Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Donner un exemple d'un ensemble $A \subseteq \mathbb{R}$ qui ne soit ni ouvert ni fermé.

Exercice 2. Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. On dit qu'un point $a \in M$ est un **point isolé** de M s'il existe un voisinage V de a dans E tel que $V \cap M = \{a\}$. On note $\mathrm{Isol}(M)$ l'ensemble des points isolés de M. Déterminer $\mathrm{Isol}(M)$ dans les cas suivants.

(i) $E = \mathbb{R}$ et $M = \mathbb{N}$.

(ii) $E = \mathbb{R}$ et $M = \{0\} \cup \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

(iii) $E = \mathbb{R}$ et M est un intervalle non trivial.

(iv) $E = \mathbb{C}$ et M est ouvert.

Exercice 3. Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. On dit qu'un point $a \in E$ est un **point d'accumulation** de M si tout voisinage V de a dans E contient au moins un point différent de a. On note M' l'ensemble des points d'accumulation de M.

(1) Déterminer M' dans les cas suivants :

  (i) $E = \mathbb{R}$ et $M =]0, 1[$.

  (ii) $E = \mathbb{R}$ et $M = \{\frac{1}{n};\ n \in \mathbb{N}^*\}$.

  (ii) $E = \mathbb{R}$ et $M = \mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

  (iv) $E = \mathbb{C}$ et $M = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\}$.

(2) Avec les notations de l'Exercice 2, exprimer $\mathrm{Isol}(M)$ à l'aide de M et de M'.

(3) Montrer que M' est toujours un fermé de E.

(4) Montrer que si $a \in M'$ et si V est un voisinage de a dans E, alors $V \cap M$ est infini.

Exercice 4. Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. Montrer que pour un point $a \in E$, les choses suivantes sont équivalentes :

(i) a est un point d'accumulation de M (*cf* l'Exercice 3) ;

(ii) il existe une suite (u_k) de points de M deux à deux distincts telle que $u_k \to a$;

(iii) il existe une suite (u_k) de points de M deux à deux distinct et différents de a telle que $u_k \to a$;

(iv) il existe une suite de points de M différents de a telle que $u_k \to a$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On pose $Z(f) := \{x \in \mathbb{R};\ f(x) = 0\}$.

(1) Soit $a \in \mathbb{R}$. On suppose que a est un point d'accumulation de $Z(f)$ (*cf* l'Exercice 3), et que f est dérivable en a. Montrer que $f'(a) = 0$.

(2) On suppose que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Montrer que si $a \in \mathbb{R}$ est un point d'accumulation de $Z(f)$, alors $\forall k \in \mathbb{N}\ :\ f^{(k)}(a) = 0$.

Exercice 6. Soit (E, d) un espace métrique, et soit C un fermé de E. Montrer que pour tout $x \in E$, on a l'équivalence suivante :

$$x \in C \iff \operatorname{dist}(x, C) > 0.$$

Cette équivalence subsiste-t-elle si on ne suppose pas que C est fermé ?

Exercice 7. Soit (E, d) un espace métrique. En utilisant l'Exercice 6, montrer que tout ouvert $O \subseteq E$ est réunion dénombrable de fermés, *i.e.* il existe une suite de fermés $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $O = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n$. En déduire que tout fermé $F \subseteq E$ est intersection dénombrable d'ouverts.

Exercice 8. Soient E et F deux espaces métriques. Montrer que si $f : E \to F$ est une application continue, alors le graphe de f est une partie fermé de $E \times F$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 9. Soit E un espace vectoriel normé, et soient $A, B \subseteq E$. On pose $A+B := \{u + v;\ u \in A, v \in B\}$. Montrer que si A ou B est ouvert, alors $A + B$ aussi.

Exercice 10. Soit $O := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ |x^3y - z| < 6 \text{ et } e^{xz} < z^7 + y^8\}$. Montrer que O est un ouvert de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11. Soit $C := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x > 0\,,\ y > 0 \text{ et } y = 1/x\}$. Montrer que C est un fermé de $\mathbb{R}^2$. (Commencer par ré-écrire C de façon un peu différente.)

Exercice 12. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques, l'ensemble des matrices de trace nulle et l'ensemble des matrices nilpotentes sont des fermé de $M_N(\mathbb{R})$.

Exercice 13. Montrer que $GL_N(\mathbb{K})$ est un ouvert de $M_N(\mathbb{K})$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $\Phi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire. Montrer que Φ est continue si et seulement si $\ker(\Phi)$ est fermé dans E.

Exercice 15. Montrer que $c_0(\mathbb{N})$ est fermé dans $\ell^\infty(\mathbb{N})$.

Exercice 16. On note $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions continues bornées $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$, et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ tendant vers 0 en $\pm\infty$. Montrer que $\mathcal{C}_b(\mathbb{R})$ et $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ sont fermés dans $\ell^\infty(\mathbb{R})$.

Exercice 17. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$.

(1) On suppose qu'il existe deux fermés $A, B \subseteq E$ tels que $f_{|A}$ et $f_{|B}$ sont continues et $A \cup B = E$. Montrer que f est continue.

(2) Le résultat de (1) est-il encore valable si on ne suppose plus que A et B sont fermés ?

Exercice 18. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$. Soit également $A \subseteq E$.

(1) Quelle implication y a-t-il entre les deux assertions "f est continue en tout point de A" et "$f_{|A}$ est continue" ?

(2) Y a-t-il équivalence ?

(3) Que peut-on dire si A est ouvert dans E ?

Exercice 19. Soit (E, d) un espace métrique. On dit qu'one fonction $f : E \to \mathbb{R}$ est **semi-continue inférieurement** si, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'ensemble $\{x \in E;\ f(x) \leqslant \alpha\}$ est fermé dans E. On écrira "sci" au lieu de "semi-continue inférieurement".

(1) Montrer que toute fonction continue est sci.

(2) Montrer que si O est un ouvert de E, alors sa fonction indicatrice est sci.

(3) Soit $f : E \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une suite croissante de fonctions continues $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\forall x \in E\ :\ f_n(x) \to f(x)$. Montrer que f est sci.

(4) Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction sci. On suppose de plus que f est minorée : il existe une constante $c \in \mathbb{R}$ telle que $\forall u \in E\ :\ f(u) \geqslant c$.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit une fonction $f_n : E \to \mathbb{R}$ par la formule
   $$f_n(x) := \inf\big\{f(y) + n\, d(x, y);\ y \in E\big\}.$$
   Justifier la définition, puis montrer que la fonction f_n est n-lipschitzienne (et donc continue).

   (b) Montrer que la suite de fonctions (f_n) est croissante, et qu'on a $f_n(x) \leqslant f(x)$ pour tout n et pour tout $x \in E$.

   (c) Soit $x \in E$, et soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un $r > 0$ tel que $\forall y \in B(x, r)\ :\ f(y) > f(x) - \varepsilon$, puis montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $f_N(x) > f(x) - \varepsilon$.

   (d) Montrer que $f_n(x) \to f(x)$ pour tout $x \in E$.

Exercice 20. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que la formule $\delta(u, v) := \min(1, d(u, v))$ définit une distance sur E topologiquement équivalente à d.

Exercice 21. Soit E un espace vectoriel normé, $E \neq \{0\}$. Montrer qu'il existe sur E une distance topologiquement équivalente à la distance définie par la norme de E, mais qui ne peut pas être définie par une norme.

Exercice 22. Soit E un espace vectoriel. Montrer que deux normes sur E définissent des distances topologiquement équivalentes si et seulement elles sont équivalentes en tant que normes.

Exercice 23. Soit E un espace métrique, et soit $M \subseteq E$. On note M' l'ensemble des points d'accumulation de M (*cf* l'Exercice 3). Montrer qu'on a $\overline{M} = M \cup M'$.

Exercice 24. Montrer que dans un espace métrique quelconque, une boule ouverte $B(a, r)$ est toujours *contenue* dans l'intérieur de la boule fermée $\overline{B}(a, r)$, mais qu'on n'a pas forcément égalité.

Exercice 25. Soit E un espace métrique.

(1) Si A, B sont des parties de E, quelle relation y a-t-il entre $\overset{\circ}{\overbrace{A \cup B}}$ et $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$?
(2) Si $A, B \subseteq E$, quelle relation y a-t-il entre $\overline{A \cap B}$ et $\overline{A} \cap \overline{B}$?

Exercice 26. Soit E un espace métrique, et soit $A, B \subseteq E$. Montrer que $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ en utilisant la "caractérisation séquentielle de l'adhérence".

Exercice 27. Soit E un espace métrique. Montrer que si U et V sont des ouverts de E, alors les équivalences suivantes ont lieu : $U \cap V = \varnothing \iff \overline{U} \cap V = \varnothing \iff U \cap \overline{V} = \varnothing$.

Exercice 28. Soit E un espace métrique. Montrer que pour tout ensemble $A \subseteq E$, on a $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}} = \overset{\circ}{\overline{A}}$ et $\overline{\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}} = \overline{\overset{\circ}{A}}$.

Exercice 29. Soit $A :=]0, 1[\cup]1, 2[\cup \{3\} \cup \big(\mathbb{Q} \cap [4, 5]\big) \subseteq \mathbb{R}$. Montrer que les ensembles A, $\overline{A}$, $\overset{\circ}{A}$, $\overset{\circ}{\overline{A}}$, $\overline{\overset{\circ}{A}}$, $\overline{\overset{\circ}{\overline{A}}}$ et $\overset{\circ}{\overline{\overset{\circ}{A}}}$ sont tous différents.

Exercice 30. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si Z est un sous-espace vectoriel de E, alors $\overline{Z}$ aussi.

Exercice 31. Soient E et F deux espaces métriques, et soit $f : E \to F$. Montrer que les choses suivantes sont équivalentes :

(1) f est continue ;
(2) Pour tout ensemble $A \subseteq E$, on a $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

Exercice 32. Déterminer la frontière de A dans E dans les cas suivants.

(1) $E = \mathbb{R}$ et $A =]0,1[\,\cup[2,3[$.
(2) $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Q}$.
(3) $E = \mathbb{R}$ et $A = \mathbb{Z}$.
(4) $E = \mathbb{R}^2$ et $A =]0,\infty[\times]0,\infty[$.
(5) $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 < x \leqslant 1 \text{ et } x + y \leqslant 4\}$.
(6) $E = \mathbb{R}^2$ et $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ y = 3x + 1\}$.

Exercice 33. Soit E un espace métrique, et soit $A \subseteq E$. Montrer qu'on a $\partial A = \varnothing$ si et seulement si A est à la fois ouvert et fermé dans E.

Exercice 34. Soit E un espace métrique. Montrer que si $O_1, \dots, O_N$ sont des ouverts denses de E, alors $O_1 \cap \dots \cap O_N$ est dense dans E.

Exercice 35. Montrer que dans un espace topologique séparé, on a *unicité de la limite* : une suite ne peut pas converger vers 2 points différents.

Exercice 36. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que $x_n \to +\infty$, et que $x_{n+1} - x_n \to 0$. Le but de l'exercice est de montrer que l'ensemble $\left\{e^{ix_n};\ n \in \mathbb{N}\right\}$ est dense dans le cercle $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C};\ |z| = 1\}$.

(1) Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on a $|e^{iv} - e^{iu}| \leqslant |v - u|$.
(2) Justifier que pour tout $x \geqslant x_0$, il existe plus grand entier n tel que $x_n \leqslant x$. Que peut-on dire de $n(x)$ quand $x \to +\infty$?
(3) Soit $\theta \in [0, 2\pi[$ quelconque, et soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier $N(\varepsilon)$ tel que $\forall n \geqslant N(\varepsilon)\ :\ |x_{n+1} - x_n| \leqslant \varepsilon$, puis celle d'un entier k tel que $n(\theta + 2k\pi) \geqslant N(\varepsilon)$.
(4) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 37. En utilisant l'Exercice 36, montrer que l'ensemble $\{e^{i\ln(n)};\ n \in \mathbb{N}^*\}$ est dense dans $\mathbb{T}$.

Exercice 38. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $0 < \alpha < 1$. Montrer que l'ensemble $\{e^{in^\alpha};\ n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{T}$.

Exercice 39. Montrer que $GL_N(\mathbb{K})$ est dense dans $M_N(\mathbb{K})$.

Exercice 40. Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables à valeurs propres simples est dense dans $M_N(\mathbb{C})$.

Exercice 41. On note χ_A le polynôme caractéristique d'une matrice $A \in M_N(\mathbb{C})$. En utilisant l'Exercice 40, démontrer le *Théorème de Cayley-Hamilton* : $\chi_A(A) = 0$ pour toute matrice $A \in M_N(\mathbb{C})$. (Commencer par montrer que l'application $A \mapsto \chi_A(A)$ est continue de $M_N(\mathbb{C})$ dans $M_N(\mathbb{C})$.)

Exercice 42. Montrer que si G est un sous-groupe de $\mathbb{R}$ et $G \neq \mathbb{R}$, alors $\mathbb{R}\backslash G$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 43. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si $Z \subseteq E$ est un sous-espace vectoriel de E et si $Z \neq E$, alors $E\backslash Z$ est dense dans E.

Exercice 44. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que f est strictement croissante si et seulement si (i) $f'(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$ et (ii) l'ensemble $\{x \in I;\ f'(x) > 0\}$ est dense dans I.

Exercice 45. Que peut-on dire d'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ à la fois 1-périodique et $\sqrt{2}$-périodique ? (On pourra commencer par observer que l'ensemble $G := \{t \in \mathbb{R};\ \forall x \in \mathbb{R} \ :\ f(x+t) = f(x)\}$ est un sous-groupe de $\mathbb{R}$.)

Exercice 46. Soit M un espace métrique. On note $\mathcal{C}_b(M)$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions continues bornées $f : M \to \mathbb{K}$. On fixe une fonction $\phi \in \mathcal{C}_b(M)$, et pour toute fonction $f \in \mathcal{C}_b(M)$, on pose $\|f\|_\phi := \|\phi f\|_\infty$. Montrer que $\|\cdot\|_\phi$ est une norme sur $\mathcal{C}_b(M)$ si et seulement si l'ensemble $\{x \in M;\ \phi(x) \neq 0\}$ est dense dans M.

Exercice 47. Soient E et F deux espace vectoriel normés sur $\mathbb{R}$, et soit $T : E \to F$. On suppose que $T(0) = 0$, et que T *conserve les milieux, i.e.*

$$\forall x, y \in E \ :\ T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{T(x) + T(y)}{2}.$$

(1) Montrer que T est *additive* : $\forall u, v \in E \ :\ T(u+v) = T(u) + T(v)$.

(2) On suppose de plus que T est continue. Montrer que T est linéaire.

Exercice 48. On munit $\mathbb{R}^N$ de la norme euclidienne. En utilisant l'Exercice 47, montrer que si $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ est une isométrie telle que $\Phi(0) = 0$, alors Φ est linéaire. (On pourra commencer par observer que si $u, v \in \mathbb{R}^N$, alors le milieu de $[u, v]$ est l'unique point $m \in \mathbb{R}^N$ vérifiant $\|m - u\| = \frac{1}{2}\|v - u\| = \|v - m\|$.)

Exercice 49. (Théorème de Mazur-Ulam)
Soient E et F deux espace vectoriel normé, et soit $J : E \to F$. On suppose que J est une isométrie bijective, et que $J(0) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que J est linéaire.

(1) Soient $u, v \in E$. On définit une suite $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de E et une suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^+$ de la façon suivante :

$$K_0 := \left\{ x \in E;\ \|x-u\| = \frac{1}{2}\,\|v-u\| = \|v-x\| \right\} \quad \text{et} \quad d_0 := \mathrm{diam}(K_0);$$

$$K_{n+1} := \left\{ x \in K_n;\ K_n \subseteq \overline{B}(x, d_n/2) \right\} \quad \text{et} \quad d_{n+1} := \mathrm{diam}(K_{n+1}).$$

Enfin, on note m le milieu de $[u, v]$.

(a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}\ :\ m \in K_n$ et K_n est symétrique par rapport à m.

(b) Montrer que $d_{n+1} \leqslant d_n/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(c) Conclure que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{m\}$.

(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant l'Exercice 47.

Exercice 50. Soient E et F deux espace vectoriel normés, et soit $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'applications linéaires continues de E dans F. On suppose que la suite (T_n) est bornée dans $\mathcal{L}(E, F)$, et qu'il existe un ensemble dense $D \subseteq E$ tel que $T_n(z) \to 0$ pour tout $z \in D$. Montrer que $T_n(u) \to 0$ pour tout $u \in E$.

Exercice 51. On note $c_{00}(\mathbb{N})$ l'ensemble de toutes les suites $u = (u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ nulles à partir d'un certain rang. Montrer que $c_{00}(\mathbb{N})$ est un espace vectoriel, et que $c_{00}(\mathbb{N})$ est dense à la fois dans $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ et dans $(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1)$.

Exercice 52. Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ est dite *à support borné* s'il existe un intervalle borné I telle que $f(x) \equiv 0$ en dehors de I. On note $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ l'ensemble de toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ à support borné. Montrer que $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$, et que $\mathcal{C}_{00}(\mathbb{R})$ est dense dans $(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 53. On dit qu'un espace métrique E est **séparable** s'il existe un ensemble $D \subseteq E$ à la fois dénombrable et dense dans E.

(1) Montrer que $\mathbb{R}$ est séparable.

(2) Montrer que tout espace vectoriel normé de dimension finie est séparable.

(3) Montrer qu'un espace métrique discret est séparable si et seulement si il est dénombrable.

Exercice 54. Soit E un espace métrique. Montrer que s'il existe $\varepsilon > 0$ et une famille non dénombrable de points $(x_i)_{i\in I} \subseteq E$ telle que $\forall i \neq j\ :\ d(x_i, x_j) \geqslant \varepsilon$, alors E n'est pas séparable (*cf* l'Exercice 53).

Exercice 55. Montrer que les espaces $\big(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty\big)$ et $\big(\ell^1(\mathbb{N}), \|\cdot\|_1\big)$ sont séparables (*cf* l'Exercice 53).

Exercice 56. En utilisant l'Exercice 54, montrer que $\ell^\infty(\mathbb{N})$ n'est pas séparable. (On rappelle que $I := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable.)

Exercice 57. Soit E un espace métrique et soit D une partie dense de E.

(1) Soit $M \subseteq E$. On pose $I := \{(z,n) \in D \times \mathbb{N}^*;\ B(z, \frac{1}{n}) \cap M \neq \varnothing\}$, et pour tout $(z,n) \in I$, on choisit un point $u(z,n) \in B(z, \frac{1}{n}) \cap M$. Montrer que l'ensemble $\{u(z,n);\ (z,n) \in I\}$ est dense dans M.

(2) Montrer que si E est séparable (*cf* l'Exercice 53), alors tout sous-espace métrique $M \subseteq E$ est séparable.