Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On dit qu'une fonction $N : E \to \mathbb{R}$ est une *norme* sur E si elle possède les propriétés suivantes :

(i) $N(0) = 0$, et $N(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$;
(ii) $N(\lambda x) = |\lambda|\, N(x)$ pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$;
(iii) $N(x + y) \leqslant N(x) + N(y)$ pour tous $x, y \in E$.

(1) Donner des exemples de normes sur $E = \mathbb{R}$ et sur $E = \mathbb{C}$.

(2) Montrer que si $N : E \to \mathbb{R}$ est une norme sur E, alors l'ensemble
$$B := \{u \in E;\ N(u) \leqslant 1\}$$
est un ensemble *convexe*, ce qui signifie que si $u, v \in B$, alors $(1-\lambda)u + \lambda v \in B$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

(3) Soit $N : E \to \mathbb{R}$. On suppose que N possède les propriétés (i) et (ii); et on suppose de plus que l'ensemble $B = \{u \in E;\ N(u) \leqslant 1\}$ est convexe. Le but de la question est de montrer que N est une norme.

(a) Montrer que si $z \in E$ et $z \neq 0$, alors $\frac{z}{N(z)} \in B$.

(b) Montrer que si $x, y \in E$ sont tous les deux $\neq 0$, alors on peut trouver $\lambda \in [0, 1]$ tel que
$$\frac{x + y}{N(x) + N(y)} = (1 - \lambda)\, \frac{x}{N(x)} + \lambda\, \frac{y}{N(y)}\cdot$$

(c) Montrer que N est une norme.

(4) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^d$. On se donne un nombre réel $p > 1$, et on définit $N_p : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ comme suit : si $x = {}^t(x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, alors
$$N_p(x) := \left(\sum_{i=1}^{d} |x_i|^p \right)^{1/p}.$$
On veut montrer que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

(a) Soit $\lambda \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définie par
$$\varphi(t) := \big((1 - \lambda)t + \lambda\big)^p - \big((1 - \lambda)t^p + \lambda\big)$$
atteint son maximum pour $t = 1$, et en déduire que pour tout $t \geqslant 0$, on a
$$\big((1 - \lambda)t + \lambda\big)^p \leqslant (1 - \lambda)t^p + \lambda.$$

(b) Déduire de (a) que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ et pour tout $\lambda \in [0, 1]$ on a
$$|(1 - \lambda)x + \lambda y|^p \leqslant (1 - \lambda)|x|^p + \lambda|y|^p.$$

(c) Montrer à l'aide de la question (3) que N_p est une norme sur $\mathbb{R}^d$.

Exercice 2. Est-il possible d'exprimer le vecteur $v := {}^t(1,4) \in \mathbb{R}^2$ comme combinaison linéaire des deux vecteurs $v_1 := {}^t(0,1)$ et $v_2 := {}^t(1,1)$?

Exercice 3. Est-il possible d'exprimer le vecteur $v := {}^t(1,-2,5) \in \mathbb{R}^3$ comme combinaison linéaire des trois vecteurs $v_1 := {}^t(1,-3,2)$, $v_2 := {}^t(2,-4,-1)$ et $v_3 := {}^t(1,-5,7)$?

Exercice 4. Les sous-ensembles de $\mathbb{R}^3$ suivants sont-ils des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$?

(1) $E_1 := \{ {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \mid x+y+z=0\}$.
(2) $E_2 := \{ {}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \mid x^2-z^2=0\}$.

Exercice 5. Soit $A \in M_d(\mathbb{K})$. L'ensemble $\{B \in M_d(\mathbb{K});\ AB = BA\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_d(\mathbb{K})$?

Exercice 6. Soit $E := \mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et soit $a \in \mathbb{R}$. L'ensemble $\left\{f \in E;\ \int_0^1 f(t^2+9)\,dt = a\right\}$ est-il un sous-espace vectoriel de E?

Exercice 7. L'ensemble $\{A \in M_3(\mathbb{K});\ A^3 = 0\}$ est-il un sous-espace vectoriel de $M_3(\mathbb{K})$?

Exercice 8. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite *bornée* s'il existe une constante C telle que : $|f(t)| \leqslant C$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des fonctions bornées est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$.

Exercice 9. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est dite *lipschitzienne* s'il existe une constante C telle que : $|f(t)-f(s)| \leqslant C\,|t-s|$ pour tous $s,t \in \mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des fonctions lipschitzienne est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel, et soient E_1 et E_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que si $E_1 \cup E_2$ est un sous-espace vectoriel de E, alors $E_1 \subseteq E_2$ ou $E_2 \subseteq E_1$.

Exercice 11. On considère $\mathbb{K}$ comme un $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Montrer qu'une application $L : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ est linéaire si et seulement si elle est de la forme $L(u) = \lambda u$, pour une certaine constante $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 12. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$, et soit $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'application linéaire associée. En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ de la manière habituelle, montrer que $L : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire si et seulement A est de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

Exercice 13. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

(1) Montrer que si $\Phi : E \to \mathbb{C}$ est une forme $\mathbb{C}$-linéaire, alors l'application $\mathrm{Re}(\Phi) : E \to \mathbb{R}$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire.
(2) Montrer que si $\varphi : E \to \mathbb{R}$ est une forme $\mathbb{R}$-linéaire, alors il existe une unique forme $\mathbb{C}$-linéaire $\Phi : E \to \mathbb{C}$ telle que $\varphi = \mathrm{Re}(\Phi)$

Exercice 14. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $B : E \times E \to \mathbb{R}$. On suppose que B possède les propriétés suivantes :

(i) B est *bilinéaire* : pour tout $x \in E$ fixé, l'application $y \mapsto B(x, y)$ est linéaire, et pour tout $y \in E$ fixé, l'application $x \mapsto B(x, y)$ est linéaire.
(ii) B est *symétrique* : $B(x, y) = B(y, x)$ pour tous $x, y \in E$;
(iii) B est *positive* : $B(x, x) \geqslant 0$ pour tout $x \in E$.

Pour tout $x \in E$, on pose

$$N(x) := \sqrt{B(x, x)}.$$

Le but de l'exercice est d'établir les inégalités suivantes : pour tous $x, y \in E$,

$$|B(x, y)| \leqslant N(x)N(y) \qquad \text{et} \qquad N(x + y) \leqslant N(x) + N(y).$$

(1) Soient $x, y \in E$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a
$$B(x + ty, x + ty) = B(y, y)t^2 + 2B(x, y)t + B(x, x).$$
(2) Déduire de (1) que si $x, y \in E$, alors $|B(x, y)| \leqslant N(x)N(y)$.
(3) Montrer que si $x, y \in E$, alors $N(x + y)^2 \leqslant (N(x) + N(y))^2$, et conclure.

Exercice 15. Montrer que si $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$, alors

$$\left|\sum_{i=1}^n x_i y_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

Exercice 16. Soit $[a, b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$. Montrer que si $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ sont des fonctions continues, alors

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} \times \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt} \qquad \text{et}$$

$$\sqrt{\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)^2 dt} \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2 dt} + \sqrt{\int_a^b g(t)^2 dt}$$

Exercice 17. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et soient $A, B \in \mathcal{L}(E)$.

(1) Dans cette question, on suppose que $E = \mathbb{K}^d$. Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir $AB - BA = \lambda I$ avec $\lambda \neq 0$. (*En considérant A et B comme des matrices, penser à la trace.*)

(2) Dans cette question, on prend $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$, et on définit A et B comme suit : si $f \in E$, alors
$$A(f) := f' \qquad \text{et} \qquad B(f)(t) := tf(t).$$
Déterminer $AB - BA$.

Exercice 18. Soient $u_1 = {}^t(1,1)$ et $u_2 = {}^t(1,2)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$. Montrer que (u_1, u_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ et déterminer les coordonnées de $u := {}^t(3,4) \in \mathbb{R}^2$ dans la base (u_1, u_2).

Exercice 19. Montrer que les vecteurs $u_1 := {}^t(0,1,1)$, $u_2 := {}^t(1,0,1)$ et $u_3 := {}^t(1,1,0)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, et déterminer dans cette base les coordonnées du vecteur $u := {}^t(1,1,1)$.

Exercice 20. On note σ_1, σ_2 et σ_3 les matrices de Pauli :
$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $(I, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ est une base de $M_2(\mathbb{C})$.

Exercice 21. Les vecteurs $u := {}^t(1,1,1)$, $v := {}^t(1,2,3)$ et $w := {}^t(2,-1,1)$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 22. Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ suivants :

(1) $E_1 := \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+z=0\}$,
(2) $E_2 = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x=y=z\}$,
(3) $E_3 = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ z=3x\}$,
(4) $E_4 = \{{}^t(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x+y+2z=0\}$,
(5) $E_5 = \{{}^t(t,-t,3t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

Exercice 23. Montrer que si E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$, alors 3 cas sont possibles : ou bien $E = \{0\}$, ou bien $E = \mathbb{R}u$ pour un certain vecteur $u \neq 0$, ou bien $E = \mathbb{R}^2$.

Exercice 24. Montrer que si E un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$, alors 4 cas sont possibles : ou bien $E = \{0\}$, ou bien $E = \mathbb{R}u$ pour un certain vecteur $u \neq 0$, ou bien $E = \mathrm{vect}(u_1, u_2)$ où u_1 et u_2 sont des vecteurs non colinéaires, ou bien $E = \mathbb{R}^3$.

Exercice 25. Montrer que l'espace vectoriel $\mathbb{K}[\mathbf{z}]$ n'est pas de dimension finie.

Exercice 26. Soient E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. Montrer que si E_1 et E_2 sont de dimension finie, alors $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et $\dim(E_1 \times E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2)$.

Exercice 27. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E, et soient $e_1^\sharp, \ldots, e_n^\sharp$ les formes linéaires coordonnées associées à la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Montrer que $(e_1^\sharp, \ldots, e_n^\sharp)$ est une base de $E^\sharp$.

Exercice 28. Soient E et F deux espaces vectoriels. Pour $v \in F$ et $\varphi \in E^\sharp$, on note $\varphi \otimes v : E \to F$ l'application définie par

$$\varphi \otimes v\,(x) := \langle \varphi, x \rangle\, v.$$

(1) Vérifier que $\varphi \otimes v$ est une application linéaire.
(2) On suppose que E et F sont de dimension finie. Soit $(e_1, \ldots, e_q)$ une base de E, et soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de F. Soient également $e_1^\sharp, \ldots, e_q^\sharp$ les applications coordonnées associées à la base $(e_1, \ldots, e_q)$ de E. Montrer que la famille $\left(e_i^\sharp \otimes f_i\right)_{(i,j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,q]\!]}$ est une base de $\mathcal{L}(E, F)$.
(3) Si E et F sont de dimension finie, quelle est la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$?

Exercice 29. Soit $\Phi : M_d(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ une forme linéaire.

(1) Justifier qu'il existe une matrice $(c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant d}$ telle que : pour toute matrice $X = (x_{i,j}) \in M_d(\mathbb{K})$, on a
$$\Phi(X) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{d} c_{i,j} x_{i,j}.$$
(2) Montrer qu'il existe une et une seule matrice $A \in M_d(\mathbb{K})$ telle : pour toute matrice $X \in M_d(\mathbb{K})$, on a
$$\Phi(X) = \mathrm{Tr}(AX).$$

Exercice 30. Déterminer les formes linéaires Φ sur $M_d(\mathbb{K})$ vérifiant $\Phi(AB) = \Phi(BA)$ pour toutes $A, B \in M_d(\mathbb{K})$.

Exercice 31. Soit $E := \mathbb{R}_3[\mathbf{z}]$. Pour $u \in \mathbb{R}$, on note $\delta_u : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\delta_u(P) := P(u)$; et on note $\psi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\psi(P) := \int_0^1 P(t)\,dt$. Montrer que ψ est combinaison linéaire de δ_0, $\delta_{1/2}$ et δ_1.

Exercice 32. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient E_1, E_2 des sous-espaces vectoriels de E. Montrer qu'on a $\dim(E_1 + E_2) = \dim(E_1) + \dim(E_2) - \dim(E_1 \cap E_2)$ (*Utiliser un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_1 et un supplémentaire de $E_1 \cap E_2$ dans E_2*)

Exercice 33. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, et soit $F := E \times E$. On définit les opérations suivantes sur F :

- si $u = (u_1, u_2) \in F$ et $v = (v_1, v_2) \in F$, alors $u + v := (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$;
- si $u = (u_1, u_2) \in F$ et $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, alors $\lambda \times u := (au_1 - bu_2, au_2 + bu_1)$.

(1) Montrer que F est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
(2) Dans cette question, on considère F comme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. On pose $F_{\mathbb{R}} := \{(x, 0);\ x \in E\}$ et $iF_{\mathbb{R}} := \{iv;\ v \in F_{\mathbb{R}}\}$. Montrer que $F_{\mathbb{R}}$ et $iF_{\mathbb{R}}$ sont des sous-espaces vectoriels de F isomorphes à E, et qu'on a $F = F_{\mathbb{R}} \oplus iF_{\mathbb{R}}$.
(3) Montrer que si $L : F_{\mathbb{R}} \to F_{\mathbb{R}}$ est une application $\mathbb{R}$-linéaire, alors il existe une unique application $\mathbb{C}$-linéaire $L_{\mathbb{C}} : F \to F$ telle que $L_{\mathbb{C}}(u) = L(u)$ pour tout $u \in F_{\mathbb{R}}$.
(4) Montrer que si E est de dimension finie, alors F est aussi de dimension finie en tant que $\mathbb{C}$-espace vectoriel, avec $\dim(F) = \dim(E)$.

Exercice 34. Soit E un espace vectoriel, et soit $J : E \to E$ une application linéaire. On suppose qu'on a $J \circ J = id_E$.

(1) Montrer que $\mathcal{S} := \{x \in E;\ J(x) = x\}$ et $\mathcal{A} := \{x \in E;\ J(x) = -x\}$ sont des sous-espaces vectoriels de E.
(2) Montrer que si $x \in E$, alors $x + J(x) \in \mathcal{S}$ et $x - J(x) \in \mathcal{A}$.
(3) Montrer que $E = \mathcal{S} \oplus \mathcal{A}$.

Exercice 35. Soit $E := \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On dit qu'une fonction $f \in E$ est *paire* si on a $f(-t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et que f est *impaire* si on a $f(-t) = -f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On note E_p l'ensemble des fonctions paires, et E_i l'ensemble des fonctions impaires.

(1) Montrer que E_p et E_i sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
(2) Montrer que si $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction quelconque, alors la fonction f définie par $f(t) = u(t) + u(-t)$ est paire, et la fonction g définie par $g(t) = u(t) - u(-t)$ est impaire.
(3) Montrer que $E = E_p \oplus E_i$.

Exercice 36. On dit qu'une matrice $A \in M_d(\mathbb{K})$ est *symétrique* si ${}^tA = A$, et que A est *antisymétrique* si ${}^tA = -A$. On note $\mathcal{S}_d(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques, et $\mathcal{A}_d(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

(1) Montrer que $\mathcal{S}_d(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_d(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $M_d(\mathbb{K})$.
(2) Montrer que $M_d(\mathbb{K}) = \mathcal{S}_d(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_d(\mathbb{K})$.
(3) Déterminer la dimension de $\mathcal{S}_d(\mathbb{K})$ et $\mathcal{S}_d(\mathbb{K})$.

Exercice 37. Soit $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$E_n := \{f \in E;\ f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(n)}(0) = 0\}.$$

Montrer que $E = E_n \oplus \mathbb{R}_n[\mathbf{z}]$.

Exercice 38. Les familles de trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ suivantes sont-elles libres?

(1) (u_1, u_2, u_3), où $u_1 := {}^t(1, -2, 1)$, $u_2 := {}^t(2, 1, -1)$ et $u_3 := {}^t(7, -4, 1)$.
(2) (v_1, v_2, v_3), où $v_1 := {}^t(1, 0, 1)$, $v_2 := {}^t(0, 2, 2)$ et $v_3 := {}^t(3, 7, 1)$.
(3) (w_1, w_2, w_3), où $w_1 := {}^t(1, 0, 0)$, $w_2 := {}^t(0, 1, 1)$ et $w_3 := {}^t(1, 1, 1)$.

Exercice 39. Soient u_1, u_2, u_3, u_4 les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$: $u_1 := {}^t(67, 890, -35\pi)$, $u_2 := {}^t(12345, e^3 - 35, -17/3)$, $u_3 := {}^t(13\pi^2, \ln(73) - e^5, 897)$ et $u_4 := {}^t(10, 100, 1000)$. La famille (u_1, u_2, u_3, u_4) est-elle libre?

Exercice 40. u_1, u_2, u_3 les vecteurs suivants de $\mathbb{R}^4$: $u_1 := {}^t(67, 890, -35\pi, 6044)$, $u_2 := {}^t(12345, e^3 - 35, -17/3, -1)$, $u_3 := {}^t(13\pi^2, \ln(73) - e^5, 897, \sqrt{33})$. La famille (u_1, u_2, u_3) est-elle génératrice de $\mathbb{R}^4$?

Exercice 41. Soit E un espace vectoriel, et soit $L : E \to E$ une application linéaire. On suppose que pour tout $x \in E$, il existe un nombre $\lambda(x) \in \mathbb{K}$ tel que $L(x) = \lambda(x)x$.

(1) Montrer que si $x, y \in E$ sont linéairement indépendants, alors
$$\lambda(x) = \lambda(x + y) = \lambda(y).$$
(2) Montrer qu'il existe une constante λ telle que $L(x) = \lambda x$ pour tout $x \in E$.

Exercice 42. Montrer que si $P_1, \ldots, P_N$ sont des polynômes non nuls de degrés tous différents (à coefficients dans $\mathbb{K}$), alors la famille $(P_1, \ldots, P_N)$ est libre dans $\mathbb{K}[\mathbf{z}]$.

Exercice 43. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Montrer que les fonctions $t \mapsto \sin(at)$ et $t \mapsto \cos(bt)$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 44. Soient $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ des nombres complexes tous différents. Soit également I un intervalle de $\mathbb{R}$ (non réduit à un point). Pour $k = 1, \ldots, n$, on note $f_k : I \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $f_k(t) := e^{\alpha_k t}$.

(1) Soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$. On suppose qu'on a $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(t) = 0$ pour tout $t \in I$. Montrer que si $n \geqslant 2$, alors $\sum_{k=1}^{n-1} (\alpha_k - \alpha_n) \lambda_k f_k(t) = 0$. pour tout $t \in I$.

(2) Montrer que la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est libre dans $\mathcal{F}(I, \mathbb{C})$.

Exercice 45. Soit E un espace vectoriel, et soient $v_1, \dots, v_n \in E$. On suppose qu'il existe des formes linéaires $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in E^\sharp$ telles que $\langle \varphi_i, v_j \rangle = \delta_{i,j}$ pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Montrer que la famille $(v_1, \dots, v_n)$ est libre.

Exercice 46. Soit $E := \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, on note $e_k \in E$ la fonction définie par $e_k(t) := e^{ikt}$.

(1) Pour $k, k' \in \mathbb{Z}$, calculer $\int_0^{2\pi} e_k(t) \overline{e_{k'}(t)}\, dt$.

(2) En utilisant l'Exercice 45, montrer que si $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{Z}$ sont tous différents, alors la famille $(e_{k_1}, \dots, e_{k_n})$ est libre.

Exercice 47. On dit qu'une matrice $A \in M_d(\mathbb{K})$ est *nilpotente* s'il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = 0$.

(1) Soit $A \in M_d(\mathbb{K})$ et soit $x \in \mathbb{K}^d$. On suppose qu'il existe un entier $k \geqslant 2$ tel que $A^{k-1}x \neq 0$ et $A^k x = 0$. Montrer que la famille $(x, Ax, \dots, A^{k-1}x)$ est libre.

(2) Montrer que si $A \in M_d(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $A^d = 0$.

Exercice 48. Déterminer une base et la dimension de $\ker A$, pour

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 49. Soit E un espace vectoriel. On dit qu'une application linéaire $p : E \to E$ est un *projecteur* si on a $p^2 = p$.

(1) Montrer que si p est un projecteur, alors $\mathrm{Im}(p) = \ker(p - id)$ et $E = \ker(p) \oplus \ker(p - id)$.

(2) Montrer que si E_1 et E_2 sont deux sous-espaces vectoriels de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, alors il existe un unique projecteur p tel que $\mathrm{Im}(p) = E_1$ et $\ker(p) = E_2$.

(3) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R}^3$. Soit $p : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 5/2 & -3/2 & -1 \\ 3/2 & -1/2 & -1 \\ 3/2 & -3/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer que p est un projecteur, et déterminer $\ker(p)$ et $\mathrm{Im}(p)$.

Exercice 50. Montrer que si $A \in M_d(\mathbb{K})$ vérifie $A^2 = A$, alors $\dim \operatorname{Im}(A) = \operatorname{Tr}(A)$.

Exercice 51. Soient $E := \{f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R});\ f(0) = 0\}$ et $F := \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$. Montrer que l'application $f \mapsto f'$ est un isomorphisme de E sur F.

Exercice 52. Soit E un espace vectoriel, et soient E_1, E_2 des sous-espaces vectoriels de E. On définit une application $L : E_1 \times E_2 \to E$ par $L(u,v) := u + v$.

(1) Montrer que L est une application linéaire.
(2) Montrer que L est injective si et seulement si $E_1 \cap E_2 = \{0\}$.
(3) Montrer qu'on a $E = E_1 \oplus E_2$ si et seulement si L est un isomorphisme de $E_1 \times E_2$ sur E.

Exercice 53. Soit E un espace vectoriel. Pour tout ensemble $A \subseteq E$, on pose

$$A^\perp := \{\varphi \in E^\sharp;\ \langle \varphi, x\rangle = 0 \quad \text{pour tout } x \in A\}.$$

(1) Montrer que $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de $E^\sharp$.
(2) Soit F un sous-espace vectoriel de E, et soit G un supplémentaire de F dans E. Montrer que l'application $L : F^\perp \to G^\sharp$ définie par $L(\varphi) := \varphi_{|G}$ est un isomorphisme de $F^\perp$ sur $G^\sharp$.
(3) On suppose que E est de dimension finie. Montrer que si F est un sous-espace vectoriel de E, alors $\dim(F^\perp) = \dim(E) - \dim(F)$.

Exercice 54. Soit $A = (a_{i,j}) \in M_d(\mathbb{K})$. On suppose que pour tout $i \in [\![1,d]\!]$, on a

$$|a_{i,i}| > \sum_{j\neq i} |a_{i,j}|.$$

Montrer que A est inversible.

Exercice 55. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère la matrice $A \in M_5(\mathbb{R})$ suivante :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & b^3 & b^4 \\ 0 & a & 2ab & 3ab^2 & 4b^3a \\ 0 & 0 & a^2 & 3a^2b & 6b^2a^2 \\ 0 & 0 & 0 & a^3 & 4ba^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a^4 \end{pmatrix}$$

(1) Justifier en 1 ligne que A est inversible.
(2) Soit $L : \mathbb{R}_4[\mathbf{z}] \to \mathbb{R}_4[\mathbf{z}]$ l'appplication définie comme suit : si $P \in \mathbb{R}_4[\mathbf{z}]$, alors

$$L(P)(z) := P(az + b).$$

Montrer que L est linéaire et bijective, et déterminer L^{-1}.
(3) Déterminer la matrice de L dans la base $(1, \mathbf{z}, \mathbf{z}^2, \mathbf{z}^3, \mathbf{z}^4)$.

(4) Déterminer A^{-1}.

Exercice 56. Soient A et B deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $\deg(A) \geqslant \deg(B) > 0$.

(1) On pose $a := \deg(A)$ et $b := \deg(B)$. Soit $L : \mathbb{K}_{a-b}[\mathbf{z}] \times \mathbb{K}_{b-1}[\mathbf{z}] \to \mathbb{K}_a[\mathbf{z}]$ l'application définie par
$$L(Q, R) := BQ + R.$$
Justifier que L envoie bien $\mathbb{K}_{a-b}[\mathbf{z}] \times \mathbb{K}_{b-1}[\mathbf{z}]$ dans $\mathbb{K}_a[\mathbf{z}]$, puis montrer que L est linéaire et injective.

(2) Déduire de (1) qu'il existe un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $\deg(R) < \deg(B)$ et $A = BQ + R$.

Exercice 57. Soit n un entier $\geqslant 1$, et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ des nombres tous différents.

(1) Soit $L : \mathbb{K}_n[\mathbf{z}] \to \mathbb{K}^{n+1}$ l'application définie par
$$L(P) := {}^t\big(P(\lambda_0), \ldots, P(\lambda_n)\big).$$
Montrer que L est linéaire et déterminer son noyau.

(2) Déduire de (1) que pour si on se donne $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, alors il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_n[\mathbf{z}]$ tel que
$$P(\lambda_i) = a_i \qquad \text{pour } i = 0, \ldots, n.$$

(3) Pour $k = 0, \ldots, n$, on définit $Q_k \in \mathbb{K}_n[\mathbf{z}]$ comme suit :
$$Q_k = \prod_{j \neq k} \frac{\mathbf{z} - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j}.$$
Montrer que le polynôme P de (2) est donné par la formule
$$P = \sum_{k=0}^{n} a_k Q_k.$$

Exercice 58. Soit $E := \mathcal{F}([0, \infty[, \mathbb{R})$.

(1) Pour toute fonction $f \in E$, on note $B(f)$ et $S(f)$ les élément de E définis comme suit :
$$B(f)(t) = f(t+1) \qquad \text{pour tout } t \in [0, \infty[$$
$$S(f)(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ f(t-1) & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

(2) Montrer que les applications $S : E \to E$ et $B : E \to E$ sont linéaires.

(3) Vérifier qu'on a $B \circ S = id_E$.

(4) Montrer que S est injective mais pas surjective, et que B est surjective mais pas injective.

Exercice 59. Soit E un espace vectoriel, et soit $L \in \mathcal{L}(E)$.

(1) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\ker(L^k) \subseteq \ker(L^{k+1})$ et $\mathrm{Im}(L^{k+1}) \subseteq \mathrm{Im}(L^k)$.
(2) On suppose que E est de dimension finie. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\ker(L^k) = \ker(L^{k+1})$ et qu'il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $\mathrm{Im}(L^{k'}) = \mathrm{Im}(L^{k'})$.
(3) On suppose toujours E de dimension finie. Montrer que si $k \in \mathbb{N}$, alors on a l'équivalence suivante :

$$\ker(L^k) = \ker(L^{k+1}) \iff \mathrm{Im}(L^k) = \mathrm{Im}(L^{k+1}).$$

Exercice 60. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soit $L \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que les choses suivantes sont équivalentes.

(i) $\ker(L) = \ker(L^2)$;
(ii) $\ker(L) \cap \mathrm{Im}(L) = \{0\}$;
(iii) $E = \ker(L) \oplus \mathrm{Im}(L)$

Exercice 61. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $E_1, \ldots, E_k$ des sous-espaces vectoriels de E.

(1) Soit $L : E_1 \times \cdots E_k \to E_2 \times \cdots \times E_k$ l'application définie par

$$L(u_1, u_2, \ldots, u_k) := (u_2 - u_1, \ldots, u_k - u_1).$$

Montrer que L est linéaire et que $\ker(L) = \{(u, \ldots, u);\ u \in E_1 \cap \cdots \cap E_k\}$.

(2) Montrer que si $\sum_{i=1}^{k} \dim(E_i) > (k-1)\dim(E)$, alors $E_1 \cap \cdots \cap E_k \neq \{0\}$.

Exercice 62. Soit n un entier $\geqslant 3$, soient $E_0, \ldots, E_n$ des espaces vectoriels de dimensions finies, et pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, soit $L_k : E_k \to E_{k+1}$ une application linéaire. On supposer que L_0 est injective, que L_{n-1} est surjective, et que $\mathrm{Im}(L_k) = \ker(L_{k+1})$ pour $k = 0, \ldots, n-2$. Montrer qu'on a

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \dim(E_n) = 0$$