

Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soit $T : E \rightarrow F$ une application linéaire. Montrer que si T est bornée sur une boule B non triviale (*i.e.* de rayon $r > 0$), alors T est continue. En déduire que si T est continue en au moins 1 point x_0 , alors T est continue.

Exercice 2. Soient E et F deux espace vectoriel normés. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|T\|_{\mathcal{L}(E, F)}$ est la constante de Lipschitz de T .

Exercice 3. Soient E et F des espace vectoriel normé, et soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$. On suppose que T est bijective et que T^{-1} est continue. Montrer que T est une isométrie si et seulement $\|T\| \leq 1$ et $\|T^{-1}\| \leq 1$.

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel. Montrer que si $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ sont deux normes équivalentes sur E , alors les normes subordonnées sur $\mathcal{L}(E)$ sont équivalentes.

Exercice 5. Pour $a = (a_1, \dots, a_N) \in \mathbb{R}^N$, soit $\Phi_a : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\Phi_a(u) := \sum_{j=1}^N a_j u_j.$$

- (1) Déterminer $\|\Phi_a\|$ lorsqu'on munit \mathbb{R}^N de la norme $\|\cdot\|_1$.
- (2) Même question avec la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 6. Soit $E := (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_1)$, et soit F un evn quelconque. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $\|T\| = \max(\|T(e_1)\|, \dots, \|T(e_N)\|)$, où (e_1, \dots, e_N) est la base canonique de \mathbb{K}^N .

Exercice 7. On note $c_0(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les suites $(u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0. On munit $c_0(\mathbb{N})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

- (1) Soit $a = (a_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite de scalaires. On suppose que la série $\sum a_i$ est absolument convergente. Montrer que pour tout $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}} \in c_0(\mathbb{N})$, la série $\sum a_i u_i$ est convergente, et que si on pose

$$\Phi_a(u) := \sum_{i=0}^{\infty} a_i u_i,$$

alors on définit une forme linéaire continue sur $c_0(\mathbb{N})$ telle que $\|\Phi_a\| \leq \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

(2) Avec les notations de (1), montrer qu'en fait $\|\Phi_a\| = \sum_{i=0}^{\infty} |a_i|$.

Exercice 8. On munit $\mathcal{C}([0, 1])$ de la norme $\|\cdot\|_1$. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, et soit Φ la forme linéaire sur $\mathcal{C}([0, 1])$ définie par

$$\Phi(u) := \int_0^1 g(t)u(t) dt.$$

- (1) Montrer que Φ est continue avec $\|\Phi\| \leq \|g\|_{\infty}$.
- (2) Soit $t_0 \in [0, 1]$ tel que $g(t_0) \neq 0$. On suppose par exemple que $g(t_0) > 0$.
 - (a) Soit ε vérifiant $0 < \varepsilon < g(t_0)$. Justifier l'existence d'un intervalle non trivial $I = [a, b] \subseteq]0, 1[$ tel que $\forall t \in I : g(t) \geq g(t_0) - \varepsilon$.
 - (b) Avec les notations de (a), soit $\delta > 0$ tel que $[a - \delta, a + \delta] \subseteq [0, 1]$. On note $u_{\delta} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction continue valant 1 sur I , valant 0 en dehors de $[a - \delta, a + \delta]$, et affine sur $[a - \delta, a]$ et sur $[b, b + \delta]$. Calculer $\|u_{\delta}\|_1$ et minorer $\Phi(u_{\delta})$.
- (3) Montrer que $\|\Phi\| = \|g\|_{\infty}$.

Exercice 9. Soit $E := \mathcal{C}([0, 1])$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\infty}$, et soient $\alpha, \beta > 0$. On note $\Phi : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}$ la forme linéaire définie par

$$\Phi(u) := \alpha \int_0^{1/2} u(t) dt - \beta \int_{1/2}^1 u(t) dt.$$

- (1) Montrer que Φ est continue et qu'on a $\|\Phi\| \leq \frac{\alpha+\beta}{2}$.
- (2) Dans cette question, on veut montrer qu'en fait $\|\Phi\| = \frac{\alpha+\beta}{2}$.
 - (a) Pour ε vérifiant $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, on note u_{ε} la fonction continue sur $[0, 1]$ valant 1 sur $[0, \frac{1}{2} - \varepsilon]$, valant -1 sur $[\frac{1}{2} + \varepsilon, 1]$ et affine sur $[\frac{1}{2} - \varepsilon, \frac{1}{2} + \varepsilon]$. Calculer $\|u_{\varepsilon}\|_{\infty}$ et $\Phi(u_{\varepsilon})$.
 - (b) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 10. Trouver la norme sur $M_N(\mathbb{K})$ subordonnée à la norme $\|\cdot\|_{\infty}$ sur \mathbb{K}^N .

Exercice 11. On note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^N , et également $\|\cdot\|$ la norme subordonnée sur $M_N(\mathbb{R})$. Montrer que si $A = (a_{i,j}) \in M_N(\mathbb{R})$ alors

$$\|A\| \leq \left(\sum_{i,j=1}^N a_{i,j}^2 \right)^{1/2}.$$

Exercice 12. Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$, et soit λ une valeur propre de A . Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_N(\mathbb{C})$ subordonnée à une certaine norme sur \mathbb{C}^N , alors $|\lambda| \leq \|A\|$.

Exercice 13. Soit N un entier ≥ 2 .

- (1) Pour $A = (a_{i,j}) \in M_N(\mathbb{K})$, on pose $\|A\|_1 := \sum_{i,j=1}^N |a_{ij}|$. Montrer que la norme $\|\cdot\|_1$ n'est pas subordonnée à une norme sur \mathbb{K}^N .
- (2) Même question avec la norme $\|\cdot\|_\infty$ définie par $\|A\|_\infty := \max_{1 \leq i,j \leq N} |a_{ij}|$.

Exercice 14. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $\Phi : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire continue. Montrer que pour tout $x_0 \in E \setminus \ker \Phi$, on a

$$\|\Phi\| = \frac{|\Phi(x_0)|}{\text{dist}(x_0, \ker \Phi)}.$$

Exercice 15. Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , avec $a < b$. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme définie par $\|P\| := \sup \{|P(x)|; x \in [a, b]\}$.

- (1) Justifier que $\|\cdot\|$ est bien une norme sur $\mathbb{R}[X]$.
- (2) Soit $x_0 \in \mathbb{R} \setminus [a, b]$. Montrer qu'il existe un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(x_0) > 1$ et $0 \leq P(x) \leq 1$ pour tout $x \in [a, b]$; et en déduire que la forme linéaire $P \mapsto P(x_0)$ n'est pas continue sur $(\mathbb{R}[X], \|\cdot\|)$.

Exercice 16. Soit $[a, b]$ un segment de \mathbb{R} , avec $a < b$. On note $\mathcal{C}^1([a, b])$ l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{K}$ de classe \mathcal{C}^1 . Montrer que si $x_0 \in [a, b]$, alors la forme linéaire $u \mapsto u'(x_0)$ n'est pas continue sur $(\mathcal{C}^1([a, b]), \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 17. Soit E un espace vectoriel normé de dimension infinie.

- (1) Justifier l'existence d'une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq E$ telle que : les x_n sont linéairement indépendants et $\|x_n\| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- (2) En admettant que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire, montrer qu'il existe une forme linéaire sur E qui n'est pas continue.

Exercice 18. Soient E et F deux espace vectoriel normé avec $\dim(E) < \infty$, et soit $(T_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathcal{L}(E, F)$. Soit également $T \in \mathcal{L}(E, F)$. Montrer que $T_k \rightarrow T$ pour la norme de $\mathcal{L}(E, F)$ si et seulement si $T_k(u) \rightarrow T(u)$ pour tout $u \in E$.

Exercice 19. Soit E l'espace vectoriel constitué par toutes les fonctions continues $f : [0, \infty[\rightarrow \mathbb{K}$ tendant vers 0 à l'infini. On munit E de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Trouver une suite (Φ_k) de formes linéaires continues sur E telle que $\Phi_k(u) \rightarrow u$ pour tout $u \in E$ mais $\|\Phi_k\| \rightarrow 0$. Comparer avec l'Exercice 18.

Exercice 20. Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_N(\mathbb{K})$ subordonnée à une certaine norme sur \mathbb{K}^N . Montrer que si $H \in M_N(\mathbb{K})$ vérifie $\|H\| < 1$, alors $Id - H$ est inversible et $(Id - H)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} H^k$, où la série converge dans $M_N(\mathbb{K})$.

Exercice 21. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit $T \in \mathcal{L}(E)$.

- (1) Montrer que la série $\sum \frac{T^k}{k!}$ converge dans $\mathcal{L}(E)$.
- (2) On pose $e^T := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{T^k}{k!}$. Montrer qu'on a $\|e^T\| \leq e^{\|T\|}$.

Exercice 22. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $T \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que la suite $(T^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $\mathcal{L}(E)$, et qu'elle converge au sens de Cesàro, autrement dit qu'il existe $P \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\frac{1}{n+1} (Id + T + \dots + T^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} P.$$

- (1) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N} : \frac{1}{n+1} \sum_{l=0}^n T^{k+l} \rightarrow P$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (2) Montrer que $P^2 = P$.

Exercice 23. Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *Si $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $M_N(\mathbb{K})$, alors la suite $(\|A^n\|^{1/n})_{n \geq 1}$ est convergente, et $\lim \|A^n\|^{1/n}$ ne dépend pas de la norme $\|\cdot\|$.*

- (1) Soit $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs. On suppose que (a_n) est sous-multiplicative, ce qui signifie la chose suivante :

$$\forall n, n' \in \mathbb{N}^* : a_{n+n'} \leq a_n a_{n'}.$$

On pose

$$l := \inf \{a_n^{1/n}; n \geq 1\}.$$

- (a) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier l'existence d'un entier $m = m_\varepsilon$ tel que $a_m \leq (l + \varepsilon)^m$.
- (b) On garde les notations de (a). Pour $n \geq m_\varepsilon$, on écrit $n = p_n m_\varepsilon + r_n$, où $p_n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leq r_n < m_\varepsilon$. On pose également $\alpha := \max \{a_r; 0 \leq r < m_\varepsilon\}$. Montrer que

$$\forall n \geq m_\varepsilon : a_n^{1/n} \leq (l + \varepsilon)^{1 - \frac{r_n}{n}} \times \alpha^{1/n}.$$

- (c) Montrer que la suite $(a_n^{1/n})$ converge et que sa limite est égale à l .
- (2) Montrer que si $\|\cdot\|$ est une norme sur $M_N(\mathbb{K})$ subordonnée à une certaine norme sur \mathbb{K}^N , alors la suite $(\|A^n\|^{1/n})$ est convergente.
- (3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 24. Pour toute matrice $A \in M_N(\mathbb{C})$, on pose

$$\rho(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \|A^n\|^{1/n},$$

où $\|\cdot\|$ est une norme quelconque sur $M_N(\mathbb{C})$ (cf l'Exercice 23). On pose également

$$r(A) := \max \{|\lambda|; \lambda \text{ valeur propre de } A\}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer la formule suivante, qu'on appelle la **formule du rayon spectral** :

$$\forall A \in M_N(\mathbb{C}) : \rho(A) = r(A).$$

- (1) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_N(\mathbb{C})$ subordonnée à une certaine norme sur \mathbb{C}^N . Montrer que si $A \in M_N(\mathbb{C})$ et si λ est une valeur propre de A , alors $|\lambda^n| \leq \|A^n\|$ pour tout $n \geq 1$. En déduire que $r(A) \leq \rho(A)$.
- (2) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $M_N(\mathbb{C})$, et soit $Q \in GL_N(\mathbb{C})$. Montrer qu'on définit une norme sur $M_N(\mathbb{C})$ en posant $\|M\|_Q := \|Q^{-1}MQ\|$ pour toute matrice $M \in M_N(\mathbb{C})$, et que si $\|\cdot\|$ est sous-multiplicative ($\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$), alors $\|\cdot\|_Q$ aussi.
- (3) Soit $B \in M_N(\mathbb{C})$ une matrice *triangulaire supérieure*, de coefficients diagonaux $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N$. Pour $\alpha > 0$, on note D_α la matrice diagonale de coefficients $\alpha, \alpha^2, \dots, \alpha^N$. Montrer que $D_\alpha^{-1}BD_\alpha$ tend vers la matrice diagonale de coefficients $\lambda_1, \dots, \lambda_N$ quand $\alpha \rightarrow 0$.
- (4) Soit $A \in M_N(\mathbb{C})$. Déduire de (1) et (2) que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver une norme sous-multiplicative $\|\cdot\|$ (dépendant de A et de ε) sur $M_N(\mathbb{C})$ telle que $\|A\| \leq r(A) + \varepsilon$.
- (5) Démontrer la formule du rayon spectral.