, alors $f((b) \leqslant 0$.*

(2) *Soit $x_0 \in]a, b[$, et supposons f deux fois dérivable en x_0.*

  (a) *Si f possède un maximum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \leqslant 0$. Si f possède un minimum local en x_0, alors $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) \geqslant 0$.*

  (b) *Soit $x_0 \in]a, b[$. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$, alors f possède un maximum local en x_0. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors f possède un minimum local en x_0.*

Démonstration. (1) Si f possède un maximum en a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leqslant 0$ pour tout $x \in]a, b]$ puisque $f(x) - f(a) \leqslant 0$ et $x - a > 0$, et donc $f'(a) \leqslant 0$ en faisant $x \to a^+$; et si f possède un minimum en a, alors $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \geqslant 0$ pour tout $x \in]a, b]$ et donc $f'(a) \geqslant 0$. Mêmes démonstrations au point b.

(2a) Supposons que f possède un maximum local en x_0 : on a donc $\delta > 0$ tel que $f(x) \leqslant f(x_0)$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$. En appliquant (1) sur $[x_0, x_0 + \delta]$ et sur $[x_0 - \delta, x_0]$ au lieu de $[a, b]$, on obtient $f'(x_0) \leqslant 0$ et $f'(x_0) \geqslant 0$, donc $f'(x_0) = 0$. Donc le DL à l'ordre 2 de f en x_0 s'écrit

$$f(x) \underset{x \to x_0}{=} f(x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + o\big((x - x_0)^2\big).$$

Donc

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{(x - x_0)^2} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{f''(x_0)}{2}.$$

Comme $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} \leqslant 0$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \backslash (x_0\}$ puisque $f(x) \leqslant f(x_0)$ et $(x - x_0)^2 \geqslant 0$, on en déduit que $f''(x_0) \leqslant 0$. De même, on obtient $f''(x_0) \geqslant 0$ si f possède un minimum local en x_0.

(2b) Supposons que $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$. Par la preuve de (2a), $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} \xrightarrow{x \to x_0} \frac{f''(x_0)}{2} > 0$. On a donc $\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} > 0$ pour $x \neq x_0$ assez proche de x_0, disons pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \backslash \{x_0\}$, et donc $f(x) - f(x_0) > 0$ pour $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \backslash \{x_0\}$ puisque $(x - x_0)^2 > 0$. On a ainsi $f(x) \geqslant f(x_0)$ pour tout $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, ce qui prouve que f possède un minimum local en x_0. On montre de même que f possède un maximum local en x_0 si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) < 0$. □

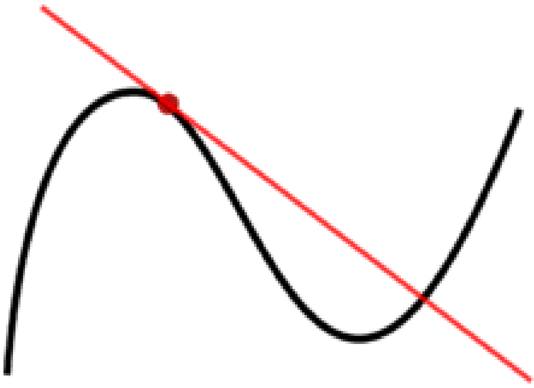
3.3. Position du graphe d'une fonction par rapport à sa tangente.

LEMME 3.3. *Soit f une fonction à valeurs réelles définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$, continue en a et admettant un* DL *à l'ordre 3 au point a,*

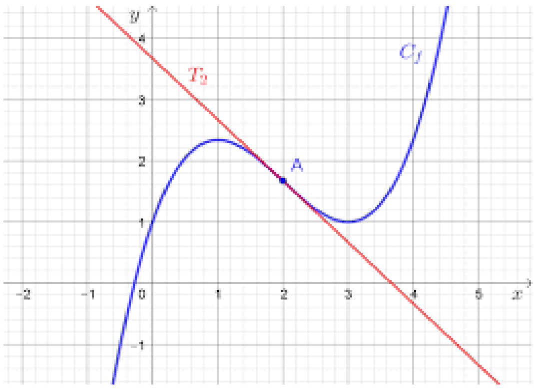
$$f(x) \underset{x \to a}{=} c_0 + c_1(x - a) + c_2(x - a)^2 + c_3(x - a)^3 + o\big((x - a)^3\big).$$

On note $\mathcal{C}_f$ le graphe de f, et Δ la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point $(a, f(a))$.

(1) *Si $c_2 \neq 0$, alors $\mathcal{C}_f$ reste du même côté de Δ au voisinage de a, au dessus si $c_2 > 0$ et en dessous si $c_2 < 0$.*



(2) *Si $c_2 = 0$ et $c_3 \neq 0$, alors $\mathcal{C}_f$ traverse Δ.*



Démonstration. La droite Δ a pour équation $y = c_0 + c_1(x-a)$; donc il s'agit d'étudier le signe de $\varphi(x) := f(x) - \big(c_0 + c_1(x-a)\big)$ au voisinage de a.

Par hypothèse, on a

$$\varphi(x) \underset{x\to a}{=} c_2(x-a)^2 + c_3(x-a)^3 + o\big((x-a)^3\big).$$

(1) Supposons $c_2 \neq 0$. Alors $\varphi(x) \underset{x\to a}{\sim} c_2(x-a)^2$. Comme $(x-a)^2 \geqslant 0$, on en déduit que $\varphi(x)$ reste de même signe au voisinage de a ; autrement dit, $\mathcal{C}_f$ reste du même côté de Δ au voisinage de a (au dessus de Δ si $c_2 > 0$, et en dessous si $c_2 < 0$).

(2) Supposons $c_2 = 0$ et $c_3 \neq 0$. Alors $\varphi(x) \underset{x\to a}{\sim} c_3(x-a)^3$. Comme $(x-a)^3$ change de signe en a, on en déduit que $\varphi(x)$ change de signe en a ; autrement dit, $\mathcal{C}_f$ traverse Δ. □

Corollaire 3.4. *Supposons que f soit 3 fois dérivable en a. Si $f''(a) \neq 0$, alors $\mathcal{C}_f$ reste du même côté de Δ au voisinage de a, au dessus si $f''(a) > 0$ et en dessous si $f''(a) < 0$. Si $f''(a) = 0$ et $f'''(a) \neq 0$, alors $\mathcal{C}_f$ traverse Δ au point a.*

Exemples. Les graphes des fonctions sin, tan, arcsin et arctan traversent leurs tangentes en $(0,0)$. Le graphe de la fonction cos traverse sa tangente en $(\pi/2, 0)$ car $\cos''(\pi/2) = -\cos(\pi/2) = 0$ et $\cos'''(\pi/2) = \sin(\pi/2) \neq 0$. Pour tout $a \in]0,\pi[$, le graphe de la fonction sin est en dessous de sa tangente en $(a, \sin(a))$ au voisinage de a car $\sin''(a) = -\sin(a) < 0$.

Remarque. La même démonstration fournit un résultat plus général. Supposons que f soit continue en a et admette un DL_n au point a avec $n \geqslant 3$,

$$f(x) \underset{x\to a}{=} c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + o\big((x-a)^n\big),$$

où les coefficients $c_2, \ldots, c_n$ ne valent pas tous 0. Soit m le plus petit entier $\geqslant 2$ tel que $c_m \neq 0$. Alors :

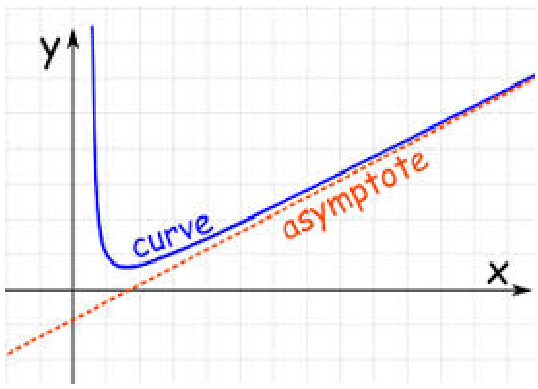
- si m est *pair*, $\mathcal{C}_f$ reste du même côté de Δ au voisinage de a, au dessus si $c_m > 0$ et en dessous si $c_m < 0$;
- si m est *impair*, $\mathcal{C}_f$ traverse Δ au point a.

3.4. Recherche d'asymptotes.

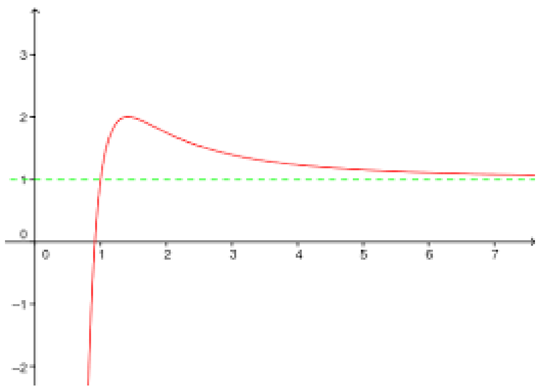
Définition 3.5. *Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$, et soit Δ une droite d'équation $y = ax + b$. On dit que Δ est* ***asymptote au graphe de f en $+\infty$*** *si $f(x) - (ax+b) \to 0$ quand $x \to +\infty$; autrement dit, si on peut écrire*

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + o(1).$$

Définition analogue pour une asymptote en $-\infty$.



Remarque. Si $f(x) \to l$ quand $x \to +\infty$, alors la droite $y = l$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$. *Idem* en $-\infty$.



Exemple 1. Soient $b, c \in \mathbb{R}$, et soit f la fonction définie par

$$f(x) := \sqrt{x^2 + bx + c}.$$

La droite Δ d'équation $y = x + \frac{b}{2}$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$. De plus, si $b^2 - 4c > 0$ alors le graphe de f est en dessous de Δ au voisinage de $+\infty$, et si $b^2 - 4c < 0$ alors le graphe de f est au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$.

Démonstration. On a démontré plus haut que

$$\begin{aligned}\sqrt{ax^2+bx+c} &\underset{x\to\infty}{=} x + \frac{b}{2} + \left(\frac{c}{2} - \frac{b^2}{8}\right) \times \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &\underset{x\to\infty}{=} x + \frac{b}{2} + \frac{4c-b^2}{8x} + o\left(\frac{1}{x}\right).\end{aligned}$$

De là, on obtient "immédiatement" les résultats annoncés (exo). □

Exercice. Comment se situe le graphe de f par rapport à Δ si $b^2 - 4c = 0$?

EXEMPLE 2. Soit f la fonction définie par

$$f(x) := \frac{x^2}{x+1}\, e^{1/x} - 2x\ln(1 + 1/x)$$

La droite Δ d'équation $y = x - 2$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$, et le graphe de f est au dessus de Δ au voisinage de $+\infty$

Démonstration. On cherche une développement asymptotique de $f(x)$ de la forme

$$f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right),$$

ce qui donnera l'asymptote $y = ax + b$, et la position par rapport à cette asymptote si $c \neq 0$.

Pour cela, on va chercher un développement asymptotique de ce type pour $\frac{x^2}{x+1}\, e^{1/x}$ et pour $x\ln(1 + 1/x)$. Il s'agit donc de trouver

- un DL de $\frac{1}{1+x} e^{1/x}$ selon les puissances de $1/x$, à l'ordre 3 (car on doit le multiplier par x^2),
- un DL de $\ln(1 + 1/x)$ selon les puissances de $1/x$, à l'ordre 2 (car on multiplie par x).

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x}\, e^{1/x} &= \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+1/x}\, e^{1/x} \\ &= \frac{1}{x}\left[\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^2}\right) + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right] \\ &= \frac{1}{x}\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{x} + \frac{1}{2x^3} + o\left(1x^3\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{x^2}{x+1}\, e^{1/x} = x + \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Et par ailleurs

$$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right),$$

donc

$$x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 1 - \frac{1}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right).$$

Ainsi, on obtient

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{2x} - 2\left(1 - \frac{1}{2x}\right) + o\left(\frac{1}{x}\right) \\ &= x - 2 + \frac{3}{2x} + o\left(\frac{1}{x}\right). \end{aligned}$$

On peut donc conclure que la droite d'équation $y = x - 2$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$, et que le graphe de f est au dessus de cette asymptote au voisinage de $+\infty$.

$\square$

Chapitre 3

Calculs de primitives

1. Généralités sur les primitives

Dans tout ce qui suit,

$$I \text{ est un intervalle de } \mathbb{R}.$$

Définition 1.1. *Soit $f : I \to \mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $F = I \to \mathbb{C}$ est une* ***primitive de f sur*** *I si F est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$ pour tout $x \in I$.*

Remarque 1.2. Si f admet une primitive sur I, alors elle admet une *infinité* de primitives sur I : étant donné une primitive F_0 de f sur I, les primitives de f sur I sont toutes les fonctions de la forme $F(x) = F_0(x) + c$, où c est une constante.

Démonstration. Il est clair que toute fonction de la forme $F(x) = F_0(x)+c$ est une primitive de f sur I, puisque $F' = F_0' = f$. Inversement, si F est une primitive de f sur I, alors $(F-F_0)' = F' - F_0' = f - f = 0$, donc la fonction $\phi := F - F_0$ est constante sur l'intervalle I par le théorème des accroissements finis appliqué aux fonctions à valeurs réelles $\mathrm{Re}(\phi)$ et $\mathrm{Im}(\phi)$, et donc F est de la forme $F(x) = F_0(x) + c$. □

On admettra le théorème suivant, qui suppose qu'on ait donné au préalable une définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction continue sur un segment... Ce théorème a en fait déjà utilisé au Chapitre 1 quand on a "défini" la fonction ln.

Théorème 1.3. (théorème fondamental de l'analyse)

(1) *Si $f : I \to \mathbb{C}$ est une fonction continue et si on se donne $a \in I$, la fonction F_0 définie par $F_0(x) := \int_a^x f(t)\,dt$ est une primitive de f sur I ; plus précisément, c'est l'unique primitive de f sur I vérifiant $F_0(a) = 0$.*

(2) *Si $f : I \to \mathbb{C}$ est continue et si $a, b \in I$, alors*

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a) =: \big[F\big]_a^b,$$

où F est n'importe quelle primitive de f sur I.

Preuve de (2). Si F est une primitive quelconque de f sur I, alors $F(x) = F_0(x)+c$ pour une certaine constante c ; donc

$$\big[F\big]_a^b = (F_0(b) + c) - (F_0(a) + c) = F_0(b) - F_0(a) = F_0(b) = \int_a^b f(t)\,dt.$$

□

Corollaire 1.4. *Toute fonction continue $f : I \to \mathbb{C}$ possède des primitives.*

Démonstration. C'est clair par le théorème ; mais bien entendu, ce n'est *pas du tout* un résultat évident ! □

COROLLAIRE 1.5. *Si $F : I \to \mathbb{C}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, et si on se donne $x_0 \in I$, alors*

$$\forall x \in I \ : \ F(x) = F(x_0) + \int_{x_0}^{x} F'(t)\, dt.$$

Démonstration. Par le théorème appliqué à la fonction continue $f := F'$ et à sa primitive F, on a $\int_{x_0}^{x} F'(t)\, dt = \big[F\big]_{x_0}^{x} = F(x) - F(x_0)$. □

EXEMPLES. Pour tout $x \in]0, \infty[$, on a

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{dt}{t};$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\arctan(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2};$$

et pour tout $x \in]-1, 1[$, on a

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Exercice. Caculer $\lim\limits_{\alpha \to 1^-} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

NOTATION. Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction *continue* sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$. La notation

$$\int f(x)\, dx \qquad \text{(sans bornes d'intégration)}$$

désigne *toutes les primitives de la fonction f.*

Ainsi, quand on écrit

"$\int f(x)\, dx = \mathit{truc}$ sur I",

cela signifie :

"les primitives de f sur I sont de la forme *truc*"

Exemple 1. On a $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + \mathit{cte}$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exemple 2. Sur $I =]0, \infty[$, on a $\int \frac{dx}{x} = \ln(x) + \mathit{cte}$, et sur $I =]-\infty, 0[$, on a $\int \frac{dx}{x} = \ln(|x|) + \mathit{cte}$.

ATTENTION. La notation $\int f(x)\, dx$ est commode, mais il faut la manipuler avec précaution : $\int f(x)\, dx$ n'est ni un nombre, ni une fonction ; c'est une façon de désigner une *famille de fonctions.*

2. Petite liste de primitives à connaitre impérativement

(1) Si $n \in \mathbb{N}$, alors

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + cte \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

(2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq -1$, alors

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + cte \qquad \text{sur }]0, \infty[.$$

Exemple 1. $\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{1/2} dx = \frac{1}{1/2+1} x^{1/2+1} + cte = \frac{2}{3} x^{3/2} + cte.$

Exemple 2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int x^{-3/2} dx = \frac{1}{-3/2+1} x^{-3/2+1} + cte = -\frac{2}{\sqrt{x}} + cte.$

(3) Si n est un entier $\geqslant 2$, alors

$$\int \frac{dx}{x^n} = -\frac{1}{(n-1)} \frac{1}{x^{n-1}} + cte \qquad \text{sur }]-\infty, 0[\text{ et sur }]0, \infty[.$$

Pour le retrouver : on écrit $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$.

Exemple. $\int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + cte.$

(4) Si $\lambda \in \mathbb{C}$ et $\lambda \neq 0$, alors

$$\int e^{\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + cte \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

Exemple d'utilisation. Calcul des primitives de $\cos(ax)e^{bx}$ sur $\mathbb{R}$, où $a, b \in \mathbb{R}$ et $(a, b) \neq (0, 0)$.

On a $\cos(ax)e^{bx} = \operatorname{Re}\big(e^{iax}e^{bx}\big) = \operatorname{Re}\big(e^{(b+ia)x}\big)$. Donc

$$\int \cos(ax)e^{bx} dx = \operatorname{Re}\left(\int e^{(b+ia)x} dx\right) = \operatorname{Re}\left(\frac{1}{b+ia} e^{(b+ia)x}\right) + cte.$$

Ensuite,

$$\begin{aligned}\frac{1}{b+ia} e^{(b+ia)x} &= \frac{b-ia}{b^2+a^2} e^{bx} (\cos(ax) + i \sin(ax)) \\ &= \frac{e^{bx}}{a^2+b^2} \Big(\big(b\cos(ax) + a\sin(ax)\big) + i\big(-a\cos(ax) + b\sin(ax)\big)\Big);\end{aligned}$$

donc on obtient

$$\int \cos(ax)e^{bx} dx = \frac{e^{bx}}{a^2+b^2} \big(b\cos(ax) + a\sin(ax)\big) + cte.$$

(5) Si $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\lambda \neq 0$, alors (sur $\mathbb{R}$)

$$\int \cos(\lambda x)\, dx = \frac{1}{\lambda} \sin(\lambda x) + cte,$$

$$\int \sin(\lambda x)\, dx = -\frac{1}{\lambda} \cos(\lambda x) + cte.$$

(6) Si $a \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, alors

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\arctan\Big(\frac{x}{a}\Big) + cte \qquad \text{sur } \mathbb{R}.$$

En effet : on a

$$\begin{aligned}\Big(\arctan\Big(\frac{x}{a}\Big)\Big)' &= \frac{1}{a}\arctan'\Big(\frac{x}{a}\Big)\\ &= \frac{1}{a}\times\frac{1}{1+\big(\frac{x}{a}\big)^2}\\ &= \frac{a}{a^2+x^2}\cdot\end{aligned}$$

3. "Formes usuelles" à retenir

Le fait suivant montre qu'une fonction peut se primitiver "de tête" si on arrive à l'écrire sous une certaine forme.

FAIT 3.1. *Si $u : I \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et si f est une fonction continue sur un intervalle contenant $u(I)$, alors (sur I)*

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = F(u(x)) + cte,$$

où F est n'importe quelle primitive de f.

Démonstration. C'est évident puisque $\big(F(u(x)\big)' = F'(u(x))u'(x) = f(u(x))u'(x)$. □

REMARQUE. Le Fait formalise ce qu'on pourrait appeler la méthode de **primitivation par changement de variable**. Si on pose

$$u := u(x),$$

alors, avec la notation "des physiciens", $u'(x) = \frac{du}{dx}\cdot$ On peut donc écrire

$$du = u'(x)dx;$$

et on en déduit

$$\int f(u(x))\,u'(x)dx = \int f(u)\,du = F(u) + cte = f(u(x)) + cte.$$

CONSÉQUENCE 1. Si $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $u(x) > 0$ sur I, alors

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \ln(u(x)) + cte.$$

Démonstration. On applique le Fait avec $f(u) := 1/u$ (définie sur $]0,\infty[$) et $F(u) := \ln(u)$. Si on préfère, on pose $u := u(x)$, donc $du = u'(x)dx$ et donc

$$\int \frac{u'(x)}{u(x)}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln(u) + cte = \ln(u(x)) + cte.$$

□

Exemple 1. Primitives de $\frac{x}{x^2+3}$ sur $\mathbb{R}$.

On a
$$\frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\,\frac{2x}{x^2+3} = \frac{1}{2}\,\frac{u'(x)}{u(x)} \qquad \text{où } u(x) = x^2+3,$$
donc $\int \frac{x}{x^2+3}\,dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+3) + cte$ (car x^2+3 est toujours > 0).

Exemple 2. Primitives de $\tan(x)$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On a $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\tan(x)} = -\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = \cos(x)$. Comme $\cos(x) > 0$ sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, on en déduit
$$\int \tan(x)\,dx = -\ln(\cos x) + cte \qquad \text{sur }]0, \tfrac{\pi}{2}[.$$

Conséquence 2. Si $n \in \mathbb{N}$ et si $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors
$$\int u(x)^n u'(x)\,dx = \frac{1}{n+1}\,u(x)^{n+1} + cte.$$

Démonstration. On applique le Fait avec $f(u) := u^n$ (définie sur $\mathbb{R}$) et $F(u) := \frac{1}{n+1}\,u^{n+1}$. Si on préfère, on pose $u := u(x)$ et on écrit
$$\int u(x)^n u'(x)\,dx = \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + cte = \frac{1}{n+1}\,u(x)^{n+1} + cte$$
□

Exemple. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\int (\sin x)^n \cos x\,dx = \frac{1}{n+1}\,(\sin x)^{n+1} + cte \qquad \text{et}$$
$$\int (\cos x)^n \sin x\,dx = -\frac{1}{n+1}\,(\cos x)^{n+1} + cte.$$

Conséquence 3. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ avec $\alpha \neq -1$. Si $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ et si $u(x) > 0$ pour tout $x \in I$, alors
$$\int u(x)^\alpha u'(x)\,dx = \frac{1}{\alpha+1}\,u(x)^{\alpha+1} + cte.$$

Démonstration. On applique le Fait avec $f(u) := u^\alpha$ (définie sur $]0, \infty[$) et $F(u) := \frac{1}{\alpha+1}\,u^{\alpha+1}$. □

Exemple. Primitives de $\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$ sur $\mathbb{R}$.

On a
$$\begin{aligned}
\int \frac{x}{\sqrt{x^2+3}}\,dx &= \frac{1}{2}\int (x^2+3)^{-1/2} \times 2x dx \\
&= \frac{1}{2}\int u^{-1/2} du \qquad \text{avec } u = x^2+3 \\
&= \frac{1}{2} \times \frac{1}{(-1/2)+1} u^{-(1/2)+1} + cte \\
&= \sqrt{u} + cte \\
&= \sqrt{x^2+3} + cte.
\end{aligned}$$

Conséquence 4. Si $u : I \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int e^{u(x)} u'(x)\, dx = e^{u(x)} + cte.$$

Démonstration. On applique le Fait avec $f(u) := e^u$ (définie sur $\mathbb{R}$) et $F(u) := e^u$. Si on préfère, on pose $u := u(x)$ et on écrit

$$\int e^{u(x)} u'(x)\, dx = \int e^u du = e^u + cte = e^{u(x)} + cte.$$

□

Exemple. Primitives de xe^{-x^2} sur $\mathbb{R}$.
On a

$$\int xe^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^{-x^2} \times (-2x) dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + cte.$$

Remarque. On ne sait pas primitiver e^{-x^2} ! Cependant, il est possible de montrer que

$$\int_0^X e^{-x^2} dx \to \frac{\sqrt{\pi}}{2} \qquad \text{quand } X \to \infty.$$

4. Primitivation par parties

La formule suivante, bien que très simple, est incroyablement utile dans des situations très variées.

Fait 4.1. *Soit $u : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $v : I \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Si U est une primitive de u sur I, alors*

$$\int u(x)v(x)\, dx = U(x)v(x) - \int U(x)v'(x)\, dx.$$

Démonstration. On a $(Uv)' = U'v + Uv' = uv + Uv'$, donc

$$\begin{aligned}
\int u(x)v(x)\, dx &= \int (Uv)'(x)\, dx - \int U(x)v'(x)\, dx \\
&= U(x)v(x) + cte - \int U(x)v'(x)\, dx \\
&= U(x)v(x) - \int U(x)v'(x)\, dx \qquad (\text{la constante rentre dans } \textstyle\int).
\end{aligned}$$

□

Exemple 1. Primitives de $\ln(x)$ sur $]0, \infty[$.
On écrit $\ln(x) = 1 \times \ln(x)$; et on en déduit

$$\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - \int x \times \frac{1}{x}\, dx = x \ln(x) - x + cte.$$

Exemple 2. Primitives de $\arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$.
On écrit $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$, ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int \arctan(x)\, dx &= x \arctan(x) - \int x \times \frac{1}{1+x^2}\, dx \\
&= x \arctan(x) - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2) + cte.
\end{aligned}$$

Exemple 3. Primitives de $x^2\cos(3x)$ et x^3e^x sur $\mathbb{R}$.

Pour $\int x^2\cos(x)\,dx$ on primitive 2 fois par parties, en dérivant 2 fois x^2 et en primitivant 2 fois $\cos(3x)$:

$$\begin{aligned}\int \cos(3x)x^2\,dx &= \frac{1}{3}\sin(3x)x^2 - \frac{1}{3}\int \sin(3x)\times 2x\,dx\\ &= \frac{1}{3}\sin(3x)x^2 - \frac{2}{3}\left(-\frac{1}{3}\cos(3x)x + \frac{1}{3}\int\cos(3x)\,dx\right)\\ &= \frac{2}{9}\,x\cos(3x) + \left(\frac{1}{3}x^2 - \frac{2}{27}\right)\sin(3x) + cte.\end{aligned}$$

Pour $\int x^3e^x\,dx$, on primitive 3 fois par parties (exo).

Exemple 4. Primitives de $\frac{1}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

L'idée est de partir de $\int\frac{dx}{1+x^2}$ (que l'on connait), et d'écrire $\frac{1}{1+x^2} = 1\times\frac{1}{1+x^2}$. On obtient

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{1+x^2} &= x\times\frac{1}{1+x^2} - \int x\times\frac{-2x}{(1+x^2)^2}\,dx\\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{x^2+1-1}{(1+x^2)^2}\,dx\\ &= \frac{x}{1+x^2} + 2\int\frac{dx}{1+x^2} - 2\int\frac{dx}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{(1+x^2)^2} &= \frac{1}{2}\left(\int\frac{dx}{1+x^2} + \frac{x}{1+x^2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\arctan(x) + \frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2} + cte.\end{aligned}$$

5. Primitivation des fonctions rationnelles

On appellera *fonction rationnelle* toute fonction f de la forme

$$f(x) = \frac{A(x)}{B(x)},$$

où A et B sont des polynômes à coefficients réels (pour ne pas se compliquer la vie). Le domaine de définition de f est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash Z(B)$, où $Z(B) = \{x\in\mathbb{R};\ B(x) = 0\}$. Comme $Z(B)$ est un ensemble fini, $\mathcal{D}_f$ est donc une réunion finie d'intervalles ouverts ; et on peut déterminer les primitives de f sur chacun de ces intervalles.

5.1. Fonctions de la forme $\frac{1}{(x-\lambda)^n}$, où $\lambda\in\mathbb{R}$ et $n\geqslant 1$. On calcule les primitives sur $]-\infty,\lambda[$ et sur $]\lambda,\infty[$. On a

$$\int\frac{dx}{(x-\lambda)} = \ln|x-\lambda| + cte,$$

et

$$\int\frac{dx}{(x-\lambda)^n} = -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(x-\lambda)^{n-1}} \qquad \text{si}\quad n\geqslant 2.$$

5.2. Fonctions de la forme $\frac{1}{P(x)}$, où $\deg(P) = 2$ et P n'a pas de racines réelles. On calcule les primitives sur $\mathbb{R}$.

Principe : on se ramène au calcul de choses de la forme $\int \frac{du}{u^2+b^2}$ où b est une constante, en écrivant $P(x)$ sous la forme

$$P(x) = c\big((x+a)^2 + b^2\big).$$

Exemple. Primitives de $f(x) = \frac{1}{3x^2+2x+3}$.

Le polynôme $P(x) = 3x^2+2x+3$ n'a pas de racines réelles car $\Delta = 2^2 - 4\times 3\times 3 = -32 < 0$. On écrit

$$3x^2+2x+3 = 3\Big(x^2+\frac{2}{3}x+1\Big) = 3\left(\Big(x+\frac{1}{3}\Big)^2 - \frac{1}{9}+1\right) = 3\left(\Big(x+\frac{1}{3}\Big)^2 + \frac{8}{9}\right);$$

et on en déduit

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x^2+2x+3} &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{\big(x+1/3\big)^2 + (\sqrt{8/9}\,)^2}\\ &= \frac{1}{3}\int \frac{du}{u^2+(\sqrt{8/9})^2} \qquad \text{où } u = x+1/3.\end{aligned}$$

On a donc

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3x^2+2x+3} &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{8/9}}\arctan\Big(\frac{u}{\sqrt{8/9}}\Big) + cte\\ &= \frac{1}{3}\times\frac{1}{\sqrt{8/9}}\arctan\Big(\frac{x+1/3}{\sqrt{8/9}}\Big) + cte\\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\Big(\frac{3}{2\sqrt{2}}(x+1/3)\Big) + cte \qquad \text{car } \sqrt{8/9} = 2\sqrt{2}/3\\ &= \frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\Big(\frac{3\sqrt{2}}{4}(x+1/3)\Big) + cte.\end{aligned}$$

5.3. Fonctions de la forme $\frac{x}{P(x)}$, où $\deg(P) = 2$ et P n'a pas de racines réelles. On calcule les primitives sur $\mathbb{R}$.

Principe : on se ramène au calcul de $\int \frac{1}{P(x)}\,dx$ et de $\int \frac{P'(x)}{P(x)}\,dx$.

Exemple. Primitives de $f(x) = \frac{x}{3x^2+2x+3}$.

Comme dans l'exemple précédent, $P(x) = 3x^2+2x+3$. Pour faire apparaitre $\frac{P'(x)}{P(x)}$, on "introduit de force" $P'(x) = 6x+2$ au numérateur en écrivant

$$x = \frac{1}{6}(6x+2) - \frac{1}{3}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{3x^2+2x+3} &= \frac{1}{6}\int \frac{6x+2}{3x^2+2x+3}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3x^2+2x+3}\\ &= \frac{1}{6}\int \frac{(3x^2+2x+3)'}{3x^2+2x+3}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3x^2+2x+3}\\ &= \frac{1}{6}\ln\big(3x^2+2x+3\big) - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{3x^2+2x+3}}_{\text{qu'on sait calculer}}.\end{aligned}$$

5.4. Fonctions de la forme $\frac{1}{P(x)^n}$, où $\deg(P) = 2$ avec P sans racines réelles, et $n \geqslant 2$. On calcule les primitives sur $\mathbb{R}$.

Principe : se ramener à des choses de la forme $\int \frac{du}{(u^2+b^2)^n}$, et faire des *primitivations par parties* pour calculer $\int \frac{du}{(u^2+b^2)^n}$.

Exemple. Primitives de $\frac{1}{(3x^2+2x+3)^2}$.

On a vu que

$$3x^2 + 2x + 3 = 3(u^2 + b^2) \qquad \text{où} \qquad u = x + 1/3 \text{ et } b = \sqrt{8/9}.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{(3x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{1}{9} \int \frac{du}{(u^2 + b^2)^2}.$$

Ensuite, on calcule $\int \frac{du}{u^2+b^2}$ par parties :

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{u^2 + b^2} &= \int 1 \times \frac{1}{u^2 + b^2}\, du \\
&= u \times \frac{1}{u^2 + b^2} - \int u \times \frac{-2u}{(u^2 + b^2)^2}\, du \\
&= \frac{u}{u^2 + b^2} + 2 \int \frac{u^2}{(u^2 + b^2)^2} \\
&= \frac{u}{u^2 + b^2} + 2 \int \frac{u^2 + b^2 - b^2}{(u^2 + b^2)^2} \qquad (\text{“astuce” générale}) \\
&= \frac{u}{u^2 + b^2} + 2 \int \frac{du}{u^2 + b^2} - 2b^2 \int \frac{du}{(u^2 + b^2)^2}.
\end{aligned}$$

Donc on obtient

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{(u^2 + b^2)^2} &= \frac{1}{2b^2} \left(\frac{u}{u^2 + b^2} + \int \frac{du}{u^2 + b^2} \right) \\
&= \frac{1}{2b^2} \left(\frac{u}{u^2 + b^2} + \frac{1}{b} \arctan\left(\frac{u}{b}\right) \right) + cte;
\end{aligned}$$

et on en déduit $\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)^2}$ en remplaçant u par $x + 1/3$ (finir le calcul).

5.5. Fonctions de la forme $\frac{x}{(P(x))^n}$, où P est sans racines réelles avec $\deg P = 2$, et $n \geqslant 2$. On calcule les primitives sur $\mathbb{R}$.

Principe : se ramener à calculer $\int \frac{P'(x)}{P(x)^n}\, dx$ et $\int \frac{dx}{P(x)^n}$.

Exemple. Primitives de $\frac{x}{(3x^2+2x+3)^2}$.

On “introduit de force” $P'(x) = 6x + 2$ comme plus haut :

$$\frac{x}{(3x^2 + 2x + 3)^2} = \frac{1}{6} \frac{6x + 2}{(3x^2 + 2x + 3)^2} - \frac{1}{3} \frac{1}{(3x^2 + 2x + 3)^2};$$

ce qui donne

$$\int \frac{x}{(3x^2+2x+3)^2}\,dx = \frac{1}{6}\int \underbrace{\frac{6x+2}{(3x^2+2x+3)^2}}_{\frac{P'x)}{P(x)^2}}\,dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)^2}$$

$$= -\frac{1}{6}\frac{1}{3x^2+2x+3} - \frac{1}{3}\underbrace{\int \frac{dx}{(3x^2+2x+3)^2}}_{\text{qu'on sait calculer}}.$$

5.6. Cas général. Soit $f(x) = \frac{A(x)}{B(x)}$ une fonction rationnelle quelconque.

Étape 1. On écrit $f(x) = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$, où B et R sont des polynômes et $\deg(R) < \deg(Q)$, en effectuant la *division euclidienne* de A par B :

$$A = BQ + R \quad \text{avec } \deg(R) < \deg(B),$$

et donc $f = \frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}\cdot$ (Si on a déjà $\deg(A) < \deg(B)$, cette étape est inutile.)

Étape 2. On *factorise* $B(x)$ le plus possible (sur $\mathbb{R}$).

Étape 3. On **décompose** $\frac{R(x)}{B(x)}$ **en éléments simples**. Autrement dit : on écrit $\frac{R(x)}{B(x)}$ comme somme de termes de la forme $\frac{a}{(x-\lambda)^n}$ ou $\frac{ax+b}{P(x)^n}$, avec $\deg(P) = 2$ et P sans racines réelles. Il y a un théorème général qui dit que cela est toujours possible. On ne démontrera pas ce théorème, et on ne l'énoncera même pas (!) Cependant, la Remarque 5.1 explique sous quelle forme chercher la décomposition en éléments simples d'une fonction rationnelle.

Étape 4. On primitive chaque "élément simple" séparément, et on met tout ensemble.

Exemple. Primitives de $f(x) := \frac{3x^5-4x^4+8x^3-6x^2-3x-6}{3x^4-4x^3+2x^2-4x+3} = \frac{A(x)}{B(x)}\cdot$

(i) Division euclidienne : on trouve

$$A(x) = B(x) \times x + 6x^3 - 2x^2 - 6x - 6,$$

et donc

$$f(x) = x + \frac{6x^3-2x^2-6x-6}{3x^4-4x^3+2x^2-4x+3} = x + \frac{R(x)}{B(x)}\cdot$$

(ii) Factorisation de $B(x) = 3x^4 - 4x^3 + 2x^2 - 4x + 3$.

- $x := 1$ est racine évidente, donc on peut factoriser par $x - 1$.
- En faisant la division euclidienne, on trouve $B(x) = (x-1)(3x^3 - x^2 + x - 3)$.
- $x = 1$ est racine évidente de $3x^3 - x^2 + x - 3$, donc on peut re-factoriser par $x - 1$.
- On trouve $3x^3 - x^2 + x - 3 = (x-1)(3x^2 + 2x + 3)$, donc

$$B(x) = (x-1)^2(3x^2 + 2x + 3).$$

- $P(x) = 3x^2+2x+3$ n'a pas de racines réelles, donc on ne peut plus factoriser (sur $\mathbb{R}$).

La seule racine réelle de B est $x = 1$; donc on va calculer les primitives sur $]-\infty, 1[$ et sur $]1, \infty[$

(iii) Décomposition de $\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{6x^3-2x^2-6x-6}{(x-1)^2(3x^2+2x+3)}$ en éléments simples.

- Vu la forme de $B(x)$, la décomposition est *a priori* de la forme

$$(*) \qquad \frac{R(x)}{B(x)} = \frac{6x^3-2x^2-6x-6}{(x-1)^2(3x^2+2x+3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{cx+d}{3x^2+2x+3},$$

où a, b, c, d sont des constantes à déterminer. Pour trouver les valeurs de a, b, c, d, la “méthode brutale” consiste à tout réduire au même dénominateur et à identifier les numérateurs, ce qui fournit un système de 4 équations à 4 inconnues qu'on sait (en principe) résoudre. C'est assez fastidieux pour un humain, mais un ordinateur le fait très bien et très vite. Une méthode un peu moins brutale consiste à utiliser quelques petites astuces.

- Si on multiplie tout par $(x-1)^2$ dans $(*)$, on obtient

$$\frac{6x^3-2x^2-6x-6}{3x^2+2x+3} = a(x-1) + b + \frac{(cx+d)(x-1)^2}{3x^2+2x+3};$$

d'où, en faisant $x = 1$:

$$b = -1.$$

- Comme $\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{6x^3-2x^2-6x-6}{3x^4-4x^3+2x^2-4x+3}$, on voit que

$$\frac{R(x)}{B(x)} \sim \frac{6x^3}{3x^4} = \frac{2}{x} \qquad \text{quand } x \to +\infty,$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} x\frac{R(x)}{B(x)} = 2.$$

Mais

$$x\frac{R(x)}{B(x)} = \frac{ax}{x-1} + \frac{bx}{(x-1)^2} + \frac{cx^2+dx}{3x^2+2x+3};$$

donc, en faisant $x \to +\infty$, on obtient

$$a + 0 + \frac{c}{3} = 2.$$

- En prenant $x = 0$ dans $(*)$, on obtient

$$\frac{R(0)}{B(0)} = -a + b + \frac{d}{3},$$

autrement dit

$$-a + b + \frac{d}{3} = -2.$$

- Enfin, en prenant par exemple $x = 2$ dans $(*)$, on obtient

$$\frac{R(2)}{B(2)} = a + b + \frac{2c+d}{19},$$

autrement dit (vérifier)

$$a + b + \frac{2c+d}{19} = \frac{22}{19}.$$

(iv) Bilan provisoire : on est ramené à résoudre le système

$$\begin{cases} b = -1 \\ a + \frac{c}{3} = 2 \\ -a + \frac{d}{3} = -1 \\ a + \frac{2}{19}c + \frac{1}{19}d = \frac{41}{19} \end{cases}$$

On le résout par sa méthode favorite ; et on trouve $a = 2$, $b = -1$, $c = 0$ et $d = 3$.

(v) Conclusion : on a

$$f(x) = x + \frac{2}{x-1} - \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{3x^2+2x+3};$$

et on sait primitiver chacun des termes (finir le calcul).

Remarque 5.1. Soit $f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ une fonction rationnelle, avec $\deg(R) < \deg(Q)$. Supposons qu'on ait déjà factorisé $Q(x)$ le plus possible.

- Si la factorisation de $Q(x)$ comprend un terme de la forme $(x-a)^m$ avec $m \geqslant 1$, alors la décomposition de $f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ en éléments simples va contenir une somme de la forme
$$\frac{\alpha_1}{(x-a)} + \frac{\alpha_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{\alpha_m}{(x-a)^m}.$$
(Si $m = 1$ on a seulement 1 terme, de la forme $\frac{\alpha}{(x-a)}$.)
- Si la factorisation de $Q(x)$ comprend un terme de la forme $q(x)^m$, où q est un polynôme de degré 2 sans racines réelles, alors la décomposition de $f(x) = \frac{R(x)}{Q(x)}$ en éléments simples va contenir une somme de la forme
$$\frac{\alpha_1 x + \beta_1}{q(x)} + \frac{\alpha_2 x + \beta_2}{q(x)^2} + \cdots + \frac{\alpha_m x + \beta_m}{q(x)^m}.$$
(Si $m = 1$ on a seulement 1 terme, de la forme $\frac{\alpha x + \beta}{q(x)}$.)
- Il n'y a rien d'autre dans la décomposition de $f(x)$ en éléments simples.

6. Fonctions rationnelles trigonométriques

Une *fonction rationnelle trigonométrique* est une fonction de la forme

$$f(x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)},$$

où P est Q sont des polynômes à 2 variables (à coefficients réels).

Fait 6.1. ("méthode générale")
Soit f une fonction rationnelle trigonométrique. Si I est un intervalle contenu dans $]-\pi, \pi[$ tel que $f(x)$ soit bien défini sur I, alors le changement de variable $t := \tan(x/2)$ permet de déterminer les primitives de f sur I en se ramenant au calcul des primitives d'une fonction rationnelle.

Démonstration. Comme $I \subseteq]-\pi, \pi[$, on peut bien poser $t = \tan(x/2)$ pour $x \in I$, ce qui revient à dire que $x = 2\arctan(t)$. On a

$$\cos(x) = 2\cos^2(x/2) - 1 = \frac{2}{1 + \tan^2(x/2)} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\sin(x) = 2\sin(x/2)\cos(x/2) = 2\tan(x/2)\cos^2(x/2) = \frac{2t}{1+t^2},$$

et

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Donc, si on écrit $f(x) = \frac{P(\cos x, \sin x)}{Q(\cos x, \sin x)},$, alors

$$\int f(x)dx = \int \frac{P\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)}{Q\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)} \frac{2dt}{1+t^2} =: \int g(t)dt,$$

où g est une fonction rationnelle. Si G est une primitive de g sur $J := \{\tan(x/2);\ x \in I\}$, on en déduit que $\int f(x)dx = G(t) + cte = G(\tan(x/2)) + cte$. □

EXEMPLE. Primitives de $f(x) := \frac{1}{3+\sin(x)}$ sur $I :=]-\pi, \pi[$.

La fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$, donc en particulier sur I, car $3 + \sin(x)$ ne s'annule jamais. Si on pose $t = \tan(x/2)$, alors

$$\int f(x)dx = \int \frac{1}{3 + \frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{3 + 2t + 3t^2}.$$

Donc on est en "terrain connu"...

FAIT 6.2. ("règles de Bioche")
Soit f une fonction rationnelle trigonométrique, et posons $w(x) := f(x)dx$.

(i) *Si $w(-x) = w(x)$, on peut calculer $\int f(x)dx$ en posant $u := \cos(x)$, sur tout intervalle $I \subseteq]0, \pi[$ où $f(x)$ est bien défini.*

(ii) *Si $w(\pi - x) = w(x)$, on peut calculer $\int f(x)dx$ en posant $u := \sin(x)$, sur tout intervalle $I \subseteq]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ où $f(x)$ est bien défini.*

(iii) *Si $w(\pi + x) = w(x)$, on peut calculer $\int f(x)dx$ en posant $u := \tan(x)$, sur tout intervalle $I \subseteq]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ où $f(x)$ est bien défini.*

Remarque. Il faut faire un peu attention avec cet énoncé : $w(x)$ n'est pas une fonction de x, mais une "expression formelle" où intervient la variable x. Le symbole "d" se manipule avec la règle suivante (déjà rencontrée) : si $u = u(x)$ est une fonction de x, alors $du = u'(x)dx$. Quand on écrit $w(-x)$, on doit remplacer partout x par $-x$; donc $w(-x) = f(-x)d(-x) = -f(-x)dx$. De même, $w(\pi - x) = f(\pi - x)d(\pi - x) = -f(\pi - x)dx$ et $w(\pi + x) = f(\pi + x)d(\pi + x) = f(\pi + x)dx$

On ne démontrera pas le fait en général : on va se contenter d'un exemple, qu'on va (partiellement) traiter avec une règle de Bioche et avec la "méthode générale".

EXEMPLE. Primitives de $f(x) := \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)}$ sur $]0, \pi[$.

Si on pose $w(x) = f(x)dx$, alors $w(-x) = \frac{\cos(-x)^3}{\sin(-x)} \times (-dx) = \frac{\cos(x)^3}{\sin(x)}dx = w(x)$; donc on est incité à poser $u := \cos(x)$, de sorte que $x = \arccos(u)$ puisque $x \in]0, \pi[$. Comme $\sin(x) > 0$ sur $]0, \pi[$, on a $\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - u^2}$; et $dx = -\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$. Donc

$$\int f(x)dx = \int \frac{u^3}{\sqrt{1-u^2}} \times \left(-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\right) = -\int \frac{u^3}{1-u^2}du;$$

et on sait comment faire, avec *a priori* peu de calculs.

Donnons les détails... En effectuant la division eucidienne de u^3 par u^2-1, on obtient

$$\frac{u^3}{u^2-1} = u + \frac{u}{u^2-1} = u + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}\right).$$

Donc

$$\int \frac{u^3}{u^2-1}du = \frac{u^2}{2} + \frac{1}{2}\left(\ln|u-1| + \ln|u+1|\right) + cte = \frac{1}{2}\left(u^2 + \ln|u^2-1|\right) + cte;$$

et finalement, comme $u = \cos(x) \in]-1,1[$ si $x \in]0,\pi[$,

$$\int f(x)dx = \frac{1}{2}\left(\cos^2 x + \ln(1-\cos^2 x)\right) + cte = \frac{1}{2}\cos^2 x + \ln|\sin x| + cte.$$

Si on utilise la "méthode générale" en posant $t := \tan(x/2)$, alors on obtient

$$\int f(x)dx = \int \frac{\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)^3}{\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{(1-t^2)^3}{t(1+t^2)^3}dt.$$

Donc "on sait faire" en principe ; mais le calcul va être plus long que le précédent à cause du terme $(1+t^2)^3$.

Chapitre 4

Équations différentielles

1. Vocabulaire

1.1. Équations quelconques. En toute généralité (et de façon un peu vague), une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une *fonction* $t \mapsto x(t)$ à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et qui fait intervenir une ou plusieurs dérivées de la fonction x (en nombre fini).

On peut donc écrire n'importe quelle équation différentielle sous la forme

$$\text{(E)} \qquad F\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big) = 0,$$

où $n \in \mathbb{N}^*$ et F est une fonction de $1 + (n+1)$ variables.

Étant donné un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, on dit qu'une fonction $x \mapsto x(t)$ est **solution de (E) sur** I si

- x est n fois dérivable sur I,
- $F\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big)$ est bien défini pour tout $t \in I$ et

$$\forall t \in I \ : \ F\big(t, x(t), x'(t), \ldots, x^{(n)}(t)\big) = 0.$$

Exemples. Un certain nombre de choses très bien connues rentrent dans le cadre général des équations différentielles.

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Les solutions sur I de l'équation différentielle
$$x'(t) = f(t)$$
sont les primitives de la fonction f sur I.
- La fonction $t \mapsto e^t$ est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$x'(t) = x(t).$$
Plus précisément, c'est la seule solution de cette équation différentielle vérifiant $x(0) = 0$.
- Si $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est solution sur $]0, \infty[$ de l'équation différentielle
$$x'(t) = \frac{\alpha}{t}\, x(t).$$
- Les fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$ sont solutions de l'équation différentielle
$$x''(t) = -x(t).$$
- Les fonctions ch et sh sont solutions de l'équation différentielle
$$x''(t) = x(t).$$
- La fonction tan est solution sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation différentielle
$$x'(t) = 1 + x(t)^2.$$

1.2. Équations linéaires. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une **équation différentielle linéaire d'ordre** n est une équation différentielle qui peut être mise sous la forme

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) + \varphi(t). \tag{E}$$

où $a_0, \dots, a_n$ et φ sont des fonctions données définies sur un même intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{K}$.

On dit que l'équation (E) est **homogène** si $\varphi(t) \equiv 0$, autrement dit si (E) est de la forme

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t).$$

On dit que l'équation (E) est **à coefficients constants** si les fonctions $a_0, \dots, a_n$ sont constantes, autrement dit si (E) est de la forme

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0x(t) + \varphi(t),$$

où $a_0, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{K}$.

Par exemple :

- les équations $x'(t) = x(t)$ et $x''(t) = x(t)$ sont linéaires, homogènes et à coefficients constants ;
- l'équation $x'(t) = \frac{\alpha}{t}\,x(t)$ est linéaire et homogène, mais pas à coefficients constants ;
- si f est une fonction donnée, l'équation $x'(t) = f(t)$ est linéaire à coefficients constants, mais pas homogène ;
- l'équation $x'(t) = 1 + x(t)^2$ n'est pas linéaire.

2. Généralités sur les équations linéaires

Fait important 1. *Soit* (E_0) *une EDL homogène,*

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t). \tag{E_0}$$

*Si $x_1, \dots, x_m$ sont des solutions de (E_0) sur un certain intervalle I, alors toute **combinaison linéaire** de $x_1, \dots, x_m$, i.e. toute fonction x de la forme $x(t) = \lambda_1 x_1(t) + \cdots + \lambda_m x_m(t)$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sont des constantes, est aussi solution de (E_0). Autrement dit : l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{K}$-**espace vectoriel**.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$. Notons également X l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions n fois dérivables $x : I \to \mathbb{K}$, et Y l'espace vectoriel de toutes les fonctions $y : I \to \mathbb{K}$. Soit $L : X \to Y$ l'application définie par

$$L(x) := x^{(n)} - a_{n-1}x^{(n-1)} - \cdots - a_0 x.$$

Il est "évident" que L est une application linéaire (faire l'exo si on a un doute) ; et par définition, on a

$$\mathcal{E}_0 = \{x \in X;\ L(x) = 0\} = \ker(L).$$

Donc $\mathcal{E}_0$ est un sous-espace vectoriel de X. $\square$

Fait important 2. *Soit* (E) *une EDL,*

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) + \varphi(t). \tag{E}$$

Si on a trouvé une solution z de (E)*, alors toutes les autres solutions de* (E) *sont de la forme*

$$x(t) = z(t) + u(t),$$

où u est une solution de l'équation homogène

$$u^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)u^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)u(t). \tag{E$_0$}$$

Autrement dit : pour résoudre complètement (E)*, il suffit de résoudre l'équation homogène* (E_0) *et de trouver une solution particulière de* (E)*.*

Démonstration. Soit x une solution quelconque de (E) et soit $u := x - z$. Avec les notations de la preuve du "Fait important 1", on a $L(x) = \varphi = L(z)$, donc

$$L(u) = L(x - z) = L(x) - L(z) = 0;$$

autreent dit, u est solution de (E_0). □

Fait important 3. *Soit* (E) *une EDL,*

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) + \varphi(t), \tag{E}$$

et supposons que la fonction φ s'écrive sous la forme $\varphi(t) = \varphi_1(t) + \varphi_2(t)$. Si on a trouvé

- une solution z_1 de $x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) + \varphi_1(t)$,

- une solution z_2 de $x^{(n)}(t) = a_{n-1}(t)x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0(t)x(t) + \varphi_2(t)$,

alors la fonction $z = z_1 + z_2$ est solution de (E)*. Cette remarque s'appelle le **principe de superposition**.*

Démonstration. Exo. □

Remarque. Si (E) est une EDL homogène à coefficients constants, alors toute solution de (E) est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Démonstration. Soit x une solution de l'équation

$$x^{(n)}(t) = a_{n-1}x^{(n-1)}(t) + \cdots + a_0x(t). \tag{E}$$

A priori, x est seulement n fois dérivable. Mais le second membre de l'équation est une fonction dérivable puisque $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ sont dérivables. Donc $x^{(n)}$ est dérivable ; autrement dit x est $n+1$ fois dérivable. En répétant ce raisonnement, on voit maintenant que $x^{(n)}$ est 2 fois dérivable puisque $x, x', \dots, x^{(n-1)}$ le sont ; donc x est $n+2$ fois dérivable, et ainsi de suite.

□

3. Équations linéaires d'ordre 1

Dans cette section, on résout complètement toutes les EDL d'ordre 1. On écrit ces équations sous sous la forme

$$x'(t) = a(t)x(t) + \varphi(t).$$

THÉORÈME 3.1. *Soit $a : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue, et soit A une primitive quelconque de a sur I. Les solutions de l'EDL homogène*

$$u'(t) = a(t)u(t) \tag{E$_0$}$$

sont toutes les fonctions u de la forme

$$u(t) = Ce^{A(t)}, \quad \text{où } C \text{ est une constante.}$$

Démonstration. Si $u(t) = Ce^{A(t)}$, alors $u'(t) = CA'(t)e^{A(t)} = Ca(t)e^{A(t)} = a(t)u(t)$, donc u est solution de (E_0).

Inversement, soit u une solution de (E_0). Soit C la fonction définie par

$$C(t) = e^{-A(t)}u(t).$$

La fonction C est dérivable sur I, avec

$$\begin{aligned} C'(t) &= -A'(t)e^{-A(t)}u(t) + e^{-A(t)}u'(t) \\ &= -a(t)e^{-A(t)}u(t) + e^{-A(t)}a(t)u(t) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Donc la fonction C est *constante* sur I, $C(t) \equiv C$; et donc $u(t) = Ce^{A(t)}$. □

COROLLAIRE 3.2. *L'ensemble des solutions de* (E_0) *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *est un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension* 1*, engendré par la fonction $t \mapsto e^{A(t)}$ où A est n'importe quelle primitive de a sur I.*

Démonstration. C'est évident par le théorème. □

COROLLAIRE 3.3. *Si $a \in \mathbb{K}$, les solutions de l'équation différentielle $x'(t) = ax(t)$ sont les fonctions de la forme $x(t) = Ce^{at}$, où C est une constante.*

Démonstration. À nouveau évident par le théorème. □

COROLLAIRE 3.4. *Si h est une solution non identiquement nulle de* (E_0)*, alors h ne s'annule jamais.*

Démonstration. La fonction h est de la forme $h(t) = Ce^{A(t)}$. Si $h \neq 0$, alors $C \neq 0$, et donc $h(t) \neq 0$ *pour tout* $t \in I$. □

COROLLAIRE 3.5. *Si on se donne $t_0 \in I$ et $\xi_0 \in \mathbb{K}$, alors il existe une et une seule solution u de* (E_0) *vérifiant la "condition initiale" $u(t_0) = \xi_0$.*

Démonstration. Soit u une solution de (E_0), donc $u(t) = Ce^{A(t)}$ pour une certaine constante C. La condition $u(t_0) = \xi_0$ s'écrit $Ce^{A(t_0)} = \xi_0$, autrement dit $C = e^{-A(t_0)}\xi_0$, ce qui détermine C de manière unique. Donc, il existe exactement une solution de (E_0) telle que $u(t_0) = \xi_0$. □

THÉORÈME 3.6. *Soient a et φ des fonctions continues quelconques définies sur I. On considère l'EDL*

$$x'(t) = a(t)x(t) + \varphi(t). \tag{E}$$

(a) *Si h est une solution non nulle de l'équation homogène associée* (E_0)*, et si on a trouvé une solution particulière z de* (E)*, alors les solutions de* (E) *sont toutes les fonctions de la forme*

$$x(t) = z(t) + Ch(t),$$

où C est une constante.

(b) *Si h est une solution non nulle de* (E$_0$)*, on peut toujours trouver une solution de* (E) *en la cherchant sous la forme*

$$z(t) = C(t)h(t),$$

où C est une certaine fonction. La fonction z sera solution de (E) *si et seulement si on a*

$$h(t)C'(t) = \varphi(t) \qquad \textit{pour tout } t \in I;$$

autrement dit

$$C'(t) = \frac{\varphi(t)}{h(t)}\cdot$$

Cette méthode de recherche de solution s'appelle la ***méthode de variation de la constante****.*

Démonstration. (a) On sait que les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $x(t) = z(t) + u(t)$, où u est une solution de l'équation homogène.

(b) Par le Théorème 3.1, la fonction h ne s'annule jamais. Donc, n'importe quelle fonction $z : I \to \mathbb{K}$ peut se mettre sous la forme $z(t) = C(t)h(t)$ pour une certaine fonction C, à savoir $C(t) = \frac{z(t)}{h(t)}$.

Si z est dérivable, alors $C(t) = z(t)/h(t)$ est dérivable également puisque h est dérivable. On a

$$\begin{aligned} z'(t) &= C'(t)h(t) + C(t)h'(t) \\ &= C'(t)h(t) + C(t) \times a(t)h(t) \\ &= C'(t)h(t) + a(t)z(t). \end{aligned}$$

Donc z sera solution de (E) si et seulement si

$$C'(t)h(t) + a(t)z(t) = a(t)z(t) + \varphi(t) \quad \text{pour tout } t \in I,$$

autrement dit

$$h(t)C'(t) = \varphi(t)\ , \quad \text{ou encore} \quad C'(t) = \varphi(t)/h(t).$$

Comme la fonction $\varphi(t)/h(t)$ est continue, elle admet des primitives sur I, et donc il est toujours possible (en principe) de trouver une fonction C telle que $z(t) = C(t)h(t)$ soit solution de (E). □

Corollaire 3.7. *Si A est une primitive quelconque de a sur I, alors les solutions de* (E) *sont toutes les fonctions de la forme*

$$x(t) = C(t)e^{A(t)},$$

où C est une primitive de la fonction $t \mapsto e^{-A(t)}\varphi(t)$.

Démonstration. Dans (b), on peut prendre $h(t) = e^{A(t)}$, de sorte que $\frac{\varphi(t)}{h(t)} = e^{-A(t)}\varphi(t)$. □

Corollaire 3.8. *Si on se donne $t_0 \in I$ et $\xi_0 \in \mathbb{K}$, alors il existe une et une seule solution x de* (E) *vérifiant la "condition initiale" $x(t_0) = \xi_0$.*

Démonstration. Soit x une solution de (E). Avec les notations de (a), on peut écrire $x(t) = z(t) + Ch(t)$. On aura $x(t_0) = \xi_0$ si et seulement si $z(t_0) + Ch(t_0) = \xi_0$, ce qui détermine C de manière unique car $h(t_0) \neq 0$. □

Résumé. Pour résoudre une EDL

$$x'(t) = a(t)x(t) + \varphi(t), \tag{E}$$

on procède comme suit.

(1) On résout l'équation homogène

$$x'(t) = a(t)x(t), \tag{E$_0$}$$

à l'aide d'une primitive A de la fonction a.

(2) On trouve une solution particulière z de (E), *ou bien* en utilisant la méthode de variation de la constante à partir d'une solution h de (E_0) non nulle, *ou bien* en se débrouillant autrement.

(3) On écrit que la solution générale de (E) est de la forme $x(t) = z(t) + Ch(t)$, où h est une solution non nulle de (E_0) choisie une fois pour toutes.

(4) Si on doit trouver la solution x telle que $x(t_0) = \xi_0$, on trouve le coefficient C en résolvant une équation.

Même si la méthode de variation de la constante fonctionne toujours en principe, on peut parfois procéder autrement pour trouver une solution particulière. C'est le contenu du lemme suivant.

Lemme 3.9. *Soit $a \in \mathbb{R}$. Considérons l'équation*

$$x'(t) = ax(t) + \varphi(t). \tag{E}$$

(a) *Si φ est de la forme $\varphi(t) = P(t)e^{mt}$ où P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$ et $m \neq a$, alors* (E) *possède une solution particulière z de la forme $z(t) = Q(t)e^{mt}$, où Q est un polynôme de degré d.*

(b) *Si φ est de la forme $\varphi(t) = P(t)e^{at}$ où P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$, alors* (E) *possède une solution particulière z de la forme $z(t) = Q(t)e^{at}$, où Q est un polynôme de degré $d + 1$ sans terme constant.*

(c) *Si φ est de la forme $\varphi(t) = P(t)\cos(\omega t)$ où P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$, alors* (E) *possède une solution particulière z de la forme $z(t) = Q(t)\cos(\omega t) + R(t)\sin(\omega t)$, où Q et R sont des polynômes de degré $\leqslant d$.*

Démonstration. (a) Soit Q une fonction dérivable quelconque, et soit $z(t) := Q(t)e^{mt}$. On a $z'(t) = (Q'(t) + mQ(t))e^{mt}$, donc z sera solution de (E) si et seulement si

$$(Q'(t) + mQ(t))e^{mt} = az(t) + \varphi(t) = aQ(t)e^{mt} + P(t)e^{mt},$$

autrement dit

$$Q'(t) + (m - a)Q(t) = P(t).$$

Écrivons maintenant $P(t) = \sum_{k=0}^{d} \alpha_k t^k$ et supposons que Q soit une fonction polynomiale de degré d, $Q(t) = \sum_{k=0}^{d} \lambda_k t^k$. Si on identifie les coefficients, l'équation précédente équivaut au système

$$\begin{cases} (m-a)\lambda_d & = \alpha_d \\ (m-a)\lambda_{d-1} + d\lambda_d & = \alpha_{d-1} \\ (m-a)\lambda_{d-2} + (d-1)\lambda_{d-1} & = \alpha_{d-2} \\ \quad\vdots & \\ (m-a)\lambda_0 + \lambda_1 & = \alpha_0 \end{cases}$$

Comme $m - a \neq 0$, on voit qu'il s'agit d'un système anti-triangulaire avec des coefficients anti-diagonaux non nuls. Donc le système admet une unique solution $(\lambda_0, \dots, \lambda_d)$; et donc il existe un unique polynôme Q de degré d tel que $z(t) = Q(t)e^{mt}$ soit solution de (E).

(b) Soit Q une fonction dérivable quelconque et soit $z(t) := R(t)e^{at}$. Par le calcul fait dans la preuve de (a), z sera solution de (E) si et seulement si

$$Q'(t) = P(t).$$

Toutes les primitives de P sont des fonctions polynomiales de degré $d+1$, et il y en a exactement une qui vérifie $Q(0) = 0$. Cela prouve (b)

(c) On a $\cos(\omega t) = \frac{1}{2}(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t})$. Donc, par (a) et le principe de superposition et comme $a \neq \pm i\omega$, (E) possède une solution de la forme $z(t) = \alpha(t)e^{i\omega t} + \beta(t)e^{-i\omega t}$, où α et β sont des polynômes de degré d. En écrivant $e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t)$ et $e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t)$, on en déduit (c). □

Exemple. Résolution de $x'(t) = 2x(t) + t^2e^{3t} + t\cos(5t)$.

4. Équations linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

Dans cette section, on résout complètement toutes les EDL d'ordre 2 à coefficients constants. On écrit ces équations sous la forme

$$x''(t) = bx'(t) + cx(t) + \varphi(t).$$

Pour se simplifier la vie, on ne considérera que des équations *à coefficients réels*, *i.e.*

$$b, c \in \mathbb{R};$$

mais on autorise des fonctions φ à valeurs complexes, et des solutions à valeurs complexes.

4.1. Équations homogènes. Dans cette section, on résout toutes les EDL homogènes d'ordre 2 à coefficients constants.

Définition 4.1. *Soit* (E_0) *une EDL d'ordre* 2 *homogène à coefficients constants,*

$$(\mathrm{E}_0) \qquad x''(t) = bx'(t) + cx(t).$$

Le ***polynôme caractéristique*** *associé à* (E_0) *est le polynôme du second degré* P *défini par* $P(z) = z^2 - bz - c$. *L'****équation caractéristique*** *associée à* (E_0) *est l'équation du second degré* $P(z) = 0$, *i.e.*

$$z^2 - bz - c = 0.$$

Remarque. Comme $P(z) = z^2 - bz - c$ est de degré 2, l'équation $P(z) = 0$ admet toujours 2 solutions complexes r_1 et r_2, *éventuellement égales* ; et comme P est à coefficients réels, si r_1 et r_2 ne sont pas réelles alors elles sont *conjuguées*. Comme le coefficient de z^2 est égal à 1, on a

$$P(z) = (z - r_1)(z - r_2).$$

Si $r_1 = r_2$, on dit que l'équation admet une **racine double** $r = r_1 = r_2$. On a alors forcément $r \in \mathbb{R}$ car P est à coefficients réels (en fait, $r = b/2$), et $P(r) = P'(r) = 0$.

Démonstration. Si r est racine double alors $P(z) = (z-r)^2$. Donc $P'(z) = 2(z-r)$, et donc $P'(r) = 0$. □

LEMME 4.2. *Soit* (E_0) *une EDL d'ordre* 2 *homogène à coefficients constants,*

$$(\mathrm{E}_0) \qquad x''(t) = bx'(t) + cx(t),$$

et soit $P(z) = z^2 - bz - c$ *le polynôme caractéristique associé. Pour tout* $r \in \mathbb{C}$*, soit* $e_r : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *la fonction définie par* $e_r(t) := e^{rt}$*. Posons aussi* $f_r(t) := te^{rt}$*.*

(a) *Si* $P(r) = 0$*, alors* e_r *est solution de* (E_0)*.*

(b) *Si* r *est* racine double *de* P*, alors* e_r *et* f_r *sont solutions de* (E_0)*.*

Démonstration. On a $e_r'(t) = re^{rt} = re_r(t)$ et $e_r''(t) = r^2e^{rt} = r^2e_r(t)$. Donc

$$e_r''(t) - be_r'(t) - ce_r(t) = (r^2 - br - c)e_r(t) = P(r)e_r(t).$$

Par conséquent, si $P(r) = 0$ alors e_r est solution de (E_0).

Ensuite, on a

$$f_r'(t) = e_r(t) + te_r'(t) = e_r(t) + rf_r(t),$$

et

$$f_r''(t) = e_r'(t) + rf_r'(t) = re_r(t) + r\big(e_r(t) + rf_r(t)\big) = 2re_r(t) + r^2f_r(t).$$

Donc

$$\begin{aligned} f_r''(t) - bf_r'(t) - cf_r(t) &= \big(2re_r(t) + r^2f_r(t)\big) - b\big(e_r(t) + rf_r(t)\big) - cf_r(t) \\ &= (r^2 - br - c)f_r(t) + (2r - b)e_r(t) \\ &= P(r)f_r(t) + P'(r)e_r(t). \end{aligned}$$

Par conséquent, f_r est solution de (E_0) si $P(r) = P'(r) = 0$.

□

THÉORÈME 4.3. *Soit* (E_0) *une EDL homogène à coefficients constants,*

$$(\mathrm{E}_0) \qquad u''(t) = bu'(t) + cu(t),$$

qu'on considère sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$*.*

(1) *Supposons que l'équation caractéristique* $z^2 - bz - c = 0$ *admette 2 racines réelles distinctes* r_1, r_2*. Alors les solutions de* (E_0) *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$ *sont toutes les fonctions de la forme*

$$u(t) = \lambda e^{r_1t} + \mu e^{r_2t},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *sont des constantes.*

(2) *Supposons que l'équation* $z^2 - bz - c = 0$ *admette 1 racine double* r*. Alors les solutions de* (E_0) *à valeurs dans* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$*, sont toutes les fonctions de la forme*

$$u(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt},$$

où $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ *sont des constantes.*

(3) *Supposons que l'équation* $z^2 - bz - c = 0$ *admette 2 racines complexes conjuguées distinctes et non réelles* r_1 *et* r_2*, qu'on écrit* $r_1 = r + i\omega$ *et* $r_2 = r - i\omega$*.*

   (a) *Les solutions* à valeurs complexes *de* (E_0) *sont toutes les fonctions de la forme*

   $$u(t) = \lambda e^{r_1t} + \mu e^{r_2t} = \big(\lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}\big)e^{rt},$$

   où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ *sont des constantes.*

(b) *Les solutions* à valeurs réelles *de* (E$_0$) *sont toutes les fonctions de la forme*

$$u(t) = \big(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)\big)e^{rt},$$

où $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *sont des constantes.*

Démonstration. Soit $P(z) = z^2 - bz - c$ le polynôme caratéristique associé à (E$_0$). On va utiliser le fait suivant.

FAIT. Soient r_1 et r_2 les racines complexes de P (éventuellement égales). Si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est une fonction 2 fois dérivable, alors

$$u'' - bu' - cu = v' - r_1 v\ , \qquad \text{avec } v := u' - r_2 u.$$

Preuve du Fait. On a $v' - r_1 v = (u'' - r_2 u') - r_1(u' - r_2 u)$, autrement dit

$$v' - r_1 v = x'' - (r_1 + r_2)u' + r_1 r_2.$$

Mais comme r_1 et r_2 sont les 2 racines de $P(z) = z^2 - bz - c$, on a $r_1 + r_2 = b$ et $r_1 r_2 = -c$; ce qui démontre le Fait. □

(1) Par le Lemme 4.2, les fonctions e_{r_1} et e_{r_2} sont solutions de (E$_0$) ; donc toute fonction de la forme $u(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$ est solution de (E$_0$).

Inversement, soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une solution de (E$_0$). Par le Fait, la fonction $v := u' - r_2 u$ est solution de l'équation $v' - r_1 v = 0$. Donc v est de la forme $v(t) = ke^{r_1 t}$, pour une certaine constante k. Par ailleurs, comme $u' = r_2 u + v$, on sait aussi que u est de la forme $u(t) = C(t)e^{r_2 t}$, où la fonction C vérifie $C'(t) = e^{-r_2 t}v(t)$, autrement dit $C'(t) = ke^{(r_1 - r_2)t}$. On a ainsi $C(t) = \frac{k}{r_1 - r_2}e^{(r_1 - r_2)t} + \mu$ pour une certaine constante μ, et donc $u(t) = \frac{k}{r_1 - r_2}e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} =: \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$.

(2) Par le Lemme 4.2, les fonctions $t \mapsto e^{rt}$ et $t \mapsto te^{rt}$ sont solutions de (E$_0$) ; donc toute fonction de la forme $u(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$ est solution de (E$_0$).

Inversement, soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ une solution de (E$_0$). Par le Fait, la fonction $v := u' - ru$ est solution de l'équation $v' - rv = 0$, donc $v(t) = \lambda e^{rt}$, pour une certaine constante λ. De plus, comme $u' = ru + v$, on a $u(t) = C(t)e^{rt}$, où la fonction C vérifie $C'(t) = e^{-rt}v(t) = \lambda e^{(r-r)t} = \lambda$. On a ainsi $C(t) = \lambda t + \mu$ pour une certaine constante μ, et donc $u(t) = (\lambda t + \mu)e^{r_1 t}$.

(3a) Une preuve identique à celle de (1) montre que les les solutions de (E$_0$) à valeurs complexes sont toutes les fonctions de la forme $u(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont des constantes. Il suffit donc d'écrire $e^{r_1 t} = e^{i\omega t}e^{rt}$ et $e^{r_2 t} = e^{-i\omega t}e^{rt}$.

(3b) Par (3a), les solutions à valeurs réelles de (E$_0$) sont les fonctions qui sont à la fois de la forme $u(t) = \big(\lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t}\big)e^{rt}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ et à valeurs réelles. En écrivant $\lambda e^{i\omega t} + \mu e^{-i\omega t} = (\lambda + \mu)\cos(\omega t) + i(\lambda - \mu)\sin(\omega t)$, on voit que u s'écrit sous la forme $u(t) = \big(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)\big)e^{rt}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Comme u est à valeurs réelles, la fonction $f(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ est à valeurs réelles. *On en déduit* (mais ce n'est pas complètent évident), que $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\beta \in \mathbb{R}$. Voici les détails... Comme f est à valeurs réelles, $f'(t) = -\alpha\omega \sin(\omega t) + \beta\omega \cos(\omega t)$ est également à valeurs réelles. Soit $t_0 \in I$ quelconque, et posons $c = \cos(\omega t_0)$ et $s = \sin(\omega t_0)$. Les coefficients α et β sont solutions du système

$$\begin{cases} c\alpha & + \quad s\beta & = f(t_0) \\ -\omega s\alpha & + \quad \omega c\beta & = f'(t_0) \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est $\omega c^2 + \omega s^2 = \omega(c^2 + s^2) = \omega \neq 0$. Donc la matrice M du système est inversible, et son inverse est à coefficients réels puisque M l'est. Et donc α et β sont réels puisque $f(t_0)$ et $f'(t_0)$ le sont. □

Remarque. Si on ne s'intéresse pas particulièrement aux solutions à valeurs réelles, les parties (1) et (3) du théorème peuvent se "condenser" comme suit : si l'équation caractéristiques $z^2 - bz - c = 0$ admet deux racines complexes distinctes r_1 et r_2, alors les solutions de (E) à valeurs complexes sont toutes les fonctions de la forme $x(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont des constantes.

Corollaire 4.4. *Si on se donne $t_0 \in I$ et $\xi_0, \xi_0' \in \mathbb{K}$, alors il existe une et une seule solution u de* (E_0) *telle que $u(t_0) = \xi_0$ et $u'(t_0) = \xi_0'$; et la fonction u est à valeurs réelles si ξ_0 et ξ_0' sont réels.*

Démonstration. Par le théorème, deux cas sont possibles.

(i) L'équation caractéristique $z^2 - bz - c = 0$ possède 2 racines complexes distinctes r_1 et r_2. Dans ce cas, toute solution de (E_0) est de la forme $u(t) = \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont des constantes. Alors $u'(t) = r_1 \lambda e^{r_1 t} + r_2 \mu e^{r_2 t}$, donc les deux conditions $u(t_0) = \xi_0$, $u'(t_0) = \xi_0'$ s'écrivent

$$\begin{cases} e^{r_1 t_0}\lambda + e^{r_2 t_0}\mu &= \xi_0, \\ r_1 e^{r_1 t_0}\lambda + r_2 e^{r_2 t_0}\mu &= \xi_0'. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut $(r_2 - r_1)e^{(r_1 + r_2)t_0}$, qui est $\neq 0$ car $r_1 \neq r_2$. Donc le système admet une unique solution (λ, μ) ; et donc il existe une unique solution u de (E_0) vérifiant $u(t_0) = \xi_0$ et $u'(t_0) = \xi_0'$.

Si ξ_0 et ξ_0' sont réels, alors la fonction $v := \mathrm{Re}(u)$ est solution de (E_0) car $b, c \in \mathbb{R}$, avec les mêmes conditions initiales car $\xi_0, \xi_0' \in \mathbb{R}$. Donc $v = u$, *i.e.* u est à valeurs réelles

(ii) L'équation caractéristique $z^2 - bz - c = 0$ possède une racine double r. Dans ce cas, toute solution de (E_0) est de la forme $u(t) = (\lambda t + \mu)e^{rt}$, où $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ sont des constantes. Alors $u'(t) = (r\lambda t + r\mu + \lambda)e^{rt}$, donc les conditions $u(t_0) = \xi_0$, $u'(t_0) = \xi_0'$ s'écrivent

$$\begin{cases} t_0\lambda + \mu &= e^{-rt_0}\xi_0, \\ (1 + rt_0)\lambda + r\mu &= e^{-rt_0}\xi_0'. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système vaut $-1 \neq 0$. Donc le système admet une unique solution (λ, μ), donc il existe une unique solution de (E_0) vérifiant $u(t_0) = \xi_0$ et $u'(t_0) = \xi_0'$. Enfin, si ξ_0 et ξ_0' sont réels, alors λ et μ aussi car la matrice du système est à coefficients réels (donc son inverse aussi). □

Corollaire 4.5. *L'ensemble des solutions de* (E_0) *à valeurs dans $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel* de dimension 2. *Plus précisément, on obtient une base (h_1, h_2) de solutions de* (E_0) *de la façon suivante.*

(i) *Si l'équation caractéristique possède 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2 et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors on peut prendre $h_1(t) = e^{r_1 t}$ et $h_2(t) = e^{r_2 t}$;*

(ii) *si l'équation caractéristique possède une racine double r, alors on peut prendre $h_1(t) = e^{rt}$ et $h_2(t) = te^{rt}$;*

(iii) *si l'équation caractéristique possède 2 racines complexes non réelles $r_1 = r + i\omega$ et $r_2 = r - i\omega$, alors*

- *on peut prendre $h_1(t) = e^{r_1 t}$ et $h_2(t) = e^{r_2 t}$ lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,*

- *on peut prendre* $h_1(t) = \cos(\omega t)e^{rt}$ *et* $h_2(t) = \sin(\omega t)e^{rt}$ *lorsque* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *;*

Démonstration. Notons $\mathcal{E}_0$ l'ensemble des solutions de (E_0) à valeurs dans $\mathbb{K}$; on sait que $\mathcal{E}_0$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Fixons $t_0 \in I$, et soit $J : \mathcal{E}_0 \to \mathbb{K}^2$ l'application définie par $J(u) := (u(t_0), u'(t_0))$. Il est évident que L est linéaire, et le Corollaire 4.4 dit que J est bijective. Donc J est un isomorphisme de $\mathcal{E}_0$ sur $\mathbb{K}^2$; et donc $\mathcal{E}_0$ est de dimension 2.

Le théorème dit que dans chacun des 3 cas, toute solution u de (E_0) est combinaison linéaire de h_1 et h_2 ; autrement dit, (h_1, h_2) est une *famille génératrice* de $\mathcal{E}_0$. Comme $\dim(\mathcal{E}_0) = 2$, on en déduit que (h_1, h_2) est nécessairement une base de $\mathcal{E}_0$.

□

Remarque. Voici une ébauche de preuve directe que (h_1, h_2) est une famille libre (et donc une base de $\mathcal{E}_0$ puisqu'on sait déjà qu'elle est génératrice). Supposons que $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ vérifient $\alpha h_1 + \beta h_2 = 0$, autrement dit $\alpha h_1(t) + \beta h_2(t) = 0$ pour tout $t \in I$. En dérivant, on obtient $\alpha h_1'(t) + \beta h_2'(t) = 0$ pour tout $t \in I$. Si on se donne $t_0 \in I$, on voit donc que (α, β) est solution du système d'équations

$$\begin{cases} h_1(t_0)\alpha + h_2(t_0)\beta = 0 \\ h_1'(t_0)\alpha + h_2'(t_0)\beta = 0 \end{cases}$$

En considérant séparément chacun des 3 cas, on montre alors (comme dans la preuve du Corollaire 4.4) que cela force $\alpha = \beta = 0$.

4.2. Équations générales. On veut maintenant résoudre une EDL d'ordre 2 à coefficients constants "générale"

$$x''(t) = bx'(t) + cx(t) + \varphi(t). \tag{E}$$

Comme toujours, on note (E_0) l'équation homogène associée,

$$u''(t) = bu'(t) + cu(t). \tag{E_0}$$

Lemme 4.6. (méthode de variation des constantes)

Soient h_1 *et* h_2 *deux solutions de* (E_0)*. Soient également* λ *et* μ *des* fonctions *dérivables, et soit* z *la fonction définie par*

$$z(t) := \lambda(t)h_1(t) + \mu(t)h_2(t).$$

Pour que z *soit solution de* (E)*, il suffit que les fonctions* λ' *et* μ' *vérifient pour tout* $t \in \mathbb{R}$ *le système d'équations*

$$\begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda'(t) \\ \mu'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix},$$

autrement dit

$$\begin{cases} h_1(t)\lambda'(t) + h_2(t)\mu'(t) = 0, \\ h_1'(t)\lambda'(t) + h_2'(t)\mu'(t) = \varphi(t). \end{cases}$$

Démonstration. Supposons que les fonctions λ' et μ' vérifient le système d'équations indiqué. On a

$$z(t) = \lambda(t)h_1(t) + \mu(t)h_2(t),$$

donc

$$\begin{aligned} z'(t) &= \lambda'(t)h_1(t) + \lambda(t)h_1'(t) + \mu'(t)h_2(t) + \mu(t)h_2'(t) \\ &= \lambda(t)h_1'(t) + \mu(t)h_2'(t) \qquad \text{car } \lambda'(t)h_1(t) + \mu'(t)h_2(t) = 0, \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} z''(t) &= \lambda(t)h_1''(t) + \lambda'(t)h_1'(t) + \mu(t)h_2''(t) + \mu'(t)h_2'(t) \\ &= \lambda(t)h_1''(t) + \mu(t)h_2''(t) + \varphi(t) \qquad \text{car } \lambda'(t)h_1'(t) + \mu'(t)h_2'(t) = \varphi(t). \end{aligned}$$

De plus, comme h_1 et h_2 sont solutions de l'équation homogène (E_0), on a

$$h_1''(t) = bh_1'(t) + ch_1(t) \qquad \text{et} \qquad h_2''(t) = bh_2'(t) + ch_2(t).$$

Donc

$$\begin{aligned} z''(t) &= \lambda(t) \times \big(bh_1'(t) + ch_1(t)\big) + \mu(t) \times \big(bh_2'(t) + ch_2(t)\big) + \varphi(t) \\ &= b\left(\lambda(t)h_1'(t) + \mu(t)h_2'(t)\right) + c\left(\lambda(t)h_1(t) + \mu(t)h_2(t)\right) + \varphi(t) \\ &= bz'(t) + cz(t) + \varphi(t). \end{aligned}$$

Ainsi, la fonction z est en effet solution de (E).

□

LEMME 4.7. *Si* (h_1, h_2) *est une base de solutions pour l'équation homogène* (E_0) *alors, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *la matrice*

$$W(t) := \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_1'(t) & h_2'(t) \end{pmatrix}$$

est inversible.

Démonstration. Soit $t_0 \in I$. Pour montrer que la matrice $W(t_0)$ inversible, il suffit de montrer que la seule solution $u \in \mathbb{K}^2$ au système d'équations

$$W(t_0)u = 0$$

est $u = 0$. Autrement dit, il faut montrer que si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ vérifient

$$\begin{cases} h_1(t_0)\lambda + h_2(t_0)\mu = 0, \\ h_1'(t_0)\lambda + h_2'(t_0)\mu = 0, \end{cases}$$

alors $\lambda = \mu = 0$.

Soit z la fonction définie par $z(t) := \lambda h_1(t) + \mu h_2(t)$. La fonction z est combinaison linéaire de h_1 et h_2, donc elle est solution de l'équation homogène (E_0). De plus, on a $z(t_0) = h_1(t_0)\lambda + h_2(t_0)\mu = 0$ et $z'(t_0) = h_1'(t_0)\lambda + h_2'(t_0)\mu = 0$. Mais la fonction $u = 0$ vérifie également (E_0) avec les mêmes conditions initiales. Donc $z = 0 = 0h_1 + 0h_2$. Comme (h_1, h_2) est une *base* de solutions pour (E_0), on a donc $\lambda = 0$ et $\mu = 0$. □

THÉORÈME 4.8. *Soit* (E) *une EDL d'ordre* 2 *à coefficients constants,*

$$\text{(E)} \qquad x''(t) = bx'(t) + cx(t) + \varphi(t).$$

(a) *Si* (h_1, h_2) *est une base de solutions pour l'équation homogène associée* (E_0), *et si on a trouvé une solution particulière* z *de* (E), *alors les solutions de* (E) *sont toutes les fonctions de la forme*

$$x(t) = z(t) + \lambda h_1(t) + \mu h_2(t),$$

où λ *et* μ *sont des constantes.*

(b) *Si* (h_1, h_2) *est une base de solutions pour* (E_0)*, on peut toujours trouver une solution de* (E) *en la cherchant sous la forme*

$$z(t) = \lambda(t)h_1(t) + \mu(t)h_2(t),$$

où λ *et* μ *sont des fonctions dérivables. Pour que* z *soit solution de* (E)*, il suffit que les fonctions* λ' *et* μ' *vérifient pour tout* $t \in I$ *:*

$$W(t)\begin{pmatrix}\lambda'(t)\\ \mu'(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \varphi(t)\end{pmatrix} \qquad \text{où} \quad W(t) = \begin{pmatrix}h_1(t) & h_2(t)\\ h_1'(t) & h_2'(t)\end{pmatrix};$$

autrement dit

$$\begin{pmatrix}\lambda'(t)\\ \mu'(t)\end{pmatrix} = W(t)^{-1}\begin{pmatrix}0\\ \varphi(t)\end{pmatrix}.$$

Démonstration. (a) est déjà connu ; et (b) découle des Lemmes 4.6 et 4.7. □

Corollaire 4.9. *Si on se donne* $t_0 \in I$ *et* $\xi_0, \xi_0' \in \mathbb{K}$*, alors il existe une et une seule solution* x *de* (E) *vérifiant les "conditions initiales"* $x(t_0) = \xi_0$ *et* $x'(t_0) = \xi_0'$*.*

Démonstration. Par le théorème, on sait que l'équation (E) admet au moins une solution z, et que les solutions de (E) sont toutes les fonctions de la forme $x(t) = u(t) + z(t)$, où u est solution de l'équation homogène (E_0). On aura $x(t_0) = \xi_0$ et $x'(t_0) = \xi_0'$ si et seulement si $u(t_0) = \xi_0 - z(t_0) =: \eta_0$ et $u'(t_0) = z'(t_0) - \xi_0' =: \eta_0'$. Par le Corollaire 4.4, on sait qu'il existe une et une seule solution u de (E_0) vérifiant ces "conditions initiales" ; donc il existe une et une seule solution x de (E) vérifiant $x(t_0) = \xi_0$ et $x'(t_0) = \xi_0'$. □

Résumé. Pour résoudre une équation EDL d'ordre 2 à coefficients constants (E), on procède comme suit.

(1) On résout l'équation homogène (E_0) en considérant l'équation caractéristique $z^2 - bz - c = 0$.

(2) On trouve une solution particulière z de (E), *ou bien* en utilisant la méthode de variation des constantes à partir d'une base de solutions (h_1, h_2) pour (E_0), *ou bien* en se débrouillant autrement.

(3) On écrit que la solution générale de (E) est de la forme $x(t) = z(t) + \lambda h_1(t) + \mu h_2(t)$, où (h_1, h_2) est une base de solutions pour (E_0).

(4) Si on doit trouver la solution x telle que $x(t_0) = \xi_0$ et $x'(t_0) = \xi_0'$, on trouve les coefficients λ, μ en résolvant un système de 2 équations.

Comme dans le cas des équations d'ordre 1, il y a des cas où on peut trouver des solutions particulières sans utiliser la méthode de variation des constantes. C'est ce que dit le lemme suivant.

Lemme 4.10. *On considère l'équation*

$$x''(t) = bx'(t) + cx(t) + \varphi(t). \tag{E}$$

(a) *Supposons que* φ *soit de la forme* $\varphi(t) = P(t)e^{\lambda t}$*, où* P *est un polynôme de degré* $d \geqslant 0$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$*.*

- *Si* λ *n'est pas racine de l'équation caractéristique* $z^2 - bz - c = 0$*, alors* (E) *admet une solution particulière de la forme* $z(t) = Q(t)e^{\lambda t}$*, où* Q *est un polynôme de degré* d*.*

- *Si λ est racine de l'équation caractéristique mais pas racine double, alors* (E) *admet une solution particulière de la forme $z(t) = tQ(t)e^{\lambda t}$, où Q est un polynôme de degré d.*
- *Si λ est racine double de l'équation caractéristique, alors* (E) *admet une solution particulière de la forme $z(t) = t^2Q(t)e^{\lambda t}$, où Q est un polynôme de degré d.*

(b) *Supposons que φ soit de la forme $\varphi(t) = P(t)\cos(\omega t)$, où P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$ et $\omega \in \mathbb{R}$.*

- *Si l'équation homogène n'est pas $u''(t) = -\omega^2u(t)$, alors* (E) *admet une solution particulière de la forme $z(t) = Q(t)\cos(\omega t) + R(t)\sin(\omega t)$, où Q et R sont des polynômes de degré $\leqslant d$.*
- *Si l'équation homogène est $u''(t) = -\omega^2u(t)$ et $\omega \neq 0$, alors* (E) *admet une solution particulière de la forme $z(t) = tQ(t)\cos(\omega t) + tR(t)\sin(\omega t)$, où Q et R sont des polynômes de degré $\leqslant d$.*
- *Si l'équation homogène est $u''(t) = 0$ et $\omega = 0$, alors* (E) *admet une solution particulière de la forme $z(t) = t^2Q(t)$, où Q est un polynôme de degré $\leqslant d$.*

Démonstration. Il est d'une certaine façon inutile de la faire : dans chaque cas “concret”, il suffira de chercher *a priori* une solution particulière de la forme indiquée et de constater qu'on réussit à la trouver. Le calcul fait pour trouver cette solution est exactement le même que celui qu'on ferait pour donner une preuve du lemme dans le cas général. □

Exemple 1. $x''(t) - x(t) = \frac{2}{1+e^t}$.

Exemple 2. $x''(t) = 3x'(t) - 2x(t) + t + e^t + e^{3t}$.

5. Systèmes de 2 équations linéaires d'ordre 1

Un **système de 2 équations différentielles linéaires d'ordre** 1 est un système d'équations de la forme

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} x'(t) = a(t)x(t) + b(t)y(t) + \varphi_1(t) \\ y'(t) = c(t)x(t) + d(t)y(t) + \varphi_2(t) \end{cases}$$

où les données sont les fonctions $a, b, c, d, \varphi_1, \varphi_2$ et les inconnues sont les fonctions $x(t)$ et $y(t)$.

Comme les systèmes d'équations linéaires, un système de ce genre peut être écrit sous la forme d'une seule équation. Posons

$$X(t) := \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix};$$

ainsi que

$$A := \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \Phi(t) := \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_1(t) \end{pmatrix}.$$

Alors le système (S) est équivalent à l'équation différentielle

$$X'(t) = A(t)X(t) + \Phi(t),$$

où l'inconnue X est une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}^2$, et les donnés sont une fonction A à valeur dans $M_2(\mathbb{K})$ et une fonction Φ à valeurs dans $\mathbb{K}^2$.

Même si l'équation est d'ordre 1, il se trouve que n'importe équations différentielle scalaire d'ordre 2 peut être "représentée" une équation de ce type. C'est le contenu de la remarque suivante, dont la preuve est immédiate.

Remarque. Soit (E) une équation différentielle scalaire d'ordre 2,

$$x''(t) = a_1(t)x'(t) + a_0(t)x(t) + \varphi(t). \tag{E}$$

Une fonction $x : I \to \mathbb{K}$ est solution de (E) si et seulement si la fonction $X : I \to \mathbb{K}^2$ définie par

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \end{pmatrix}$$

est solution de l'équation

$$X'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_0(t) & a_1(t) \end{pmatrix} X(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi(t) \end{pmatrix}.$$

Donc, en principe, la théorie des équations différentielles scalaires d'ordre 2 se réduit à celle des systèmes de 2 équations différentielles d'ordre 1.

Cependant, comme on a déjà détaillé la théorie des équations d'ordre 2, on va faire l'inverse : montrer que la théorie des systèmes de 2 équations différentiels d'ordre 1 peut se ramener à celle des équations différentielles d'ordre 2.

On va s'intéresser uniquement à des systèmes homogènes et à coefficients constants, *i.e.* de la forme

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases} \tag{S}$$

avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Si on pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

alors le système (S) s'écrit

$$X'(t) = AX(t).$$

Proposition 5.1. *Si* $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ *est solution du système*

$$X'(t) = AX(t), \tag{S}$$

alors les fonctions x et y sont toutes les deux solutions de l'équation différentielle d'ordre 2

$$u''(t) = \mathrm{Tr}(A)u'(t) - \det(A)u(t). \tag{E}$$

Démonstration. On fait la preuve seulement pour la fonction x.

On a 2 équations

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = cx(t) + dy(t) \end{cases}$$

L'idée est très simple : en supposant par exemple que $b \neq 0$, on peut exprimer $y(t)$ en fonction de $x(t)$ et $x'(t)$ à l'aide de la 1ère équation, puis reporter dans la 2ème équation.

De façon précise, la 1ère équation donne

$$y(t) = \frac{1}{b}\big(x'(t) - ax(t)\big),$$

et donc
$$y'(t) = \frac{1}{b}\big(x''(t) - ax'(t)\big).$$

En reportant dans la 2ème équation, on obtient
$$\frac{1}{b}\big(x''(t) - ax'(t)\big) = cx(t) + d \times \frac{1}{b}\big(x'(t) - ax(t)\big)$$
et donc, en multipliant par b :
$$x''(t) - ax'(t) = bcx(t) + d\big(x'(t) - ax(t)\big).$$

En regroupant les termes en $x'(t)$ et en $x(t)$, cela donne
$$x''(t) = (a + d)x'(t) + (bc - ad)x(t) = \mathrm{Tr}(A)x'(t) - \det(A)x(t).$$

Si $b = 0$, on a
$$x'(t) = ax(t) \qquad \text{et} \qquad x''(t) = ax'(t),$$
et de plus
$$\mathrm{Tr}(A) = a + d \qquad \text{et} \qquad \det(A) = ad.$$

Donc
$$\begin{aligned} x''(t) - \mathrm{Tr}(A)x'(t) + \det(A)x(t) &= x''(t) - (a + d)x'(t) + adx(t) \\ &= x''(t) - ax'(t) + d\big(ax(t) - x'(t)\big) = 0 \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.2. *Soit $X(t) = {}^t(x(t), y(t))$ une fonction à valeurs dans $\mathbb{K}^2$, soit $t_0 \in I$ et soit $X_0 = {}^t(\xi_0, \eta_0) \in \mathbb{K}^2$. Les choses suivantes sont équivalentes.*

(1) *X est solution du système* (S) *et vérifie la "condition initiale" $X(t_0) = X_0$;*

(2) *x et y sont solutions de l'équation différentielle* (E) *et vérifient les "conditions initiales"*
$$\begin{cases} x(t_0) = \xi_0 \quad \text{et} \quad x'(t_0) = a\xi_0 + b\eta_0 \\ y(t_0) = \eta_0 \quad \text{et} \quad y'(t_0) = c\xi_0 + d\eta_0 \end{cases}$$

Démonstration. L'implication (1) $\Longrightarrow$ (2) est immédiate par la proposition. Inversement, supposons que (2) soit vérifiée. Alors on a certainement $X(t_0) = X_0$; donc il s'agit simplement de montrer que X est solution du système (S), autrement dit qu'on a
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

On va se contenter de montrer que $x' = ax + by$. Ré-écrivons l'équation différentielle (E) en changeant le nom de l'inconnue :

$$\text{(E)} \qquad v''(t) = (a + d)v'(t) - (ad - bc)v(t).$$

Maintenant, posons $u := ax + by$: on veut montrer que $u = x'$. Comme x et y sont solutions de (E), la fonction u aussi. De plus, comme (E) est à coefficients constants, on voit en dérivant (E) et en utilisant la "linéarité de la dérivation" que si v est une solution de (E), alors v' également. En particulier, x' est solution de (E). Donc, pour montrer que $u = x'$, il suffit maintenant de vérifier que $u(t_0) = x'(t_0)$ et $u'(t_0) = (x')'(t_0) = x''(t_0)$.

Par (2), on a $u(t_0) = ax(t_0) + by(t_0) = a\xi_0 + b\eta_0 = x'(t_0)$. Ensuite, on a d'une part

$$\begin{aligned} u'(t_0) &= ax'(t_0) + by'(t_0) \\ &= a\big(a\xi_0 + b\eta_0\big) + b\big(c\xi_0 + d\eta_0\big) \\ &= (a^2 + bc)\xi_0 + b(a+d)\eta_0, \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} x''(t_0) &= (a+d)x'(t_0) - (ad - bc)x(t_0) \\ &= (a+d)(a\xi_0 + b\eta_0) - (ad - bc)\xi_0 \\ &= (a^2 + bc)\xi_0 + b(a+d)\eta_0. \end{aligned}$$

Donc en effet $u'(t_0) = x''(t_0)$. □

Corollaire 5.3. *Si on se donne $t_0 \in I$ et $\xi_0, \eta_0 \in \mathbb{K}$, il existe une unique solution $X(t) = {}^t(x(t), y(t))$ au système* (S) *vérifiant la "condition initiale" $X(t_0) = {}^t(\xi_0, \eta_0)$.*

Démonstration. C'est évident par ce qui précède et le Corollaire 4.4. □

Exemple. Résolution de $\begin{cases} x'(t) &= &2x(t) + y(t) \\ y'(t) &= &-x(t) + 3y(t) \end{cases}$ avec les "conditions initiales" $x(0) = 2$ et $y(0) = 4$.