Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. Soit P un polynôme de degré $d \geqslant 0$, et soient $a, b \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Montrer que l'équation différentielle $ax'(t) + bx(t) = P(t)$ possède une solution polynomiale de degré d.

Exercice 2. En utilisant le résultat de l'Exercice 1, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

(1) $x'(t) + x(t) = 3$;

(2) $x'(t) - x(t) = t$;

(3) $x'(t) + 2x(t) = 2t + 1$;

(4) $2x'(t) - 3x(t) = t + 1$;

(5) $x'(t) + 2x(t) = t^2 - 2t + 3$;

(6) $7x'(t) + 2x(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1$;

Exercice 3. Soit P un polynôme de degré $d \geqslant 0$, et soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Soit également $m \in \mathbb{R}$. On considère l'équation différentielle $ax'(t) + bx(t) = P(t)e^{mt}$.

(1) Montrer que si $am + b \neq 0$, alors l'équation possède une solution de la forme $Q(t)e^{mt}$ où Q est un polynôme de degré d.

(2) Montrer que si $am + b = 0$, alors l'équation possède une solution de la forme $Q(t)e^{mt}$, où Q est un polynôme de degré $d + 1$ sans terme constant.

Exercice 4. En utilisant le résultat de l'Exercice 3, résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

(1) $x'(t) + 2x(t) = e^{-t}$;

(2) $x'(t) + 2x(t) = te^{-2t}$;

(3) $x'(t) - 4x(t) = (2t + 3)e^t$;

(4) $x'(t) - x(t) = (t^2 + 1)e^t$;

(5) $x'(t) + x(t) = (t - 1)^2 e^{-t}$;

(6) $2x'(t) + 4x(t) = (t^2 + t + 1)e^{-t}$;

Exercice 5. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

(1) $x'(t) + 2x(t) = 4\text{ch}(t)$;

(2) $x'(t) - x(t) = e^t + 3e^{-2t}$;

(3) $x'(t) - x(t) = \sin(t)$;

(4) $x'(t) - 4x(t) = \cos(3t)$;

(5) $x'(t) + x(t) = t\cos(t)$;

(6) $x'(t) + x(t) = \frac{1}{1+e^t}$.

Exercice 6. Résoudre les équations différentielles suivantes.

(1) $tx'(t) + x(t) = 1 + \ln(t)$ sur $]0, \infty[$;

(2) $x'(t) - \frac{1}{t}\, x(t) = t^2$ sur $]0, \infty[$;
(3) $x'(t) - 2tx(t) = (1-2t)e^t$ sur $\mathbb{R}$;
(4) $x'(t) - \frac{2}{t}\, x(t) = t^2$ sur $]0, \infty[$.
(5) $x'(t) + (t^2+1)x(t) = t^2 e^{-t}$ sur $\mathbb{R}$.
(6) $(1+t^2)x'(t) + 2tx(t) = 1$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les “problèmes de Cauchy” suivants :
(1) $x'(t) + x(t) = 0$ avec $x(5) = 1$;
(2) $x'(t) + x(t) = t$ avec $x(0) = 1$;
(3) $x'(t) = x(t) + (t^2 - 3t)e^t$ avec $x(0) = -2$.

Exercice 8. Résoudre les “problèmes de Cauchy” suivants :
(1) $x'(t) + \tan(t)x(t) = \sin(2t)$ sur $]-\pi/2, \pi/2[$, avec $x(0) = 1$;
(2) $(t+1)x'(t) + tx(t) = t^2 - t + 1$ sur $]-1, \infty[$, avec $x(1) = 1$. (On pourra chercher une solution particulière sous la forme d'un polynôme.)

Exercice 9. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := \cos(\arctan(t))$.
(1) Vérifier que f est solution de l'équation différentielle $x'(t) = -\frac{t}{1+t^2}\, x(t)$.
(2) En déduire que $\forall t \in \mathbb{R} \ : \ f(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\cdot$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := \sin(\arctan(t))$. Vérifier que f est solution sur $]0, \infty[$ de l'équation différentielle $x'(t) = \frac{1}{t(1+t^2)}\, x(t)$, et en déduire que $\forall t \in \mathbb{R} \ : \ f(t) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot$

Exercice 11. On considère l'équation différentielle $x'(t) - x(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\cdot$ Montrer que les solutions de cette équation sur $]0, \infty[$ sont les fonctions de la forme

$$x(t) = \left(\lambda + 2\int_0^{\sqrt{t}} e^{-s^2} ds\right) e^t, \qquad \text{où } \lambda \text{ est une constante.}$$

Exercice 12. On considère l'équation différentielle $t^2 x'(t) - x(t) = 0$.
(1) Résoudre cette équation différentielle sur $]0, \infty[$ et sur $]-\infty, 0[$.
(2) Résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. On considère l'équation différentielle $t^3 x'(t) + (2 - 3t^2)x(t) = t^3$.
(1) Résoudre cette équation sur $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

(2) Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

(3) Déterminer la solution sur $]0, +\infty[$ vérifiant $x(1) = 0$.

Exercice 14. On considère l'équation différentielle $t(1+t)x'(t) - (t+2)x(t) = 2t$.

(1) Résoudre cette équation sur $]0, \infty[$ et sur $]-1, 0[$, puis la résoudre sur $]-1, \infty[$.

(2) Existe-t-il des solutions définies sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15. Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant

$$\forall s, t \in \mathbb{R} \ : \ f(s+t) = f(s)f(t).$$

(Pour démarrer, dériver l'identité précédente par rapport à s et prendre $s := 0$.)

Exercice 16. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. On suppose que $(f(t) + f'(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. Montrer que $f(t) \to 0$ quand $t \to +\infty$. (On pourra poser $b(t) = f(t) + f'(t)$ et considérer l'équation différentielle $x(t) + x'(t) = b(t)$.)

Exercice 17. Soit $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues avec a impaire et b paire. Montrer que l'équation différentielle $x'(t) + a(t)x(t) = b(t)$ admet une unique solution impaire.

Exercice 18. Résoudre les équations différentielles suivantes.

(1) $3x''(t) + 5x'(t) + x(t) = 0$.

(2) $2x''(t) + 3x''(t) + 4x(t) = 0$.

(3) $9x''(t) - 30x'(t) + 25x(t) = 0$.

(4) $x''(t) + \omega^2 x(t) = 0$, où $\omega \in \mathbb{R}$.

Exercice 19. Résoudre sur $\mathbb{R}$ les "problèmes de Cauchy" suivants :

(1) $2x''(t) + 5x'(t) - 3x(t) = 0$ avec $x(0) = 1$ et $x'(0) = -1$;

(2) $x''(t) + 3x'(t) + 5x(t) = 0$ avec $x(0) = 3$ et $x'(0) = 2$.

(3) $x''(t) + 6x'(t) + 9x(t) = 0$ avec $x(1) = 2$ et $x'(1) = -1$;

(4) $798\, x''(t) + 3045\, x'(t) + 997\, x(t) = 0$ avec $x(83\pi) = x'(83\pi) = 0$.

Exercice 20. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ et soient u et v deux solutions (sur $\mathbb{R}$) de l'équation différentielle $ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$. On suppose qu'on a $7u(5\pi) + 13v(5\pi) = 0$ et $7u'(5\pi) + 13v'(5\pi) = 0$. Montrer que la fonction $7u + 13v$ est identiquement nulle.

Exercice 21. Soient x et y deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On suppose que x et y vérifient le “système” d'équations différentielles

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + y(t) \\ y'(t) = -x(t) + 3y(t), \end{cases}$$

avec les “conditions initiales” $x(0) = 1$ et $y(0) = 3$.

(1) Montrer que x est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants à déterminer.

(2) Déterminer les fonctions x et y.

Exercice 22. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit f la fonction définie par

$$f(t) := \int_0^t \sin(t-s)\varphi(s)\,ds.$$

Montrer que f est solution de l'équation différentielle $x''(t) + x(t) = \varphi(t)$.

Exercice 23. On veut résoudre sur $]-1,1[$ l'équation différentielle

$$\text{(E)} \qquad (1-t^2)x''(t) - tx'(t) + 9x(t) = 0.$$

(1) Soit $x :]-1,1[\to \mathbb{R}$ une fonction 2 fois dérivable, et soit $z :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $z(u) := x\big(\sin(u)\big)$. Montrer que x est solution de (E) si et seulement si z est solution d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants à déterminer.

(2) Résoudre l'équation (E) sur $]-1,1[$.