Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Montrer que si u est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs réelles sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$ et si φ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert de $\mathbb{R}$ contenant $u(\Omega)$, alors $d(\varphi \circ u) = (\varphi' \circ u)du$. Que devient cette formule lorsque $\varphi(t) = \log(t)$?

Exercice 2. Déterminer df, $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ dans les cas suivants, en précisant sur quel domaine la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$: $f(z) := |z|^2$; $f(z) := \log|z|$; $f(z) := |z|$.

Exercice 3. Montrer que sur $\Omega = \mathbb{C}^*$, on a

$$\frac{dz}{z} = d(\log|z|) + i\,\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2}\cdot$$

Exercice 4. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$ et soit $f \in \mathcal{C}^1(\Omega)$.

(1) Montrer que si $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, alors on a pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $h \in \mathbb{C}$:

$$d(L \circ f)(z)h = L\big(df(z)h\big).$$

(2) En déduire que pour tout $z \in \Omega$ et pour tout $h \in \mathbb{C}$, on a

$$d\bar{f}(z)h = \overline{df(z)h};$$

puis montrer que

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial z} = \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}} = \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\cdot$$

Exercice 5. Le but de l'exercice est de justifier le fait suivant : si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, de la forme $f(z) = \frac{P(z,\bar{z})}{Q(z,\bar{z})}$ où P et Q sont des polynômes à 2 variables, alors on peut calculer $\frac{\partial f}{\partial z}$ et $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}$ en "dérivant par rapport à z et à $\bar{z}$".

(1) Vérifier que si u et v sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur Ω, alors

$$\frac{\partial(uv)}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial z}\,v + u\,\frac{\partial v}{\partial z}\cdot$$

(2) Déduire de (1) que si $u, v \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ et si v ne s'annule pas sur Ω, alors

$$\frac{\partial(u/v)}{\partial z} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z}\,v - u\,\frac{\partial v}{\partial z}}{v^2}\cdot$$

(3) Montrer que si $l \in \mathbb{N}$, alors
$$\frac{\partial(\bar{z}^l)}{\partial z} = 0 \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial(z^k \bar{z}^l)}{\partial z} = k z^{k-1} \bar{z}^l \quad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*.$$
(4) Conclure.

Exercice 6. Soient Ω_1, Ω_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$, et soient $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ et $g : \Omega_2 \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) Exprimer $d(g \circ f)$ à l'aide de $\frac{\partial g}{\partial z}$, $\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}$, f, df et $d\bar{f}$.
(2) En déduire les formules suivantes :
$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f\right) \frac{\partial f}{\partial z} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f\right) \overline{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}}\ ,$$
$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \left(\frac{\partial g}{\partial z} \circ f\right) \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \circ f\right) \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}\ .$$

Exercice 7. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Si $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, le **laplacien** de u est la fonction Δu définie par
$$\Delta u := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\cdot$$
Montrer qu'on a
$$\Delta u = 4\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 4\frac{\partial^2 u}{\partial \bar{z} \partial z}\ \cdot$$

Exercice 8. (coordonnées polaires)
Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} := \mathbb{R}^2$, et soit $\widetilde{\Omega} := \{(r, \theta) \in]0, \infty[\times \mathbb{R};\ (r\cos\theta, r\sin\theta) \in \Omega\}$. Si f est une fonction sur Ω, on note encore f la fonction $(r, \theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ définie sur $\widetilde{\Omega}$.

(1) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$, montrer qu'on a
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos\theta\, \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin\theta}{r}\, \frac{\partial f}{\partial \theta} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r}\, \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot$$
(2) Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^2$, montrer qu'on a
$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\, \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\, \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}\cdot$$

Exercice 9. Écrire l'équation de Cauchy-Riemann en coordonnées polaires.

Exercice 10. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}$. Montrer que la fonction f^* définie par $f^*(z) := \overline{f(\bar{z})}$ est holomorphe sur l'ouvert $\Omega^* = \{z;\ \bar{z} \in \Omega\}$, avec $(f^*)'(z) = \overline{f'(\bar{z})}$.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) = 0$ et $f(z) = \frac{z^3}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$, et déterminer ses points de $\mathbb{C}$-dérivabilité.

Exercice 12. Soit $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par $f(0) := 0$ et $f(z) := e^{-1/z^4}$ si $z \neq 0$.

(1) Montrer que f admet des dérivées partielles en 0, et que l'équation de Cauchy-Riemann est vérifiée en ce point.
(2) La fonction f est elle holomorphe?

Exercice 13. Soit f une fonction holomorphe sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$. On suppose que f ne prend que des valeurs réelles. Montrer que f est constante.

Exercice 14. Soit f une fonction holomorphe, supposée de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que f' est holomorphe.

Exercice 15. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $a \in \Omega$. Montrer que si f et g sont des fonctions holomorphes sur Ω telles que $f(a) = 0 = g(a)$ et $g'(a) \neq 0$, alors $g(z) \neq 0$ pour $z \neq a$ suffisamment proche de a et

$$\lim_{z \to a} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}\cdot$$

Exercice 16. En utilisant l'Exercice 15, déterminer $\lim\limits_{z \to i} \frac{z^{10}+1}{z^6+1}$ et $\lim\limits_{z \to i} \frac{z^2-2iz-1}{z^4+2z^2+1}\cdot$

Exercice 17. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$, et soit $f :\in \mathcal{C}^1(\Omega)$. Pour $p \in \Omega$, on note $J_f(p)$ le déterminant Jacobien de f au point p.

(1) Montrer que pour tout $p \in \Omega$, on a

$$J_f(p) = \left|\frac{\partial f}{\partial z}(p)\right|^2 - \left|\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(p)\right|^2\cdot$$

(2) Que devient cette formule lorsque f est holomorphe?

Exercice 18. Soit : $\Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe injective. En admettant qu'on a $f'(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$, exprimer l'aire de $f(\Omega)$ à l'aide de f'.

Exercice 19. (fonctions harmoniques)
Dans cet exercice, on *admettra* que toute fonction holomorphe est de classe $\mathcal{C}^2$. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. On dit qu'une fonction $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ est **harmonique** si elle vérifie $\Delta u = 0$.

(1) Montrer que toute fonction holomorphe est harmonique, et que la partie réelle et la partie imaginaire d'une fonction harmonique sont des fonctions harmoniques.

(2) On suppose que Ω est un disque ou un rectangle, de centre $z_0 = (x_0, y_0)$. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique, et soit $v : \Omega \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$v(x,y) = \int_{y_0}^{y} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\, dt - \int_{x_0}^{x} \frac{\partial u}{\partial y}(s,y_0)\, ds\,.$$

Montrer que la fonction $f := u + iv$ est holomorphe sur $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

(3) Montrer que si Ω est un disque ou un rectangle, alors une fonction $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est harmonique si et seulement si u est la partie réelle d'une fonction holomorphe.

(4) On suppose que Ω est connexe, et on fixe un point $z_0 \in \Omega$. Soit $u : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction harmonique, et soit $f \in H(\Omega)$. Montrer qu'on a $\mathrm{Re}(f) = u$ si et seulement si $\mathrm{Re}(f(z_0)) = u(z_0)$ et $f' = 2\frac{\partial u}{\partial z}$.

Exercice 20. Soit $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u(x,y) := e^{-x}(x \sin y - y \cos y)$. Montrer que u est harmonique et trouver une fonction $v : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $f := u + iv$ soit holomorphe.

Exercice 21. Soit $\mathbb{D} := D(0,1)$, et soit $P : \mathbb{D} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$P(z) := \frac{1 - |z|^2}{|1 - z|^2}.$$

(1) Calculer $\frac{\partial P}{\partial z}$ et $\frac{\partial P}{\partial \bar{z}}$.

(2) Montrer que P est harmonique et trouver une fonction holomorphe f telle que $\mathrm{Re}(f) = P$.

Exercice 22. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$.

(1) Montrer qu'on a $d(\log |f|) = \frac{1}{2}\left(\frac{df}{f} + \frac{d\bar{f}}{\bar{f}}\right)$.

(2) Déduire de (1) que si f est holomorphe, alors $\log |f|$ est harmonique.

Exercice 23. Soient V_1, V_2 deux ouverts de $\mathbb{C}$, et soient $f : V_1 \to V_2$ et $u : V_2 \to \mathbb{C}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$.

(1) En utilisant l'exercice 6, montrer que si f est holomorphe, alors $\frac{\partial (u \circ f)}{\partial z} = f' \times (\frac{\partial u}{\partial z} \circ f)$ et $\frac{\partial (u \circ f)}{\partial \bar{z}} = \overline{f'} \times (\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} \circ f)$.

(2) On suppose que u et f sont de classe $\mathcal{C}^2$, et que f est holomorphe. Déduire de (1) qu'on a $\Delta(u \circ f) = |f'|^2 \times ((\Delta u) \circ f)$.

(3) Conclure que si f est holomorphe (de classe $\mathcal{C}^2$) et u harmonique, alors $u \circ f$ est harmonique.

Exercice 24. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$. Montrer que si $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, alors

$$\Delta(|f|^2) = 4\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2 + 2\,\mathrm{Re}\,(\overline{f}\,\Delta f) + 4\left|\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\right|^2 .$$

Que devient cette formule lorsque f est holomorphe?

Exercice 25. Soient $f_1, \dots, f_n$ des fonctions holomorphes sur un ouvert connexe de $\mathbb{C}$. On suppose que la fonction $\sum_1^n |f_i|^2$ est constante. Montrer que toutes les f_i sont constantes.

Exercice 26. Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

(1) $\Sigma_1(z) := \sum \frac{n^\alpha}{n!}\, z^n,\ \alpha > 0$;
(2) $\Sigma_2(z) := \sum \frac{n^n}{n!}\, z^n$;
(3) $\Sigma_3(z) := \sum \frac{1+a^n}{1+n^a}\, z^n,\ a > 0$;
(4) $\Sigma_4(z) := \sum (1 + (-1)^n)^n z^n$;
(5) $\Sigma_5(z) := \sum \frac{z^{n^p}}{n^n},\ p \in \mathbb{N}^*$;
(6) $\Sigma_6(z) := \sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$.

Exercice 27. Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

(1) Calculer les dérivées successives de $f(z) := \frac{1}{1-z}$ sur son domaine de définition.
(2) Montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{(1-z)^p}$ se développe en série entière dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0,1)$, et trouver les coefficients de son développement.

Exercice 28. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_k z^k$ la somme d'une série entière dans le disque unité $\mathbb{D} = D(0,1)$.

(1) On note Ω le demi-plan $\{\mathrm{Re}(z) < 1/2\}$. Montrer que la formule
$$F(z) = \frac{1}{1-z}\, f\left(\frac{z}{1-z}\right)$$
a un sens pour tout $z \in \Omega$, et définit une fonction holomorphe dans Ω.
(2) Montrer que dans le disque $D(0, 1/2)$, on a
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k\right) z^n .$$

Exercice 29. Soit $\mathbf{a} = (a_n)$ une suite de nombres complexes admettant une limite $l \in \mathbb{C}$.

(1) Quel est le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{a_n}{n!}\, z^n$? Dans la suite, on posera $S_{\mathbf{a}}(z) = \sum_0^\infty \frac{a_n}{n!} z^n$.
(2) Montrer que pour tout $x \geq 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a
$$|e^{-x} S_{\mathbf{a}}(x) - l| \leq e^{-x} \sum_{n=0}^{N} \frac{|a_n - l|}{n!}\, x^n + \sup_{n>N} |a_n - l| .$$

(3) Déterminer $\lim_{x\to+\infty} e^{-x} S_{\mathbf{a}}(x)$.

Exercice 30. (critères d'Abel)
Soit (a_n) une suite de fonctions à valeurs complexes définies sur un même ensemble X, et soit (b_n) une suite de fonctions définies sur un même ensemble Y. Montrer que dans les deux cas suivants, la série de fonctions $\sum a_n(x)\, b_n(y)$ converge uniformément sur $X \times Y$.

(1) Les sommes partielles de la série $\sum a_n(x)$ sont uniformément bornées sur X, la suite $(b_n(y))$ tend vers 0 uniformément sur Y, et $\sum_{n=N}^{\infty} |b_{n+1}(y) - b_n(y)|$ tend vers 0 quand $N \to \infty$, uniformément sur Y.
(2) La série $\sum a_n(x)$ converge uniformément sur X, la suite $(b_n(y))$ est uniformément bornée sur Y, et il existe une constante C telle que $\forall y \in Y$: $\sum_0^{\infty} |b_{n+1}(y) - b_n(y)| \leq C$.

Exercice 31. (théorème d'Abel)
Soit $S(z) = \sum c_n z^n$ une série entière de rayon de convergence 1. On suppose que la série $\sum c_n$ converge.

(1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 30), montrer que la série $S(r)$ converge uniformément par rapport à $r \in [0, 1]$.
(2) On note f la somme de la série S dans le disque $\mathbb{D} = D(0, 1)$. Montrer que $f(r)$ tend vers $\sum_0^{\infty} c_n$ quand r tend vers 1^-.

Exercice 32. Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a $\overline{e^z} = e^{\bar{z}}$

Exercice 33. Soient $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, avec $a < b$ et $0 \leq c < d \leq \pi$. Déterminer et dessiner l'image du rectangle $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ par la fonction exponentielle.

Exercice 34. Soit $z \in \mathbb{C}$ Le but de l'exercice est de montrer, de deux façons différentes, qu'on a

$$e^z = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

(1) Développer $\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$ à l'aide de la formule du binôme, et en déduire la formule souhaitée en utilisant le théorème de convergence dominée pour les séries.
(2) Démontrer la formule souhaitée en utilisant le logarithme complexe.

Exercice 35. Énoncer et démontrer les formules "bien connues" pour $\cos(u + v)$ et $\sin(u + v)$, où $u, v \in \mathbb{C}$.

Exercice 36. Montrer que pour tout nombre complexe $z = x + iy$, on a les identités suivantes :

$$\begin{cases} \cos z &= \cos x \operatorname{ch} y - i \sin x \operatorname{sh} y \\ \sin z &= \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y \end{cases}$$

$$|\cos z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \cos^2 x \quad \text{et} \quad |\sin z|^2 = \operatorname{sh}^2 y + \sin^2 x\,.$$

Exercice 37. (forme complexe de l'arctangente)

(1) Montrer que si $t \in \mathbb{R}$, alors $\frac{1+it}{1-it} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$.
(2) Soient $w, z \in \mathbb{C}$, et soit $\xi = e^{iw}$. Montrer qu'on a $\tan(w) = z$ si et seulement si $\xi^2 = \frac{1+iz}{1-iz}$.
(3) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\arctan(t) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+it}{1-it}\right)$.

Exercice 38. Résoudre l'équation $\cos z = 2$. (*Poser* $\xi = e^{iz}$).

Exercice 39. Pour $z \in \mathbb{C} \backslash \mathbb{R}$, étudier la convergence de la suite $(\tan(nz))$.

Exercice 40. Soit $\Omega = \{z = x + iy \in \mathbb{C};\ x + y > 0\}$. Dessiner Ω, vérifier que $\Omega \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, et déterminer l'image de Ω par la fonction log.

Exercice 41. Soient L une détermination holomorphe du logarithme et Θ une détermination $\mathcal{C}^1$ de l'argument sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$. Déterminer L' et $d\Theta$.

Exercice 42. Soit L une détermination *continue* du logarithme dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^*$.

(1) Montrer que pour tout point $z_0 \in \Omega$, on peut trouver $r > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ tels que $D(z_0, r) \subset \Omega \cap (\mathbb{C} \setminus \Delta_\alpha)$, où Δ_α est la demi-droite $\mathbb{R}^+ e^{i\alpha}$.
(2) Avec les notations de (1), montrer que la fonction $L - \log_\alpha$ est constante sur $D(z_0, r)$.
(3) Montrer que L est holomorphe sur Ω.

Exercice 43. Soient f et g deux fonctions holomorphes sur un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{C}$, avec $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) g est un logarithme de f, i.e. $e^{g(z)} = f(z)$ pour tout $z \in \Omega$;
(ii) $g' = f'/f$ et $e^{g(z_0)} = f(z_0)$ pour au moins un point $z_0 \in \Omega$.

Exercice 44. (deux formules classiques)

(1) En utilisant un des critères d'Abel (exercice 30), montrer que la série $\sum \frac{z^n}{n}$ converge uniformément sur tout compact de $\overline{\mathbb{D}} \backslash \{1\}$.

(2) En déduire que pour tout point $\zeta \in \mathbb{T}\backslash\{1\}$, on a
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\zeta^n}{n} = -\log(1-\zeta)\ .$$
(3) Pour $x \in]0, 2\pi[$, établir les formules
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(nx)}{n} = -\log\left|2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|\ ,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n} = \frac{\pi - x}{2}\ .$$

Exercice 45. A-t-on toujours $\log(uv) = \log(u) + \log(v)$ pour $u, v \in \mathbb{C}^*$?

Exercice 46. Calculer $\sqrt{4i}$.

Exercice 47. Calculer i^i et $(i^i)^i$.

Exercice 48. Déterminer l'image du demi-plan $U = \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$ par la fonction $z \mapsto z^{1/4}$.

Exercice 49. On note $\sqrt{z}$ la détermination principale de $z^{1/2}$ dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}^-$. Montrer que la fonction $z \mapsto \cos(\sqrt{z})$, définie a priori sur $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}^-$, se prolonge en une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$.

Exercice 50. En utilisant (ou pas) l'Exercice 15, déterminer les limites suivantes.

(1) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{z^2}$ (2) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{\sin z - z}{z^3}$ (3) $\displaystyle\lim_{z\to 0} \frac{1-\cos z}{\sin(z^2)}$

Exercice 51. Déterminer $\displaystyle\lim_{z\to 0}(\cos z)^{1/z^2}$, après avoir précisé ce que signifie $(\cos z)^{1/z^2}$.

Exercice 52. Soit k un entier supérieur ou égal à 2. Montrer qu'il n'existe pas de détermination continue de $z^{1/k}$ sur le cercle $\mathbb{T}$.

Exercice 53. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{C}$, et soit $f \in \mathcal{C}^2(\Omega)$. On suppose que f est holomorphe et qu'on a $f(z) \neq 0$ pour tout $z \in \Omega$. Sous ces hypothèses, on a vu dans l'Exercice 20 que la fonction $\log|f|$ est harmonique. Le but du présent exercice est de redémontrer ce résultat avec une autre méthode.

(1) Montrer que pour tout point $z_0 \in \Omega$, il existe un voisinage ouvert U de z_0 et une fonction g holomorphe sur U tels que $f(z) = e^{g(z)}$ pour tout $z \in U$.
(2) Avec les notations de (1), exprimer $\log|f(z)|$ à l'aide de $g(z)$ pour $z \in U$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.