

Feuille d'exercices n° 2

Exercice 1. Démontrer les choses suivantes (les notations sont celles du cours).

- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(h(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(h(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} o(h(x))$, alors $f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $f(x) \underset{a}{=} O(g(x))$ et $g(x) \underset{a}{=} O(f(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{a}{=} O(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{a}{=} O(g_1(x)g_2(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g_1(x))$ et $f_2(x) \underset{a}{=} O(g_2(x))$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g_1(x)g_2(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$, alors $f_1(x) + f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{=} o(g(x))$.
- Si $f_1(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)$ et $f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_2(x)$, alors $f_1(x)f_2(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g_1(x)g_2(x)$.
- Si $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x)$, alors $1/f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} 1/g(x)$.

Exercice 2. Démontrer les équivalences suivantes (les notations sont celles du cours) :

$$f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} g(x) \iff f(x) \underset{x \rightarrow a}{=} g(x) + o(g(x)) \iff g(x) \underset{x \rightarrow a}{=} f(x) + o(f(x)).$$

Exercice 3. Soit I un intervalle contenant 0, et soient α, β deux fonctions continues sur I . On suppose que $\alpha(t) \underset{t \rightarrow 0}{=} o(\beta(t))$. Montrer que $\int_0^x \alpha(t) dt \underset{x \rightarrow 0}{=} o\left(\int_0^x \beta(t) dt\right)$.

Exercice 4. Soit (u_n) une suite de nombres réels. On suppose que $u_{n+1} - u_n$ admet une limite $L \neq 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} Ln$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := x^3 \sin(1/x^2)$ pour $x \neq 0$, et $f(0) = 0$. Montrer que f est dérivable sur \mathbb{R} et admet un DL à l'ordre 2 en 0, mais qu'elle n'est pas 2 fois dérivable en 0.

Exercice 6. Montrer *sans utiliser la formule de Taylor-Young* que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\frac{1}{1-x} \underset{x \rightarrow 0}{=} 1 + x + \dots + x^n + o(x^n)$.

Exercice 7. Soit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les DL_n de $\frac{1}{a-x}$ et de $\frac{1}{a+x}$ en 0.

Exercice 8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le DL_n de $\frac{1}{(1-x)^2}$ en 0 en utilisant la formule pour le DL de $(1+u)^\alpha$.

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- (1) Retrouver les DL_n de $\operatorname{ch}(x)$ et $\operatorname{sh}(x)$ en 0 en utilisant les DL de e^x et e^{-x} .
- (2) Retrouver les DL_n de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ en 0 en utilisant les DL de e^{ix} et e^{-ix} .

Exercice 10. Déterminer les développements limités en 0 suivants.

- (1) $\frac{1}{1-x} - e^x$ à l'ordre 3.
- (2) $\sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$ à l'ordre 4.
- (3) $\sin x \cdot \cos(2x)$ à l'ordre 6.
- (4) $\cos x \cdot \ln(1+x)$ à l'ordre 4
- (5) $\cos x \cdot e^x$ à l'ordre 3.
- (6) $(x^3 + 1) \cdot \sqrt{1-x}$ à l'ordre 3.
- (7) $(\ln(1+x))^2$ à l'ordre 4.
- (8) $(\sin x)^6$ à l'ordre 9.

Exercice 11. Déterminer les développements limités en 0 suivants.

- (1) $\frac{1}{1+x+x^2}$ à l'ordre 4.
- (2) $\frac{\sin x + 1}{\cos x + 1}$ à l'ordre 3.
- (3) $\frac{\ln(1+x)}{\sin x}$ à l'ordre 3.
- (4) $\operatorname{th}(x)$ à l'ordre 5.

Exercice 12. Déterminer les développements limités en 0 suivants.

- (1) $e^{\sin(x)}$ à l'ordre 4.
- (2) $\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)$ à l'ordre 4.
- (3) $\sin(\ln(1+x^2))$ à l'ordre 6.
- (4) $(1+x)^{\frac{1}{1+x}}$ à l'ordre 3.

Exercice 13. Déterminer les développements limités suivants.

(1) \sqrt{x} en 1 à l'ordre 3.(3) $\cos(x)$ en $\frac{\pi}{4}$ à l'ordre 3.(2) $e^{\sqrt{x}}$ en 1 à l'ordre 3(4) $\ln(\sin x)$ en $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3.

Exercice 14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le DL_n de $\frac{1}{(1-x)^2}$ en 0 en observant que $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$;

Exercice 15. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{1}{(1-x)^p} \underset{x \rightarrow 0}{=} \sum_{k=0}^n \binom{p-1+k}{k} x^k + o(x^n).$$

Exercice 16. Déterminer les DL à l'ordre 5 de $\arcsin(x)$ et $\operatorname{argsh}(x)$ en 0 en utilisant les dérivées de \arcsin et argsh .

Exercice 17. Déterminer le DL à l'ordre 6 de $\ln(\cos(x))$ en 0, et en déduire le DL de $\tan(x)$ à l'ordre 5.

Exercice 18. Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0, et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction impaire 5 fois dérivable telle que $f'(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$. On note $f(t) = at + bt^3 + ct^5 + o(t^5)$ le DL à l'ordre 5 de f en 0.

(1) Justifier que f est une bijection de I sur $J := f(I)$, et que la fonction $g := f^{-1}$ admet un DL à l'ordre 5 en 0, de la forme $g(x) = a'x + b'x^3 + c'x^5 + o(x^5)$.

(2) En utilisant l'identité $f(g(x)) = x$, exprimer a' en fonction de a , puis b' en fonction de a et b , puis c' en fonction de a , b et c .

Exercice 19. Déterminer les DL à l'ordre 5 de $\arcsin(x)$ et $\operatorname{argsh}(x)$ en 0 en utilisant la méthode de l'Exercice 18.

Exercice 20. Déterminer le DL à l'ordre 5 de $\tan(x)$ en 0 en utilisant la méthode de l'Exercice 18.

Exercice 21. Soit f la fonction définie sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) := 2 \tan(x) - x$. Montrer que f admet une fonction réciproque de classe C^∞ , et déterminer le DL à l'ordre 5 de f^{-1} en 0. (On rappelle que $\tan(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^6)$.)

Exercice 22. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x^3}{1+x^6}$. Calculer $f^{(k)}(0)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 23. Soit f une fonction définie au voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ et deux fois dérivable en a . Déterminer

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a-h) - 2f(a) + f(a+h)}{h^2}.$$

Exercice 24. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et soit $a \in \mathbb{R}$. Pour toute fonction f définie au voisinage de a et n fois dérivable en a et pour $\varepsilon > 0$ assez petit, on pose

$$\Delta_\varepsilon^n f(a) := \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(a+k\varepsilon).$$

- (1) Vérifier que $\Delta_\varepsilon^1 f(a) = f(a+\varepsilon) - f(a)$ et $\Delta_\varepsilon^2 f(a) = f(a+2\varepsilon) - 2f(a+\varepsilon) + f(a)$.
- (2) Montrer qu'il existe des constantes $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ indépendantes de f telles que

$$\Delta_\varepsilon^n f(a) \underset{\varepsilon \rightarrow 0}{=} \sum_{i=0}^n \alpha_i f^{(i)}(a) \varepsilon^i + o(\varepsilon^n).$$

- (3) Calculer $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ en prenant pour f la fonction exponentielle.
- (4) Déterminer, pour f quelconque n fois dérivable en a , la limite

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\Delta_\varepsilon^n f(a)}{\varepsilon^n}.$$

Exercice 25. Déterminer $a, b \in \mathbb{R}$ pour que la partie principale du développement limité en 0 de

$$f(x) := \cos(x) - \frac{1+ax^2}{1+bx^2}$$

soit de valuation la plus grande possible.

Exercice 26. Déterminer les “développements limités en $+\infty$ ” des fonctions suivantes (selon les puissances de $\frac{1}{x}$) :

- (1) $f(x) := \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x}}$ à l'ordre 3.
- (2) $g(x) := \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln(x)$ à l'ordre 4.

Exercice 27. Soit f la fonction définie par $f(x) := \frac{\sqrt{1+x^2}}{1+x+\sqrt{1+x^2}}$.

- (1) Donner le développement limité à l'ordre 2 de f en 0.
- (2) En déduire un développement limité de $f(x)$ à l'ordre 2 en $+\infty$.

Exercice 28. Démontrer les résultats suivants.

- (1) $\frac{1}{x+2} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{4}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
- (2) $\frac{1+x^2}{(x+1)(x-2)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{6}{x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)$.
- (3) $\frac{1}{x \sin(1/x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{6x^2} + \frac{7}{360x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
- (4) $\frac{1}{x \arctan(1/x)} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} 1 + \frac{1}{3x^2} - \frac{4}{45x^4} + o\left(\frac{1}{x^4}\right)$.
- (5) $\frac{\sqrt{x^3+1}}{\sqrt[3]{x^2+1}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} x^{5/6} - \frac{1}{3x^{7/6}} + \frac{1}{12x^{13/6}} + o\left(\frac{1}{x^{13/6}}\right)$.
- (6) $\frac{\sqrt{e^{-x}+e^{-3x}}}{\sqrt[3]{e^{-x}+e^{-2x}}} \underset{x \rightarrow +\infty}{=} e^{-x/6} - \frac{e^{-7x/6}}{3} + \frac{13e^{-13x/6}}{18} + o(e^{-13x/6})$.

Exercice 29. Déterminer les limites suivantes.

- (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}$.
- (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos(x) - x}{x^2}$.
- (3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - \cos(x)}{x^2}$.
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x}{x^2}$.
- (5) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$.
- (6) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - \sqrt{1-x^2}}{x^4}$.
- (7) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^{\tan x}}{\sin(x) - \tan(x)}$.
- (8) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \ln(1+2x)} - 1 - x}{x^2}$.
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(e^x - 1) - \ln(\cos(x))}{x^3}$.
- (10) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x}$.
- (11) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin(x)^2}\right)$.
- (12) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 3x + 2} - x)$.
- (13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{\sqrt{x+1}} - e^{\sqrt{x}})^{1/\sqrt{x}}$.
- (14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((x+1)^{(x+1)^{1/(x+1)}} - x^{x^{1/x}})$.

Exercice 30. Donner des équivalents simples pour les fonctions suivantes.

- (1) $2e^x - \sqrt{1+4x} - \sqrt{1+6x^2}$, en 0.
- (2) $(\cos x)^{\sin x} - (\cos x)^{\tan x}$, en 0.
- (3) $\arctan(x) + \arctan\left(\frac{3}{x}\right) - \frac{2\pi}{3}$, en $\sqrt{3}$.
- (4) $\sqrt{x^2+1} - 2\sqrt[3]{x^3+x} + \sqrt[4]{x^4+x^2}$, en $+\infty$.

Exercice 31. Déterminer $\ell := \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^x$, puis trouver un équivalent simple en $+\infty$ de $\left(\frac{\ln(x+1)}{\ln(x)} \right)^x - \ell$.

Exercice 32. Soit $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue, 2 fois dérivable sur $]a, b[$, telle que $f''(x) > 0$ pour tout $x \in]a, b[$. Montrer que le maximum de f sur $[a, b]$ ne peut être atteint qu'en a ou en b .

Exercice 33. Soit f une fonction à valeurs réelles 3 fois dérivable un point a . On note Δ la tangente au graphe de f au point $(a, f(a))$.

- (1) Montrer que si $f''(a) \neq 0$, alors le graphe de f reste du même côté de Δ au voisinage de $(a, f(a))$.
- (2) Montrer que si $f''(a) = 0$ et $f'''(a) \neq 0$, alors le graphe de f traverse Δ .

Exercice 34. Montrer que les graphes des fonctions sin, arcsin, arctan et th traversent leur tangente en $(0, 0)$.

Exercice 35. Montrer que le graphe de la fonction cos traverse sa tangente en $(\frac{\pi}{2}, 0)$.

Exercice 36. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) := \frac{1}{1 + e^x}$.

- (1) Déterminer le développement limité de f à l'ordre 3 en 0.
- (2) Donner l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0, et montrer que le graphe traverse sa tangente.

Exercice 37. Étudier la position du graphe de la fonction $x \mapsto \ln(1 + x + x^2)$ par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0. Même question avec la tangente au point d'abscisse 1.

Exercice 38. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq a$ et $a, b \neq 0$, soit n un entier ≥ 2 , et soit f la fonction définie par

$$f(x) := \frac{x^n + ax}{x^2 + b}.$$

- (1) Montrer que si $n \geq 3$, alors le graphe de f traverse sa tangente au point $(0, 0)$.
- (2) Montrer que si $n = 2$ alors, au voisinage de $(0, 0)$, le graphe de f reste du même côté de sa tangente en $(0, 0)$.

Exercice 39. Déterminer les asymptotes éventuelles en $\pm\infty$, et la position relative par rapport aux asymptotes, de la courbe représentative de la fonction f définie par

$$f(x) := \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - 1}.$$

Exercice 40. Pour chacune des fonctions f suivantes, montrer que le graphe de f admet une asymptote en $+\infty$ et déterminer la position du graphe par rapport à cette asymptote.

$$(1) f(x) := x \sqrt{\frac{x-1}{3x+1}}.$$

$$(2) f(x) := \frac{x^3 + 2}{x^2 - 1}.$$

$$(3) f(x) := (x+1) \arctan(x+1).$$

$$(4) f(x) := (x+1)e^{1/(x+1)}.$$

$$(5) f(x) := \frac{\sqrt{1+x^2}}{x+1+\sqrt{x^2+1}}.$$

$$(6) f(x) := \sqrt{\frac{x-2}{x+1}} e^{x/(x+1)}.$$

$$(7) f(x) := x^3 \arctan\left(\frac{1}{1+x^2}\right).$$

$$(8) f(x) := \sqrt[3]{x^3 - 2x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + x + 1}.$$

Exercice 41.

- (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\tan(x) = x$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $]n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
- (2) Justifier que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
- (3) En déduire que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, pour une certaine constante c à déterminer.
- (4) Montrer que $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour une certaine constante d à déterminer.

Exercice 42.

- (1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sin(x) = \frac{1}{x}$ possède une unique solution x_n dans l'intervalle $]2n\pi - \frac{\pi}{2}, 2n\pi + \frac{\pi}{2}[$.
- (2) Justifier que $x_n = 2n\pi + \arcsin\left(\frac{1}{x_n}\right)$.
- (3) En déduire que $x_n = 2n\pi + \frac{c}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$, pour une certaine constante c à déterminer.
- (4) Montrer que $x_n = 2n\pi + \frac{c}{n} + \frac{d}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$, pour une certaine constante d à déterminer.

Exercice 43. On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $e^x + x - n = 0$.

- (1) Montrer que l'équation admet une unique solution, que l'on notera u_n .
- (2) Montrer que la suite (u_n) tend vers $+\infty$.
- (3) Montrer que $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln(n)$.
- (4) En étudiant $v_n := u_n - \ln(n)$, montrer que

$$u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln(n) - \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right).$$

Exercice 44. Soit $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}]$, et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \sin(x_n)$.

- (1) Montrer que la suite (x_n) est décroissante et tend vers 0.
- (2) En utilisant le DL à l'ordre 3 de $\sin(x)$ en 0, Déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{1}{x_{n+1}^\alpha} - \frac{1}{x_n^\alpha}$ admette une limite $l \neq 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (3) Montrer que $x_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$. (Utiliser l'Exercice 4.)

Exercice 45. Soit $x_0 > 0$, et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = \ln(1 + x_n)$.

- (1) Montrer que (x_n) est décroissante et tend vers 0.
- (2) En procédant comme dans l'Exercice 44, déterminer un équivalent simple de x_n quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 46. Soit $x_0 > 0$ et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par la relation de récurrence $x_{n+1} = x_n e^{-x_n}$. Montrer que $x_n \rightarrow 0$, et déterminer un équivalent simple de x_n .