

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$ sur \mathbb{R} en utilisant le fait que $\cos(ax) = \operatorname{Re}(e^{iax})$.

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe deux constantes α, β avec $\alpha \neq \beta$ telles que $f'' = \alpha f$ et $g'' = \beta g$. Établir la formule

$$\int f(x)g(x) dx = \frac{1}{\alpha - \beta} (f'(x)g(x) - f(x)g'(x)) + cte.$$

Que donne cette formule pour $f(x) = \cos(ax)$ et $g(x) = e^{bx}$, où a et b sont des nombres réels?

Exercice 3. Déterminer les primitives de $f(x) := \sin^2 x$ et $g(x) := \cos^2 x$ sur \mathbb{R} en utilisant une formule trigonométrique.

Exercice 4. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos^3 x$ sur \mathbb{R} en écrivant que $\cos^3 x = (1 - \sin^2 x) \cos x$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $f(x) := (\cos x)^n \sin^3 x$ sur \mathbb{R} .

Exercice 6. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$ et $g(x) := \frac{x^3+2x}{(x^4+4x^2+1)^4}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 7. Déterminer les primitives de $f(x) := \arctan(x)$ sur \mathbb{R} en écrivant $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$ et en primitivant par parties.

Exercice 8. Déterminer les primitives de $f(x) := (x^2+x+1)e^{3x}$ et $g(x) := x^2 \cos(2x)$ sur \mathbb{R} .

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$ sur \mathbb{R} en primitivant 2 fois par parties.

Exercice 10. Montrer qu'on a $\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx$, et en déduire les primitives de $f(x) := \frac{1}{(1+x^2)^2}$.

Exercice 11. Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $b = \text{Im}(\lambda) \neq 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{x-\lambda}$ sur \mathbb{R} .

Exercice 12. Le but de l'exercice est de calculer

$$I = \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^3 + 1} := \lim_{X \rightarrow \infty} \int_0^X \frac{dx}{x^3 + 1}.$$

(1) Vérifier que pour tout $x \geq 0$, on a

$$\frac{1}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x + 1} - \frac{x - 1/2}{x^2 - x + 1} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{x^2 - x + 1}.$$

(2) Justifier que $x^2 - x + 1 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis déterminer les primitives de $\frac{x-1/2}{x^2-x+1}$ sur \mathbb{R} .

(3) Écrire $x^2 - x + 1$ sous la forme $(x - \alpha)^2 + \beta^2$ où α et β sont à préciser, puis déterminer les primitives de $\frac{1}{x^2-x+1}$ sur \mathbb{R} .

(4) Calculer I .

Exercice 13. Soit $\alpha > 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{x(1+x^\alpha)}$ sur $]0, +\infty[$ en posant $u = x^\alpha$.

Exercice 14. Déterminer les primitives de $f(x) := e^{\sqrt{x}}$ sur $]0, +\infty[$ en posant $u = \sqrt{x}$.

Exercice 15. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{e^{2x}+1}{e^x+1}$ sur \mathbb{R} en posant $u = e^x$.

Exercice 16. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{(1+x^2)^2}$ sur \mathbb{R} en posant $x = \tan(u)$.

Exercice 17. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{\cos^2 x}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$ en posant $u = \cos x$.

Exercice 18. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{(\cos x)(1-\sin x)}$ sur $]0, \pi/2[$ en posant $u = \sin x$.

Exercice 19. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{\tan x}{1+\tan x}$ en posant $u = \tan x$.

Exercice 20. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{2+\cos x}$ sur $] -\pi, \pi[$ en posant $u = \tan(x/2)$.

Exercice 21. Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x'(t) = ax(t) + \varphi(t).$$

- (1) On suppose que $\varphi(t) = P(t)e^{at}$, où P est un polynôme de degré $d \geq 0$. Montrer que (E) possède une solution particulière de la forme $x(t) = Q(t)e^{at}$, où Q est un polynôme de degré $d + 1$ sans terme constant.
- (2) On suppose que $\varphi(t) = P(t)e^{mt}$, où P est un polynôme de degré $d \geq 0$ et $m \neq a$. Montrer que (E) possède une solution particulière de la forme $Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme de degré d .
- (3) On suppose que $\varphi(t) = \cos(\omega t)$, où $\omega \in \mathbb{R}$. Montrer que (E) possède une solution particulière de la forme $x(t) = (\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t))e^{at}$, où α et β sont des constantes.

Exercice 22. Résoudre sur \mathbb{R} les équations différentielles suivantes :

- | | |
|---|--|
| (1) $x'(t) - x(t) = e^t + 3e^{-2t}$. | (4) $x'(t) - 4x(t) = \cos(3t) + (t+1)e^{4t}$. |
| (2) $x'(t) + x(t) = (t^2 - 2t + 2)e^{2t}$. | (5) $x'(t) + x(t) = t \cos(t)$. |
| (3) $x'(t) - x(t) = \sin(t)$. | (6) $x'(t) + x(t) = \frac{1}{1+e^t}$. |

Exercice 23. Résoudre les équations différentielles suivantes avec les “conditions initiales” demandées.

- (1) $x'(t) = -2x(t) + 4t^2$ avec $x(0) = 3$.
- (2) $x'(t) = 2x(t) + 2t^3 + t$ avec $x(0) = 1$.
- (3) $x'(t) = -x(t) + 2e^t$ avec $x(0) = 0$.
- (4) $x'(t) = 3x(t) + 2e^{3t}$ avec $x(1) = 4e^3$.
- (5) $3x'(t) = 2x(t) + 3 \cos(2t)$ avec $x(0) = \frac{17}{20}$.
- (6) $x'(t) = -x(t) + 2te^{-t}$ avec $x(0) = 1$.
- (7) $x'(t) = x(t) + t + e^t$ avec $x(0) = -1$.

Exercice 24. Résoudre les équations différentielles suivantes avec les “conditions initiales” demandées.

- (1) $x'(t) = 2tx(t) + te^{t^2+3t}$ avec $x(0) = 1$.
- (2) $x'(t) = x(t) \cos(t) + \sin(2t)$ avec $x(0) = 0$.
- (3) $x'(t) = -\frac{t}{1+t^2}x(t) - \frac{2t}{1+t^2}$ avec $x(0) = 1$.
- (4) $x'(t) + \tan(t)x(t) = \sin(2t)$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$, avec $x(0) = 1$.
- (5) $\sin(t)x'(t) - \cos(t)x(t) + 1 = 0$ sur $]0, \pi[$ avec $x(\pi/4) = 1$.
- (6) $(t+1)x'(t) + tx(t) = t^2 - t + 1$ sur $] -1, \infty[$ avec $x(1) = 1$. (On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme.)

Exercice 25. Résoudre les équations différentielles suivantes.

- (1) $x'(t) - \frac{1}{t}x(t) = t^2$ sur $]0, \infty[$.
 (2) $x'(t) - (2t - \frac{1}{t})x(t) = 1$ sur $]0, \infty[$.
 (3) $tx'(t) + (t-1)x(t) = t^3$ sur $]0, \infty[$.
 (4) $(1-t^2)x'(t) - 2tx(t) = 1$ sur $]0, 1[$.
 (5) $x'(t) - 2tx(t) = (1-2t)e^t$ sur \mathbb{R} .
 (6) $x'(t) + (t^2+1)x(t) = t^2e^{-t}$ sur \mathbb{R} .
 (7) $(1+t^2)x'(t) + 2tx(t) = 1$ sur \mathbb{R} .
 (8) $tx'(t) + x(t) = 1 + \ln(t)$ sur $]0, \infty[$.

Exercice 26. Résoudre l'équation différentielle $t(1 + \ln(t)^2)x'(t) + 2\ln(t)x(t) = 1$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 27. Résoudre l'équation différentielle $t\ln(t)x'(t) - x(t) = 3t^2\ln(t)^2$ sur $]0, 1[$.

Exercice 28. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := \cos(\arctan(t))$.

- (1) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $x'(t) = -\frac{t}{1+t^2}x(t)$.
 (2) En déduire que $f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 29. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := \sin(\arctan(t))$. Vérifier que f est solution sur $]0, \infty[$ de l'équation différentielle $x'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)}x(t)$, et en déduire que $f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 30. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall s, t \in \mathbb{R} : f(s+t) = f(s)f(t).$$

(Pour démarrer, dériver l'identité précédente par rapport à s et prendre $s := 0$.)

Exercice 31. On considère l'équation différentielle $x'(t) - x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$. Montrer que les solutions de cette équation sur $]0, \infty[$ sont les fonctions de la forme

$$x(t) = \left(\lambda + 2 \int_0^{\sqrt{t}} e^{-s^2} ds \right) e^t, \quad \text{où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Exercice 32. Soient $a : I \rightarrow \mathbb{K}$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x'(t) = a(t)x(t) + \varphi(t).$$

Montrer que si $t_0 \in I$ et $\xi_0 \in \mathbb{K}$ sont donnés, alors l'unique solution de (E) vérifiant la "condition initiale" $x(t_0) = \xi_0$ est donnée par la formule

$$x(t) = \xi_0 e^{\int_{t_0}^t a(s) ds} + \int_{t_0}^t e^{\int_s^t a(u) du} \varphi(s) ds.$$

Que devient cette formule lorsque la fonction a est constante?

Exercice 33. On considère l'équation différentielle $t^2x'(t) - x(t) = 0$.

- (1) Résoudre cette équation différentielle sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$.
- (2) Résoudre cette équation différentielle sur \mathbb{R} .

Exercice 34. On considère l'équation différentielle $t^3x'(t) + (2 - 3t^2)x(t) = t^3$.

- (1) Résoudre cette équation sur $] - \infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- (2) Existe-t-il des solutions définies sur \mathbb{R} ?
- (3) Déterminer la solution sur $]0, +\infty[$ vérifiant $x(1) = 0$.

Exercice 35. On considère l'équation différentielle $t(1 + t)x'(t) - (t + 2)x(t) = 2t$.

- (1) Résoudre cette équation sur $]0, +\infty[$ et sur $] - 1, 0[$, puis sur $] - 1, +\infty[$.
- (2) Existe-t-il des solutions définies sur \mathbb{R} ?

Exercice 36. Résoudre l'équation différentielle $tx'(t) + x(t) - 1 = 0$ sur $]0, +\infty[$ et sur $] - \infty, 0[$, puis résoudre cette équation \mathbb{R} .

Exercice 37. Résoudre sur \mathbb{R} les les équations différentielles suivantes avec les “conditions initiales demandées”.

- (1) $2x''(t) + 5x'(t) - 3x(t) = 0$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = -1$;
- (2) $x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = 0$ avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 2$.
- (3) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0$ avec $x(1) = 2$ et $x'(1) = -1$;
- (4) $798x''(t) + 3045x'(t) + 997x(t) = 0$ avec $x(83\pi) = x'(83\pi) = 0$.

Exercice 38. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) = bx'(t) + cx(t) + e^{\lambda t}.$$

- (1) Montrer que si λ n'est pas racine de l'équation caractéristique $z^2 - bz - c = 0$, alors l'équation (E) admet une solution de la forme $x(t) = \alpha e^{\lambda t}$, où α est une constante.
- (2) Montrer que si λ est racine de l'équation caractéristique mais pas racine double, alors (E) admet une solution de la forme $x(t) = \alpha t e^{\lambda t}$, où α est une constante.
- (3) Montrer que si λ est racine double de l'équation caractéristique, alors (E) admet une solution de la forme $x(t) = \alpha t^2 e^{\lambda t}$, où α est une constante.

Exercice 39. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ et $\omega \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle

$$(E) \quad x''(t) = bx'(t) + cx(t) + \cos(\omega t).$$

- (1) Montrer que si $b \neq 0$ ou $c \neq -\omega^2$, alors (E) admet une solution de la forme $\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$, où α et β sont des constantes.

- (2) Montrer que si $b = 0$ et $c = -\omega^2$, alors (E) admet une solution de la forme $\alpha t \cos(\omega t) + \beta t \sin(\omega t)$, où α et β sont des constantes.

Exercice 40. Soient $b, c \in \mathbb{R}$ avec $c \neq 0$, et soit P un polynôme de degré $n \in \{0, 1, 2\}$. Montrer que l'équation différentielle $x''(t) = bx'(t) + cx(t) = P(t)$ possède une solution polynomiale de degré n .

Exercice 41. Résoudre les équations différentielles suivantes.

- (1) $x''(t) - 3x'(t) + 2x(t) = t^2 + e^t + e^{2t}$.
- (2) $x''(t) - 2x'(t) + x(t) = e^t + e^{3t}$.
- (3) $x''(t) + x(t) = \cos(2t) + \cos(t)$.

Exercice 42. Résoudre les équations différentielles suivantes, avec les “conditions initiales” demandées.

- (1) $x''(t) = 8x'(t) - 15x(t) + 15t^2 - 16t + 17$ avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 4$.
- (2) $x''(t) = \sqrt{2}x'(t) - x(t) + t + 1$ avec $x(0) = 1 + \sqrt{2}$ et $x'(0) = 1 + \sqrt{2}/2$.
- (3) $x''(t) = -x'(t) + 6x(t) + 4e^t$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = -22$.
- (4) $x''(t) = 4x'(t) - 4x(t) - 6e^{2t}$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 4$.
- (5) $x''(t) = 4x(t) + t + e^{2t}$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = 2$.
- (6) $x''(t) = 3x'(t) - 2x(t) + 10 \sin t$ avec $x(0) = 6$ et $x'(0) = 2$.
- (7) $x''(t) = 2x'(t) - 2x(t) + 5 \cos t$ avec $x(0) = 2$ et $x'(0) = -3$.
- (8) $x''(t) = -x(t) + \cos t$ avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 5$.

Exercice 43. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = 2 \cos^2(t)$.

Exercice 44. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) - x(t) = \frac{2}{1+e^t}$.

Exercice 45. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \cotan(t)$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 46. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \tan(t)$ sur $] -\pi/2, \pi/2[$.

Exercice 47. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit f la fonction définie par

$$f(t) := \int_0^t \sin(t-s)\varphi(s) ds.$$

Montrer que f est solution de l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \varphi(t)$.

Exercice 48. Soit $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, et soient u et v deux solutions de l'équation différentielle $x''(t) - q(t)x(t) = 0$. Montrer que la fonction w définie par $w(t) := u(t)v'(t) - u'(t)v(t)$ est constante.

Exercice 49. Soit $U : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 , et soit $x = \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^2 . On suppose que la fonction E définie par $E(t) := \frac{1}{2} x'(t)^2 + U(x(t))$ est constante. Déterminer une équation différentielle vérifiée par x .

Exercice 50. Résoudre sur $]0, +\infty[$ les équations différentielles $t^2 x''(t) + x(t) = 0$ et $t^2 x''(t) + tx'(t) + x(t) = 1 + t$ en posant $t = e^s$.

Exercice 51. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + \frac{2t}{t^2+1} x'(t) + \frac{1}{(t^2+1)^2} x(t) = \frac{t}{(t^2+1)^2}$ sur \mathbb{R} en posant $t = \tan(s)$.

Exercice 52. Résoudre l'équation différentielle $x''(t) + 4tx'(t) + (3 + 4t^2)x(t) = 0$ sur \mathbb{R} en posant $y(t) = e^{t^2} x(t)$.

Exercice 53. Résoudre l'équation différentielle $t^2 x''(t) + 4tx'(t) - (t^2 - 2)x(t) = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $y(t) = t^2 x(t)$.

Exercice 54. Résoudre l'équation différentielle $(1+e^t)x''(t) + 2e^t x'(t) + (1+2e^t)x(t) = e^t$ sur \mathbb{R} en posant $y(t) = (1 + e^t)x(t)$.

Exercice 55. Résoudre l'équation différentielle $t^2 x''(t) + tx'(t) + (t^2 - \frac{1}{4})x(t) = 0$ sur $]0, +\infty[$ en posant $y(t) = \sqrt{t}x(t)$.

Exercice 56. On veut résoudre sur \mathbb{R} l'équation différentielle

$$(E) \quad (t^2 + 1)x''(t) - 2x(t) = t.$$

- (1) Soit u une solution de l'équation homogène (E_0) associée à (E) . On pose $v(t) = \frac{u(t)}{t^2+1}$. Déterminer une équation différentielle vérifiée par v .
- (2) Résoudre l'équation homogène (E_0) .
- (3) Déterminer une solution de (E) qui soit polynomiale de degré 1, puis résoudre complètement (E) .

Exercice 57. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les solutions des système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = ax(t) - by(t) \\ y'(t) = bx(t) + ay(t) \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x'(t) = ax(t) + by(t) \\ y'(t) = bx(t) - ay(t) \end{cases}$$

Exercice 58. Déterminer les solutions des systèmes d'équations différentielles suivants, avec les "conditions initiales" demandées

$$(1) \begin{cases} x'(t) = 2x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = 2 \text{ et } y(0) = 4$$

$$(2) \begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t) \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = 1 \text{ et } y(0) = 3.$$

$$(3) \begin{cases} x'(t) = 3x(t) + 2y(t) \\ y'(t) = -4x(t) - 3y(t) \end{cases} \quad \text{avec } x(0) = 5 \text{ et } y(0) = 2$$

Exercice 59. Soient x et y deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} et vérifiant le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) + t \\ y'(t) &= -2x(t) - y(t) + e^{2t} \end{cases}$$

- (1) Déterminer une équation différentielle d'ordre 2 vérifiée par x .
- (2) On suppose que $x(0) = 1$ et $y(0) = 2$. Déterminer les fonctions x et y .