

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Calculer les intégrales $I_1 := \int_0^\infty \frac{dx}{x^4+1}$ et $I_2 := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2}$.

Exercice 2. Pour $x \in \mathbb{R}$, calculer $I_1(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ixt}}{t^4+1} dt$ et $I_2(x) := \int_0^\infty \frac{\cos xt}{(t^2+1)^2} dt$.

Exercice 3. Pour $a > 1$, on pose $I(a) := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{a+\sin t}$.

- (1) Mettre $I(a)$ sous la forme $\int_{\partial\mathbb{D}} f_a(z) dz$, où \mathbb{D} est le disque unité et la fonction f_a est à déterminer.
- (2) Calculer l'intégrale $I(a)$.

Exercice 4. Pour $r \in [0, 1[$, calculer $I(r) := \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-2r \cos \theta + r^2}$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale $I := \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1+\sin^2 t}$.

Exercice 6. Soit n un entier au moins égal à 2, et soit α vérifiant $1 - n < \alpha < 1$.

- (1) Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, dessiner le domaine élémentaire

$$K_{\varepsilon,R} := \left\{ r e^{i\theta}; \varepsilon \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{n} \right\}.$$

- (2) Calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x^n)}$.

Exercice 7. En intégrant $\frac{\log(z)}{z^3+1}$ sur le bord des domaines élémentaires

$$K_{\varepsilon,R} := \left\{ r e^{i\theta}; \varepsilon \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{2\pi}{3} \right\},$$

où $0 < \varepsilon < 1 < R$, calculer les intégrales $I := \int_0^\infty \frac{dx}{x^3+1}$ et $J := \int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^3+1} dx$.

Exercice 8. Calculer les intégrales $I := \int_0^\infty \frac{\log(x)}{1+x^2} dx$ et $J := \int_0^\infty \frac{(\log(x))^2}{1+x^2} dx$ en utilisant les domaines élémentaires

$$K_{\varepsilon,R} := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Im}(z) \geq 0, \varepsilon \leq |z| \leq R\}.$$

Exercice 9. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale

$$I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{dx}{x^\alpha(1+x)}.$$

- (1) Pour $0 < \varepsilon < 1 < R$, dessiner le domaine élémentaire $K_{\varepsilon R}$ (de type “pac-man”) délimité par le demi-cercle $C_\varepsilon := \{|z| = \varepsilon, \operatorname{Re}(z) \leq 0\}$, les deux segments $I_{\varepsilon R}^+ := [i\varepsilon, i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$ et $I_{\varepsilon R}^- := [-i\varepsilon, -i\varepsilon + \sqrt{R^2 - \varepsilon^2}]$, et l'arc de cercle $\Gamma_{\varepsilon R} := \{Re^{i\theta}; \theta \in [-\pi; \pi], |\theta| \geq \theta_{\varepsilon R}\}$, où $\theta_{\varepsilon R} := \arctan(\varepsilon/\sqrt{R^2 - \varepsilon^2})$.
- (2) Calculer $I(\alpha)$ en appliquant le théorème des résidus à $f(z) := \frac{1}{z^\alpha(1+z)}$, où z^α est défini en prenant l'argument dans $]0, 2\pi[$.

Exercice 10. (fractions rationnelles sur \mathbb{R}^+)

- (1) Soit $F = P/Q$ une fraction rationnelle sans pôles dans \mathbb{R}^+ , avec $\deg(Q) \geq \deg(P) + 2$. On note \mathcal{P} l'ensemble des pôles de F . En considérant des domaines élémentaires de type “pac-man”, établir la formule suivante :

$$\int_0^\infty F(x) dx = - \sum_{a \in \mathcal{P}} \operatorname{Res}(F(z) \log(z), a),$$

où \log est la détermination du logarithme dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^+$ obtenue en prenant l'argument dans $]0, 2\pi[$.

- (2) Calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{dx}{(x+1)(x^2+1)^2}$.

Exercice 11. Soient $a, b > 0$ avec $a \neq b$. En intégrant $\frac{(\log(z))^2}{(z+a)(z+b)}$ sur le bord de domaines de type “pac-man”, montrer qu'on a

$$\int_0^\infty \frac{(\log(x))^2}{(x+a)(x+b)} dx = \frac{(\log(a))^2 - (\log(b))^2}{2(a-b)}.$$

Exercice 12. Pour $\alpha \in]-1, 1[$, calculer l'intégrale $I(\alpha) := \int_0^\infty \frac{t^\alpha}{(1+t)^2} dt$.

Exercice 13. Calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{\log(x)}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx$.

Exercice 14. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\operatorname{cotan}(z) = \frac{1}{z} + 2z \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{z^2 - n^2\pi^2}.$$

- (1) Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \pi\mathbb{Z}$ fixé. Montrer que $F(\xi) := \frac{\operatorname{cotan}(\xi)}{\xi(\xi-z)}$ est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus S$, où l'ensemble S est à déterminer, et calculer les résidus de F aux points de S .

- (2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on note R_N le carré de sommets $\pm a_N \pm ia_N$, où $a_N = N\pi + \frac{\pi}{2}$. Dessiner R_N , puis montrer que pour tout $z \in \mathring{R}_N \setminus \pi\mathbb{Z}$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial R_N} \frac{\cotan(\xi)}{\xi(\xi-z)} d\xi = \frac{\cotan(z)}{z} - \left(\frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}^N \frac{2}{z^2 - n^2\pi^2} \right).$$

- (3) On rappelle que si $\xi = x + iy$, alors $|\sin \xi|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x$ et $|\cos \xi|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x$. Montrer qu'il existe une constante C (indépendante de N) telle que $|\cotan(\xi)|^2 \leq C$ pour tout N et pour tout $\xi \in \partial R_N$, et en déduire que $\int_{\partial R_N} \frac{\cotan(\xi)}{\xi(\xi-z)} d\xi$ tend vers 0 quand $N \rightarrow \infty$.
- (4) Conclure.

Exercice 15. Le but de l'exercice est de calculer, pour $k = 1$ et $k = 2$, la somme

$$S_k := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}.$$

- (1) Pour $N \in \mathbb{N}$, on note R_N le carré de sommets $\pm a_N \pm ia_N$, où $a_N = N\pi + \frac{\pi}{2}$.
- (a) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ quelconque, déterminer la limite de $\int_{\partial R_N} \frac{\cotan(z)}{z^{2k}} dz$ quand $N \rightarrow \infty$.
- (b) Pour $k = 1$ et $k = 2$, déterminer les pôles de $F_k(z) := \frac{\cotan(z)}{z^{2k}}$ à l'intérieur du rectangle R_N , et calculer les résidus correspondants.
- (2) Calculer la somme S_k pour $k = 1$ et pour $k = 2$.

Exercice 16. (somme binomiale)

- (1) Montrer que pour $k, n \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, on a $\binom{n}{k} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{(1+z)^n}{z^{k+1}} dz$.
- (2) Montrer qu'on a $\binom{2n}{n} \leq 4^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (3) Calculer l'intégrale $I := \int_{\partial \mathbb{D}} \frac{dz}{z^2 - 3z + 1}$.
- (4) Établir la formule $\sum_{n=0}^{\infty} 5^{-n} \binom{2n}{n} = \sqrt{5}$.

Exercice 17. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-s^2} ds$ à l'aide du théorème des résidus.

- (1) Pour $R > 0$, on pose $a_R := (-R + 1/2) - iR$, $b_R := (R + 1/2) + iR$, $c_R := (R - 1/2) + iR$, $d_R := (-R - 1/2) - iR$, et on note K_R le parallélogramme $a_R b_R c_R d_R$. D'autre part, pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ on pose

$$f(z) := \frac{e^{i\pi(z-\frac{1}{2})^2}}{1 - e^{-2i\pi z}}.$$

- (a) Calculer l'intégrale $\int_{\partial K_R} f(z) dz$ à l'aide du théorème des résidus.

(b) Montrer que $\int_{[a_R b_R]} f(z) dz - \int_{[d_R c_R]} f(z) dz$ tend vers $(1+i) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t^2} dt$ quand $R \rightarrow \infty$. (Il pourra être judicieux de paramétrer les segments à l'aide de l'intervalle $[-R, R]$.)

(2) Calculer l'intégrale I .

Exercice 18. Trouver le nombre de zéros de $P(z) := z^4 - 2z^3 + 11z^2 - 3z + 5$ dans le disque $\overline{D}(0, 2)$.

Exercice 19. Trouver le nombre de solutions de l'équation $z^5 + 12z^3 + 3z^2 + 20z + 3 = 0$ dans la couronne $\{1 < |z| < 2\}$.

Exercice 20. Le but de l'exercice est de donner une preuve du théorème fondamental de l'algèbre. On fixe donc un polynôme P de degré $d \geq 1$, qu'on suppose unitaire et qu'on écrit $P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \dots + a_0$. Il s'agit de montrer que P possède au moins une racine complexe.

- (1) Justifier qu'il existe $R > 0$ tel que $|P(z) - z^d| \leq \frac{1}{2}|z|^d$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| \geq R$.
- (2) Conclure en utilisant le théorème de Rouché.

Exercice 21. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda| < 1$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on a $|(\xi - 1)^n e^\xi| > |\lambda|$ sur le cercle $\{|\xi - 1| = 1\}$, et en déduire que l'équation $(z - 1)^n e^z = \lambda$ possède n solutions dans le disque $\overline{D}(1, 1)$.

Exercice 22. Soit $a \in \mathbb{R}$, $a > e$, et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f(z) := az^n - e^z$ admet n zéros simples dans le disque unité \mathbb{D} .

Exercice 23. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $P_n(z) := \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!}$.

- (1) On pose $R_n := \min \{|z|; z \in Z(P_n)\}$, où $Z(P_n)$ est l'ensemble des zéros de P_n . En raisonnant par l'absurde, montrer que R_n tend vers l'infini avec n .
- (2) Montrer qu'on a $|P_n(\xi) - \frac{\xi^n}{n!}| < \frac{(2n)^n}{n!}$ pour tout $\xi \in \partial D(0, 2n)$.
- (3) Montrer que les zéros de P_n appartiennent tous au disque $D(0, 2n)$.

Exercice 24. (fonctions implicites)

- (1) Soit f une fonction holomorphe au voisinage d'un disque $\overline{D}(0, r)$ et sans zéros sur $\partial D(0, r)$. On suppose que f admet un seul zéro a dans le disque $D(0, r)$, et que ce zéro est simple. Montrer qu'on a

$$a = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0, r)} \frac{\xi f'(\xi)}{f(\xi)} d\xi.$$

- (2) Soit $r = 1/\sqrt{3}$, et soit V le disque $D(0, 2r/3)$.
- En utilisant le théorème de Rouché, montrer que si $\lambda \in V$, alors il existe un unique $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < r$ et $z^3 + z = \lambda$. On note $z = a(\lambda)$.
 - Montrer que la fonction a est holomorphe sur V .

Exercice 25. Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} , et soit f une fonction holomorphe sur Ω telle que $f(\Omega) \subset \Omega$.

- On pose $A := \{w \in \mathbb{C}; f(w) = w\}$. Que peut-on dire de f si A est d'intérieur non vide?
- On suppose que f est non constante et vérifie $f \circ f = f$. Montrer qu'on a $f(z) = z$ pour tout $z \in \Omega$.

Exercice 26. (théorèmes d'Hurwitz)

Soit Ω un ouvert connexe de \mathbb{C} , et soit (f_n) une suite de fonctions holomorphes sur Ω . On suppose que (f_n) converge uniformément sur tout compact de Ω vers une fonction (holomorphe) f .

- On suppose que f n'est pas identiquement nulle. En utilisant le théorème de Rouché, montrer que pour tout $a \in \Omega$ on peut trouver $r > 0$ et $n \in \mathbb{N}$ tels que f et f_n ont le même nombre de zéros dans le disque $\overline{D}(a, r)$.
- Montrer que si les f_n ne s'annulent jamais, alors ou bien f est identiquement nulle, ou bien f ne s'annule jamais.
- On suppose que les fonctions f_n sont injectives. Montrer que la fonction f est soit injective, soit constante. (Fixer $a \in \Omega$ et appliquer (2) aux fonctions $g_n : \Omega \setminus \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ définies par $g_n(z) := f_n(z) - f_n(a)$).

Exercice 27. Soit f une fonction holomorphe non constante dans le disque unité \mathbb{D} , $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n|c_n| \leq |c_1|.$$

- En appliquant l'inégalité des accroissements finis à $h(z) := f(z) - c_1 z$, montrer que si z_0 est un point quelconque de \mathbb{D} et si r vérifie $|z_0| < r < 1$, alors

$$|f(\xi) - f(z_0) - c_1(\xi - z_0)| < |c_1(\xi - z_0)|$$

pour tout $\xi \in \partial D(0, r)$.

- Montrer que la fonction f est injective.

Exercice 28. Soit f une fonction holomorphe injective sur le disque unité \mathbb{D} .

- Montrer que l'aire de $f(\mathbb{D})$ est égale à $\int_{\mathbb{D}} |f'(z)|^2 dx dy$.
- On écrit $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. Exprimer l'aire de $f(\mathbb{D})$ à l'aide des c_n .