Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 3

Exercice 1. Soit $P(z) = z^2 + az + b$ un polynôme de degré 2 à coefficients complexes, avec $b \neq 0$. On note α et β les racines complexes de P, et on pose $f(z) := 1/P(z)$.

(1) Montrer que la fonction f est développable en série entière dans un disque $D(0, r)$, et déterminer le plus grand r possible.

(2) On note c_n les coefficients du développement en série entière de f dans le disque $D(0, r)$. Montrer que la suite (c_n) vérifie la relation de récurrence

$$bc_n + ac_{n-1} + c_{n-2} = 0.$$

(3a) On suppose que $\alpha \neq \beta$. Décomposer $f(z)$ en éléments simples, puis exprimer les coefficients c_n en fonction de α et β.

(3b) On suppose que $\alpha = \beta$. En observant que $f(z)$ est la dérivée de $g(z) := \frac{1}{\alpha - z}$, exprimer les c_n en fonction de α.

(4) Dans cette question, on prend $P(z) := z^2 + z - 1$. Montrer que les c_n sont des entiers négatifs, et donner une formule explicite pour les c_n.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a $f(x) \in \mathbb{R}$ pour tout $x \in]-1, 1[$. Montrer que tous les c_n sont réels.

Exercice 3. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq 1/(1 - |z|)$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(1) Montrer qu'on a $|c_n| \leq \frac{1}{r^n(1-r)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r \in]0, 1[$.

(2) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $|c_n| \leq e \times (n + 1)$.

Exercice 4. (inégalité de Bohr)

(1) Soit g une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$, $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$. On suppose que la fonction $\mathrm{Re}(g)$ est positive.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $r \in [0, 1[$, on a

$$b_n r^n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} 2\mathrm{Re}\left[g(re^{i\theta})\right] e^{-in\theta} d\theta\,.$$

(b) En déduire qu'on a $|b_n| \leq 2\mathrm{Re}(b_0)$ pour tout $n \geq 1$.

(2) Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe, $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$. On suppose qu'on a $|f(z)| \leq 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.

(a) Déduire de (1) qu'on a $|a_n| \leq 2(1 - \mathrm{Re}(a_0))$ pour tout $n \geq 1$.

(b) Montrer qu'en fait $|a_n| \leq 2\big(1 - |a_0|\big)$ pour tout $n \geq 1$. (*Changer de fonction f*).

(c) En déduire l'inégalité suivante :

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| \, (1/3)^n \leq 1 \, .$$

Exercice 5. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose que f s'annule en un point $z_0 \in \mathbb{D}$. Pour $r < 1$, on pose $M(r) := \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$.

(1) Soit r tel que $|z_0| < r < 1$. Montrer qu'on a

$$2i\pi f(0) = -\int_{\partial D(0,r)} \frac{f(z)}{z} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{z_0}{z}\right)^n dz \, .$$

(2) En déduire que si $|z_0| < r < 1$, alors

$$|f(0)| \leq \frac{M(r)}{r - |z_0|} \, |z_0| \, .$$

Exercice 6. Montrer que si $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$ est une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$, alors on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|c_n|^2}{n+1} = \frac{1}{\pi} \int_{\mathbb{D}} |f(z)|^2 \, dxdy \, .$$

Exercice 7. Dans tout l'exercice, f est une fonction entière, $f(z) = \sum_0^\infty c_n z^n$. On suppose qu'il existe deux constantes A et C telles que

$$\forall z \in \mathbb{C} \, : \, |f(z)| \leq A e^{C|z|} \, .$$

(1) Montrer qu'on a $|c_n| r^n \leq A e^{Cr}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $r > 0$.

(2) En choisissant convenablement r dans (1), montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|c_n| \leq A \left(\frac{Ce}{n}\right)^n \, .$$

(3) Montrer que la série entière $\sum n! c_n z^{n+1}$ a un rayon de convergence au moins égal à $1/C$. Pour $|w| > C$, on posera

$$g(w) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! c_n}{w^{n+1}} \, .$$

(4) Montrer que pour toute fonction entière h et pour tout $r > C$, on a

$$\frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(0,r)} g(w) h(w) \, dw = \sum_{n=0}^{\infty} c_n h^{(n)}(0) \, .$$

(5) Montrer que pour $|w| > C$, on peut écrire
$$g(w) = \frac{1}{w} \int_0^\infty f\left(\frac{t}{w}\right) e^{-t}\, dt\,.$$
(6) Déterminer la fonction g lorsque $f(z) = e^z$ ou $f(z) = \sin z$.

Exercice 8. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. Montrer que si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω telles que $fg = 0$, alors $f = 0$ ou $g = 0$.

Exercice 9. Soit f une fonction entière vérifiant $f(1) = 1$ et $f(2iy) = 4f(iy)$ pour tout $y \in [2, 3]$.
(1) Pourquoi a-t-on $f(2x) = 4f(x)$ pour tout $x \in [0, 1]$?
(2) Calculer $f(2^{-k})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, puis déterminer f.

Exercice 10. Soit f une fonction entière. On suppose qu'on a $f(z + 1) = f(z) = f(z + i)$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.
(1) On note Q le carré de sommets, 0, 1, $1 + i$, i. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on peut trouver $w \in Q$ tel que $f(z) = f(w)$.
(2) Montrer que f est constante.

Exercice 11. Soit f une fonction entière. On suppose que la fonction $u := \mathrm{Re}(f)$ est bornée. Montrer que f est constante. (*Considérer* $g := e^f$).

Exercice 12. Soit f une fonction entière. On suppose que $f(z)/z \to 0$ quand $|z| \to \infty$. Montrer que f est constante.

Exercice 13. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorphe.
(1) On suppose que $f(\Omega)$ n'est pas dense dans $\mathbb{C}$. Montrer qu'on peut trouver $a \in \mathbb{C}$ tel que la fonction $z \mapsto 1/(f(z) - a)$ est bien définie et *bornée* sur Ω.
(2) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et que f est non-constante. Montrer que $f(\mathbb{C})$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Exercice 14. Soit f une fonction entière. Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+$, on pose $f_\alpha(z) = f(\alpha z)$.
(1) On suppose que les fonctions f_α ne sont pas linéairement indépendantes, autrement dit qu'on peut trouver $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ deux à deux distincts et $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ non tous nuls tels que $\sum_1^n \lambda_i\, f_{\alpha_i} = 0$.
   (a) Pour $r > 0$, on pose $M(r) := \sup\{|f(z)|;\ |z| \le r\}$. Montrer qu'on peut trouver trois constantes C, α, β telles que $0 \le \alpha < \beta$ et
$$\forall t \ge 0\ :\ M(\beta t) \le C\, M(\alpha t)\,.$$

(b) On pose $\rho = \frac{\beta}{\alpha}\cdot$ Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}\ :\ M(\rho^k) \leq C^k\, M(1)$.
(c) Montrer qu'il existe deux constantes K et γ telles que

$$\forall r \geq 1\ :\ M(r) \leq K\, r^\gamma\,.$$

(2) Montrer que si la fonction f n'est pas polynomiale, alors les f_α sont linéairement indépendantes.

Exercice 15. Soit $d \in \mathbb{N}^*$; on note Γ_d l'ensemble des racines $(d+1)$-ièmes de 1. Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à d, on a

$$\sum_{\zeta \in \Gamma_d} P(\zeta) = (d+1)P(0);$$

et en déduire que $|P(0)| \leq \max\{|P(\zeta)|;\ \zeta \in \Gamma_d\}$.

Exercice 16. Soit $U := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Trouver une fonction $f : \overline{U} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{U}$, holomorphe dans U, bornée sur ∂U, mais non bornée sur $\overline{U}$.

Exercice 17. (principe du maximum pour un ouvert non borné)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ non borné. Soit également $f : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ une fonction continue sur $\overline{\Omega}$, holomorphe dans Ω et *bornée sur* $\overline{\Omega}$. On pose $M := \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \partial\Omega\}$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *Si Ω n'est pas dense dans $\mathbb{C}$, alors $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$.*

(1) On suppose que $f(\xi) \to 0$ quand $|\xi| \to \infty$.
(a) Soit $z \in \Omega$. Montrer que pour tout $R > 0$, on a

$$|f(z)| \leq \max\bigl(M, \sup\{|f(\xi)|;\ \xi \in \Omega \cap \partial D(z,R)\}\bigr).$$

(b) Montrer qu'on a $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$.
(2) On suppose que Ω ne rencontre pas le disque unité $\mathbb{D}$. En appliquant (1) aux fonctions $z \mapsto f(z)^n/z$, $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'on a $|f(z)| \leq M$ pour tout $z \in \Omega$.
(3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 18. (théorème des 3 droites; théorème des 3 cercles)

(1) Soit $\Omega := \{z \in \mathbb{C};\ 0 < \mathrm{Re}(z) < 1\}$ et soit $g : \overline{\Omega} \to \mathbb{C}$ continue, bornée, holomorphe dans Ω. Pour $x \in [0,1]$, on pose $M_x := \sup_{t \in \mathbb{R}} |g(x+it)|$. En utilisant l'exercice 17, montrer que pour tout $x \in [0,1]$, on a

$$M_x \leq M_0^{1-x} M_1^x\,.$$

(2) Soient $0 \leq r_1 < r_2$. On pose $V := \{z \in \mathbb{C};\ r_1 < |z| < r_2\}$. Soit $f : \overline{V} \to \mathbb{C}$ continue sur $\overline{V}$ et holomorphe dans V. Pour $r \in [r_1, r_2]$, on pose $M(r) := \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$. En utilisant (1), montrer que si $r \in [r_1, r_2]$ et si $\theta \in [0,1]$

est tel que $\log(r) = (1-\theta)\,\log(r_1) + \theta\,\log(r_2)$, autrement dit $\theta = \frac{\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}$, alors

$$M(r) \leq M(r_1)^{\theta} M(r_2)^{1-\theta}\,.$$

(3) Exprimer les résultats de (1) et (2) en termes de fonctions convexes.

Exercice 19. Soit f une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$. On suppose que f s'annule en un point $z_0 \in \mathbb{D}$. Pour $r < 1$, on pose $M(r) := \sup\{|f(z)|;\ |z| = r\}$. En appliquant le principe du maximum à $g(z) := \frac{f(z)}{(z-z_0)}$, montrer que si $|z_0| < r < 1$, alors

$$|f(0)| \leq \frac{M(r)}{r - |z_0|}\,|z_0|\,.$$

Exercice 20. (transformations de Möbius)
Soit $\mathbb{D}$ le disque unité, et soit $a \in \mathbb{D}$. Pour $z \neq 1/\overline{a}$, on pose $\varphi_a(z) := \dfrac{a-z}{1-\overline{a}z}\cdot$

(1) Calculer $|\varphi_a(\zeta)|$ pour $\zeta \in \partial\mathbb{D}$.
(2) En déduire qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
(3) Montrer que si $z \in \mathbb{D}$, alors

$$1 - |\varphi_a(z)|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\overline{a}z|^2}\,,$$

et en déduire à nouveau qu'on a $|\varphi_a(z)| < 1$ pour tout $z \in \mathbb{D}$.
(4) Montrer que la restriction de φ_a à $\mathbb{D}$ est une bijection holomorphe de $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$, et déterminer sa réciproque.

Exercice 21. (fonctions sous-harmoniques)
Dans tout l'exercice, Ω est un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est **sous-harmonique** si on a $\Delta u(z) \geq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

(1) Montrer que si f est une fonction holomorphe sur Ω, alors $\mathrm{Re}(f)$ et $|f|^2$ sont sous-harmoniques.
(2) Soit $u : \Omega \to \mathbb{C}$ sous-harmonique.
   (a) Soit $z_0 \in \Omega$, et soit $r_0 > 0$ tel que $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$. Pour $r \in [0, r_0]$, on pose

$$I(r) := \int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{it})\,dt\,.$$

   Montrer que la fonction I est de classe $\mathcal{C}^1$ et établir la formule

$$rI'(r) = \int_{\partial D(z_0,r)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,.$$

   (b) Avec les notations de (a), montrer qu'on a $I'(r) \geq 0$ pour tout $r \in\ [0, r_0]$.

(c) Montrer que pour tout disque $\overline{D}(z_0, r_0) \subset \Omega$, on a

$$u(z_0) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(z_0 + r_0 e^{it})\, dt\,.$$

(3) On suppose que l'ouvert Ω est borné. Montrer que si $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ est continue sur $\overline{\Omega}$ et sous-harmonique dans Ω, alors

$$\forall z \in \Omega \;:\; u(z) \leq \sup\{u(\xi);\; \xi \in \partial\Omega\}\,,$$

avec inégalité stricte si Ω est connexe et si u n'est pas constante.

Exercice 22. Soit f une fonction holomorphe dans le disque unité $\mathbb{D}$. Pour $r < 1$, on pose

$$I(r) := \int_0^{2\pi} |f(re^{i\theta})|\, d\theta\,.$$

(1) Soit $\phi : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne bornée.
   (a) Montrer que la fonction F_ϕ définie par $F_\phi(z) = \int_0^{2\pi} \phi(\theta) f(ze^{i\theta})\, d\theta$ est holomorphe sur $\mathbb{D}$. (*Développer f et série entière*).
   (b) En utilisant le principe du maximum, montrer que pour tout $r \in [0, 1[$ et pour tout $z \in D(0, r)$, on a $|F_\phi(z)| \leq I(r)$.

(2) Montrer que pour tout $r \in [0, 1[$, il existe une fonction borélienne $\phi_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ telle que $|\phi_r(\theta)| = 1$ pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$ et

$$I(r) = \int_0^{2\pi} \phi_r(\theta) f(re^{i\theta})\, d\theta\,.$$

(3) Déduire des questions précédentes que I est une fonction croissante de r : si $0 \leq r_1 < r_2 < 1$, alors $I(r_1) \leq I(r_2)$.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{D} \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe. On suppose qu'on a $\lim_{|z| \to 1} |f(z)| = +\infty$. En appliquant le principe du minimum local, montrer que f s'annule au moins une fois dans $\mathbb{D}$.

Exercice 24. (théorème de l'application ouverte)
Soit f une fonction holomorphe non constante sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. Le but de l'exercice est de montrer que l'image par f de tout ouvert $V \subset \Omega$ est un ouvert de $\mathbb{C}$.

(1) Soit V un ouvert de Ω et soit $a \in V$. On pose $b := f(a)$.
   (a) Justifier l'existence d'un disque ouvert D de centre a tel que $\overline{D} \subset V$ et $f(z) \neq b$ pour tout $z \in \overline{D} \setminus \{a\}$.
   (b) On pose $\varepsilon := \inf\{|f(\xi) - b|;\; \xi \in \partial D\}$. Pourquoi ε est-il *strictement* positif?

   (c) Soit $w_0 \in D(b, \varepsilon/2)$. Montrer qu'on a $|f(a) - w_0| < \varepsilon/2$ et $|f(\xi) - w_0| \geq \varepsilon/2$ pour tout $\xi \in \partial D$.

(2) On garde les notations de (1), et on pose $g(z) := f(z) - w_0$. Montrer que $|g|$ possède un minimum sur $\overline{D}$, et que ce minimum est atteint en un point $z_0 \in D$. Que peut-on en déduire sur la valeur de ce minimum?

(3) Conclure.

Exercice 25. (forme invariante du lemme de Schwarz)
Soit f est une fonction holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ et vérifiant $f(\mathbb{D}) \subset \mathbb{D}$.

(1) Soit $b \in \mathbb{D}$. Avec les notations de l'exercice 20, calculer $\varphi_{f(b)} \circ f \circ \varphi_b(0)$.

(2) Montrer que pour tous points $a, b \in \mathbb{D}$, on a l'inégalité

$$\left| \frac{f(b) - f(a)}{1 - \overline{f(b)} f(a)} \right| \leq \left| \frac{b - a}{1 - \bar{b}a} \right|.$$

Exercice 26. Soit f une fonction holomorphe dans un disque $D(0, r)$. On suppose qu'on a $f(0) = 0$, et qu'il existe une constante $A > 0$ telle que $\mathrm{Re}(f(z)) \leq A$ pour tout $z \in D(0, r)$.

(1) Montrer que la fonction ϕ définie par $\phi(w) := \frac{f(rw)}{2A - f(rw)}$ est bien définie et holomorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$.

(2) En utilisant le lemme de Schwarz, montrer qu'on a $|\phi(w)| \leq |w|$ pour tout $w \in \mathbb{D}$.

(3) En déduire que pour tout $z \in D(0, r)$, on a $|f(z)| \leq 2A \, \frac{|z|}{r - |z|}$.

Exercice 27. (automorphismes de $\mathbb{D}$)
Soit φ un **automorphisme** du disque unité $\mathbb{D}$, i.e. une bijection $\mathbb{D}$ sur $\mathbb{D}$ telle que φ et φ^{-1} sont holomorphes.

(1) On suppose qu'on a $\varphi(0) = 0$. En appliquant le lemme de Schwarz à φ et φ^{-1}, montrer que φ est une rotation : $\varphi(z) = \lambda z$, où $|\lambda| = 1$.

(2) On ne suppose plus que $\varphi(0) = 0$. Montrer que φ est de la forme $\varphi(z) = \lambda \varphi_a(z)$, où $|\lambda| = 1$ et $a \in \mathbb{D}$ (cf l'exercice 20).

Exercice 28. Déterminer les développements de Laurent des fonctions suivantes dans les domaines indiqués.

(1) $f(z) := \frac{1}{1-z} + \frac{1}{3-z}$ dans $\{0 < |z - 1| < 2\}$ et dans $\{0 < |z - 3| < 2\}$.

(2) $g(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ dans $\{|z| < 1\}$, dans $\{1 < |z| < 2\}$ et dans $\{|z| > 2\}$.

(3) $h(z) := \frac{1}{1-z} \, e^{1/z}$ dans $\{|z| > 1\}$.

Exercice 29. Soit $r > 1$, et soit f une fonction holomorphe dans la couronne $C_r = \{1/r < |z| < r\}$.

(1) Montrer que la fonction $z \mapsto \overline{f(1/\bar{z})}$ est holomorphe sur C_r, et exprimer ses coefficients de Laurent en fonctions de ceux de f.
(2) On suppose qu'on a $|f(\zeta)| \equiv 1$ sur le cercle $\{|\zeta| = 1\}$. Montrer que f ne s'annule pas sur C_r, et qu'on a $\overline{f}(z) \equiv \frac{1}{f(1/\bar{z})}$.

Exercice 30. Soit f une fonction entière vérifiant $\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = \infty$.
(1) Pour $w \in \mathbb{C}^*$, on pose $g(w) := f(1/w)$.
  (a) Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que $1/g(w)$ est bien défini pour $w \in D(0,r) \setminus \{0\}$, puis montrer que $1/g$ se prolonge en une fonction φ holomorphe sur $D(0,r)$ telle que $\varphi(0) = 0$.
  (b) Montrer qu'il existe un entier $m \geq 1$ et une fonction h holomorphe sur $D(0,r)$ tels que $g(w) = \frac{1}{w^m} h(w)$ pour tout $w \in D(0,r) \setminus \{0\}$.
  (c) On note d_n les coefficients de Laurent de g. Que peut-on dire de d_n pour $n < -m$?
(2) Montrer que f est une fonction polynomiale.

Exercice 31. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^*$ et telle que $|f(z)| = o(1/|z|)$ quand $z \to 0$. Montrer que 0 est une singularité éliminable pour f.

Exercice 32. Soit Ω un ouvert connexe de $\mathbb{C}$, et soit S un fermé de Ω sans point d'accumulation dans Ω. Montrer que si u est une fonction holomorphe sur $\Omega \setminus S$ et si u admet une limite en chaque point $a \in S$, alors u se prolonge en une fonction holomorphe sur Ω.

Exercice 33. Soient f et g deux fonctions holomorphes non nulles sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$.
(1) On suppose que tous les zéros de f sont également des zéros de g, avec multiplicité au moins égale. Montrer qu'il existe une fonction h holomorphe dans Ω telle que $g = hf$.
(2) On suppose que $\Omega = \mathbb{C}$ et qu'on a $|g(z)| \leq |f(z)|$ pour tout $z \in \mathbb{C}$. Montrer qu'il existe une constante c telle que $g = cf$.