Feuille d'exercices n^{o} 4

Exercice 1. Soit P un polynôme de degré $d \geqslant 0$, et soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Montrer que l'équation différentielle $x'(t) = ax(t) + P(t)$ possède une solution polynomiale de degré d.

Exercice 2. En utilisant le *résultat* de l'Exercice 1, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

(1) $x'(t) + x(t) = 3$;
(2) $x'(t) - x(t) = t$;
(3) $x'(t) + 2x(t) = 2t + 1$;
(4) $2x'(t) - 3x(t) = t + 1$;
(5) $x'(t) + 2x(t) = t^2 - 2t + 3$;
(6) $7x'(t) + 2x(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1$.

Exercice 3. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$x'(t) = ax(t) + \varphi(t). \tag{E}$$

(1) On suppose que $\varphi(t) = P(t)e^{at}$, où P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$. Montrer que (E) possède une solution particulière de la forme $x(t) = Q(t)e^{at}$, où Q est un polynôme de degré $d + 1$ sans terme constant.
(2) On suppose que $\varphi(t) = P(t)e^{mt}$, où P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$ et $m \neq a$. Montrer que (E) possède une solution particulière de la forme $Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme de degré d.
(3) On suppose que $\varphi(t) = P(t)\cos(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$ et P est un polynôme de degré $d \geqslant 0$. Montrer que (E) possède une solution particulière de la forme $x(t) = \big(Q(t)\cos(\omega t) + R(t)\sin(\omega t)\big)e^{at}$, où Q et R sont des polynômes de degré $\leqslant d$.

Exercice 4. En utilisant les *résultats* de l'Exercice 3, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(1) $x'(t) - x(t) = e^t + 3e^{-2t}$.
(2) $x'(t) + x(t) = (t^2 - 2t + 2)e^{2t}$.
(3) $x'(t) - x(t) = \sin(t)$.
(4) $x'(t) - 4x(t) = \cos(3t) + (t + 1)e^{4t}$.
(5) $x'(t) + x(t) = \cos(5t)$.
(6) $x'(t) + 3x(t) = (t + 2)\cos(t)$.

Exercice 5. Résoudre les équations différentielles suivantes avec les "conditions initiales" demandées.

(1) $x'(t) = -2x(t) + 4t^2$ avec $x(0) = 3$.
(2) $x'(t) = 2x(t) + 2t^3 + t$ avec $x(0) = 1$.
(3) $x'(t) = -x(t) + 2e^t$ avec $x(0) = 0$.
(4) $x'(t) = 3x(t) + 2e^{3t}$ avec $x(1) = 4e^3$.
(5) $3x'(t) = 2x(t) + 3\cos(2t)$ avec $x(0) = \frac{17}{20}$.
(6) $x'(t) = -x(t) + 2te^{-t}$ avec $x(0) = 1$.
(7) $x'(t) = x(t) + t + e^t$ avec $x(0) = -1$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes avec les “conditions initiales” demandées.

(1) $x'(t) = 2tx(t) + te^{t^2+3t}$ avec $x(0) = 1$.
(2) $x'(t) = x(t)\cos(t) + \sin(2t)$ avec $x(0) = 0$.
(3) $x'(t) = -\frac{t}{1+t^2}x(t) - \frac{2t}{1+t^2}$ avec $x(0) = 1$.
(4) $x'(t) + \tan(t)x(t) = \sin(2t)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec $x(0) = 1$.
(5) $\sin(t)x'(t) - \cos(t)x(t) + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$ avec $x(\pi/4) = 1$.
(6) $(t+1)x'(t) + tx(t) = t^2 - t + 1$ sur $]-1, \infty[$ avec $x(1) = 1$. (On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme.)

Exercice 7. Résoudre les équations différentielles suivantes.

(1) $x'(t) + x(t) = \frac{1}{1+e^t}$ sur $\mathbb{R}$.
(2) $x'(t) - \left(2t - \frac{1}{t}\right)x(t) = 1$ sur $]0, \infty[$.
(3) $tx'(t) + (t-1)x(t) = t^3$ sur $]0, \infty[$.
(4) $(1-t^2)x'(t) - 2tx(t) = 1$ sur $]0, 1[$.
(5) $x'(t) - 2tx(t) = (1-2t)e^t$ sur $\mathbb{R}$.
(6) $x'(t) + (t^2+1)x(t) = t^2e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.
(7) $(1+t^2)x'(t) + 2tx(t) = 1$ sur $\mathbb{R}$.
(8) $tx'(t) + x(t) = 1 + \ln(t)$ sur $]0, \infty[$.

Exercice 8. Résoudre l'équation différentielle $t\left(1 + \ln(t)^2\right)x'(t) + 2\ln(t)x(t) = 1$ sur $]0, \infty[$.

Exercice 9. Résoudre l'équation différentielle $t\ln(t)x'(t) - x(t) = 3t^2\ln(t)^2$ sur $]0, 1[$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := \cos(\arctan(t))$.

(1) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $x'(t) = -\frac{t}{1+t^2}\,x(t)$.
(2) *En déduire* que $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := \sin(\arctan(t))$. Vérifier que f est solution sur $]0, \infty[$ de l'équation différentielle $x'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)}\,x(t)$, et *en déduire* que $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 12. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall s, t \in \mathbb{R} \ : \ f(s+t) = f(s)f(t).$$

(Pour démarrer, dériver l'identité précédente par rapport à s et prendre $s := 0$.)

Exercice 13. On considère l'équation différentielle $x'(t) - x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot$ Montrer que les solutions de cette équation sur $]0, \infty[$ sont les fonctions de la forme

$$x(t) = \left(\lambda + 2 \int_0^{\sqrt{t}} e^{-s^2} ds \right) e^t, \qquad \text{où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Exercice 14. Soient $a : I \to \mathbb{K}$ et $\varphi : I \to \mathbb{K}$ des fonctions continues, où I est un intervalle de $\mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x'(t) = a(t)x(t) + \varphi(t).$$

Montrer que si $t_0 \in I$ et $\xi_0 \in \mathbb{K}$ sont donnés, alors l'unique solution de (E) vérifiant la "condition initiale" $x(t_0) = \xi_0$ est donnée par la formule

$$x(t) = \xi_0 e^{\int_{t_0}^t a(s)ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(u)du} \varphi(s) ds.$$

Que devient cette formule lorsque la fonction a est constante?

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(t) + f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Montrer que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. (On pourra poser $\varphi(t) := f(t) + f'(t)$ et considérer l'équation différentielle $x(t) + x'(t) = \varphi(t)$.)

Exercice 16. Soit $a, \varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et φ paire. Montrer que l'équation différentielle $x'(t) = a(t)x(t) + \varphi(t)$ admet une unique solution impaire.

Exercice 17. On considère l'équation différentielle $t^2 x'(t) - x(t) = 0$.

(1) Résoudre cette équation différentielle sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
(2) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18. On considère l'équation différentielle $t^3 x'(t) + (2 - 3t^2)x(t) = t^3$.

(1) Résoudre cette équation sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$.
(2) Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?
(3) Déterminer la solution sur $]0, +\infty[$ vérifiant $x(1) = 0$.

Exercice 19. On considère l'équation différentielle $t(1+t)x'(t) - (t+2)x(t) = 2t$.

(1) Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$ et sur $]-1, 0[$, puis sur $]-1, +\infty[$.

(2) Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 20. Résoudre l'équation différentielle $tx'(t) + x(t) - 1 = 0$ sur $]0, +\infty[$ et sur $]-\infty, 0[$, puis résoudre cette équation $\mathbb{R}$.

Exercice 21. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les les équations différentielles suivantes avec les "conditions initiales demandées".

(1) $2x''(t) + 5x'(t) - 3x(t) = 0$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = -1$;
(2) $x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = 0$ avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 2$.
(3) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0$ avec $x(1) = 2$ et $x'(1) = -1$;
(4) $798\, x''(t) + 3045\, x'(t) + 997\, x(t) = 0$ avec $x(83\pi) = x'(83\pi) = 0$.

Exercice 22. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et soient u et v deux solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$. On suppose qu'on a $7u(5\pi) + 13v(5\pi) = 0$ et $7u'(5\pi) + 13v'(5\pi) = 0$. Montrer que la fonction $7u + 13v$ est identiquement nulle.

Exercice 23. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x''(t) = bx'(t) + cx(t) + e^{\lambda t}.$$

(1) Montrer que si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique $z^2 - bz - c = 0$, alors l'équation (E) admet une solution de la forme $x(t) = \alpha e^{\lambda t}$, où α est une constante.
(2) Montrer que si λ est racine de l'équation caractéristique mais pas racine double, alors (E) admet une solution de la forme $x(t) = \alpha t e^{\lambda t}$, où α est une constante.
(3) Montrer que si λ est racine double de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution de la forme $x(t) = \alpha t^2 e^{\lambda t}$, où α est une constante.

Exercice 24. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad x''(t) = bx'(t) + cx(t) + \cos(\omega t).$$

(1) Montrer que si $b \neq 0$ ou $c \neq -\omega^2$, alors (E) admet une solution de la forme $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$, où α et β sont des constantes.
(2) Montrer que si $b = 0$ et $c = -\omega^2$, alors (E) admet une solution de la forme $\alpha t \cos(\omega t) + \beta t \sin(\omega t)$, où α et β sont des constantes.

Exercice 25. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$, et soit P un polynôme de degré $n \in \{0, 1, 2\}$. Montrer que l'équation différentielle $x''(t) = bx'(t) + cx(t) + P(t)$ possède une solution polynomiale de degré n.

Exercice 26. Résoudre les équations différentielles suivantes.

(1) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t^2 + e^t + e^{2t}$.
(2) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t + e^{3t}$.
(3) $x''(t) + x(t) = \cos(2t) + \cos(t)$.

Exercice 27. Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les "conditions initiales" demandées.

(1) $x''(t) = 8x'(t) - 15x(t) + 15t^2 - 16t + 17$ avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 4$.
(2) $x''(t) = \sqrt{2}x'(t) - x(t) + t + 1$ avec $x(0) = 1 + \sqrt{2}$ et $x'(0) = 1 + \sqrt{2}/2$.
(3) $x''(t) = -x'(t) + 6x(t) + 4e^t$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = -22$.
(4) $x''(t) = 4x'(t) - 4x(t) - 6e^{2t}$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 4$.
(5) $x''(t) = 4x(t) + t + e^{2t}$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 2$.
(6) $x''(t) = 3x'(t) - 2x(t) + 10\sin t$ avec $x(0) = 6$ et $x'(0) = 2$.
(7) $x''(t) = 2x'(t) - 2x(t) + 5\cos t$ avec $x(0) = 2$ et $x'(0) = -3$.
(8) $x''(t) = -x(t) + \cos t$ avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 5$.

Exercice 28. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = 2\cos^2(t)$.

Exercice 29. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) - x(t) = \frac{2}{1+e^t}$.

Exercice 30. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \mathrm{cotan}(t)$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 31. Résoudre l'équation différentielle $x''(t)+x(t) = \tan(t)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 32. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit f la fonction définie par

$$f(t) := \int_0^t \sin(t-s)\varphi(s)\,ds.$$

Montrer que f est solution de l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \varphi(t)$.

Exercice 33. Soit $q : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soient u et v deux solutions de l'équation différentielle $x''(t) - q(t)x(t) = 0$. Montrer que la fonction w définie par $w(t) := u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ est constante.

Exercice 34. Soit $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $x = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. On suppose que la fonction E définie par $E(t) := \frac{1}{2}\,x'(t)^2 + U(x(t))$ est constante. Déterminer une équation différentielle vérifiée par x.

Exercice 35. On veut résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad (1-t^2)x''(t) - tx'(t) + 9x(t) = 0.$$

(1) Soit $x :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable, et soit $z :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $z(u) := x\big(\sin(u)\big)$. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants à déterminer.
(2) Résoudre l'équation (E) sur $]-1,1[$.

Exercice 36. Résoudre sur $]0,\infty[$ les équations différentielles $t^2x''(t) + x(t) = 0$ et $t^2x''(t) + tx'(t) + x(t) = 1 + t$ en posant $t = e^s$.

Exercice 37. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + \frac{2t}{t^2+1}x'(t) + \frac{1}{(t^2+1)^2}\, x(t) = \frac{t}{(t^2+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$ en posant $t = \tan(s)$.

Exercice 38. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + 4tx'(t) + (3+4t^2)x(t) = 0$ sur $\mathbb{R}$ en posant $y(t) = e^{t^2}x(t)$.

Exercice 39. Résoudre l'équation différentielle $t^2x''(t) + 4tx'(t) - (t^2-2)x(t) = 0$ sur $]0,\infty[$ en posant $y(t) = t^2x(t)$.

Exercice 40. Résoudre l'équation différentielle $(1+e^t)x''(t) + 2e^tx'(t) + (1+2e^t)x(t) = e^t$ sur $\mathbb{R}$ en posant $y(t) = (1+e^t)x(t)$.

Exercice 41. Résoudre l'équation différentielle $t^2x''(t) + tx'(t) + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)x(t) = 0$ sur $]0,\infty[$ en posant $y(t) = \sqrt{t}x(t)$.

Exercice 42. On veut résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad (t^2+1)x''(t) - 2x(t) = t.$$

(1) Soit u une solution de l'équation homogène (E_0) associée à (E). On pose $v(t) = \frac{u(t)}{t^2+1}$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par v.
(2) Résoudre l'équation homogène (E_0).
(3) Déterminer une solution de (E) qui soit polynomiale de degré 1, puis résoudre complètement (E).

Exercice 43. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions des système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - by(t) \\ y'(t) = bx(t) + ay(t) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = bx(t) - ay(t) \end{cases}$$

Exercice 44. Déterminer les solutions des systèmes d'équations différentielles suivants, avec les "conditions initiales" demandées

(1) $\begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$ avec $x(0) = 2$ et $y(0) = 4$

(2) $\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases}$ avec $x(0) = 1$ et $y(0) = 3$.

(3) $\begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -4x(t) - 3y(t) \end{cases}$ avec $x(0) = 5$ et $y(0) = 2$

Exercice 45. Soient x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) + t \\ y'(t) &= -2x(t) - y(t) + e^{2t} \end{cases}$$

(1) Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par x.
(2) On suppose que $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$. Déterminer les fonctions x et y.