

## Feuille d'exercices n° 1

**Exercice 1.** Soit  $E$  un ensemble quelconque, et soit  $\phi : E \rightarrow \mathbb{R}$ . À quelle condition sur  $\phi$  définit-on une distance sur  $E$  en posant  $d(u, v) := |\phi(v) - \phi(u)|$  ?

**Exercice 2.** Soit  $E$  l'ensemble des stations du métro de New York. Montrer qu'on définit une distance sur  $E$  en notant  $d(u, v)$  la longueur du plus court trajet en métro pour aller de  $u$  à  $v$  (longueur mesurée en "nombre d'arrêts").

**Exercice 3.** Soit  $\mathbf{C} := \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ , l'ensemble de toutes les suites de 0 et de 1. Montrer qu'on définit une distance sur  $\mathbf{C}$  en posant  $d(u, u) := 0$  et, pour  $u = (u_i)_{i \in \mathbb{N}}$  et  $v = (v_i)_{i \in \mathbb{N}}$  différents,  $d(u, v) := 2^{-i(u, v)}$ , où  $i(u, v)$  est le plus petit indice  $i$  tel que  $u_i \neq v_i$ .

**Exercice 4.** Soit  $\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$  le "cercle unité" de  $\mathbb{C}$ . Montrer qu'on définit une distance sur  $\mathbb{T}$  en notant  $d(u, v)$  la longueur du plus petit arc de cercle joignant  $u$  à  $v$  (mesurée en radians).

**Exercice 5.** Soit  $E$  un ensemble quelconque, et soit  $d$  une distance sur  $E$ . Soit également  $\Phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction vérifiant les propriétés suivantes :

- (i)  $\Phi(0) = 0$  et  $\phi(t) > 0$  pour tout  $t > 0$  ;
- (ii)  $\Phi$  est croissante sur  $\mathbb{R}^+$  ;
- (iii)  $\Phi(s + t) \leq \Phi(s) + \Phi(t)$  pour tous  $s, t \in \mathbb{R}^+$

Montrer qu'on définit une distance  $\delta$  sur  $E$  en posant  $\delta(u, v) := \Phi(d(u, v))$ .

**Exercice 6.** Soit  $E$  un ensemble quelconque, et soit  $d$  une distance sur  $E$ . Soit également  $\alpha$  tel que  $0 < \alpha < 1$ . Montrer qu'on définit une distance  $\delta$  sur  $E$  en posant  $\delta(u, v) := d(u, v)^\alpha$ .

**Exercice 7.** Soit  $E$  un ensemble quelconque, et soit  $d$  une distance sur  $E$ . Montrer qu'on définit une distance  $\delta$  sur  $E$  en posant  $\delta(u, v) := \min(1, d(u, v))$ .

**Exercice 8.** Soit  $d$  une distance sur un espace vectoriel  $E$ . Montrer que  $d$  est associée à une norme si et seulement si elle vérifie les propriétés suivantes :

- $d(u + h, v + h) = d(u, v)$  pour tous  $u, v, h \in E$  (*invariance par translations*) ;
- $d(\lambda u, \lambda v) = |\lambda| d(u, v)$  pour tous  $u, v \in E$  et tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  (*homogénéité*).

**Exercice 9.** Soit  $E$  un espace vectoriel,  $E \neq \{0\}$ . Montrer que la distance discrète sur  $E$  n'est pas associée à une norme.

**Exercice 10.** Soit  $I$  un ensemble non vide, et soit  $F$  un espace vectoriel normé. Une application  $u : I \rightarrow F$  est dite *bornée* s'il existe une constante  $M$  telle que  $\forall t \in I : \|u(t)\| \leq M$ . On note  $\ell^\infty(I, F)$  l'ensemble de toutes les applications bornées  $u : I \rightarrow F$ . Montrer que  $\ell^\infty(I, F)$  est un espace vectoriel, et qu'on définit une norme sur  $\ell^\infty(I, F)$  en posant  $\|u\|_\infty := \sup \{\|u(t)\|; t \in I\}$ .

**Exercice 11.** Soit  $P$  un polynôme non nul à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Pour toute fonction  $f \in \mathcal{C}([0, 1])$ , on pose  $\|f\|_P := \|Pf\|_\infty$ . Montrer que  $\|\cdot\|_P$  est une norme sur  $\mathcal{C}([0, 1])$ .

**Exercice 12.** Dessiner la boule  $\overline{B}(0, 1)$  dans  $E := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$ . Même question avec  $E := (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_1)$ .

**Exercice 13.** Soit  $E$  un espace vectoriel. Montrer que si  $(C_i)_{i \in I}$  est une famille de parties convexes de  $E$ , alors  $C := \bigcap_{i \in I} C_i$  est convexe.

**Exercice 14.** Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Montrer que  $f$  est une fonction convexe si et seulement si l'ensemble  $\text{Epi}(f) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; y \geq f(x)\}$  est une partie convexe de  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 15.** Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , et soit  $N : E \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $N$  vérifie les propriétés suivantes :

- (i)  $N(0) = 0$ , et  $N(u) > 0$  pour tout  $u \neq 0$ ;
- (ii)  $N(\lambda u) = |\lambda|N(u)$  pour tout  $u \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ;
- (iii) L'ensemble  $B := \{x \in E; N(x) \leq 1\}$  est une partie convexe de  $E$ .

(1) Montrer que si  $u \in E \setminus \{0\}$ , alors  $\frac{u}{N(u)} \in B$ .

(2) Montrer que si  $u, v \in E$  sont  $\neq 0$ , alors il existe  $\lambda \in [0, 1]$  tel que

$$\frac{u+v}{N(u)+N(v)} = (1-\lambda) \frac{u}{N(u)} + \lambda \frac{v}{N(v)}.$$

(3) Montrer que  $N$  est une norme.

**Exercice 16.** Soit  $p$  un nombre réel  $\geq 1$ . En utilisant l'Exercice 15 et la convexité de la fonction  $t \mapsto t^p$  sur  $\mathbb{R}^+$ , montrer qu'on définit une norme  $\|\cdot\|_p$  sur  $\mathbb{K}^N$  en posant, pour tout  $u = (u_1, \dots, u_N) \in \mathbb{K}^N$  :

$$\|u\|_p := \left( \sum_{j=1}^N |u_j|^p \right)^{1/p}.$$

**Exercice 17.** Soit  $[a, b]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et soit  $p$  un nombre réel  $\geq 1$ . En utilisant l'Exercice 15, montrer qu'on définit une norme  $\|\cdot\|_p$  sur  $\mathcal{C}([a, b])$  en posant, pour toute  $f \in \mathcal{C}([a, b])$  :

$$\|f\|_p := \left( \int_a^b |f(t)|^p dt \right)^{1/p}.$$

**Exercice 18.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et soit  $A \subseteq E$ . Montrer que

$$A \text{ est borné} \iff \text{diam}(A) < \infty \iff A \text{ est contenu dans une boule.}$$

**Exercice 19.** Montrer que pour tout ensemble borné (non-vidé)  $A \subseteq \mathbb{R}$ , on a  $\text{diam}(A) = \sup(A) - \inf(A)$ .

**Exercice 20.** Soit  $E$  un espace vectoriel normé, et soit  $T : E \rightarrow E$  une application linéaire. Montrer que  $T$  est une isométrie si et seulement si  $\|T(u)\| = \|u\|$  pour tout  $u \in E$ .

**Exercice 21.** Soit  $(M, d)$  un espace métrique quelconque. Le but de l'exercice est de montrer que  $M$  est isométrique à une partie d'un espace vectoriel normé.

- (1) Soit  $a \in M$ . Pour  $u \in M$ , on note  $\varphi_u : M \rightarrow \mathbb{R}$  la fonction définie par  $\varphi_u(x) := d(u, x) - d(x, a)$ . Montrer que la fonction  $\varphi_u$  est bornée.
- (2) On garde les notations de (1). Montrer que si  $u, v \in M$ , alors  $\|\varphi_v - \varphi_u\|_\infty = d(u, v)$ .
- (3) Démontrer le résultat annoncé.

**Exercice 22.** Montrer que  $\forall u \in \mathbb{R}^N : \|u\|_2 \leq \|u\|_1 \leq \sqrt{N} \|u\|_2$ , et que la constante  $\sqrt{N}$  ne peut pas être améliorée.

**Exercice 23.** Soit  $E$  un espace vectoriel, et soient  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  deux normes sur  $E$ . Montrer que si  $\|\cdot\|$  et  $\|\cdot\|'$  ne sont pas équivalentes, alors ou bien il existe une suite  $(u_k) \subseteq E$  telle que  $\|u_k\| \rightarrow 0$  et  $\|u_k\|' \rightarrow \infty$ , ou bien il existe une suite  $(u_k) \subseteq E$  telle que  $\|u_k\| \rightarrow \infty$  et  $\|u_k\|' \rightarrow 0$ .

**Exercice 24.** Soit  $[a, b]$  un segment (non trivial) de  $\mathbb{R}$ . Pour  $f \in \mathcal{C}([a, b])$ , on pose  $\|f\|_1 := \int_a^b |f(t)| dt$ . Montrer que  $\|\cdot\|_1$  est une norme sur  $\mathcal{C}([a, b])$ , et qu'elle n'est pas équivalente à la norme  $\|\cdot\|_\infty$ . (Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pourra considérer la fonction  $f_n \in \mathcal{C}([a, b])$  définie par  $f_n(t) := \left(\frac{t-a}{b-a}\right)^n$ .)

**Exercice 25.** Soit  $\mathbb{K}[X]$  l'espace vectoriel constitué par tous les polynômes à coefficients dans  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ . Si  $P \in \mathbb{K}[X]$ , on écrit  $P = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_i(P)X^i$ , où tous les  $c_i(P)$  sauf un nombre fini valent 0.

(1) Montrer qu'on définit deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  sur  $\mathbb{K}[X]$  en posant

$$\|P\|_1 := \sum_{i \in \mathbb{N}} |c_i(P)| \quad \text{et} \quad \|P\|_\infty := \max_{i \in \mathbb{N}} |c_i(P)|.$$

(2) Montrer que les normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_\infty$  ne sont pas équivalentes. (Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pourra considérer le polynôme  $P_n := \sum_{i=0}^n X^i$ .)

**Exercice 26.** On admet que tout espace vectoriel (sur  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ) possède une base. En s'inspirant de l'Exercice 25, montrer que sur tout espace vectoriel  $E$  de dimension infinie, on peut définir deux normes qui ne sont pas équivalentes

**Exercice 27.** Soit  $(P_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes de degré  $\leq 348974$ . On suppose que  $\int_{-1/10}^{1/10} |P_k(t)| dt \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Montrer que  $\int_{-3000}^{3000} |P_k(t)| dt \rightarrow 0$ .

**Exercice 28.** Soit  $E$  un espace vectoriel. Montrer que deux normes sur  $E$  sont équivalentes si et seulement si les distances associées sont Lipschitz-équivalentes.