

## Feuille d'exercices n° 5

**Exercice 1.** Déterminer pour quelles valeurs de  $\alpha > 0$  la fonction  $t \mapsto \left(1 - \frac{1}{t^\alpha}\right)^t$  est intégrable sur  $]1, \infty[$ .

**Exercice 2.** Soit  $a > 0$ , et soit  $u : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue. On suppose que  $u(t)/\log(t)$  admet une limite  $l > 1$  quand  $t \rightarrow \infty$  (la valeur  $l = \infty$  n'est pas exclue). Montrer que la fonction  $t \mapsto e^{-u(t)}$  est intégrable sur  $[a, \infty[$ .

**Exercice 3.** Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue et intégrable sur  $[0, \infty[$ .

- (1) Peut-on affirmer que  $f(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ ?
- (2) Montrer que si  $f(x)$  admet une limite quand  $x \rightarrow \infty$ , alors cette limite est nécessairement égale à 0.
- (3) Montrer que si  $f$  est *uniformément* continue, alors  $f(x) \rightarrow 0$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 4.** Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ . Montrer que si la fonction  $f'$  est intégrable sur  $[0, \infty[$ , alors  $f(x)$  admet une limite quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 5.** Calculer l'intégrale  $I := \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$ .

**Exercice 6.** Soient  $a, b \in \mathbb{R}$  avec  $b \neq 0$ , et soit  $\lambda = a + ib$ . En notant  $\text{sgn}(b)$  le signe de  $b$ , montrer qu'on a

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{dx}{x - \lambda} = i\pi \text{sgn}(b).$$

**Exercice 7.** Dans tout l'exercice,  $f$  est une fonction rationnelle,  $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ , où les polynômes  $P$  et  $Q$  sont à coefficients réels. On suppose que  $Q$  n'a pas de racines réelles, et que  $\deg(Q) \geq 2 + \deg(P)$ . On suppose également que toutes les racines complexes de  $Q$  sont simples, et que le coefficient du terme de plus haut degré de  $Q(x)$  est égal à 1.

- (1) Montrer que  $f$  est intégrable sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) On note  $\lambda_1, \dots, \lambda_N$  les racines complexes de  $Q$  à partie imaginaire strictement positive.

(a) Justifier qu'on peut écrire  $f(x)$  sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^N \frac{c_j}{x - \lambda_j} + \sum_{j=1}^N \frac{\overline{c_j}}{x - \overline{\lambda_j}},$$

où les  $c_j$  sont des constantes.

(b) Montrer que les coefficients  $c_j$  sont donnés par  $c_j = \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}$ .

(c) Montrer également qu'on a  $\sum_{j=1}^N c_j + \sum_{j=1}^N \overline{c_j} = 0$ .

(3) Avec les notations de (2), et en utilisant l'Exercice 6, établir la formule suivante (qu'on appelle la **formule des résidus**) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 2i\pi \sum_{j=1}^N \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}.$$

(4) *Application numérique* : calculer  $I_1 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$  et  $I_2 := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$ .

**Exercice 8.** Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale  $I := \int_0^{\pi/2} \log(\sin t) dt$ .

(1) Justifier que  $I$  a bien un sens.

(2) En remarquant que  $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$ , montrer qu'on a  $I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t) dt$ .

(3) En déduire que  $2I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t \sin t) dt$ , puis que

$$I = -\frac{\pi}{2} \log(2) + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2t) dt.$$

(4) Montrer qu'on a  $\int_{\pi/2}^{\pi} \log(\sin u) du = I$ , puis que  $\int_0^{\pi} \log(\sin u) du = 2I$ .

(5) calculer  $I$ .

**Exercice 9.** Soit  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  sur un segment  $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ , et soit  $\phi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit également  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue. On suppose qu'on a  $\phi'(t) \neq 0$  pour tout  $t \in [a, b]$ , et que la fonction  $G$  définie par  $G(x) := \int_a^x g(t) dt$  est bornée sur  $\mathbb{R}$ . Montrer qu'on a

$$\lim_{|\lambda| \rightarrow \infty} \int_a^b f(t)g(\lambda\phi(t)) dt = 0.$$

(*Suggestion* : écrire  $f(t)g(\lambda\phi(t)) = \frac{f(t)}{\phi'(t)} \times g(\lambda\phi(t))\phi'(t)$ .)

**Exercice 10.** Soit  $f : [0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $f(t) := \sin(t^{1/4})e^{-t^{1/4}}$ .

(1) Montrer que pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , la fonction  $t \mapsto t^p f(t)$  est intégrable sur  $[0, \infty[$ . Dans la suite, on pose  $I_p := \int_0^{\infty} t^p f(t) dt$ .

(2) Montrer que  $I_p$  est la partie imaginaire de  $J_p := 4 \int_0^{\infty} u^{4p+3} e^{-\lambda u} du$ , où  $\lambda$  est un nombre complexe à déterminer.

(3) Calculer  $I_p$  pour tout  $p \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 11.** Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $\alpha > 0$ , calculer l'intégrale  $\int_0^\infty t^n e^{-\alpha t} dt$ .

**Exercice 12.** Pour  $x > 0$ , on pose  $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ . Trouver une relation entre  $\Gamma(x+1)$  et  $\Gamma(x)$ , et en déduire la valeur de  $\Gamma(n+1)$  pour  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 13.** Pour toute fonction  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  intégrable sur  $\mathbb{R}$  et pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ , on note  $\widehat{u} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  la **transformée de Fourier** de  $u$ , qui est la fonction définie par

$$\widehat{u}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

- (1) Justifier la définition.
- (2) Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction continue identiquement nulle en dehors d'un intervalle  $[a, b]$ .
  - (a) Montrer que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors  $\widehat{f}'(\lambda) = i\lambda \widehat{f}(\lambda)$ .
  - (b) Si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^k$ , exprimer  $\widehat{f^{(k)}}(\lambda)$  en fonction de  $\widehat{f}(\lambda)$ .
  - (c) Montrer que si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , alors  $\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$  quand  $\lambda \rightarrow \pm\infty$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 14.** Pour  $x > 0$ , on pose  $R(x) := \int_x^\infty e^{-t^2} dt$ . Justifier que  $R(x) < \infty$ ; puis montrer que  $R(x)$  est équivalent à  $\phi(x) := \frac{e^{-x^2}}{2x}$  quand  $x \rightarrow \infty$ . (Intégrer par parties.)

**Exercice 15.** Soit  $\alpha > 0$ . Déterminer un équivalent simple de  $F(x) := \int_1^x e^{t^\alpha} dt$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

**Exercice 16.** Pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $x \in \mathbb{R}$ , on pose  $F_n(x) := \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ .

- (1) Calculer  $F_1(x)$ .
- (2) Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a

$$2nF_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)F_n(x).$$

- (3) En déduire  $F_2(x)$  et  $F_3(x)$ .
- (4) Calculer  $F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$  en posant  $t = \tan u$ .

**Exercice 17.** Soit  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit également  $\lambda > 0$ .

- (1) On suppose qu'on a  $|F'(t)| \geq \lambda$  pour tout  $t \in [a, b]$ . Montrer que si on pose  $G := 1/F'$ , alors

$$\left| \int_a^b e^{iF(t)} dt \right| \leq \frac{2}{\lambda} + \left| \int_a^b G'(t) e^{iF(t)} dt \right|.$$

- (2) On suppose qu'on a  $|F'(t)| \geq \lambda$  pour tout  $t \in [a, b]$ , et que la fonction  $F'$  est monotone. Établir l'inégalité

$$\left| \int_a^b e^{iF(t)} dt \right| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

**Exercice 18.** Soit  $\beta > 0$ . Calculer l'intégrale  $I := \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^\beta)}$ .

**Exercice 19.** Soient  $\alpha, \beta > 0$ . Pour  $t > 0$ , on pose  $f(t) := \frac{(1+t)^\alpha}{(1+t^2)^\beta}$ . Montrer que si  $2\beta - \alpha = 2$ , alors  $\int_{]0,1[} f = \int_{]1,\infty[} f$ .

**Exercice 20.** Soit  $a > 0$ . On pose  $J(a) := \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-a(t+\frac{1}{t})} dt$ .

- (1) Montrer que  $J(a) = \int_1^\infty (t^{-1/2} + t^{-3/2}) e^{-a(t+\frac{1}{t})} dt$ .
- (2) Déterminer la valeur de  $J(a)$  en posant  $u = \sqrt{a}(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}})$  et en admettant que  $\int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}/2$ .

**Exercice 21.** Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction borélienne ou bien positive, ou bien intégrable sur  $\mathbb{R}$ , alors

$$\int_{\mathbb{R}^*} f\left(t - \frac{1}{t}\right) dt = \int_{\mathbb{R}} f(x) dx.$$

**Exercice 22.** Soit  $f : ]0, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement intégrable admettant des limites finies  $\alpha$  et  $\beta$  respectivement en 0 et en  $\infty$ . Soient également  $a, b > 0$ . Montrer que l'intégrale  $\int_0^\infty \frac{f(bt) - f(at)}{t} dt$  existe et vaut  $(\beta - \alpha) \log(b/a)$ . (On pourra commencer par vérifier que pour tous  $0 < u, v < \infty$ , on a  $\int_u^v \frac{f(bt) - f(at)}{t} dt = \int_{av}^{bv} \frac{f(x)}{x} dx - \int_{au}^{bu} \frac{f(x)}{x} dx$ .)

**Exercice 23.** Montrer que si  $u : [a, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , décroissante et tendant vers 0 à l'infini, alors  $\int_a^\infty u(t) e^{it} dt$  existe en tant qu'intégrale généralisée.

**Exercice 24.** Montrer qu'on a  $\int_{2n\pi + \frac{\pi}{4}}^{2n\pi + \frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t}{t} dt \geq \frac{\sqrt{2}}{4(2n+1)}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et en déduire que la fonction  $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$  n'est pas intégrable sur  $[1, \infty[$ .

**Exercice 25.** Montrer que  $f(t) = \frac{\sin t}{t}$  n'est pas intégrable sur  $[1, \infty[$  en utilisant l'inégalité  $|\sin t| \geq \sin^2 t$ .

**Exercice 26.** Montrer que  $\int_0^\infty \cos(x^2) dx$  existe en tant qu'intégrale généralisée, mais que la fonction  $x \mapsto \cos(x^2)$  n'est pas intégrable sur  $[0, \infty[$ .

**Exercice 27.** Déterminer pour quelles valeurs de  $\alpha > 0$  l'intégrale  $\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sin t + t^\alpha}$  est convergente.

**Exercice 28.** Pour  $\alpha \in ]0, 1]$ , déterminer un équivalent de  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Exercice 29.** Pour  $\alpha, \beta > 0$ , déterminer la nature de la série  $\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$ .

**Exercice 30.** Déterminer la nature des séries  $\sum \frac{\cos(\log n)}{n}$  et  $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$ .

**Exercice 31.** Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $W_n := \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$ . Les  $W_n$  sont appelées les **intégrales de Wallis**.

- (1) Montrer qu'on a  $W_{n+2} = W_n - \int_0^{\pi/2} [\cos x (\sin x)^n] \cos x dx$ , et en déduire la relation de récurrence

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n.$$

- (2) Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , on a

$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k} (k!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2k+1} = \frac{2^{2k} (k!)^2}{(2k+1)!}.$$

- (3) Montrer que la suite  $(W_n)$  est décroissante, puis que  $W_{n+1} \sim W_n$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Déterminer ensuite un équivalent simple de  $W_{2k} W_{2k+1}$  en utilisant (2), et conclure que

$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

**Exercice 32.** Le but de l'exercice est d'établir la **formule de Stirling**, qui donne un équivalent de  $n!$  quand  $n \rightarrow \infty$  :

$$n! \sim n^n e^{-n} \sqrt{2\pi n}.$$

(1) Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $v_n := \log \left( \frac{n!}{n^n e^{-n} \sqrt{n}} \right)$ . Montrer qu'on a

$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left( n + \frac{1}{2} \right) \log \left( 1 + \frac{1}{n} \right),$$

et en déduire que la série  $\sum (v_{n+1} - v_n)$  est absolument convergente.

- (2) Déduire de (1) qu'il existe une constante  $C$  telle que  $n! \sim C n^n e^{-n} \sqrt{n}$  quand  $n \rightarrow \infty$ .
- (3) Déterminer la constante  $C$  en utilisant les intégrales de Wallis (Exercice 31) et conclure.

**Exercice 33.** Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale  $I := \int_0^\infty e^{-t^2} dt$ .

- (1) En utilisant convenablement le Théorème de convergence monotone, montrer qu'on a

$$I = \lim_{k \rightarrow \infty} J_k, \quad \text{où } J_k := \int_0^k \left( 1 - \frac{t^2}{k^2} \right)^{k^2} dt.$$

- (2) Vérifier que  $J_k = k W_{2k^2+1}$  où les  $W_n$  sont les intégrales de Wallis, puis calculer  $I$  en utilisant l'Exercice 31.

**Exercice 34.** Le but de l'exercice est de calculer la somme  $S := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ .

- (1) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on pose  $W_k := \int_0^{\pi/2} (\cos t)^k dt$  et  $I_k := \int_0^{\pi/2} t^2 (\cos t)^k dt$ . Montrer que si  $k \geq 2$ , alors

$$W_k = \frac{k(k-1)}{2} W_{k-2} - \frac{k^2}{2} I_k \quad \text{et} \quad W_k = \frac{k-1}{k} W_{k-2}.$$

- (2) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $\varepsilon_n := \frac{I_{2n}}{W_{2n}}$ .

(a) Montrer à l'aide de (1) que si  $n \geq 1$ , alors  $\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n = \frac{1}{2n^2}$ .

(b) Montrer que  $\varepsilon_n$  tend vers 0 quand  $n \rightarrow \infty$ . (*Suggestion* : commencer par montrer que pour tout  $0 < \delta < \pi/2$  fixé, on a  $\int_\delta^{\pi/2} (\cos t)^k dt = o(W_k)$  quand  $k \rightarrow \infty$ .)

- (3) Déterminer la valeur de  $S$ .