

## Feuille d'exercices n° 3

**Exercice 1.** (mesure image)

Soient  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré et  $(\Omega', \mathfrak{B}')$  un espace mesurable. Soit également  $\phi : \Omega \rightarrow \Omega'$  une application mesurable. Montrer qu'on définit une mesure  $\mu_\phi$  sur  $(\Omega', \mathfrak{B}')$  en posant, pour tout  $A \in \mathfrak{B}' : \mu_\phi(A) := \mu(\phi^{-1}(A))$ . On dit que  $\mu_\phi$  est la **mesure image** de  $\mu$  par l'application  $\phi$ .

**Exercice 2.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B})$  un espace mesurable, et soient  $\Omega_1, \dots, \Omega_d$  des espaces métriques. Soit également  $f : \Omega \rightarrow \Omega_1 \times \dots \times \Omega_d$ . On écrit  $f(x) = (f_1(x), \dots, f_d(x))$ .

- (1) Montrer que si  $f$  est mesurable, alors  $f_1, \dots, f_d$  sont mesurables.
- (2) On suppose que les  $\Omega_j$  sont séparables. Montrer que  $f$  est mesurable si et seulement si  $f_1, \dots, f_d$  sont mesurables. (*On pourra admettre le résultat de l'Exercice 16 de la Feuille 2.*)

**Exercice 3.** Montrer qu'il existe des fonctions  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  boréliennes qui ne sont continues en aucun point.

**Exercice 4.** Soit  $\Omega$  un ensemble, et soit  $(A_i)_{i \in I}$  une partition dénombrable de  $\Omega$ . On note  $\mathfrak{B}$  la tribu engendrée par la famille  $(A_i)_{i \in I}$ .

- (1) Montrer que  $\mathfrak{B}$  est exactement égale à l'ensemble des  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  qui peuvent s'écrire sous la forme  $A = \bigcup_{i \in J} A_i$ , où  $J$  est un sous-ensemble de  $I$  (dépendant de  $A$ ).
- (2) Montrer qu'une fonction  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathfrak{B}$ -mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque ensemble  $A_i$ .

**Exercice 5.** Soit  $\Omega$  un espace métrique, et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction arbitraire. On note  $C_f$  l'ensemble des points de continuité de  $f$ ; autrement dit :

$$C_f = \{x \in \Omega; f \text{ est continue au point } x\}.$$

- (1) Montrer qu'un point  $x \in \Omega$  appartient à  $C_f$  si et seulement si la propriété suivante est vérifiée : pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage ouvert  $O$  de  $x$  tel que  $\forall u, v \in O : |f(u) - f(v)| \leq \varepsilon$ .
- (2) Montrer que  $C_f$  est un ensemble borélien. Plus précisément, montrer que  $C_f$  est une intersection dénombrable d'ouverts.

**Exercice 6.** On dit qu'une fonction  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est **séparément continue** si elle est continue par rapport à chaque variable séparément ; autrement dit : pour tout  $x \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction  $y \mapsto f(x, y)$  est continue, et pour tout  $y \in \mathbb{R}$  fixé, la fonction  $x \mapsto f(x, y)$  est continue.

- (1) Montrer qu'il existe des fonctions séparément continues qui ne sont pas continues.
- (2) Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  séparément continue. On note  $\mathcal{I}$  la famille de tous les intervalles fermés  $I \subseteq \mathbb{R}$  à extrémités rationnelles. Montrer que pour  $\alpha \in \mathbb{R}$  fixé et pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a l'équivalence suivante :

$$f(x, y) > \alpha \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \exists I \in \mathcal{I} \left( x \in I \text{ et } \forall u \in I : f(u, y) \geq \alpha + \frac{1}{k} \right).$$

- (3) Montrer que toute fonction séparément continue est borélienne.

**Exercice 7.** Dans tout l'exercice,  $(Y, d)$  est un espace métrique.

- (1) Soit  $(y_n)$  une suite de points de  $Y$  convergeant vers un point  $y \in Y$ . Montrer que pour tout ouvert  $O \subseteq Y$ , on a l'équivalence suivante :

$$y \in O \iff \exists k \in \mathbb{N}^* \exists N \in \mathbb{N} \forall p \geq N : \text{dist}(y_p, Y \setminus O) \geq \frac{1}{k},$$

où, pour  $x \in Y$  et  $A \subseteq Y$ , on note  $\text{dist}(x, A)$  la distance de  $x$  à  $A$  (qui est définie par  $\text{dist}(x, A) := \inf \{d(x, u); u \in A\}$ ).

- (2) Soit  $(\Omega, \mathfrak{B})$  un espace mesurable, et soit  $(f_n)$  est une suite de fonctions mesurables de  $\Omega$  dans  $Y$ . On suppose que la suite  $(f_n)$  converge simplement vers une fonction  $f : \Omega \rightarrow Y$ . Montrer que  $f$  est mesurable. (*À toutes fins utiles, on rappelle que pour tout  $A \subseteq Y$ , la fonction  $x \mapsto \text{dist}(x, A)$  est continue.*)

**Exercice 8.** Montrer que si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est dérivable en tout point, alors  $f'$  est une fonction borélienne.

**Exercice 9.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B})$  un espace mesurable, et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables sur  $\Omega$ , à valeurs dans un espace métrique  $(Y, d)$ . Soit également  $b \in Y$ . Montrer que l'ensemble  $A := \{x \in \Omega; \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = b\}$  est mesurable (i.e.  $A \in \mathfrak{B}$ ).

**Exercice 10.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B})$  un espace mesurable, et soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions mesurables sur  $\Omega$ , à valeurs dans un espace métrique *séparable et complet*  $(Y, d)$ . On note  $A$  l'ensemble des points  $x \in \Omega$  tels que la suite  $(f_n(x))$  converge dans  $Y$ . Montrer que l'ensemble  $A$  est mesurable. (*On pourra admettre le résultat de l'Exercice 2.*)

**Exercice 11.** Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, et soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables sur  $\Omega$ , à valeurs complexes. On suppose que pour tout  $\varepsilon > 0$ , la série  $\sum \mu(\{|f_n| > \varepsilon\})$  est convergente. Montrer que  $(f_n)$  tend vers 0 presque partout. (Utiliser le lemme de Borel-Cantelli – Exercice 11 de la Feuille 2.)

**Exercice 12.** (tribu engendrée par une application)

Soit  $\Omega$  un ensemble, et soit  $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . On pose  $\mathfrak{B}_\phi := \{\phi^{-1}(A); A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R})\}$ , où  $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$  est la tribu borélienne de  $\mathbb{R}$ .

- (1) Montrer que  $\mathfrak{B}_\phi$  est une tribu. Plus précisément, montrer que  $\mathfrak{B}_\phi$  est la plus petite tribu sur  $\Omega$  rendant  $\phi$  mesurable. On dit que  $\mathfrak{B}_\phi$  est la **tribu engendrée par  $\phi$** .
- (2) Montrer que si  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est borélienne, alors  $g \circ \phi$  est  $\mathfrak{B}_\phi$ -mesurable
- (3) Montrer inversement que si  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathfrak{B}_\phi$ -mesurable, alors il existe une fonction borélienne  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $f = g \circ \phi$ . (On pourra commencer par le cas où  $f$  est une fonction étagée, puis traiter le cas d'une fonction positive, et enfin le cas général.)

**Exercice 13.** Avec les notations de l'Exercice 12, on prend  $\Omega := \mathbb{R}$  et  $\phi(x) := |x|$ . Montrer qu'une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathfrak{B}_\phi$ -mesurable si et seulement si elle est borélienne et paire.

**Exercice 14.** (Théorème de récurrence de Poincaré)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu(\Omega) < \infty$ . Soit également  $T : \Omega \rightarrow \Omega$  une application mesurable. On suppose que  $T$  **préserve la mesure**  $\mu$ , ce qui signifie qu'on a  $\mu(T^{-1}(A)) = \mu(A)$  pour tout  $A \in \mathfrak{B}$ .

- (1) Soit  $A \in \mathfrak{B}$ , et soit  $p \in \mathbb{N}^*$ . On pose

$$F := \{x \in A; \forall n \geq p : T^n(x) \notin A\},$$

où  $T^n := T \circ \dots \circ T$  est la  $n$ -ième itérée de  $T$ .

- (a) Justifier que  $F$  est mesurable.
  - (b) Montrer que les ensembles  $(T^{kp})^{-1}(F)$ ,  $k \geq 0$ , sont deux à deux disjoints. (Pour  $k < k'$ , on pourra écrire  $T^{k'p} = T^{(k'-k)p} \circ T^{kp}$ ).
  - (c) Montrer qu'on a  $\mu(F) = 0$ .
- (2) Soit  $A \in \mathfrak{B}$  vérifiant  $\mu(A) > 0$ . Montrer qu'il existe un point  $x \in A$  tel que  $T^n(x) \in A$  pour une infinité d'entiers  $n$ .

**Exercice 15.** (Théorème d'Egorov)

Soit  $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$  un espace mesuré, avec  $\mu(\Omega) = 1$ . Soit également  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables sur  $\Omega$ , à valeurs réelles. On suppose que la suite  $(f_n)$  converge *simplement* vers une fonction  $f$ . Dans toute la suite, on fixe  $\varepsilon > 0$ .

(1) Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$A_n := \left\{ x \in \Omega; \forall p \geq n : |f_p(x) - f(x)| < \frac{1}{k} \right\}.$$

Justifier que les  $A_n$  sont mesurables, puis montrer qu'il existe un entier  $n_k$  tel que  $\mu(A_{n_k}) > 1 - 2^{-k}\varepsilon$ .

(2) Montrer qu'il existe un ensemble  $A \in \mathfrak{B}$  possédant les 2 propriétés suivantes :  $\mu(A) > 1 - \varepsilon$  et la suite  $(f_n)$  converge *uniformément* sur  $A$ .

**Exercice 16.** (Théorème de Lusin)

Soit  $\Omega$  un espace métrique, et soit  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction borélienne. Soit également  $\mu$  une mesure borélienne sur  $\Omega$  telle que  $\mu(\Omega) = 1$ . Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un fermé  $K_\varepsilon \subseteq \Omega$  tel que  $\mu(K_\varepsilon) > 1 - \varepsilon$  et tel que la restriction de  $f$  à  $K_\varepsilon$  est continue.* On aura besoin d'utiliser le fait que la mesure  $\mu$  est **régulière**, au sens suivant : pour tout borélien  $A \subset \Omega$  et pour tout  $\eta > 0$ , on peut trouver un fermé  $F$  tel que  $F \subseteq A$  et  $\mu(F) > \mu(A) - \eta$ . (Cf l'Exercice 18 de la Feuille 2.) Dans toute la suite, on fixe  $\varepsilon > 0$ .

(1) Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on définit une fonction  $\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de la façon suivante :  $\varphi_k(x) = n_k(x) 2^{-k}$ , où  $n_k(x)$  est l'unique entier  $n \in \mathbb{Z}$  tel que  $n 2^{-k} \leq f(x) < (n+1) 2^{-k}$ . Montrer que les fonctions  $\varphi_k$  sont boréliennes, et que la suite  $(\varphi_k)$  converge uniformément vers  $f$ .

(2) Soit  $k \in \mathbb{N}$  fixé. Pour  $n \in \mathbb{Z}$ , on pose  $A_{k,n} := \{x \in \Omega; n_k(x) = n\}$ .

(a) Combien vaut  $\mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} A_{k,n}\right)$  ?

(b) En utilisant la régularité de la mesure  $\mu$ , montrer qu'il existe un entier  $N_k \in \mathbb{N}$  et des fermés  $(F_{k,n})_{-N_k \leq n \leq N_k}$  tels que  $F_{k,n} \subseteq A_{k,n}$  pour tout  $n \in \llbracket -N_k, N_k \rrbracket$  et

$$\mu\left(\bigcup_{n=-N_k}^{N_k} F_{k,n}\right) > 1 - \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

(3) Avec les notations de (2), on pose  $E_k := \bigcup_{n=-N_k}^{N_k} F_{k,n}$ . Montrer que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , la restriction de  $\varphi_k$  à  $E_k$  est continue.

(4) Démontrer le résultat souhaité en considérant  $K_\varepsilon := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} E_k$ .