Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Trouver deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $f \neq 0$, $g \neq 0$ et $fg = 0$.

Exercice 2. Soient f et g deux fonctions infiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

(1) Montrer que $(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''$ et $(fg)''' = f'''g + 3f''g' + 3f'g'' + fg'''$.

(2) Quelle serait la formule générale pour $(fg)^{(n)}$?

Exercice 3. Soit P et Q deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que si $PQ = 0$, alors $P = 0$ ou $Q = 0$.

Exercice 4. Soit n un entier $\geqslant 1$. Quelles sont les racines complexes du polynôme $P = \mathbf{z}^n - 1$?

Exercice 5. Soit P un polynôme à coefficients réels. Montrer que si λ est une racine complexe de P, alors $\overline{\lambda}$ est aussi racine de P.

Exercice 6. Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{z}]$ un polynôme de degré 2, et soit $r \in \mathbb{R}$. Montrer que P admet r comme racine double si et seulement si $P(r) = 0$ et $P'(r) = 0$.

Exercice 7. Soit $P \in \mathbb{R}[\mathbf{z}]$ et soit $a \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que si P est de degré 2, alors
$$P = P(a) + P'(a)(\mathbf{z} - a) + \frac{P''(a)}{2}(\mathbf{z} - a)^2.$$
On pourra "démarrer" en écrivant $P = c_0 + c_1\mathbf{z} + c_2\mathbf{z}^2$ et $\mathbf{z} = (\mathbf{z} - a) + a$.

(2) Montrer que si P est de degré 3, alors
$$P = P(a) + P'(a)(\mathbf{z} - a) + \frac{P''(a)}{2}(\mathbf{z} - a)^2 + \frac{P'''(a)}{6}(\mathbf{z} - a)^3.$$

(3) Quelle serait la formule pour P de degré n?

Exercice 8. Soient $A, B \in M_d(\mathbb{K})$ deux matrices vérifiant $AB = BA$.

(1) Montrer qu'on a
$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$
et
$$(A + B)^3 = A^3 + 3A^2B + 3AB^2 + B^3.$$

(2) Quelle est la formule générale pour $(A+B)^n$?

Exercice 9. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $R_\alpha \in M_2(\mathbb{R})$ la matrice définie par

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

(1) Montrer que pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, on a
$$R_\alpha R_\beta = R_{\alpha+\beta} = R_\beta R_\alpha.$$

(2) On identifie $\mathbb{R}^2$ à $\mathbb{C}$ de la manière "habituelle", via la correspondance
$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \leftrightarrow z = x + iy.$$
Montrer que si $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ correspond à $z \in \mathbb{C}$, alors $R_\alpha \vec{u}$ correspond à $e^{i\alpha} z$.

(3) Décrire géométriquement l'action de R_α sur un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 10. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice de la forme

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

En identifiant $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ de la manière habituelle, montrer que si $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ correspond à $z = x + iy \in \mathbb{C}$, alors $A\vec{u}$ correspond à λz, où $\lambda = a + ib$.

Exercice 11. On note σ_1, σ_2 et σ_3 les matrices 2×2 complexes suivantes :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ces matrices s'appellent les **matrices de Pauli**.

(1) Montrer que $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma_3^2 = I$.

(2) Montrer que $\sigma_1\sigma_2 = i\sigma_3 = -\sigma_2\sigma_1$, et donner les relations analogues pour les autres produits.

Exercice 12. Soient U, V, W les matrices 2×2 complexes définies comme suit :

$$U = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

(1) Montrer qu'on a
$$U^2 = V^2 = W^2 = UVW = -I.$$

(2) *En déduire* que $UV = W = -VU$, et donner d'autres relations analogues.

Exercice 13. Soient U, V, W les matrices 4×4 réelles définies comme suit :

$$U = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad V = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Montrer qu'on a

$$U^2 = V^2 = W^2 = UVW = -I.$$

Exercice 14. Pour les matrices J et C définies comme suit, calculer J^4 et C^4.

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 15. Trouver deux matrices $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.

Exercice 16. Soit $D \in M_2(\mathbb{K})$. On suppose que D commute avec toutes les matrices 2×2, $i.e$ qu'on a $DM = MD$ pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{K})$. Montrer que D est nécessairement de la forme $D = \lambda I$ pour un certain $\lambda \in \mathbb{K}$.

Exercice 17. Montrer que si $A, B \in M_d(\mathbb{K})$, alors ${}^t(AB) = {}^tA\,{}^tB$.

Exercice 18. On dit qu'une matrice $A \in M_d(\mathbb{K})$ est **triangulaire supérieure** si tous ses coefficients situés en dessous de la diagonale valent 0. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est encore une matrice triangulaire supérieure.

Exercice 19. Soient A et B deux matrices 4×4. On écrit A et B “par blocs”, sous la forme

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_3 \\ A_2 & A_4 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad B = \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_2 & B_4 \end{pmatrix}$$

où $A_1 \ldots, A_4, B_1, \ldots, B_4$ sont des matrices 2×2. Quelle est l'écriture par blocs de la matrice AB?

Exercice 20. Montrer que si A et B sont deux matrices $d \times d$ inversibles, alors

$$A^{-1} - B^{-1} = A^{-1}(B - A)B^{-1}.$$

Exercice 21. Soient $A, B \in M_d(\mathbb{K})$. Montrer que si $I - AB$ est inversible, alors $I - BA$ est inversible et $(I - BA)^{-1} = I + B(I - AB)^{-1}A$.

Exercice 22. Résoudre les systèmes linéaires suivants :

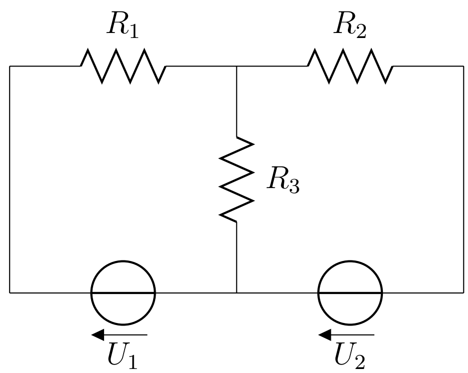
$$\begin{cases} 2x + y - z = 3 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y - z = 1 \\ x + y + z = 1 \\ x - 2y - 3z = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 4y + z = 3 \\ 3x + 9y + z = 6 \end{cases}$$

Exercice 23. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}[\mathbf{z}]$ de degré 2 tel que $P(1) = 2$, $P(2) = -1$ et $P(3) = 2$.

Exercice 24. Équilibrer les équations chimiques suivantes :

$$FeS_2 + O_2 \longrightarrow Fe_2O_3 + SO_2 \qquad \text{et} \qquad C_4H_{10} + O_2 \longrightarrow CO_2 + H_2O.$$

Exercice 25. On considère le circuit électrique suivant :



Les résistances R_1, R_2, R_3 et les tensions U_1, U_2 étant connues, déterminer les intensités dans chacune des résistances.

Exercice 26. Vérifier que si A et B sont deux matrices $d \times d$, alors

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

Exercice 27. Montrer qu'il est impossible de trouver $A, B \in M_d(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ non nul tels que $AB - BA = \lambda I$.

Exercice 28. Si A et B sont deux matrices $d \times d$, on note $[A, B]$ la matrice définie par

$$[A, B] = AB - BA.$$

On dit que $[A, B]$ est le **commutateur** de A et B.

(1) Quelle relation y a-t-il entre $[A, B]$ et $[B, A]$?

(2) Vérifier que si $A, B, C \in M_d(\mathbb{K})$ et si $\lambda \in \mathbb{K}$, alors

$$[A, B + C] = [A, B] + [A, C] \qquad \text{et} \qquad [A, \lambda B] = \lambda[A, B].$$

(3) Montrer que si $A, B, C \in M_d(\mathbb{K})$, alors
$$\big[A,[B,C]\big] + \big[C,[A,B]\big] + \big[B,[C,A]\big] = 0.$$
Cette identité s'appelle l'**identité de Jacobi**.

Exercice 29. Vérifier que si $A, B \in M_2(\mathbb{K})$, alors $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$.

Exercice 30. Peut-on trouver une matrice $A \in M_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = -I$?

Exercice 31. Soit $D \in M_d(\mathbb{K})$ une matrice diagonale,
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix}.$$
Montrer que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[\mathbf{z}]$, on a
$$P(D) = \begin{pmatrix} P(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & P(\lambda_d) \end{pmatrix}.$$

Exercice 32. Soit $A \in M_d(\mathbb{K})$. Montrer que pour tous polynômes $P, Q \in \mathbb{K}[\mathbf{z}]$, on a
$$(P+Q)(A) = P(A) + Q(A) \qquad \text{et} \qquad (PQ)(A) = P(A)Q(A).$$

Exercice 33. Soit $A \in M_d(\mathbb{K})$, et soit $f \in \mathbb{K}[\mathbf{z}]$ un polynôme. Montrer que si $P \in M_d(\mathbb{K})$ est une matrice inversible, alors
$$f(P^{-1}AP) = P^{-1}f(A)P.$$

Exercice 34. Soient $A, B \in M_d(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA$. Montrer que pour tous polynômes P et Q, on a $P(A)Q(B) = Q(B)P(A)$.

Exercice 35. Si A est une matrice de taille 2×2, le **polynôme caractéristique** de A est le polynôme $P_A \in \mathbb{K}[\mathbf{z}]$ de degré 2 défini par
$$P_A(z) = \det(zI - A).$$
Autrement dit, si
$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix},$$
alors
$$P_A(z) = \det \begin{pmatrix} z-a & -c \\ -b & z-d \end{pmatrix}$$

(1) Vérifier que P_A est bien un polynôme de degré 2 et exprimer $P_A(z)$ à l'aide du déterminant de A et de la trace de A.

(2) Montrer que pour toute matrice $A \in M_2(\mathbb{K})$, on a

$$P_A(A) = 0.$$

Ce résultat s'appelle le **Théorème de Cayley-Hamilton**.