

Feuille d'exercices n° 6

Exercice 1. Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$.

- (1) Pour $a \in \mathbb{R}$, on note $\tau_a f$ la fonction définie par $\tau_a f(t) = f(t - a)$. Montrer que pour tout $x \neq 0$, on a

$$\widehat{f}(x) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (f(t) - \tau_{\pi/x} f(t)) e^{-ixt} dt.$$

- (2) En déduire que $\widehat{f}(x) \rightarrow 0$ quand $x \rightarrow \pm\infty$. Ce résultat s'appelle le **Lemme de Riemann-Lebesgue**.

Exercice 2. Montrer que $L^1(\mathbb{R})$ n'a pas d'unité pour la convolution ; autrement dit, qu'il n'existe pas de fonction $k \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\forall f \in L^1(\mathbb{R}) : k * f = f$. (On peut par exemple utiliser l'Exercice 1.)

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(t) := 1 - |t|$ si $|t| \leq 1$, et $f(t) := 0$ si $|t| > 1$. Calculer la transformée de Fourier de f , et en déduire la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{\mathbb{R}} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} dx.$$

Exercice 4. Montrer que si f et g sont deux fonctions de $L^1(\mathbb{R})$, alors les fonctions $\overline{f} \check{g}$ et $\widehat{f} g$ sont dans $L^1(\mathbb{R})$ et

$$\int_{\mathbb{R}} \overline{f} \check{g} = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f} g.$$

Exercice 5. En utilisant la formule d'inversion de Fourier et l'Exercice 4, montrer que si f est une fonction appartenant à $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R})$, alors

$$\int_{\mathbb{R}} |f(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} |\widehat{f}(x)|^2 dx.$$

Cette formule s'appelle la **formule de Plancherel**.

Exercice 6. On admet que la formule de Plancherel est valable pour toute fonction $f \in L^1(\mathbb{R})$ telle que $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$. En considérant $f := \mathbf{1}_{[-1,1]}$, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin x}{x} \right)^2 dx = \pi.$$

Exercice 7. Soit ν une mesure de probabilité borélienne sur \mathbb{R} . Montrer que pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a

$$\nu(\{a\}) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T e^{-iat} \widehat{\nu}(-t) dt.$$

Exercice 8. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur \mathbb{R} .

(1) Soient X et Y deux va indépendantes et de loi μ .

(a) Vérifier que $\varphi_{X-Y}(t) = |\widehat{\mu}(t)|^2$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, et en déduire, en utilisant l'Exercice 7, qu'on a

$$\mathbb{P}(X = Y) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\widehat{\mu}(t)|^2 dt.$$

(b) Montrer que par ailleurs, on a

$$\mathbb{P}(X = Y) = \int_{\mathbb{R}} \mu(\{x\}) d\mu(x).$$

(2) Montrer que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T |\widehat{\mu}(t)|^2 dt = \sum_{x \in \mathbb{R}} \mu(\{x\})^2.$$

(À toutes fins utiles, on rappelle que l'ensemble $D := \{x \in \mathbb{R}; \mu(\{x\}) \neq 0\}$ est dénombrable.)

Exercice 9. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur \mathbb{R} . Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}$, on a

$$|\widehat{\mu}(v) - \widehat{\mu}(u)|^2 \leq 2(1 - \operatorname{Re} \widehat{\mu}(v - u)).$$

Exercice 10. Soit μ une mesure de probabilité borélienne sur \mathbb{R} . On suppose qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\widehat{\mu}(s) = 1$ pour tout $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$.

(1) En utilisant l'Exercice 9, montrer que pour tout $s \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a $\widehat{\mu}(2^k s) = \widehat{\mu}(s) = 1$.

(2) Montrer que $\mu = \delta_0$.

Exercice 11. Soit X une va réelle, et soient $a, b \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{aX+b}(t) = e^{ibt} \varphi_X(at).$$

Exercice 12. Montrer que si X est une va réelle, alors φ_X est une **fonction de type positif**, ce qui signifie que pour tous $t_1, \dots, t_N \in \mathbb{R}$ et pour tous $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$, on a

$$\sum_{k,l=1}^N a_k \bar{a}_l \varphi_X(t_k - t_l) \geq 0.$$

Exercice 13. Soit X une va réelle.

- (1) On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $\varphi_X(T) = 1$. Montrer que X est presque sûrement à valeurs dans $\frac{2\pi}{T} \mathbb{Z}$, et que φ_X est T -périodique.
- (2) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
 - (i) il existe $t_0 \neq 0$ tel que $|\varphi_X(t_0)| = 1$;
 - (ii) il existe deux constantes $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que X est presque sûrement à valeurs dans $\alpha + \beta \mathbb{Z}$.

Exercice 14. Soit X une va réelle uniformément distribuée sur un intervalle $[a, b]$. Calculer la fonction caractéristique de X . Simplifier dans le cas où $a = -b$.

Exercice 15. Étant donné $a > 0$, on rappelle qu'une va réelle suit la **loi de Cauchy de paramètre a** si

$$\mathbb{P}_X = \frac{a}{\pi} \frac{dx}{a^2 + x^2}.$$

- (1) Soit $a > 0$. Montrer *en utilisant le Théorème des résidus* que si X est une va suivant la loi de Cauchy de paramètre a , alors sa fonction caractéristique est donnée par

$$\varphi_X(t) = e^{-a|t|}.$$

- (2) Dédire de (1) que si X et Y sont des va indépendantes suivant des lois de Cauchy de paramètres a et b , alors $X + Y$ suit la loi de Cauchy de paramètre $a + b$.
- (3) Montrer que si X_1, \dots, X_n sont des va indépendantes suivant la loi de Cauchy de paramètre a et si on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$, alors $Z_n := \frac{S_n}{n}$ suit elle aussi la loi de Cauchy de paramètre a .

Exercice 16. On rappelle qu'une va réelle X suit une **loi gamma de paramètres** (α, λ) , où $\alpha, \lambda > 0$, si

$$\mathbb{P}_X = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} \mathbf{1}_{]0, \infty[}(x) dx.$$

- (1) Soit X une va suivant une loi gamma de paramètres (α, λ) .
 - (a) Montrer que $\varphi_X(z)$ a un sens pour tout nombre complexe z vérifiant $\text{Im}(z) > -\lambda$.
 - (b) Calculer $\varphi_X(iy)$ pour $y > -\lambda$. (À un moment, il sera utile de poser $u := (y + \lambda)x$.)
 - (c) En déduire $\varphi_X(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. (On pourra admettre que la fonction φ_X est holomorphe sur le demi-plan $U := \{z \in \mathbb{C}; \text{Im}(z) > -\lambda\}$.)
- (2) Déduire de (1) que si X et X' sont deux va indépendantes suivant des lois gamma de paramètres (α, λ) et (α', λ) , alors $X + X'$ suit une loi gamma de paramètres $(\alpha + \alpha', \lambda)$.

Exercice 17. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que les va $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes.

Exercice 18. Soit G_1, \dots, G_N des va réelles indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, chaque G_k suivant une loi normale $\mathcal{N}(m_k, \sigma_k^2)$. On note \mathcal{G} le sous-espace vectoriel de L^2 engendré par G_1, \dots, G_N .

- (1) Montrer que si $G \in \mathcal{G}$, alors G suit la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, où $m = \mathbb{E}(G)$ et $\sigma^2 = \sigma^2(G)$.
- (2) Soient $X, Y \in \mathcal{G}$ vérifiant $\mathbb{E}(X) = 0 = \mathbb{E}(Y)$. En utilisant les fonctions caractéristiques, montrer que X et Y sont indépendantes *si et seulement si* elles sont orthogonales dans L^2 .

Exercice 19. Soient X_1, X_2, X_3, X_4 des va réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $D := X_1 X_4 - X_2 X_3$. Calculer la fonction caractéristique de D , et en déduire que D suit la loi $\rho(x) dx$, où $\rho(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

Exercice 20. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de va indépendantes uniformément distribuées sur $[[0, 9]]$. On pose

$$X := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{10^k}.$$

- (1) Justifier la définition de X .

- (2) Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=1}^n \frac{X_k}{10^k}$. Calculer $\varphi_{S_n}(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
- (3) En déduire $\varphi_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.
- (4) Conclure que X est uniformément distribuée sur $[0, 1]$.

Exercice 21. Soit X une va réelle. On suppose que la fonction caractéristique de X est 2 fois dérivable en 0. Le but de l'exercice est de montrer que X admet un moment d'ordre 2, autrement dit que $X \in L^2$.

- (1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on a

$$\frac{\varphi_X(t) + \varphi_X(-t) - 2}{2t^2} = \mathbb{E}\left(\frac{\cos(tX) - 1}{t^2}\right);$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left(\frac{1 - \cos(tX)}{t^2}\right) \text{ admet une limite } l \text{ quand } t \rightarrow 0.$$

- (2) Soit $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs tendant vers 0. En appliquant le Lemme de Fatou aux va Y_n définies par

$$Y_n = \frac{1 - \cos(t_n X)}{t_n^2},$$

montrer qu'on a $\mathbb{E}(\frac{1}{2}X^2) \leq l$; et conclure.

Exercice 22. Soient X et Y deux va réelles définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ et appartenant à L^∞ . On suppose qu'on a

$$\mathbb{E}(X^k Y^l) = \mathbb{E}(X^k) \mathbb{E}(Y^l) \quad \text{pour tous } k, l \in \mathbb{N}.$$

En utilisant les fonctions caractéristiques et le développement en série entière de l'exponentielle, montrer que X et Y sont indépendantes.

Exercice 23. Soit X une va réelle suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$.

- (1) Montrer que X admet des moments de tous ordres.
- (2) Montrer, en utilisant uniquement la définition de φ_X , qu'on peut développer $\varphi_X(t)$ en série entière sur \mathbb{R} .
- (3) En supposant connu que $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$, en déduire la valeur de $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
- (4) Calculer *directement* $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ à l'aide d'intégrations par parties, et *en déduire* que $\varphi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 24. Soit X une va réelle, et soit $a > 0$. On suppose qu'on a $\mathbb{E}(e^{a|X|}) < \infty$. Montrer que φ_X est développable en série entière sur $] -a, a[$.

Exercice 25. Soient X et Y deux va réelles. On suppose que pour tout $a > 0$, on a $\mathbb{E}(e^{a|X|}) < \infty$ et $\mathbb{E}(e^{a|Y|}) < \infty$. Montrer que si $\mathbb{E}(X^k) = \mathbb{E}(Y^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y$. (Utiliser l'Exercice 24.)

Exercice 26. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de loi $\mathcal{N}(0, 1)$. On pose $Z := XY$.

- (1) Montrer que Z admet des moments de tous ordres, et calculer ces moments à l'aide de l'Exercice 23.
- (2) En déduire que φ_Z est développable en série entière sur $] -1, 1[$, et qu'on a

$$\varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \quad \text{pour tout } t \in] -1, 1[.$$

Exercice 27. Soient X et Y deux va réelles indépendantes. On pose $Z := XY$.

- (1) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_Z(t) = \int_{\mathbb{R}} \varphi_X(ty) d\mathbb{P}_Y(y).$$

- (2) On suppose que X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} : \varphi_Z(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}.$$

Exercice 28. Soit X une va réelle, et soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X . Soit également N une va à valeurs dans \mathbb{N} , indépendante des X_k . On note G_N la fonction génératrice de N :

$$G_N(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N = k) x^k \quad \text{pour } x \in [-1, 1].$$

Enfin, on note S_N la va définie par

$$S_N(\omega) := \sum_{k=1}^{N(\omega)} X_k(\omega),$$

avec la convention $\sum_{k=1}^0 = 0$ (autrement dit : $S_N(\omega) = 0$ si $N(\omega) = 0$). Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{S_N}(t) = G_N(\varphi_X(t)).$$

Exercice 29. Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de va réelles. On suppose que (X_n) converge en loi vers une va X , et que (Y_n) converge en loi vers une va Y . De plus, on suppose que X et Y sont indépendantes, et que X_n et Y_n sont indépendantes pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + Y$.

Exercice 30. Soient X et Y deux va indépendantes suivant la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n := X + \frac{1}{n}$ et $Y_n = (1 - X) - \frac{1}{n}$. Montrer que X_n converge en loi vers X , que Y_n converge en loi vers Y , mais que $X_n + Y_n$ ne converge pas en loi vers $X + Y$. Comparer avec l'Exercice 29.

Exercice 31. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit Z_n une va à valeurs dans \mathbb{N} , uniformément distribuée sur l'ensemble $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$. Montrer que la suite (Z_n) ne converge pas en loi.

Exercice 32. Soit (Z_n) une suite de va réelles. On suppose que chaque Z_n suit une loi normale $\mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. Montrer que la suite (Z_n) converge en loi si et seulement si les deux suites (m_n) et (σ_n^2) sont convergentes.

Exercice 33. Soit (Z_n) une suite de va réelles. On suppose que chaque Z_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, et que $p_n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que (Z_n) converge en loi si et seulement si np_n admet une limite quand $n \rightarrow \infty$, et déterminer alors la loi limite.

Exercice 34. Soit (Y_n) une suite de va réelles. On suppose que chaque Y_n suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, et que p_n admet une limite p quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que la suite $(\frac{Y_n}{n})$ converge en loi vers la constante p .

Exercice 35. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de va réelles. On suppose que X_n est uniformément distribuée sur l'ensemble $\llbracket 1, n \rrbracket$, pour tout $n \geq 1$.

- (1) Montrer *en utilisant les fonctions caractéristiques* que $Z_n = \frac{X_n}{n}$ converge en loi vers une va uniformément distribuée sur $[0, 1]$.
- (2) Redémontrer ce résultat en utilisant uniquement la définition de la convergence en loi.

Exercice 36. Soit X une va réelle appartenant à L^1 , d'espérance $\mathbb{E}(X) = c \geq 0$, et soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X . Soit également $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $]0, 1]$ telle que $p_n \rightarrow 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on se donne une va N_n à valeurs dans \mathbb{N}^* indépendante des X_j et suivant une loi géométrique de paramètre p_n , i.e. $\mathbb{P}(N_n = k) = (1 - p_n)^{k-1} p_n$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_k := X_1 + \dots + X_k$, et pour $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$Z_n(\omega) := p_n S_{N_n(\omega)}(\omega) = p_n (X_1(\omega) + \dots + X_{N_n(\omega)}(\omega)).$$

- (1) Justifier que les Z_n sont des va.
- (2) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, on peut écrire

$$\mathbb{E}(f(Z_n)) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N_n = k) \mathbb{E}(f(p_n S_k)).$$

- (3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\varphi_{Z_n}(t) = \frac{p_n \varphi_X(tp_n)}{1 - (1 - p_n) \varphi_X(tp_n)}.$$

- (4) En utilisant le développement limité de φ_X à l'ordre 1 en 0, montrer que si $c = 0$, alors la suite (Z_n) converge en loi vers 0, et que si $c > 0$, alors (Z_n) converge en loi une va Z suivant la loi exponentielle de paramètre $1/c$.

Exercice 37. Soit X une va réelle à densité, $\mathbb{P}_X = \rho(x)dx$. On suppose de plus que ρ est une fonction *paire*, et que $X \in L^4$. Soit également $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de nombres réels positifs, et soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de va indépendantes de lois $\mathbb{P}_{X_k} = \rho_k(x)dx$, où $\rho_k(x) := \frac{1}{a_k} \rho\left(\frac{x}{a_k}\right)$. On suppose que

$$\sum_{k=1}^n a_k^4 = o\left(\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^2\right) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Pour $n \geq 1$, on pose

$$S_n := X_1 + \cdots + X_n \quad \text{et} \quad \sigma_n := \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma^2(X_k)}.$$

Le but de l'exercice est de montrer que $\frac{S_n}{\sigma_n}$ converge en loi vers une va $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$.

- (1) Pour $n \geq 1$, exprimer la fonction caractéristique de $\frac{S_n}{\sigma_n}$ à l'aide de φ_X , de σ_n et de a_1, \dots, a_n .
- (2) Montrer que φ_X est une fonction paire et à valeurs réelles, et qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall u \in [-\delta, \delta] : \varphi_X(u) \in [1/2, 3/2]$.
- (3) Montrer que pour $u \in [-\delta, \delta]$, on peut écrire

$$\log(\varphi_X(u)) = -\frac{\sigma^2 u^2}{2} + \eta(u),$$

où $\sigma^2 := \sigma^2(X)$ et $\eta(u) \leq C u^4$ pour une certaine constante C indépendante de u .

- (4) Pour $n \geq 1$, exprimer σ_n^2 en fonction de σ^2 et a_1, \dots, a_n .
- (5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 38. Soit $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de va réelles indépendantes, et soit $\alpha > 0$. On suppose que chaque X_k est uniformément distribuée sur l'intervalle $[-a_k, a_k]$, où $a_k = k^\alpha$. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$ et

$$Z_n := \frac{S_n}{n^{\alpha + \frac{1}{2}}}.$$

En utilisant l'Exercice 37, montrer que (Z_n) converge en loi vers une va $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ où σ^2 est à déterminer.

Exercice 39. Soit X une va réelle appartenant à L^2 , centrée et de variance σ^2 , et soit $(X_j)_{j \geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X . Soit également (N_k) une suite de va à valeurs dans \mathbb{N}^* , indépendantes et indépendantes des X_j . On suppose que $N_k(\omega) \rightarrow \infty$ presque sûrement. Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose

$$Z_k := \frac{S_{N_k}}{\sqrt{N_k}}, \quad \text{où } S_{N_k}(\omega) := X_1(\omega) + \dots + X_{N_k(\omega)}(\omega).$$

(1) Montrer que pour tout $A \in \mathbb{N}^*$, pour tout k et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\left| \varphi_{Z_k}(t) - e^{-\sigma^2 \frac{t^2}{2}} \right| \leq 2\mathbb{P}(N_k < A) + \sum_{n=A}^{\infty} \mathbb{P}(N_k = n) \left| \varphi_{\frac{S_n}{\sqrt{n}}}(t) - e^{-\sigma^2 \frac{t^2}{2}} \right|.$$

(2) Montrer que (Z_k) converge en loi vers une va $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

Exercice 40. Soit X une va réelle appartenant à L^1 , de moyenne m , et soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n := X_1 + \dots + X_n$. En utilisant le développement limité à l'ordre 1 de φ_X , montrer que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} m$.

Exercice 41. Soient X et Y deux va réelles indépendantes appartenant à L^2 et de même loi, avec pour moyenne $m = 0$ et pour variance σ^2 . On suppose que la va $Z := \frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ a la même loi que X et Y . Le but de l'exercice est de montrer que X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

(1) On note φ la fonction caractéristique de X et Y . Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 = \varphi(t)$, et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{4^n}.$$

(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant le développement limité à l'ordre 2 de φ en 0.

Exercice 42. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de même loi, appartenant à L^2 , centrées et de variance σ^2 . On suppose de plus que les va $X + Y$ et $X - Y$ sont indépendantes. Le but de l'exercice est de montrer que X et Y suivent la loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$.

- (1) On note φ la fonction caractéristique de X et de Y . Montrer qu'on a $\varphi(2t) = \varphi_{X+Y}(t)\varphi_{X-Y}(t)$, et en déduire l'identité

$$\varphi(2t) = \varphi(t)^3\varphi(-t).$$

- (2) Pour $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\varphi(t)$ en fonction de $\varphi(\frac{t}{2^n})$ et $\varphi(-\frac{t}{2^n})$; et en déduire que $\varphi(t) \neq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- (3) Pour $t \in \mathbb{R}$ pose $\psi(t) := \frac{\varphi(t)}{\varphi(-t)}$.

(a) Montrer que ψ est dérivable en 0 et calculer $\psi'(0)$.

(b) Exprimer $\psi(2t)$ en fonction de $\psi(t)$, et en déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\psi(t) = \psi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{2^n}.$$

(c) En utilisant le développement limité de ψ en 0, montrer que $\psi(t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

- (4) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\varphi(t) = \varphi\left(\frac{t}{2^n}\right)^{4^n}.$$

- (5) Conclure en utilisant le développement limité à l'ordre 2 de φ en 0.

Exercice 43. Soit X une va réelle appartenant à L^2 , centrée et de variance $\sigma^2 > 0$, et soit $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X . Soit également $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels. On suppose que la série $\sum a_k X_k$ converge en norme L^1 . Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum a_k X_k$ converge en norme L^2 .

(1) Justifier que $\|X\|_1 > 0$, puis montrer que a_k tend vers 0 quand $k \rightarrow \infty$.

(2) Soit S la limite (en norme L^1) de la suite $S_n := \sum_{k=0}^n a_k X_k$. Justifier qu'il existe $t > 0$ tel que $\varphi_S(t) \neq 0$.

(3) Exprimer $\varphi_{S_n}(t)$ à l'aide de φ_X , puis montrer que la série $\sum \log |\varphi_X(a_k t)|$ est convergente.

- (4) Justifier que φ_X admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage de 0, et que ce développement est de la forme

$$\varphi_X(u) = 1 - cu^2 + o(u^2),$$

où $c > 0$ est à déterminer explicitement.

- (5) En utilisant (1), (3) et (4), montrer que la série $\sum a_k^2$ est convergente.
 (6) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 44. Soit (Z_n) une suite de va réelles convergeant en loi vers une va Z . Le but de l'exercice est de montrer que $\varphi_{Z_n}(t)$ tend vers $\varphi_Z(t)$ *uniformément* sur tout intervalle compact $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$.

- (1) Justifier que l'ensemble $\{A \in \mathbb{R}; \mathbb{P}_Z(\{-A, A\}) > 0\}$ est dénombrable, puis montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $A = A_\varepsilon > 0$ tel que
- (*) $\mathbb{P}_Z(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) < \varepsilon$ et $\forall n \geq N : \mathbb{P}_{Z_n}(\mathbb{R} \setminus [-A, A]) < \varepsilon$.
- (2) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$, et soit (s_0, \dots, s_N) une subdivision de $[a, b]$ de "pas" δ . Soit également $\varepsilon > 0$, et soit A_ε vérifiant (*). Montrer que si $0 \leq k \leq N - 1$ et si $t \in [s_k, s_{k+1}]$, alors on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|\varphi_{Z_n}(t) - \varphi_Z(t)| \leq 4\varepsilon + |\varphi_{Z_n}(s_k) - \varphi_Z(s_k)| + 2A_\varepsilon\delta.$$

- (3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 45. Soit $\delta > 0$. Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : pour tout $0 < \varepsilon \leq \delta$, il existe une constante C_ε telle que, pour tout va réelle X , on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq \varepsilon) \leq \frac{C_\varepsilon}{\delta} \int_0^\delta |1 - \varphi_X(t)| dt.$$

- (1) Soit $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(0) = 0$ et

$$g(x) := 1 - \frac{\sin x}{x} \quad \text{si } x \neq 0.$$

Montrer que pour toute va réelle X définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, on a

$$\int_\Omega g(\delta X) d\mathbb{P} = \frac{1}{\delta} \int_0^\delta (1 - \operatorname{Re} \varphi_X(t)) dt.$$

- (2) Justifier que pour tout $\eta > 0$, on a $\inf \{g(x); |x| \geq \eta\} > 0$.
 (3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 46. Soit (Z_n) une suite de va réelles. On suppose qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\varphi_{Z_n}(t) \rightarrow 1$ pour tout $t \in [0, \delta]$. En utilisant l'Exercice 45, montrer que (Z_n) converge en probabilité vers 0. (Par conséquent $Z_n \xrightarrow{L} 0$, et donc $\varphi_{Z_n}(t) \rightarrow 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.)

Exercice 47. Soit $(X_k)_{k \geq 0}$ une suite de va réelles indépendantes. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n := \sum_{k=0}^n X_k$, et on suppose que la suite (S_n) converge *en loi* vers une va Z . Le but de l'exercice est de montrer que (S_n) converge *en probabilité*. On rappelle (cf un exercice de la Feuille 5) qu'il suffit pour cela de montrer que (S_n) est *de Cauchy en probabilité*, autrement dit que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_q - S_p|) \rightarrow 0 \quad \text{quand } p, q \rightarrow \infty.$$

(1) En utilisant l'Exercice 44, montrer qu'il existe $\delta > 0$ et un entier N tel que

$$\forall n \geq N \quad \forall t \in [0, \delta] : |\varphi_{S_n}(t)| \geq \frac{1}{2}.$$

(2) Montrer que si $p < q$, alors

$$\varphi_{S_q} - \varphi_{S_p} = \varphi_{S_p}(\varphi_{S_q - S_p} - 1);$$

et en déduire que si $N \leq p < q$, alors

$$|1 - \varphi_{S_q - S_p}(t)| \leq 2|\varphi_{S_q}(t) - \varphi_{S_p}(t)| \quad \text{pour tout } t \in [0, \delta].$$

(3) En utilisant l'Exercice 45, montrer que (S_n) est de Cauchy en probabilité.