Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'admette pas de primitive.

Exercice 2. Trouver une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui admette des primitives mais ne soit pas continue.

Exercice 3. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction *continue* vérifiant
$$\forall x, y > 0 \ : \ f(xy) = f(x) + f(y).$$

(1) Montrer qu'il existe une constante K telle que
$$\forall x > 0 \ : \ f(x) = K + \int_1^2 f(xy)\, dy.$$

(2) En déduire que f est *dérivable* sur $]0, \infty[$.

(3) Montrer que $f(x) = c \ln(x)$ pour tout $x > 0$, pour une certaine constante c.

Exercice 4. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant le fait que $\cos(ax) = \mathrm{Re}(e^{iax})$.

Exercice 5. Soient f et g deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe deux constantes α, β avec $\alpha \neq \beta$ telles que $f'' = \alpha f$ et $g'' = \beta g$. Établir la formule
$$\int f(x)g(x)\, dx = \frac{1}{\alpha - \beta}\big(f'(x)g(x) - f(x)g'(x)\big) + cte.$$
Que donne cette formule pour $f(x) := \cos(ax)$ et $g(x) := e^{bx}$, où a et b sont des nombres réels ?

Exercice 6. Déterminer les primitives de $f(x) := \sin^2 x$ et $g(x) := \cos^2 x$ sur $\mathbb{R}$ en utilisant une formule trigonométrique.

Exercice 7. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(x)^4$ et $g(x) := \sin(x)^4$ en exprimant $\cos(x)$ et $\sin(x)$ à l'aide de e^{ix} et e^{-ix}.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(x)^n \sin x$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(x)^3$ sur $\mathbb{R}$ en écrivant que $\cos(x)^3 = (1 - \sin^2 x) \cos x$.

Exercice 10. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(x)^{2n+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(x)^n \sin(x)^3$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 12. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+4}}$ et $g(x) := \frac{x^3+2x}{(x^4+4x^2+1)^4}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Déterminer les primitives de $f(x) := \arctan(x)$ sur $\mathbb{R}$ en écrivant $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$ et en primitivant par parties.

Exercice 14. Soient $a, b > 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \cos(ax)e^{bx}$ sur $\mathbb{R}$ en primitivant 2 fois par parties.

Exercice 15. Déterminer les primitives de $f(x) := x^2 e^{3x}$ et $g(x) := x^2 \cos(2x)$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16. Montrer que si P un polynôme de degré n et si $\lambda \in \mathbb{C}^*$, alors

$$\int P(x)e^{\lambda x} dx = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{\lambda^{k+1}} P^{(k)}(x)e^{\lambda x} + cte.$$

En déduire les primitives de $f(x) := (x^2 + x + 1)e^{3x}$.

Exercice 17. Soit $\lambda > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la limite de $\int_0^X t^n e^{-t/\lambda} dt$ quand $X \to +\infty$ existe, et déterminer cette limite.

Exercice 18. Montrer que si $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, alors

$$\int_a^b f(t)\, dt = \frac{b-a}{2} \left(f(a) + f(b)\right) - \int_a^b \left(t - \frac{a+b}{2}\right) f'(t)\, dt\,.$$

En déduire que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1, alors

$$\int_a^b P(t)\, dt = \frac{b-a}{2} \left(P(a) + P(b)\right);$$

et interpréter géométriquement ce résultat lorsque $P(t) \geqslant 0$ sur $[a, b]$.

Exercice 19. Montrer que si $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, alors
$$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{1}{2}\,(f(0)+f(1)) - \frac{1}{12}\,(f'(1)-f'(0)) + \int_0^1 \frac{1}{2}\Big(t^2 - t + \frac{1}{6}\Big)\,f''(t)\,dt\,.$$
En déduire que si P est un polynôme de degré inférieur ou égal à 2, alors
$$\int_0^1 P(t)\,dt = \frac{1}{2}\,(P(0)+P(1)) - \frac{1}{12}\,(P'(1)-P'(0)).$$

Exercice 20. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $f(a) = 0 = f(b)$ et $\int_a^b f(t)^2 dt = 1$. Montrer que $\int_a^b t\,f(t)f'(t) = -\frac{1}{2}\cdot$

Exercice 21. Soient $x, y > 0$ avec $x \neq y$. On définit la **moyenne logarithmique** de x et y par
$$L(x,y) := \frac{y-x}{\ln(y)-\ln(x)}\cdot$$
Le but de l'exercice est de montrer qu'on a
$$\sqrt{xy} \leqslant L(x,y) \leqslant \frac{x+y}{2}\cdot$$

(1) Montrer que pour tous $a, b > 0$, on a $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}\cdot$
(2) En déduire (en développant les carrés et le produit) que
$$\forall t \geqslant 0 \ : \ (t+\sqrt{xy})^2 \leqslant (t+x)(t+y) \leqslant \Big(t + \frac{x+y}{2}\Big)^2.$$
(3) Pour $R > 0$, calculer les intégrales
$$\int_0^R \frac{dt}{\big(t+\frac{x+y}{2}\big)^2} \quad , \quad \int_0^R \frac{dt}{(t+x)(t+y)} \quad \text{et} \quad \int_0^R \frac{dt}{(t+\sqrt{xy})^2}\cdot$$
(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 22. Soit $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$, avec $b = \mathrm{Im}(\lambda) \neq 0$. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{x-\lambda}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23. Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$ un polynôme de degré 2 à coefficients réels. On suppose que P n'a pas de racines réelles. Calculer $\int \frac{dx}{P(x)}$ et $\int \frac{x}{P(x)}\,dx$ en fonction de a, de b et de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Exercice 24. Soit $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de la forme $F(x) = \frac{\alpha x+\beta}{x^2+bx+c}$, où on suppose que $\Delta := b^2 - 4c$ est < 0.

(1) Montrer qu'on peut écrire $F(x) = A\,\frac{(x^2+bx+c)'}{x^2+bx+c} + \frac{B}{x^2+bx+c}$, où les constantes A et B sont à déterminer.

(2) Déterminer $\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{(x^2+bx+c)'}{x^2+bx+c} dx$.

(3) Montrer qu'on peut mettre $x^2 + bx + c$ sous la forme $(x + p)^2 + q^2$, où p et q sont à déterminer, puis calculer $\lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+bx+c}$ en fonction de q.

(4) Déduire des questions précédentes qu'on a

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} F(x)\,dx = \pi\,\frac{2\beta - b\alpha}{\sqrt{4c - b^2}}.$$

Exercice 25. Montrer qu'on a $\int \frac{dx}{1+x^2} = \frac{x}{1+x^2} + \int \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} dx$, et en déduire les primitives de $f(x) := \frac{1}{(1+x^2)^2}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 26. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{(1+x^2)^3}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 27. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{(x^2+2x+5)^2}$, puis les primitives de $g(x) := \frac{1}{(x^2+2x+5)^3}$ (là où elles existent).

Exercice 28. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{2x^5-x^4+x^3-16x^2+17x-15}{x^4-x^3-x^2-5x+6}$ (là où elles existent).

Exercice 29. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{3x+1}{(x+2)^2(x^2+3)(x^2+5)}$ (là où elles existent).

Exercice 30. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{1+x^3}$ sur $]-1, \infty[$, puis montrer que $I := \lim_{X\to\infty} \int_0^X \frac{dx}{1+x^3}$ existe et calculer I.

Exercice 31. Le but de l'exercice est de montrer que $I := \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^4+1}$ existe et de calculer I.

(1) Déterminer les racines complexes de $P(x) := x^4 + 1$, et en déduire une factorisation de $P(x)$ comme produit de deux polynômes de degré 2 sans racines réelles.

(2) Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{x^4+1}$ sur $\mathbb{R}$.

(3) Montrer que I existe et calculer I.

Exercice 32. Soit $\alpha \in]0,1[$. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale
$$I := \int_{\alpha}^{1/\alpha} \frac{x}{1+x^4} \arctan(x)\, dx.$$

(1) Montrer que $I = \frac{\pi}{2} \int_{\alpha}^{1/\alpha} \frac{u}{1+u^4}\, du - I$.

(2) Calculer I.

Exercice 33. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{2+\cos x}$ sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice 34. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{1}{\sin(x)}$ sur $]0, \pi[$.

Exercice 35. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin x + \cos x}$.

Exercice 36. Calculer $I(\lambda) := \int_{\frac{\pi}{2}}^{\lambda} \frac{dx}{\sin^3 x}$ pour tout $\lambda \in]0, \pi[$.

Exercice 37. Dans cet exercice, on se donne $a, b \in \mathbb{R}$ vérifiant $0 < b < a$.

(1) Pour tout $\theta \in [0, \pi]$, justifier l'existence des intégrales $I(\theta) := \int_0^{\theta} \frac{dx}{a+b\sin x}$ et $J(\theta) := \int_0^{\theta} \frac{dx}{a+b\cos x}$.

(2) Soit θ vérifiant $0 \leqslant \theta < \pi$, et soit $T := \tan(\theta/2)$. Calculer $I(\theta)$ et $J(\theta)$ en fonction de a, b et T.

(3) Déduire de (2) qu'on a
$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\sin x} = \frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}} \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$
et
$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{a+b\cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}.$$

Exercice 38. Déterminer les primitives de $f(x) := \frac{\cos(x)^3}{\sin x}$ sur $]0, \pi[$ en posant $u = \cos x$.

Exercice 39. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)^3}{1+\cos x}\, dx$ en posant $u = \cos x$.

Exercice 40. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{dt}{(\cos x)(1-\sin x)}$ en posant $u = \sin x$.

Exercice 41. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{1+\tan x}\, dx$ en posant $u = \tan x$.

Exercice 42. Calculer $I := \int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$ en posant $x = 2\cos(u)$.

Exercice 43. Calculer $I := \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^2)^2}$ en posant $x = \tan(u)$.

Exercice 44. Soit $\alpha > 0$. Calculer $I(\lambda) := \int_1^\lambda \frac{dt}{t(1+t^\alpha)}$ pour tout $\lambda > 0$, en posant $x = t^\alpha$.

Exercice 45. Calculer $I := \int_0^1 \frac{e^{2t}+1}{e^t+1}\,dt$.

Exercice 46. Calculer $I := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{2+\cos x}$.

Exercice 47. Calculer $I := \int_1^2 e^{\sqrt{t}}dt$.