Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. (Théorème de Cesàro)
Soit E un espace vectoriel normé, et soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de E. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$x_n := \frac{1}{n+1}(u_0 + u_1 + \cdots + u_n).$$

Montrer que si la suite (u_k) converge, alors la suite (x_n) converge et a la même limite que (u_k). (Commencer par le cas où $u_k \to 0$.)

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $a \in E$. Soit également $x_0 \in E$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n + a$. Montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 3. Soient d et d' deux distances sur un même ensemble E. On suppose que toute suite $(u_k) \subseteq E$ convergeant pour d converge également pour d'. Montrer que toute suite (u_k) convergeant pour d converge nécessairement *vers la même limite* pour d'.

Exercice 4. On note $c_0(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les suites $(u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tendant vers 0. On munit $c_0(\mathbb{N})$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$.

(1) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $c_0(\mathbb{N})$, et soit $u \in c_0(\mathbb{N})$. Montrer que si $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$, alors $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $c_0(\mathbb{N})$, et soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On fait les hypothèses suivantes :
   - $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;
   - Il existe $g \in c_0(\mathbb{N})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i\ :\ |u_k(i)| \leqslant |g(i)|$.

   Montrer que $u \in c_0(\mathbb{N})$ et que $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_\infty$.

Exercice 5. On note $\ell^1(\mathbb{N})$ l'espace vectoriel constitué par toutes les suites $(u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que la série $\sum u(i)$ est absolument convergente. On munit $\ell^1(\mathbb{N})$ de la norme $\|\cdot\|_1$ définie par

$$\|u\|_1 := \sum_{i=0}^{\infty} |u(i)|.$$

(1) Justifier que $\|\cdot\|_1$ est bien une norme.

(2) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$, et soit $u \in \ell^1(\mathbb{N})$. Montrer que si $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_1$, alors $\sum_{i=0}^{\infty} u_k(i) \to \sum_{i=0}^{\infty} u(i)$ quand $k \to \infty$.

(3) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$, et soit $u \in \ell^1(\mathbb{N})$. On suppose que $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Peut-on affirmer que $\sum_{i=0}^{\infty} u_k(i) \to \sum_{i=0}^{\infty} u(i)$?

(4) Soit $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$, et soit $u \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On fait les hypothèses suivantes :

- $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$;
- Il existe $g \in \ell^1(\mathbb{N})$ telle que $\forall k \in \mathbb{N}\ \forall i\ :\ |u_k(i)| \leqslant |g(i)|$.

Montrer que $u \in \ell^1(\mathbb{N})$ et que $u_k \to u$ pour la norme $\|\cdot\|_1$. En particulier (par (1)), $\sum_{i=0}^{\infty} u_k(i) \to \sum_{i=0}^{\infty} u(i)$ quand $k \to \infty$.

Exercice 6. Soit I un ensemble infini, et soit (t_k) une suite d'éléments de I deux à deux distincts.

(1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on note $f_k : I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_k(t) := 0$ si $t \neq t_k$ et $f_k(t_k) := 1$. Montrer que si (λ_k) est une suite quelconque de scalaires, alors $\lambda_k f_k(t) \to 0$ pour tout $t \in I$.

(2) Montrer qu'*il n'existe pas* de norme $\|\cdot\|$ sur $\ell^\infty(I)$ possédant la propriété suivante : une suite $(u_k) \subseteq \ell^\infty(I)$ converge vers 0 pour la norme $\|\cdot\|$ si et seulement si $u_k(t) \to 0$ pour tout $t \in I$.

Exercice 7. Soit E l'ensemble de toutes les suites $u = (u(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant $|u(i)| \leqslant 1$ pour tout $i \in \mathbb{N}$; autrement dit, E est la boule unité fermée de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. Pour $u, v \in E$, on pose

$$d(u,v) := \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i}\,|v(i) - u(i)|.$$

(1) Justifier la définition, et montrer que d est une distance sur E.

(2) Soit $(u_k)_{k\in\in\mathbb{N}} \in E$, et soit $u \in E$. Montrer que $u_k \to u$ pour la distance d si et seulement si $u_k(i) \to u(i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$

Exercice 8. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé. Montrer que la fonction $u \mapsto \|u\|$ est continue sur E.

Exercice 9. Soit (E, d) un espace métrique. Montrer que la fonction d est continue sur $E \times E$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0,0) := 0$ et $f(x,y) := \frac{x^2y^3\cos(x^5+y^8)}{x^4+y^4}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f est continue.

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(0,0) := 0$ et $f(x,y) := \frac{xy^3}{x^4+y^4}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$. Montrer que f n'est pas continue, mais que pour toute droite $D \subseteq \mathbb{R}^2$ passant par $(0,0)$, $f(x,y)$ a une limite quand $(x,y) \to (0,0)$ en restant dans D avec $(x,y) \neq (0,0)$.

Exercice 12. Pour $\alpha > 0$, on note $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f_\alpha(0,0) := 0$ et $f_\alpha(x,y) := \frac{|xy|^\alpha}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$. Pour quelles valeurs de α la fonction f_α est-elle continue en $(0,0)$?

Exercice 13. Montrer que les fonctions $(x,y) \mapsto \max(x,y)$ et $(x,y) \mapsto \min(x,y)$ sont continues sur $\mathbb{R}^2$. En déduire que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, les fonctions $(x_1,\dots,x_N) \mapsto \max(x_1,\dots,x_N)$ et $(x_1,\dots,x_N) \mapsto \min(x_1,\dots,x_N)$ sont continues sur $\mathbb{R}^N$.

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, et soit $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(x,y) := \frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ si $x \neq y$ et $g(x,x) := f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite finie l en $\pm\infty$. On définit une fonction $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $g(x,y) = (x+y)f\left(\frac{x}{y}\right)$ si $y \neq 0$ et $g(x,0) = lx$.

(1) Pourquoi g est-elle continue en tout point de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$?

(2) Montrer que g est continue en tout point $(a,0)$, $a \neq 0$.

(3) Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$, et en déduire que g est également continue en $(0,0)$.

Exercice 16. Soit $[a,b]$ un segment de $\mathbb{R}$. On munit $\mathcal{C}([a,b])$ de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Montrer que l'application $(f,g) \mapsto fg$ est continue de $\mathcal{C}([a,b]) \times \mathcal{C}([a,b]$ dans $\mathcal{C}([a,b])$. (On pourra commencer par vérifier que si $f,g \in \mathcal{C}([a,b])$, alors $\|fg\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$.)

Exercice 17. Montrer que l'application $(A,B) \mapsto AB$ est continue de $M_N(\mathbb{K}) \times M_N(\mathbb{K})$ dans $M_N(\mathbb{K})$.

Exercice 18. Montrer que l'application $M \mapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_N(\mathbb{K})$.

Exercice 19. Soit $A \in M_N(\mathbb{K})$. On suppose que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans $M_N(\mathbb{K})$. Montrer que sa limite P vérifie $P^2 = P$.

Exercice 20. Soit (E,d) un espace métrique. On note $Lip(E)$ l'ensemble de toutes les fonctions lipschitziennes sur E, à valeurs réelles. Montrer que $Lip(E)$ est un espace vectoriel. Montrer également que si $f,g : E \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions lipschitziennes et *bornés*, alors fg est lipschitzienne.

Exercice 21. On garde les notations de l'Exercice 20. Pour toute fonction $f \in Lip(E)$, on note $Lip(f)$ la constante de Lipschitz de f.

(1) Montrer que $\forall f,g \in Lip(E) \;:\; Lip(f+g) \leqslant Lip(f) + Lip(g)$.

(2) L'application $f \mapsto Lip(f)$ est-elle une norme sur $Lip(E)$?

(3) Soit $a \in E$. Montrer qu'on définit une norme $\|\cdot\|_a$ sur $Lip(E)$ en posant $\|f\|_a := |f(a)| + Lip(f)$.

(4) Montrer que si $a,b \in E$, alors les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes .

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application 1-lipschitzienne. Montrer que l'application $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par $J(x) := (x, f(x))$ est une isométrie de $\mathbb{R}$ dans $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$.

Exercice 23. Soit (E,d) un espace métrique, et soient $f_1, \dots, f_N$ des fonctions à valeurs réelles définies sur E. On note M et m les fonctions définies par $M(u) := \max(f_1(u), \dots, f_N(u))$ et $m(u) := \min(f_1(u), \dots, f_N(u))$.

(1) Montrer que si les fonctions $f_1, \dots, f_N$ sont continues, alors M et m sont continues.

(2) Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Montrer que si les fonctions $f_1, \dots, f_N$ sont k-lipschitziennes, alors M et m sont k-lipschitziennes.

Exercice 24. Soit (E,d) un espace métrique, et soit $M \subseteq E$, $M \neq \varnothing$. Soit également $k \in \mathbb{R}^+$, et soit $f : M \to \mathbb{R}$ une fonction k-lipschitzienne. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une fonction k-lipschitzienne $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ telle que $\widetilde{f}_{|M} = f$.

(1) Soit $z_0 \in M$. Montrer que si $x \in E$, alors $\forall z \in M \;:\; f(z) + k\,d(x,z) \geqslant f(z_0) - k\,d(x,z_0)$.

(2) Soit $\widetilde{f} : E \to \mathbb{R}$ la fonction définie comme suit :

$$\forall x \in E \;:\; \widetilde{f}(x) := \inf\big\{f(z) + k\,d(x,z);\; z \in M\big\}.$$

(a) Justifier la définition, puis montrer que $\widetilde{f}_{|M} = f$.

(b) Montrer que $\widetilde{f}$ est k-lipschitzienne.

Exercice 25. Soit (E,d) un espace métrique, et soit $f : E \to E$. On suppose que f est k-lipschitzienne pour un certain $k < 1$.

(1) On dit qu'un point $a \in E$ est un **point fixe** de f si $f(a) = a$. Montrer que f admet au plus 1 point fixe.

(2) Dans cette question, on suppose que f admet un point fixe a. Soit $x_0 \in E$ quelconque, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que la suite (x_n) converge vers a et qu'on a $d(x_n, a) \leqslant k^n d(x_0, a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(3) Soit $x_0 \in E$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer qu'on a $d(x_n, x_{n+1}) \leqslant k^n d(x_0, x_1)\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que si $p, q \in \mathbb{N}$ et $p < q$, alors

$$d(x_p, x_q) \leqslant d(x_0, x_1) \sum_{n=p}^{q-1} k^n \leqslant \frac{k^p}{1-k}\, d(x_0, x_1).$$

(4) Dans cette question, on suppose que E est un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que f admet un et un seul point fixe, et que pour tout $x_0 \in E$, la suite (x_n) définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$ converge vers ce point fixe.

Exercice 26. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ la suite définie par $x_0 := 3$ et la relation de récurrence $x_{n+1} = \frac{1}{4}\arctan(x_n) + \frac{5}{8}\sin(x_n) + 41$. En utilisant l'Exercice 25, montrer que la suite (x_n) est convergente.

Exercice 27. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, et soit $\varphi : E \to E$. On suppose que φ est k-lipschitzienne pour une certaine constante $k < 1$.

(1) En utilisant l'Exercice 25, montrer que pour tout $y \in E$, l'équation $x - \varphi(x) = y$ possède exactement une solution $x \in E$. En d'autres termes, $Id_E - \varphi$ est une bijection de E sur E.

(2) Montrer que $(Id_E - \varphi)^{-1}$ est lipschitzienne.

(3) Soit $a \in E$. Soit également $x_0 \in E$, et soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq E$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \varphi(x_n) + a$. Montrer que (x_n) converge et trouver sa limite.

Exercice 28. Montrer qu'il n'existe pas de surjection continue de $\mathbb{T}$ sur $[0, 2\pi[$. En particulier, $\mathbb{T}$ et $[0, 2\pi[$ ne sont pas homéomorphes.

Exercice 29. Montrer que les intervalles suivants sont homéomorphes : (i) $[0, 1]$ et $[a, b]$, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$; (ii) $]0, 1[$ et $]1, \infty[$; (iii) $]0, 1]$ et $[1, \infty[$; (iv) $]-1, 1[$, $\mathbb{R}$ et $]0, \infty[$.

Exercice 30. Soit E un espace vectoriel normé. Montrer que si B_1 et B_2 sont deux boules fermées de E de rayons > 0, alors B_1 et B_2 sont homéomorphes.

Exercice 31. Soit E un espace vectoriel normé, et soit $\Phi : E \to B(0,1)$ définie comme suit : $\Phi(0) := 0$ et $\Phi(u) := \frac{2}{\pi}\arctan(\|u\|)\,\frac{u}{\|u\|}\cdot$ Justifier que Φ envoie bien E dans $B(0,1)$, puis montrer que Φ est un homéomorphisme. (Ainsi, tout espace vectoriel normé est homéomorphe à sa boule unité ouverte.)

Exercice 32. Soit E un espace vectoriel de dimension finie, et soient $\|\cdot\|$ et $\|\cdot\|'$ deux normes sur E. Soit $\Phi : E \to E$ l'application définie comme suit : $\Phi(0) := 0$, et $\Phi(u) := \frac{\|u\|'}{\|u\|}\,u$ pour $u \neq 0$. Montrer que Φ est un homéomorphisme. En déduire que $B := \overline{B}_{\|\cdot\|}(0,1)$ et $B' := \overline{B}_{\|\cdot\|'}(0,1)$ sont homéomorphes.