Feuille d'exercices n^o 2

Exercice 1. Démontrer les choses suivantes (les notations sont celles du cours).

- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} O(h(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{x\to a}{=} o(h(x))$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(f(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{a}{=} O(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} O(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{a}{=} O(g_1(x)g_2(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{a}{=} O(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g_1(x)g_2(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$, alors $f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to a}{=} o(g(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x\to a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors $1/f(x) \underset{x\to a}{\sim} 1/g(x)$.

Exercice 2. Avec les notations du cours, montrer les choses suivantes :

- Il n'est pas vrai en général que si $f_1(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x) + f_2(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} g_1(x) + g_2(x)$.
- Cela devient vrai si on suppose que $g_1(x) > 0$ et $g_2(x) > 0$ pour x assez grand.

Exercice 3. Soit I un intervalle contenant 0, et soient α, β deux fonctions continues sur I. On suppose que $\alpha(t) \underset{t\to 0}{=} o(\beta(t))$. Montrer que $\int_0^x \alpha(t)\,dt \underset{x\to 0}{=} o\left(\int_0^x \beta(t)\,dt\right)$.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose que $u_{n+1} - u_n$ admet une limite finie $L \neq 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} Ln$. (*Cet exercice est très facile si on connait le théorème de Cesàro*.)

Exercice 5. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On suppose que $\forall k \in \mathbb{N}$: $f^{(k)}(a) = 0 = f^{(k)}(b)$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\widehat{f}(\lambda) := \int_a^b f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

En utilisant des intégrations par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$\widehat{f}(\lambda) \underset{\lambda\to\pm\infty}{=} O\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right).$$

Exercice 6. Soit $a \in \mathbb{R}$, et soient f et g deux fonctions à valeurs réelles ou complexes définies au voisinage de a. On suppose qu'on a $f(a) = 0 = g(a)$, et que f et g sont dérivables en a avec $g'(a) \neq 0$. Montrer qu'on a $g(x) \neq 0$ pour tout $x \neq a$ assez proche de a, et que

$$\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{f'(a)}{g'(a)} \qquad \text{quand } x \to a.$$

Exercice 7. Déterminer $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\arctan(x) + x^2 \sin(1/x)}{\arcsin(x)}$ et $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{ix^2 - 3x + 3 - i}{x^3 - ix^2 + 3x + i - 4}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := x^3 \sin(1/x^2)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et admet un DL à l'ordre 2 en 0, mais qu'elle n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Exercice 9. Soit P un polynôme de degré n, à coefficients réels ou complexes. Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{P^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k.$$

Exercice 10. Montrer *sans utiliser la formule de Taylor-Young* que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{1-x} \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \cdots + x^n + o(x^n)$.

Exercice 11. Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les DL_n de $\frac{1}{a-x}$ et de $\frac{1}{a+x}$ en 0.

Exercice 12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le DL_n de $\frac{1}{(1-x)^2}$ en 0 en appliquant la formule pour le DL_n de $(1 + u)^\alpha$.

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$.

(1) Retrouver les DL_n de $\mathrm{ch}(x)$ et $\mathrm{sh}(x)$ en 0 en utilisant les DL de e^x et e^{-x}.
(2) Retrouver les DL_n de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en 0 en utilisant les DL de e^{ix} et e^{-ix}.

Exercice 14. Déterminer les développements limités en 0 suivants.

(1) $\dfrac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.
(2) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4.
(3) $\sin x \cdot \cos(2x)$ à l'ordre 6.
(4) $\cos x \cdot \ln(1+x)$ à l'ordre 4
(5) $\cos x \cdot e^x$ à l'ordre 3.
(6) $(x^3+1) \cdot \sqrt{1-x}$ à l'ordre 3.
(7) $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.
(8) $(\sin x)^6$ à l'ordre 9.

Exercice 15. Déterminer les développements limités en 0 suivants.

(1) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4.
(2) $\dfrac{\sin x + 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 3.
(3) $\dfrac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3.
(4) $\operatorname{th}(x)$ à l'ordre 5.

Exercice 16. Déterminer les développements limités en 0 suivants.

(1) $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4.
(2) $\ln\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4.
(3) $\sin\big(\ln(1+x^2)\big)$ à l'ordre 6.
(4) $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Exercice 17. Déterminer les développements limités suivants.

(1) $\sqrt{x}$ en 1 à l'ordre 3.
(2) $e^{\sqrt{x}}$ en 1 à l'ordre 3
(3) $\cos(x)$ en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.
(4) $\ln(\sin x)$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.

Exercice 18. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le DL_n de $\frac{1}{(1-x)^2}$ en 0 en observant que $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$.

Exercice 19. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{(1-x)^p} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{p-1+k}{k} x^k + o(x^n).$$

Exercice 20. Déterminer les DL à l'ordre 5 de $\arcsin(x)$ et $\operatorname{argsh}(x)$ en 0 en utilisant les dérivées de arcsin et argsh.

Exercice 21. Déterminer le DL à l'ordre 6 de $\ln(\cos(x))$ en 0, et en déduire le DL de $\tan(x)$ à l'ordre 5.

Exercice 22. Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0, et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction impaire 5 fois dérivable telle que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. On note $f(t) = at + bt^3 + ct^5 + o(t^5)$ le DL à l'ordre 5 de f en 0.

(1) Justifier que f est une bijection de I sur $J := f(I)$, et que la fonction $g := f^{-1}$ admet un DL à l'ordre 5 en 0, de la forme $g(x) = a'x + b'x^3 + c'x^5 + o(x^5)$.

(2) En utilisant l'identité $f(g(x)) = x$, exprimer a' en fonction de a, puis b' en fonction de a et b, puis c' en fonction de a, b et c.

Exercice 23. Déterminer les DL à l'ordre 5 de $\arcsin(x)$ et $\operatorname{argsh}(x)$ en 0 en utilisant la méthode de l'Exercice 22.

Exercice 24. Déterminer le DL à l'ordre 5 de $\tan(x)$ en 0 en utilisant la méthode de l'Exercice 22.

Exercice 25. Soit f la fonction définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) := 2\tan(x) - x$. Montrer que f admet une fonction réciproque de classe C^∞, et déterminer le DL à l'ordre 5 de f^{-1} en 0. (On rappelle que $\tan(x) \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.)

Exercice 26. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \dfrac{x^3}{1+x^6}\cdot$ Calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 27. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et deux fois dérivable en a. Déterminer

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}\cdot$$

Exercice 28. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $a \in \mathbb{R}$ Pour toute fonction f définie au voisinage de a et n fois dérivable en a et pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on pose

$$\Delta_\varepsilon^n f(a) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(a + k\varepsilon).$$

(1) Vérifier que $\Delta_\varepsilon^1 f(a) = f(a+\varepsilon) - f(a)$ et $\Delta_\varepsilon^2 f(a) = f(a+2\varepsilon) - 2f(a+\varepsilon) + f(a)$.

(2) Montrer qu'il existe des constantes $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ indépendantes de f telles que

$$\Delta_\varepsilon^n f(a) \underset{\varepsilon\to 0}{=} \sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^{(i)}(a)\, \varepsilon^i + o(\varepsilon^n).$$

(3) Calculer $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$ en prenant pour f la fonction exponentielle.

(4) Déterminer, pour f quelconque n fois dérivable en a, la limite
$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\Delta_\varepsilon^n f(a)}{\varepsilon^n}\cdot$$

Exercice 29. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la partie principale du dévelopement limité en 0 de
$$f(x) := \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$
soit de valuation la plus grande possible.

Exercice 30. Déterminer les "développements limités en $+\infty$" des fonctions suivantes (selon les puissances de $\frac{1}{x}$) :

(1) $f(x) := \dfrac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3.

(2) $g(x) := \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)$ à l'ordre 4.

Exercice 31. Soit f la fonction définie par $f(x) := \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}\cdot$

(1) Donner le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.

(2) En déduire un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en $+\infty$.

Exercice 32. Démontrer les résultats suivants.

(1) $\dfrac{1}{x+2} \underset{x\to+\infty}{=} \dfrac{1}{x} - \dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot$

(2) $\dfrac{1+x^2}{(x+1)(x-2)} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{6}{x^3} + o\left(\dfrac{1}{x^3}\right)\cdot$

(3) $\dfrac{1}{x\sin(1/x)} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + -\dfrac{1}{6x^2} + \dfrac{7}{360x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\cdot$

(4) $\dfrac{1}{x\arctan(1/x)} \underset{x\to+\infty}{=} 1 + \dfrac{1}{3x^2} - \dfrac{4}{45x^4} + o\left(\dfrac{1}{x^4}\right)\cdot$

(5) $\dfrac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \underset{x\to+\infty}{=} x^{5/6} - \dfrac{1}{3x^{7/6}} + \dfrac{1}{12x^{13/6}} + o\left(\dfrac{1}{x^{13/6}}\right)\cdot$

(6) $\dfrac{\sqrt{e^{-x}+e^{-3x}}}{\sqrt[3]{e^{-x}+e^{-2x}}} \underset{x\to+\infty}{=} e^{-x/6} - \dfrac{e^{-7x/6}}{3} + \dfrac{13e^{-13x/6}}{18} + o\left(e^{-13x/6}\right)\cdot$

Exercice 33. Déterminer les limites suivantes.

(1) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$.

(2) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x-\cos(x)-x}{x^2}$.

(3) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-\cos(x)}{x^2}$.

(4) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)-\sin x}{x^2}$.

(5) $\lim_{x\to 0} \dfrac{1}{x^2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$.

(6) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\cos(x)-\sqrt{1-x^2}}{x^4}$.

(7) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{\sin(x)-\tan(x)}$.

(8) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+\ln(1+2x)}-1-x}{x^2}$.

(9) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\arctan(e^x-1)-\ln(\cos(x))}{x^3}$.

(10) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.

(11) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sin(x)^2}\right)$.

(12) $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+3x+2}-x\right)$.

(13) $\lim_{x\to +\infty} \left(e^{\sqrt{x+1}}-e^{\sqrt{x}}\right)^{1/\sqrt{x}}$.

(14) $\lim_{x\to +\infty} \left((x+1)^{(x+1)^{1/(x+1)}}-x^{x^{1/x}}\right)$.

Exercice 34. Déterminer $\ell := \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)}\right)^x$.

Exercice 35. Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes.

(1) $2e^x-\sqrt{1+4x}-\sqrt{1+6x^2}$, en 0.

(2) $\sqrt{x^2+1}-2\sqrt[3]{x^3+x}+\sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$.

(3) $(\cos x)^{\sin x}-(\cos x)^{\tan x}$, en 0.

Exercice 36. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue, 2 fois dérivable sur $]a,b[$, telle que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a,b[$. Montrer que le maximum de f sur $[a,b]$ ne peut être atteint qu'en a ou en b.

Exercice 37. Soit f une fonction à valeurs réelles 3 fois dérivable un point a. On note Δ la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$.

(1) Montrer que si $f''(a) \neq 0$, alors le graphe de f reste du même côté de Δ au voisinage de $(a, f(a))$.

(2) Montrer que si $f''(a) = 0$ et $f'''(a) \neq 0$, alors le graphe de f traverse Δ.

Exercice 38. Montrer que les graphes des fonctions sin, arcsin, arctan et th traversent leur tangente en $(0,0)$.

Exercice 39. Montrer que le graphe de la fonction cos traverse sa tangente en $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Exercice 40. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) := \dfrac{1}{1+e^x}\cdot$

(1) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.

(2) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, et montrer que le graphe traverse sa tangente.

Exercice 41. Étudier la position du graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1+x+x^2)$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0. Même question avec la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 42. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq a$ et $a, b \neq 0$, soit n un entier $\geqslant 2$, et soit f la fonction définie par

$$f(x) := \frac{x^n + ax}{x^2 + b}\cdot$$

(1) Montrer que si $n \geqslant 3$, alors le graphe de f traverse sa tangente au point $(0,0)$.

(2) Montrer que si $n = 2$ alors, au voisinage de $(0,0)$, le graphe de f reste du même côté de sa tangente en $(0,0)$.

Exercice 43. Déterminer les asymptotes éventuelles en $\pm\infty$, et la position relative par rapport aux asymptotes, de la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) := \sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-1}.$$

Exercice 44. Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position du graphe par rapport à cette asymptote.

(1) $f(x) := x\sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}\cdot$

(2) $f(x) := \frac{x^3+2}{x^2-1}\cdot$

(3) $f(x) := (x+1)\arctan(x+1)$.

(4) $f(x) := (x+1)e^{1/(x+1)}$.

(5) $f(x) := \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{x^2+1}}\cdot$

(6) $f(x) := \sqrt{\frac{x-2}{x+1}}\, e^{x/(x+1)}$.

(7) $f(x) := x^3 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right)\cdot$

(8) $f(x) := \sqrt[3]{x^3-2x^2+1} - \sqrt{x^2+x+1}$.

Exercice 45.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

(2) Justifier que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

(3) En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, pour une certaine constante c à déterminer.

(4) Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour une certaine constante d à déterminer.

Exercice 46.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{x}$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $\left]2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}\right[$.

(2) Justifier que $x_n = 2n\pi + \arcsin\left(\frac{1}{x_n}\right)$.

(3) En déduire que $x_n = 2n\pi + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, pour une certaine constante c à déterminer.

(4) Montrer que $x_n = 2n\pi + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour une certaine constante d à déterminer.

Exercice 47. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

(1) Montrer que l'équation admet une unique solution, que l'on notera u_n.

(2) Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.

(3) Montrer que $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \ln(n)$.

(4) Montrer que
$$u_n \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Exercice 48. Soit $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \sin(x_n)$.

(1) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et tend vers 0.

(2) En utilisant le DL à l'ordre 3 de $\sin(x)$ en 0, Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{x_n^\alpha}$ admette une limite $l \neq 0$ quand $n \to \infty$.

(3) Montrer que $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. (Utiliser l'Exercice 4.)

Exercice 49. Soit $x_0 > 0$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$.

(1) Montrer que (x_n) est décroissante et tend vers 0.

(2) En procédant comme dans l'Exercice 48, déterminer un équivalent simple de x_n quand $n \to \infty$.

Exercice 50. Soit $x_0 > 0$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n e^{-x_n}$. Montrer que $x_n \to 0$, et déterminer un équivalent simple de x_n.