

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := x$ si $x \in \mathbb{Q}$ et $f(x) := 1 - x$ si $x \notin \mathbb{Q}$. Montrer que f est une bijection et déterminer f^{-1} .

Exercice 2. Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, et soit f la fonction définie par $f(x) := x - h(x)$.

- (1) On suppose qu'on a $h'(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur $f(\mathbb{R})$.
- (2) On suppose qu'il existe une constante $k < 1$ telle que $\forall x \in \mathbb{R} : h'(x) \leq k$. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .

Exercice 3. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Le but de l'exercice est de montrer que : *si f est injective, alors f est strictement monotone* (résultat énoncé en cours). Pour cela, on va raisonner "par contraposée" : on suppose que f n'est pas strictement monotone, et on cherche à montrer que f n'est pas injective.

- (1) Justifier qu'il existe $x_0, x'_0, x_1, x'_1 \in I$ tels que $x_0 < x'_0$, $f(x_0) \geq f(x'_0)$, $x_1 < x'_1$ et $f(x_1) \leq f(x'_1)$.
- (2) Pour $t \in [0, 1]$, on pose $x_t := (1 - t)x_0 + tx_1$ et $x'_t := (1 - t)x'_0 + tx'_1$. Montrer que $\forall t \in [0, 1] : x_t < x'_t$.
- (3) En appliquant le Théorème des valeurs intermédiaires à la fonction φ définie par $\varphi(t) := f(x_t) - f(x'_t)$, montrer que f n'est pas injective.

Exercice 4. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable. Montrer que si f' ne s'annule pas sur I , alors f' est de signe constant, et donc f est strictement monotone. (*Suggestion* : Raisonner par contraposée. Montrer que si f' n'est pas de signe constant, alors on peut trouver un intervalle fermé borné $[a, b] \subseteq I$ tel que la restriction de f à $[a, b]$ atteint son maximum ou son minimum en un point intérieur à $[a, b]$.)

Exercice 5. (Théorème de Darboux)

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Montrer que si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable, alors $f'(I)$ est un intervalle. (Utiliser l'Exercice 4.)

Exercice 6. Soit I un intervalle de \mathbb{R} , et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *si $f(I)$ est un intervalle, alors f est continue.*

- (1) Soit x_0 un point de I qui n'est pas la borne de gauche de I . On note $f(x_0^-)$ la limite à gauche de f au point x_0 (qui existe puisque f est croissante), et on suppose qu'on a $f(x_0^-) < f(x_0)$.
 - (a) Faire un dessin.
 - (b) Soit $y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0^-) < y < f(x_0)$. Montrer que $y \notin f(I)$.
 - (c) Avec les notations de (ii), justifier l'existence d'un point $x \in I$ tel que $x < x_0$ et $f(x) < y < f(x_0)$.
 - (d) Conclure que $f(I)$ n'est pas un intervalle.
- (2) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 7. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) := \frac{2x}{1+x^2}$. Étudier les variations de f et montrer que la restriction de f à $[-1, 1]$ est une bijection de $[-1, 1]$ sur un intervalle à expliciter.

Exercice 8. Dans chacun des cas suivants, montrer que f est une bijection de I sur $J := f(I)$, et déterminer J et f^{-1} .

- (1) $f(x) := x^2 - 4x + 3$ et $I :=] - \infty, 2]$.
- (2) $f(x) := \frac{2x-1}{x+2}$ et $I :=] - 2, \infty[$.
- (3) $f(x) := \sqrt{2x+3} - 1$ et $I := [-\frac{3}{2}, \infty[$.
- (4) $f(x) := \frac{1}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ et $I := [-3, \infty[$.
- (5) $f(x) := \frac{2x^2+x+2}{x^2+1}$ et $I := [1, \infty[$.

Exercice 9. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) := \frac{x}{1+|x|}$. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à expliciter, et déterminer f^{-1} .

Exercice 10. Soit f la fonction définie sur $[1, \infty[$ par $f(x) := x^{36} - 2x^{18} + 5$. Montrer que f est une bijection de $[1, \infty[$ sur un intervalle à expliciter, et déterminer f^{-1} .

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) := \sqrt[3]{x+13} + \sqrt[3]{x-13}$.

- (1) Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
- (2) Résoudre l'équation $f(x) = 4$. (*Suggestion* : poser $u := \sqrt[3]{x+13}$ et chercher une équation de degré 3 vérifiée par u .)

Exercice 12. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) := \frac{2e^x+1}{e^x+1}$. Montrer que f est une bijection de \mathbb{R} sur un intervalle à expliciter, et déterminer f^{-1} .

Exercice 13. En écrivant $\ln(2) = \int_1^2 \frac{dt}{t}$ et en faisant un dessin, montrer que $\ln(2) < 1$, et donc $e > 2$.

Exercice 14. En écrivant $\ln(3) = \int_1^3 \frac{dt}{t}$, en faisant un dessin et en découpant l'intervalle $[1, 3]$ en 8 intervalles de longueur $\frac{1}{4}$, montrer que $\ln(3) > \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{11} + \frac{1}{12}$. En déduire que $e < 3$.

Exercice 15. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$.

Exercice 16. Montrer que la fonction $t \mapsto t \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right)$ est croissante sur $[2, \infty[$; et en déduire, en utilisant l'Exercice 15, que $e \geq (1, 01)^{100} \simeq 2,7$.

Exercice 17. En étudiant la fonction $x \mapsto \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$, montrer que

$$\forall x > 0 : \ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \forall x \in]-1, 0[: \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2}.$$

Exercice 18. Montrer que $\forall x > 0 : \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Exercice 19. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \forall x \geq 0 : e^x \geq \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$.

Exercice 20. Soit $\alpha > 0$.

(1) Montrer que si $\alpha \geq 1$, alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : (x+y)^\alpha \geq x^\alpha + y^\alpha$.

(2) Montrer que si $\alpha \leq 1$, alors $\forall x, y \in \mathbb{R}^+ : (x+y)^\alpha \leq x^\alpha + y^\alpha$.

Exercice 21. Déterminer $\arctan(x)$ pour $x := \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{3}, 0, \pm \sqrt{3}$.

Exercice 22. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R} : |\arctan(x)| \leq |x|$.

Exercice 23. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\arctan x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

(*Suggestion* : commencer par le cas $x > 0$, en considérant un triangle rectangle dont les "côtés de l'angle droit" ont pour longueur 1 et x . *Autre possibilité* : utiliser l'identité $\cos(t)^2 = \frac{1}{1+\tan(t)^2}$.)

Exercice 24. En utilisant l'Exercice 23, déterminer une expression "algébrique" pour $\sin(3 \arctan(x))$.

Exercice 25. Montrer que pour tout $t \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, on a $\frac{1-\cos t}{\sin t} = \tan\left(\frac{t}{2}\right)$; et en déduire que

$$\forall x > 0 : \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right) = \frac{1}{2} \arctan(x).$$

Exercice 26. Retrouver la formule de l'Exercice 25 en dérivant la fonction $x \mapsto \arctan\left(\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}\right)$.

Exercice 27. Simplifier $f(x) := \arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right) - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) + \arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$.

Exercice 28. Montrer que si $x, y \in \mathbb{R}$ vérifient $xy < 1$, alors

$$\arctan(x) + \arctan(y) = \arctan\left(\frac{x+y}{1-xy}\right).$$

Exercice 29. En utilisant l'Exercice 28 montrer qu'on a

$$\arctan(1/2) + \arctan(1/3) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 30. Montrer qu'on a $\arctan(1/2) + \arctan(1/5) + \arctan(1/8) = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 31. Vérifier qu'on a $\frac{(2+i)^2}{7+i} = \frac{1}{2}(1+i)$. Puis, en considérant les arguments des 2 membres de cette égalité, établir la formule

$$2 \arctan(1/2) - \arctan(1/7) = \frac{\pi}{4}.$$

Exercice 32. Calculer $(3+i)^2(7+i)$, et en déduire la valeur de $2 \arctan(1/3) + \arctan(1/7)$.

Exercice 33. Vérifier qu'on a $\frac{(5+i)^4}{239+i} = 2(1+i)$, et en déduire la formule suivante (qu'on appelle la **Formule de Machin**) :

$$\pi = 16 \arctan(1/5) - 4 \arctan(1/239).$$

Exercice 34. Déterminer $\arcsin(x)$ pour $x := -\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1$, et déterminer $\arccos(x)$ pour $x := -1, -\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 35. Calculer $\arcsin(\sin(x))$ et $\arccos(\cos(x))$ pour $x \in [0, 2\pi]$.

Exercice 36. Calculer $\cos(2 \arccos(3/4))$ et $\sin(\arcsin(2/5) + \arcsin(3/5))$.

Exercice 37. Simplifier les expressions suivantes : $\sin(2 \arcsin x)$, $\cos(2 \arccos x)$, $\sin(2 \arccos x)$ et $\cos(2 \arcsin x)$.

Exercice 38. Simplifier $\sin^2\left(\frac{\arccos x}{2}\right)$ et $\cos^2\left(\frac{\arcsin x}{2}\right)$.

Exercice 39. Montrer que $\forall x \in [-1, 1] : \arccos(x) + \arccos(-x) = \pi$.

Exercice 40. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[: \tan(\arcsin(x)) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

Exercice 41. Montrer que $\forall x \in [-1, 1] \setminus \{0\}, \tan(\arccos(x)) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$.

Exercice 42. Dériver la fonction $x \mapsto \arcsin(\sqrt{x})$ sur $]0, 1[$, et en déduire que

$$\forall x \in]0, 1[: \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\varepsilon}^x \frac{du}{\sqrt{u(1-u)}} = 2 \arcsin(\sqrt{x}).$$

Plus généralement, montrer que si $a, b \in \mathbb{R}$ et $a < b$, alors

$$\forall x \in]a, b[: \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_{\alpha}^x \frac{du}{\sqrt{(u-a)(b-u)}} = 2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{x-a}{b-a}}\right).$$

Exercice 43. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[: \arctan\left(\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) = \frac{1}{2} \arccos(x)$.

Exercice 44. Simplifier $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$, ou bien en dérivant ou bien en posant $x := \tan(t)$.

Exercice 45. Simplifier $\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ et $\arccos\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)$ en posant $x := \tan(t/2)$.

Exercice 46. Démontrer “les” formules pour $\operatorname{ch}(a+b)$ et $\operatorname{sh}(a+b)$.

Exercice 47. Trouver “la” formule pour $\operatorname{th}(a+b)$.

Exercice 48. On a vu en cours que la fonction sh est une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} . En notant argsh la bijection réciproque, montrer que la fonction argsh est dérivable sur \mathbb{R} , calculer sa dérivée, puis montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} : \text{argsh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right).$$

Exercice 49. On a vu en cours que la restriction de la fonction ch à $[0, \infty[$ est une bijection de $[0, \infty[$ sur $[1, \infty[$. En notant $\text{argch} : [1, \infty[\rightarrow [0, \infty[$ la bijection réciproque, montrer que la fonction argch est dérivable sur $]1, \infty[$, calculer sa dérivée, puis montrer que

$$\forall x \in [1, \infty[: \text{argch}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right).$$

Exercice 50. On a vu en cours que la fonction th est une bijection de \mathbb{R} sur $] -1, 1[$. En notant argth la bijection réciproque, montrer que

$$\forall x \in] -1, 1[: \text{argth}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$