Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 5

Exercice 1. Soit E un espace métrique et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. On suppose que les suites $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Montrer que la suite (u_k) converge.

Exercice 2. Touver une suite de nombres réels qui possède exactement une valeur d'adhérence mais qui ne soit pas convergente.

Exercice 3. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres réels.

(1) Justifier que (x_n) possède une plus petite valeur d'adhérence et une plus grande valeur d'adhérence.

(2) On note $\overline{\lim}\, x_n$ la plus grande valeur d'adhérence de (x_n), et $\underline{\lim}\, x_n$ la plus petite valeur d'adhérence de (x_n). Montrer qu'on a

$$\overline{\lim}\, x_n = \inf_{m\in\mathbb{N}} \sup_{n\geqslant m} x_n = \lim_{m\to\infty} \sup_{n\geqslant m} x_n \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim}\, x_n = \sup_{m\in\mathbb{N}} \inf_{n\geqslant m} x_n = \lim_{m\to\infty} \inf_{n\geqslant m} x_n.$$

Exercice 4. Montrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites bornées de nombres réels, alors

$$\underline{\lim}\, u_n + \underline{\lim}\, v_n \leqslant \underline{\lim}\,(u_n+v_n) \leqslant \underline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n \leqslant \overline{\lim}\,(u_n+v_n) \leqslant \overline{\lim}\, u_n + \overline{\lim}\, v_n.$$

Exercice 5. Soit (x_n) une suite de nombres positifs. On suppose qu'il existe un nombre réel $\alpha \in [0,1[$ tel que $x_n + \alpha\, x_{2n}$ tend vers 1 quand $n\to\infty$.

(1) On pose $L = \overline{\lim}\, x_n$ et $l = \underline{\lim}\, x_n$. En utilisant les inégalités de l'Exercice 4, montrer qu'on a $1 \leqslant l + \alpha L$ et $1 \geqslant L + \alpha l$.

(2) Montrer que la suite (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 6. Soit (u_k) une suite de nombres réels. On suppose que $u_{k+1} - u_k \to 0$ quand $k\to\infty$. Montrer que si a et b sont deux valeurs d'adhérence de (u_k), alors tout nombre $c \in [a,b]$ est valeur d'adhérence de (u_k).

Exercice 7. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel de dimension finie. Montrer que F est fermé dans E en utilisant le Théorème de Bolzano-Weiestrass.

Exercice 8. Soit $E := \mathcal{C}([0,2\pi])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $e_n \in \mathbb{N}$ la fonction définie par $e_n(t) := e^{int}$.

(1) Combien vaut $\|e_n\|_\infty$?

(2) Pour $n, n' \in \mathbb{N}$, calculer $\int_0^{2\pi} |e_n(t) - e_{n'}(t)|^2 \, dt$; et en déduire une minoration de $\|e_n - e_{n'}\|_\infty$ si $n \neq n'$.

(3) Montrer que la suite (e_n) ne possède aucune sous-suite convergente.

Exercice 9. Soit I un ensemble infini, et soit $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de I deux à deux distincts. Pour $k \in \mathbb{N}$, soit $u_k \in \ell^\infty(I)$ définie par $u_k(t_k) = 1$ et $u_k(t) = 0$ pour tout $t \neq t_k$. Montrer que la suite (u_k) est bornée dans $\ell^\infty(I)$, mais qu'elle ne possède aucune sous-suite convergente.

Exercice 10. Soit E un espace vectoriel normé *de dimension infinie*. On note B_E la boule unité fermée de E *i.e.* $B_E = \{u \in E;\ \|u\| \leqslant 1\}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq B_E$ ne possédant aucune sous-suite convergente. (Ce résultat s'appelle le **Théorème de Riesz**.)

(1) Soit $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel fermé, avec $F \neq E$. Montrer qu'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\operatorname{dist}(u, F) \geqslant 1/2$. (Commencer par choisir $x \in E\backslash F$, puis $f \in F$ tel que $\|x - f\| \geqslant \frac{1}{2} \operatorname{dist}(x, F)$.)

(2) Construire par récurrence une suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq E$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on ait : $\|u_k\| = 1$ et $\operatorname{dist}\big(u_k, \operatorname{vect}\{u_{k'}, k' < k\}\big) \geqslant 1/2$.

(3) Conclure.

Exercice 11. Soit E un espace métrique. Montrer que si $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E convergeant vers un point $a \in E$, alors l'ensemble $K := \{x_l;\ l \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est un compact de E.

Exercice 12. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$. On suppose que pour tout compact $K \subseteq E$, l'application $f_{|K} : K \to F$ est continue. Montrer que f est continue.

Exercice 13. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$ une application continue. On suppose que pour tout compact $K \subseteq F$, l'ensemble $f^{-1}(K)$ est un compact de E. Montrer que $f(E)$ est un fermé de F.

Exercice 14. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$.

(1) Montrer que si f est continue, alors le graphe de f est une partie fermée de $E \times F$.

(2) Dans cette question, on prend $E = \mathbb{R} = F$. Montrer que la réciproque de (1) n'est pas vraie.

(3) Montrer que si E et F sont compacts, alors la réciproque de (1) est vraie.

Exercice 15. Soient Λ et E deux espaces métriques, avec E compact, et soit $F : \Lambda \times E \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $\lambda \in \Lambda$, il existe un et un seul point $x \in E$ tel que $F(\lambda, x) = 0$, et on note ce point $x(\lambda)$. Montrer que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est continue.

Exercice 16. Soient E et K deux espaces métriques, avec K compact. Soit également $C \subseteq E \times K$ un ensemble fermé. Montrer que $\widetilde{C} := \{x \in E;\ \exists y \in K\ :\ (x,y) \in C\}$ est un fermé de E.

Exercice 17. L'ensemble $A := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^4 \leqslant 6\}$ est-il compact ? Même question pour l'ensemble $B := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^3 \leqslant 6\}$.

Exercice 18. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble

$$\Sigma_N := \left\{ x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N;\ x_j \geqslant 0 \text{ pour tout } j \in [\![1, N]\!] \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{N} x_j = 1 \right\}$$

est un compact de $\mathbb{R}^N$. Dessiner Σ_2 et Σ_3.

Exercice 19. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, avec $a > 0$. On pose

$$M := \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ ax^2 + bxy + cy^2 \leqslant 1\big\}.$$

Montrer que M est compact si et seulement si $b^2 - 4ac < 0$.

Exercice 20. Soit $O_N(\mathbb{R}) := \{M \in M_N(\mathbb{R});\ {}^t\!MM = Id\}$. Montrer que $O_N(\mathbb{R})$ est un compact de $M_N(\mathbb{R})$.

Exercice 21. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, et soit $K \subseteq E$ un ensemble compact, convexe, symétrique par rapport à 0, et tel que $0 \in \mathring{K}$. Pour $u \in E$, on pose

$$\|u\|_K := \inf\left\{ s > 0;\ \frac{u}{s} \in K \right\}.$$

(1) Justifier la définition.
(2) Montrer que $K = \{u \in E;\ \|u\|_K \leqslant 1\}$.
(3) Montrer que $\|\cdot\|_K$ est une norme sur E.

Exercice 22. Soit K un espace métrique compact, et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues, $f_n : K \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite (f_n) est *décroissante* ($f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$ pour tout n et pour tout $x \in K$) et que $f_n(x) \to 0$ pour tout $x \in K$. Le but de l'exercice est de montrer que (f_n) converge vers 0 *uniformément*, *i.e.* $\|f_n\|_\infty \to 0$. (Ce résultat s'appelle le **Théorème de Dini**.)

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := \{x \in K;\ f_n(x) \geqslant \varepsilon\}$. Justifier que les K_n sont des fermés de K, et déterminer $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$.

(2) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 23. Soit E un espace métrique, et soit $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $E_\alpha := \{x \in E;\ f(x) \leqslant \alpha\}$ est compact.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := \{x \in E;\ f(x) \leqslant -n\}$. Déterminer $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, et en déduire que la fonction f est minorée.

(2) Montrer que f possède un minimum.

Exercice 24. Soit E un espace vectoriel normé. Pour $A, B \subseteq E$, on pose $A + B := \{u + v;\ u \in A, v \in B\}$.

(1) Montrer que si A est compact et si B est fermé, alors $A + B$ est fermé.

(2) Montrer que si A et B sont compacts, alors $A + B$ est compact.

Exercice 25. Soit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$. Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue de $\mathbb{T}$ sur l'intervalle $[0, 2\pi[$. (En particulier, $[0, 2\pi[$ et $\mathbb{T}$ ne sont pas homéomorphes même s'il existe une bijection continue de $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{T}$, à savoir $f(t) := e^{it}$).

Exercice 26. Soit X un espace métrique, et soit $\gamma : [0, 1] \to X$ une application continue. On suppose que $\gamma_{|]0,1[}$ est injective, et que $\gamma(1) = \gamma(0)$.

(1) Soit $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$, et soit $q : [0, 1] \to \mathbb{T}$ définie par $q(t) := e^{2i\pi t}$ Montrer qu'il existe une unique application $\widetilde{\gamma} : \mathbb{T} \to X$ telle que $\forall t \in [0, 1]$: $\widetilde{\gamma}(q(t)) = \gamma(t)$.

(2) Montrer que $\Gamma := \gamma([0, 1])$ est homéomorphe au cercle $\mathbb{T}$.

Exercice 27. Soit (E, d) un espace métrique compact, et soit $f : E \to E$. On suppose que f est *dilatante*, ce qui signifie que $\forall x, y \in E\ :\ d(f(x), f(y)) \geqslant d(x, y)$. Le but de l'exercice est de montrer que f est une isométrie bijective.

(1) Soient $x, y \in E$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $x_n := f^n(x)$ et $y_n := f^n(y)$, où $f^0 := id_E$ et $f^n = f \circ \cdots \circ f$ pour $n \geqslant 1$.

  (a) Montrer que si $n, n' \in \mathbb{N}$ et $n < n'$, alors $d(x_n, x_{n'}) \geqslant d(x, x_{n'-n})$ et $d(y_n, y_{n'}) \geqslant d(y, y_{n'-n})$.

  (b) En déduire qu'il existe une suite strictement croissante d'entiers $(n_k)_{k\geqslant 0}$ telle que $x_{n_{k+1}-n_k} \to x$ et $y_{n_{k+1}-n_k} \to y$.

  (c) Montrer que $d(x, y) = d(f(x), f(y))$.

(2) Soit $y \in E$ quelconque. En considérant à nouveau la suite $(y_n) = (f^n(y))$, montrer que $y \in \overline{f(E)}$; puis montrer que $y \in f(E)$.

(3) Conclure.

Exercice 28. Pour tout $r > 0$, on pose $D(0,r) := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < r\}$. On pose également $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$. Montrer que si K est un compact de $\mathbb{D}$ alors il existe $r < 1$ tel que $K \subseteq D(0,r)$.

Exercice 29. Soit $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C};\ \mathrm{Re}(z) > 0\}$. Montrer que si K est un compact de $\mathbb{C}_+$, alors il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall z \in K\ :\ \mathrm{Re}(z) \geqslant \alpha$.

Exercice 30. Soit E un espace métrique compact, et soit $\alpha : E \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $|\alpha(x)| < 1$ pour tout $x \in E$. Montrer que si (t_n) est une suite quelconque de points de E, alors la série $\sum \alpha(t_n)^n$ est convergente.

Exercice 31. Soit $c > 0$, et soit $K := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geqslant 0, y \geqslant 0 \text{ et } x+y = c\}$. Soient également $\alpha, \beta > 0$. Montrer sans calcul que la fonction f définie par $f(x,y) := x^\alpha y^\beta$ possède un maximum sur K ; puis déterminer ce maximum.

Exercice 32. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) := (x^2+y^2)e^{x^2-y^2}$. Montrer sans calcul que f possède un maximum sur le carré $C := [0,2] \times [0,2]$; puis déterminer ce maximum.

Exercice 33. Soit $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0,\ y > 0\}$, et soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = x + y + \frac{a}{xy}$, où $a > 0$ est fixé. Montrer que f possède un minimum et déterminer ce minimum.

Exercice 34. Soit (E,d) un espace métrique compact, et soit $f : E \to E$. On suppose qu'on a $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ pour tous $x, y \in E$ tels que $x \neq y$. Montrer que f admet un et un seul point fixe. (On pourra considérer la fonction $x \mapsto d(x, f(x))$.)

Exercice 35. Soit E un espace vectoriel normé réel ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$). On dit qu'une forme linéaire continue $\Phi : E \to \mathbb{R}$ **atteint sa norme** s'il existe $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et $\Phi(u) = \|\Phi\|$.

(1) Montrer que si $\dim(E) < \infty$ alors toute forme linéaire continue $\Phi : E \to \mathbb{R}$ atteint sa norme.

(2) Dans cette question, on prend $E := c_0(\mathbb{N})$. Soit $\Phi : c_0(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Phi(u) := \sum_{i=0}^\infty 2^{-i} u_i$ pour $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$. La forme linéaire Φ atteint-elle sa norme ?

(3) Dans cette question, on prend $E = \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par $\Phi(u) := \int_0^{1/2} u(t)\,dt - \int_{1/2}^1 u(t)\,dt$. La forme linéaire Φ atteint-elle sa norme ?

Exercice 36. Soit E un espace vectoriel normé réel.

(1) Montrer que si $V \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie et si $x_0 \in E$, alors il existe $v \in V$ tel que $\|x_0 - v\| = \mathrm{dist}(x_0, V)$.

(2) Soit $\Phi : E \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue, $\Phi \neq 0$, et soit $x_0 \in E \setminus \ker(\Phi)$. Montrer que s'il existe $v \in \ker(\Phi)$ tel que $\|x_0 - v\| = \mathrm{dist}\big(x_0, \ker(\Phi)\big)$, alors Φ atteint sa norme (*cf* l'Exercice 35).

(3) Dans cette question, on prend $E := \mathcal{C}([0,1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Trouver un sous-espace fermé $V \subseteq E$ et $f_0 \in \mathcal{E}$ tels que $\forall v \in V \ : \ \|f_0 - v\| > \mathrm{dist}(f_0, V)$.

Exercice 37. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant des limites (finies) en $\pm\infty$. Montrer que f est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38. Soit $\alpha > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^\alpha$ est uniformément continue sur $\mathbb{R}^+$ si et seulement si $\alpha \leqslant 1$.

Exercice 39. Montrer que si $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ est une fonction uniformément continue, alors il existe deux constantes A et B telles que $\forall t \in \mathbb{R}^+ \ : \ |f(t)| \leqslant A + B\,t$.

Exercice 40. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $B \subseteq E$ un ensemble borné. Montrer que toute fonction uniformément continue $f : B \to \mathbb{R}$ est bornée.

Exercice 41. Soit $f :]0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction uniformément continue. Montrer que $f(x)$ admet une limite (finie) quand $x \to 0^+$.

Exercice 42. Montrer, *sans utiliser* le théorème du cours sur l'équivalence entre la compacité et la propriété de Borel-Lebesgue, que tout intervalle fermé borné $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ possède la propriété de Borel-Lebesgue.

Exercice 43. Soit E un espace métrique. *En utilisant uniquement la propriété de Borel-Lebesgue*, démontrer les choses suivantes.

(1) Si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de points de E convergeant vers $a \in E$, alors l'ensemble $K := \{x_n;\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{a\}$ est un compact de E.

(2) Tout compact de E est fermé dans E ; et si E est compact, alors tout fermé de E est compact.

(3) Si $f : E \to F$ est continue (F étant un autre espace métrique) et si K est un compact de E, alors $f(K)$ est un compact de F.

(4) Toute réunion finie de compacts de E est un compact.

Exercice 44. Montrer *en utilisant le Lemme de Lebesgue* que toute fonction continue sur un espace métrique compact est uniformément continue.

Exercice 45. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Montrer que si $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite d'intervalles ouverts telle que $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} I_k \supseteq I$, alors $|I| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} |I_k|$. (On note $|J|$ la longueur d'un intervalle $J \subseteq \mathbb{R}$.)

Exercice 46. Soit K un espace métrique compact. On note $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues sur K à valeurs réelles. Soit $\mathcal{A}$ un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K,\mathbb{R})$ tel que $\forall f \in \mathcal{A} \ : \ f^2 \in \mathcal{A}$. On suppose que pour tout $x \in K$, il existe une fonction $f \in \mathcal{A}$ telle que $f(x) \neq 0$. Montrer qu'il existe une fonction $F \in \mathcal{A}$ telle que $\forall x \in K \ : \ F(x) > 0$.

Exercice 47. Soit (E,d) un espace métrique compact.

(1) Justifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on peut trouver un ensemble fini $D_k \subseteq E$ tel que $\bigcup_{z\in D_k} B(z, \frac{1}{k}) = E$.

(2) Montrer que E est *séparable*, *i.e.* il existe un ensemble $D \subseteq E$ à la fois dénombrable et dense dans E.

Exercice 48. Soit $K := \{u = (u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty ; \ \forall i \in \mathbb{N} \ : \ |u(i)| \leqslant 2^{-i}\}$. Montrer que K est un compact de $\ell^\infty(\mathbb{N})$.