Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) := 1 - x$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est une bijection et déterminer f^{-1}.

Exercice 2. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et soit f la fonction définie par $f(x) := x - h(x)$.

(1) On suppose qu'on a $h'(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})$.

(2) On suppose qu'il existe une constante $k < 1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ h'(x) \leqslant k$. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue. Le but de l'exercice est de montrer que : *si f est injective, alors f est strictement monotone* (résultat énoncé en cours). Pour cela, on va raisonner “par contraposée” : on suppose que f n'est pas strictement monotone, et on cherche à montrer que f n'est pas injective.

(1) Justifier qu'il existe $x_0, x_0', x_1, x_1' \in I$ tels que $x_0 < x_0'$, $f(x_0) \geqslant f(x_0')$, $x_1 < x_1'$ et $f(x_1) \leqslant f(x_1')$.

(2) Pour $t \in [0, 1]$, on pose $x_t := (1 - t)x_0 + tx_1$ et $x_t' := (1 - t)x_0' + tx_1'$. Montrer que $\forall t \in [0, 1] \ : \ x_t < x_t'$.

(3) En appliquant le Théorème des valeurs intermédiaires à la fonction φ définie par $\varphi(t) := f(x_t) - f(x_t')$, montrer que f n'est pas injective.

Exercice 4. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' ne s'annule pas sur I, alors f' est de signe constant, et donc f est strictement monotone. (*Suggestion* : Raisonner par contraposée. Montrer que si f' n'est pas de signe constant, alors on peut trouver un intervalle fermé borné $[a, b] \subseteq I$ tel que la restriction de f à $[a, b]$ atteint son maximum ou son minimum en un point intérieur à $[a, b]$.)

Exercice 5. (Théorème de Darboux)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle. (Utiliser l'Exercice 4.)

Exercice 6. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction croissante. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue.*

(1) Soit x_0 un point de I qui n'est pas la borne de gauche de I. On note $f(x_0^-)$ la limite à gauche de f au point x_0 (qui existe puisque f est croissante), et on suppose qu'on a $f(x_0^-) < f(x_0)$.
   (a) Faire un dessin.
   (b) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0^-) < y < f(x_0)$. Montrer que $y \notin f(I)$.
   (c) Avec les notations de (ii), justifier l'existence d'un point $x \in I$ tel que $x < x_0$ et $f(x) < y < f(x_0)$.
   (d) Conclure que $f(I)$ n'est pas un intervalle.

(2) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}\cdot$ Étudier les variations de f et montrer que la restriction de f à $[-1,1]$ est une bijection de $[-1,1]$ sur un intervalle à expliciter.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, montrer que f est une bijection de I sur $J := f(I)$, et déterminer J et f^{-1}.

(1) $f(x) := x^2 - 4x + 3$ et $I :=]-\infty, 2]$.
(2) $f(x) := \frac{2x-1}{x+2}$ et $I :=]-2, \infty[$.
(3) $f(x) := \sqrt{2x+3} - 1$ et $I := \left[-\frac{3}{2}, \infty\right[$.
(4) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ et $I := [-3, \infty[$.
(5) $f(x) := \frac{2x^2+x+2}{x^2+1}$ et $I := [1, \infty[$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := \frac{x}{1+|x|}\cdot$ Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter, et déterminer f^{-1}.

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $[1, \infty[$ par $f(x) := x^{36} - 2x^{18} + 5$. Montrer que f est une bijection de $[1, \infty[$ sur un intervalle à expliciter, et déterminer f^{-1}.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \sqrt[3]{x+13} + \sqrt[3]{x-13}$.

(1) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.
(2) Résoudre l'équation $f(x) = 4$. (*Suggestion* : poser $u := \sqrt[3]{x+13}$ et chercher une équation de degré 3 vérifiée par u.)

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := \frac{2e^x+1}{e^x+1}\cdot$ Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à expliciter, et déterminer f^{-1}.

Exercice 13. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant
$$\forall x, y > 0 \ : \ f(xy) = f(x) + f(y).$$
(*Suggestion* : dériver l'identité précédente par rapport à y puis prendre $y := 1$.)

Exercice 14. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 15. En écrivant $\ln(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t}$ et en faisant un dessin, montrer que $\ln(2) < 1$, et donc $e > 2$.

Exercice 16. En écrivant $\ln(3) = \int_1^3 \frac{dt}{t}$, en faisant un dessin et en découpant l'intervalle $[1, 3]$ en 8 intervalles de longueur $\frac{1}{4}$, montrer que $\ln(3) > \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}\cdot$ En déduire que $e < 3$.

Exercice 17. Montrer que la fonction $t \mapsto t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ est croissante sur $[2,\infty[$; et en déduire, en utilisant l'Exercice 14, que $e \geqslant (1,01)^{100} \simeq 2,7$.

Exercice 18. Le but de l'exercice est d'établir, sans utiliser la touche "e" de sa calculatrice, l'encadrement suivant de e :
$$2,718 < e < 2,719.$$

(1) En écrivant $\ln(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t}$ et en faisant un dessin, montrer que $\ln(2) > 1/2$. En déduire que $e < 4$.

(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$e = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!}\, e^t dt.$$

(3) Déduire de (1) et (2) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < e < \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{4}{(n+1)!}\cdot$$

(4) Expliciter l'encadrement obtenu pour $n = 6$ et conclure.

Exercice 19. En étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$, montrer que
$$\forall x > 0 \ : \ \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1,0[\ : \ \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2}\cdot$$

Exercice 20. Montrer que $\forall x > 0 \ : \ \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\cdot$

Exercice 21. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ \forall x \geqslant 0 \ : \ e^x \geqslant \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}\cdot$

Exercice 22. Soit $\alpha > 0$.

(1) Montrer que si $\alpha \geqslant 1$, alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \ : \ (x+y)^\alpha \geqslant x^\alpha + y^\alpha$.

(2) Montrer que si $\alpha \leqslant 1$, alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \ : \ (x+y)^\alpha \leqslant x^\alpha + y^\alpha$.

Exercice 23. Déterminer $\arctan(x)$ pour $x := \pm 1, \ \pm\frac{\sqrt{3}}{3}, \ 0, \ \pm\sqrt{3}$.

Exercice 24. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} \ : \ |\arctan(x)| \leqslant |x|$.

Exercice 25. Montrer que

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ : \ \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \qquad \text{et} \qquad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\cdot$$

(*Suggestion* : commencer par le cas $x > 0$, en considérant un triangle rectangle dont les "côtés de l'angle droit" ont pour longueur 1 et x. *Autre possibilité* : utiliser l'identité $\cos(t)^2 = \frac{1}{1+\tan(t)^2}\cdot$)

Exercice 26. En utilisant l'Exercice 25, déterminer une expression "algébrique" pour $\sin(3\arctan(x))$.

Exercice 27. Montrer que pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\frac{1-\cos t}{\sin t} = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$; et en déduire que

$$\forall x > 0 \ : \ \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2}\arctan(x).$$

Exercice 28. Retrouver la formule de l'Exercice 27 en dérivant la fonction $x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

Exercice 29. Simplifier $f(x) := \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)\cdot$

Exercice 30. Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $xy < 1$, alors

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Exercice 31. En utilisant l'Exercice 30 montrer qu'on a

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Exercice 32. Montrer qu'on a $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8) = \dfrac{\pi}{4}\cdot$

Exercice 33. Vérifier qu'on a $\frac{(2+i)^2}{7+i} = \frac{1}{2}(1+i)$. Puis, en considérant les arguments des 2 membres de cette égalité, établir la formule

$$2\arctan(1/2) - \arctan(1/7) = \frac{\pi}{4}\cdot$$

Exercice 34. Calculer $(3+i)^2(7+i)$, et en déduire la valeur de $2\arctan(1/3) + \arctan(1/7)$.

Exercice 35. Vérifier qu'on a $\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2(1+i)$, et en déduire la formule suivante (qu'on appelle la **Formule de Machin**) :

$$\pi = 16\arctan(1/5) - 4\arctan(1/239).$$

Exercice 36. Le but de cet exercie est d'établir, sans utiliser la touche "π" de sa caculatrice, l'encadrement suivant de π :

$$3,141592 < \pi < 3,141593.$$

(1) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, on a

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \frac{x^{11}}{11} \leqslant \arctan(x) \leqslant x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9}\cdot$$

(2) Utiliser (1) pour donner des encadrements de $\arctan(1/5)$ et $\arctan(1/239)$ avec 8 chiffres après la virgule.

(3) Conclure en utilisant l'Exercice 35.

Exercice 37. Déterminer $\arcsin(x)$ pour $x := -\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ 1$, et déterminer $\arccos(x)$ pour $x := -1,\ -\frac{\sqrt{3}}{2},\ 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 38. Calculer $\arcsin\big(\sin(x)\big)$ et $\arccos\big(\cos(x)\big)$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 39. Calculer $\cos\big(2\arccos(3/4)\big)$ et $\sin\Big(\arcsin(2/5) + \arcsin(3/5)\Big)$.

Exercice 40. Simplifier les expressions suivantes : $\sin(2\arcsin x)$, $\cos(2\arccos x)$, $\sin(2\arccos x)$ et $\cos(2\arcsin x)$.

Exercice 41. Simplifier $\sin^2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$ et $\cos^2\left(\frac{\arcsin x}{2}\right)$.

Exercice 42. Montrer que $\forall x \in [-1,1]\ :\ \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

Exercice 43. Montrer que $\forall\, x \in]-1,1[\ :\ \tan(\arcsin(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$

Exercice 44. Montrer que $\forall\, x \in [-1,1]\backslash\{0\}, \quad \tan(\arccos(x)) = \dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}\cdot$

Exercice 45. Dériver la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$ sur $]0,1[$, et en déduire que

$$\forall x \in]0,1[\ :\ \lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^x \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = 2\arcsin(\sqrt{x}).$$

Plus généralement, montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, alors

$$\forall x \in]a,b[\ :\ \lim_{\alpha\to a^+}\int_\alpha^x \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)}} = 2\arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right).$$

Exercice 46. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$\arcsin(2x-1) = 2\arcsin(\sqrt{x}) - \frac{\pi}{2}\cdot$$

Exercice 47. Montrer que $\forall x \in]-1,1[\ :\ \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2}\arccos(x)$.

Exercice 48. Simplifier $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, ou bien en dérivant ou bien en posant $x := \tan(t)$.

Exercice 49. Simplifier $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en posant $x := \tan(t/2)$.

Exercice 50. Démontrer "les" formules pour $\operatorname{ch}(a+b)$ et $\operatorname{sh}(a+b)$.

Exercice 51. Trouver "la" formule pour $\operatorname{th}(a+b)$.

Exercice 52. On a vu en cours que la fonction sh est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$. En notant argsh la bijection réciproque, montrer que la fonction argsh est dérivable sur $\mathbb{R}$, calculer sa dérivée, puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}\ :\ \operatorname{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right).$$

Exercice 53. On a vu en cours que la restriction de la fonction ch à $[0, \infty[$ est une bijection de $[0, \infty[$ sur $[1, \infty[$. En notant argch : $[1, \infty[\to [0, \infty[$ la bijection réciproque, montrer que la fonction argch est dérivable sur $]1, \infty[$, calculer sa dérivée, puis montrer que

$$\forall x \in [1, \infty[: \ \operatorname{argch}(x) = \ln\Big(x + \sqrt{x^2 - 1}\Big).$$

Exercice 54. On a vu en cours que la fonction th est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. En notant argth la bijection réciproque, montrer que

$$\forall x \in]-1, 1[: \ \operatorname{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Exercice 55. Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := \operatorname{argsh}\big(\tan(t)\big)$.

(1) Montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f^{-1}(x) = \arctan\big(\operatorname{sh}(x)\big)$.

(2) Calculer les dérivées de f et de f^{-1}.