Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de va réelles définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Z_n ne prend que les valeurs 0 et n^2, avec $\mathbb{P}(Z_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}\cdot$ Montrer que $Z_n \xrightarrow{\text{ps}} 0$, mais que Z_n tend tend pas vers 0 en norme L^1.

Exercice 2. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de va réelles indépendantes définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Z_n suit la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n}\cdot$ Montrer que $Z_n \xrightarrow{L^1} 0$, mais que (Z_n) ne converge pas presque sûrement vers 0.

Exercice 3. Soit $(Z_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de va réelles indépendantes définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que Z_n ne prend que les valeurs 0 et n, avec $\mathbb{P}(Z_n = n) = \frac{1}{n}$ et $\mathbb{P}(Z_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}\cdot$ Montrer que $Z_n \xrightarrow{\text{proba}} 0$, mais que (Z_n) ne converge vers 0 ni presque sûrement, ni en norme L^1.

Exercice 4. Soit X une va suivant une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et pour $n \in \mathbb{N}$, soit $Z_n := 1 - X$. Montrer que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, mais que (Z_n) ne converge pas en probabilité vers X.

Exercice 5. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va réelles définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, deux à deux indépendantes et appartenant à L^2. On suppose que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i)$ admet une limite m quand $n \to \infty$, et que $\sum_{i=1}^n \sigma^2(X_i) = o(n^2)$ quand $n \to \infty$. Montrer que si on pose $S_n := \sum\limits_{i=1}^n X_i$, alors $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{L^2} m$.

Exercice 6. Soit (X_n) une suite de va appartenant à L^1 définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, et soit $X \in L^1$. On suppose que $X_n \xrightarrow{\text{ps}} X$ et que $\|X_n\|_1 \to \|X\|_1$. En appliquant le Lemme de Fatou à $f_n := |X| + |X_n| - |X_n - X|$, montrer que $X_n \to X$ en norme L^1.

Exercice 7. Soit (X_n) une suite de va réelles définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, appartenant à L^1 et convergeant en norme L^1 vers une va $X \in L^1$. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue bornée, alors $f(X_n) \xrightarrow{L^p} f(X)$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 8. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. Pour $n \geqslant 1$, on pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Quelle est la loi de S_n ?

(2) Montrer que $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\text{ps}} 0$.

Exercice 9. Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n := \max(X_1, \dots, X_n)$. Le but de l'exercice est de montrer que $Z_n := \frac{M_n}{\log(n)}$ tend presque sûrement vers $1/\lambda$.

(1) Déterminer la fonction de répartition de Z_n.

(2) Dans cette question, on fixe $c < 1/\lambda$. Montrer que la série $\sum \mathbb{P}(Z_n \leqslant c)$ est convergente ; et en déduire qu'on a $\underline{\lim}\, Z_n \geqslant c$ presque sûrement.

(3) Dans cette question, on fixe $d > 1/\lambda$.

  (a) Montrer qu'on peut trouver un entier K tel que $\sum_{l=0}^{\infty} \mathbb{P}(Z_{K^l} > d) < \infty$.

  (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $l(n)$ l'unique entier l tel que $K^{l-1} \leqslant n < K^l$. Montrer que $Z_n \leqslant \frac{l(n)}{l(n)-1}\, Z_{K^{l(n)}}$.

  (c) Déduire de (a) et (b) qu'on a $\overline{\lim}\, Z_n \leqslant d$ presque sûrement.

(4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 10. Soit (Z_k) une suite de va réelles définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose qu'on a

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}\big(|Z_{k+1} - Z_k| \geqslant 2^{-k}\big) < \infty.$$

Montrer que la suite (Z_k) converge presque sûrement.

Exercice 11. Soit (Z_n) une suite de va réelles. On suppose que (Z_n) est **de Cauchy en probabilité**, ce qui signifie que pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, $\mathbb{P}(|Z_q - Z_p| \geqslant \varepsilon) \to 0$ quand $p, q \to \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que (Z_n) converge en probabilité.

(1) En utilisant l'Exercice 10, montrer que (Z_n) a une sous-suite (Z_{n_k}) qui converge presque sûrement (et donc en probabilité) vers une va Z.

(2) Montrer que $Z_n \xrightarrow{\text{proba}} Z$.

Exercice 12. Soit (X_n) une suite de va appartenant à L^1 définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, et soit $X \in L^1$. Montrer que si $X_n \xrightarrow{\text{proba}} X$ et si $\|X_n\|_1 \to \|X\|_1$, alors $X_n \xrightarrow{L^1} X$. (*Utiliser l'Exercice 6.*)

Exercice 13. Soit (Z_n) une suite de va réelles définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ convergeant en probabilité vers une va Z. Montrer que $f(Z_n) \xrightarrow{\text{proba}} f(Z)$ pour toute fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Exercice 14. Soit (Z_n) une suite de va réelles définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que (Z_n) converge en probabilité vers une va Z, que les Z_n sont dans L^∞, et que la suite (Z_n) est bornée dans L^∞. Montrer que $Z_n \xrightarrow{L^p} Z$ pour tout $p \in [1, \infty[$. Comparer avec l'Exercice 7.

Exercice 15. Soit (Z_n) une suite de va réelles, et soit Z une va réelles, toutes définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Montrer que $Z_n \xrightarrow{\text{proba}} Z$ si et seulement si

$$\int_\Omega \min(1, |Z_n - Z|)\, d\mathbb{P} \to 0.$$

Exercice 16. Dans cet exercice, $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité, et on note $L^0(\Omega, \mathbb{P})$ l'ensemble de toutes les va réelles définies sur Ω.

(1) Soit (M, d) un espace métrique. Montrer qu'une suite (x_n) de points de M converge vers un point $x \in M$ si et seulement si toute sous-suite de (x_n) possède une sous-suite qui converge vers x.

(2) On suppose qu'il existe une suite $(E_n)_{n\geqslant 1}$ d'évènements indépendants tels que $\mathbb{P}(E_n) \to 0$ quand $n \to \infty$ mais $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) = \infty$. Montrer qu'il n'existe pas de distance d sur $L^0(\Omega, \mathbb{P})$ telle que la convergence au sens de d soit équivalente à la convergence presque sûre.

Exercice 17. Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum X_k$ converge en probabilité si et seulement si elle converge presque sûrement. Autrement dit, en posant $S_n := X_0 + \cdots + X_n$, on veut montrer que si la suite (S_n) converge en probabilité, alors elle converge presque sûrement. Dans toute la suite, on supposera donc que (S_n) converge en probabilité.

(1) Soit $\varepsilon > 0$, et soit $n \in \mathbb{N}$. On définit une va $\tau_{n,\varepsilon} : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ en posant

$$\tau_{n,\varepsilon}(\omega) := \min\big\{p > n;\ |S_p(\omega) - S_n(\omega)| \geqslant \varepsilon\big\},$$

avec la convention $\min \varnothing = \infty$. Le but de cette question est de montrer que

$$\mathbb{P}(\tau_{n,\varepsilon} < \infty) \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

(a) Pour $\eta > 0$, justifier l'existence d'un entier N_η tel que
$$\forall m, m' \geqslant N_\eta \ : \ \mathbb{P}\big(|S_{m'} - S_m| \geqslant \varepsilon/2\big) \leqslant \eta.$$

(b) Avec les notations de (a), montrer que pour tous $q > n \geqslant N_\eta$, on a
$$\sum_{p=n+1}^{q} \mathbb{P}\big(\tau_{n,\varepsilon} = p\,,\, |S_q - S_p| < \varepsilon/2\big) \leqslant \eta.$$

(c) Montrer que si $n < p \leqslant q$, alors les deux évènements $\{\tau_{n,\varepsilon} = p\}$ et $\{|S_q - S_p| < \varepsilon/2\}$ sont indépendants.

(d) Déduire des questions précédentes que si $0 < \eta < 1$ et $n \geqslant N_\eta$, alors
$$\eta \geqslant (1-\eta)\,\mathbb{P}(\tau_{n,\varepsilon} < \infty).$$

(e) Démontrer le résultat souhaité.

(2) Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$E_{n,k} := \big\{\omega \in \Omega;\ \exists p > n \ : \ |S_p(\omega) - S_n(\omega)| \geqslant 1/k\big\}.$$
Montrer que pour tout k fixé, $\mathbb{P}(E_{n,k}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

(3) Montrer que la suite (S_n) vérifie presque sûrement le critère de Cauchy, et conclure.

Exercice 18. Soit (X_k) une suite de va réelles indépendantes, centrées et appartenant à L^2. En utilisant l'Exercice 17, montrer que si on a $\sum_0^\infty \sigma^2(X_k) < \infty$, alors la série $\sum X_k$ converge presque sûrement.

Exercice 19. Soit $(a_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On suppose que la série $\sum a_k^2$ est convergente. Montrer qu'il existe une suite de choix de signes (ε_k) – *i.e.* $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$ pour tout k – telle que la série $\sum \varepsilon_k a_k$ converge. (Utiliser l'Exercice 18.)

Exercice 20. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit μ_n la mesure borélienne sur $[0, 1]$ définie par
$$\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{\frac{k}{n}}.$$
Montrer que (μ_n) converge étroitement vers une mesure μ à déterminer.

Exercice 21. Soit ξ un nombre complexe de module 1 qui n'est pas racine de l'unité, *i.e.* $\xi^m \neq 0$ pour tout $m \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note μ_n la mesure borélienne sur $\mathbb{T}$ définie par
$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \delta_{\xi^k}.$$

(1) Pour $r \in \mathbb{Z}$, soit $e_r : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $e_r(z) := z^r$. Montrer que $\int_{\mathbb{T}} e_r \, d\mu_n \to 0$ quand $n \to \infty$.

(2) On note m la **mesure de Lebesgue sur** $\mathbb{T}$, qui est définie comme suit : pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{T}$,
$$m(A) := \frac{1}{2\pi} \lambda_1\Big(\{\theta \in [0, 2\pi[\, ;\ e^{i\theta} \in A\} \Big).$$
De manière équivalente : pour toute fonction borélienne bornée $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$, on a
$$\int_{\mathbb{T}} f \, dm = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \, \frac{d\theta}{2\pi}.$$
Montrer que $\int_{\mathbb{T}} P \, d\mu_n \to \int_{\mathbb{T}} P \, dm$ pour tout *polynôme trigonométrique* P.

(3) Montrer que la suite (μ_n) converge étroitement vers m.

Exercice 22. Soit (μ_n) une suite de mesures finies sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que (μ_n) converge étroitement. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver un compact $K \subseteq \mathbb{R}^d$ tel que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ \mu_n(\mathbb{R}^d \backslash K) < \varepsilon$.

Exercice 23. Soit (Z_n) une suite de va définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace métrique (Λ, d). On suppose que (Z_n) converge en loi vers une va Z *constante*, $Z(\omega) \equiv a \in \Lambda$. En considérant le borélien $B := \Lambda \backslash B(a, \varepsilon)$, montrer que $\mathbb{P}\big(d(Z_n, Z) \geqslant \varepsilon\big) \to 0$ pour tout $\varepsilon > 0$. En particulier, si les Z_n sont des va réelles, alors $Z_n \xrightarrow{\text{proba}} Z$.

Exercice 24. Soit (Z_n) une suite de va et soit Z une va, toutes à valeurs dans un même espace métrique (Λ, d). Montrer que si $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$, alors $\phi(Z_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi(Z)$ pour toute fonction continue $\phi : \Lambda \to \mathbb{R}$.

Exercice 25. Soit (Z_n) une suite de va et soit Z une va, toutes à valeurs dans un même espace métrique (Λ, d). Montrer que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$ si et seulement si toute sous-suite de (Z_n) possède une sous-suite qui converge en loi vers Z.

Exercice 26. Soit $p \in [0, 1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, soit Z_n une va suivant la loi binomiale $\mathfrak{B}(n, p)$. Montrer que $\frac{Z_n}{n}$ converge en loi vers une va à déterminer.

Exercice 27. Soient (X_n) et (Y_n) deux suites de va réelles définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que (X_n) converge en loi vers une va X, et que Y_n converge en loi vers une va *constante* c.

(1) On munit $\mathbb{R}^2$ de la distance induite par n'importe quelle norme. Montrer que si $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction lipschitzienne bornée, alors il existe deux constantes A et B telles que, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\Big|\mathbb{E}\big(\Phi(X_n, Y_n)\big) - \mathbb{E}\big(\Phi(X_n, c)\big)\Big| \leqslant A\varepsilon + B\,\mathbb{P}\big(|Y_n - c| \geqslant \varepsilon\big).$$

(2) Montrer que $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} (X, c)$.

(3) En déduire que $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + c$ et $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} cX$.

Exercice 28. Soient (Z_n) et (Z'_n) deux suites de va réelles définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que (Z_n) converge en loi vers une va Z et que $Z'_n - Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} 0$. Montrer que $Z'_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

Exercice 29. Soit $\theta > 0$, et soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de va indépendantes uniformément distribuées sur $[0, \theta]$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(1) Calculer la fonction de répartition de M_n.

(2) Montrer que $M_n \xrightarrow{\text{ps}} \theta$.

(3) Montrer que $Z_n := \frac{n(\theta - M_n)}{M_n}$ converge en loi vers une va Z dont on déterminera la loi.

Exercice 30. Soit $\theta > 0$, et soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi $\mathbb{P}_\theta := \frac{1}{2\sqrt{\theta x}}\, \mathbf{1}_{]0,\theta]}(x)dx$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Calculer la fonction de répartition de M_n, puis montrer que $Z_n := \frac{n(\theta - M_n)}{M_n}$ converge en loi vers une va Z dont on déterminera la loi.

Exercice 31. Soit $(X_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes une même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $M_n := \max(X_1, \ldots, X_n)$. Montrer que $Z_n := M_n - \frac{1}{\lambda}\log(n)$ converge en loi vers une va Z dont on déterminera la fonction de répartition.

Exercice 32. Soit $(X_k)_{k \geqslant 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi de Cauchy $\frac{1}{\pi}\frac{dx}{1+x^2}$. Pour $n \geqslant 1$ on pose $M_n := \max(X_1, \ldots, M_n)$. Calculer la fonction de répartition de M_n, puis montrer que la suite $(\frac{M_n}{n})$ converge en loi vers une va $Z > 0$ telle que $\frac{1}{Z}$ suit une loi exponentielle de paramètre à déterminer.

Exercice 33. Pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on définit un va T_N à valeurs dans $\mathbb{N}$ de la façon suivante : on se donne des va $X_0, \dots, X_N$ indépendantes et uniformément réparties sur $[\![1, N]\!] = \{1, 2, \dots, N\}$, et on pose

$$T_N := \min\big\{m \in [\![1, N]\!];\ \exists l < m \ :\ X_l = X_m\big\}.$$

(1) Justifier la définition, puis montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(T_N > n) = \prod_{k=0}^{n} \Big(1 - \frac{k}{N}\Big)$$

(2) Montrer $Z_N := \frac{T_N}{\sqrt{N}}$ converge en loi vers une va réelle Z telle que $F_Z(t) = (1 - e^{-t^2/2})\mathbf{1}_{[0,\infty[}(t)$.

Exercice 34. Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de va réelles $\geqslant 0$. On suppose que (Z_n) converge en loi vers une va $Z \in L^1$, et qu'on a de plus $F_{Z_n} \geqslant F_Z$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\mathbb{E}(Z_n) \to \mathbb{E}(Z)$.

Exercice 35. Soit (Z_n) une suite de va réelles, et soit Z une va réelle. On suppose que $\mathbb{P}(Z_n \in I) \to \mathbb{P}(Z \in I)$ pour tout *intervalle compact* $I \subseteq \mathbb{R}$.

(1) Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver $\alpha < t < \beta$ et un entier N tels que

$$\mathbb{P}\big(Z \notin [\alpha, \beta]\big) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}\big(Z_n \notin [\alpha, \beta]\big) < \varepsilon \quad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

Comment peut-on alors majorer $\mathbb{P}(Z < \alpha)$ et $\mathbb{P}(Z_n < \alpha)$ pour $n \geqslant N$?

(2) Montrer que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$.

Exercice 36. Soit (Z_n) une suite de va réelles, et soit Z une va réelle. On suppose qu'il existe un ensemble *dense* $D \subseteq \mathbb{R}$ tel que $F_{Z_n}(s) \to F_Z(s)$ pour tout $s \in D$.

(1) Soient $s, t, s' \in \mathbb{R}$ avec $s < t < s'$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$|F_{Z_n}(t) - F_Z(t)| \leqslant |F_{Z_n}(s) - F_Z(s)| + |F_{Z_n}(s') - F_Z(s')| + |F_Z(s') - F_Z(s)|.$$

(2) Montrer que (Z_n) converge en loi vers Z.

Exercice 37. Soit (Z_n) une suite de va réelles. On suppose que (Z_n) converge en loi vers une va Z dont la fonction de répartition F_Z est *continue*.

(1) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'on peut trouver des nombres réels $t_0 < t_1 \cdots < t_N$ tels que $F_Z(t_0) < \varepsilon$, $F_Z(t_N) > 1 - \varepsilon$ et $F_Z(t_{i+1}) - F_Z(t_i) < \varepsilon$ pour $i = 0, \dots, N-1$.

(2) Montrer que $F_{Z_n}(t) \to F_Z(t)$ *uniformément* sur $\mathbb{R}$.

Exercice 38. Soit (Z_n) une suite de va réelles, et soit Z une va réelle. On suppose qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}} |F_{Z_n}(t) - F_Z(t)|^\alpha \, dt \to 0$ quand $n \to \infty$. Montrer que $Z_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Z$. (On pourra par exemple montrer, en utilisant l'Exercice 36, que toute sous-suite de (Z_n) possède une sous-suite qui converge en loi vers Z.)

Exercice 39. Soit (Z_n) une suite de va réelles, *a priori* définies sur des espaces de probabilité différents, convergeant en loi vers une va Z. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe des va $\widetilde{Z}_n$ et $\widetilde{Z}$ définies sur le même $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ telles que $\mathbb{P}_{\widetilde{Z}_n} = \mathbb{P}_{Z_n}$ pour tout n, $\mathbb{P}_{\widetilde{Z}} = \mathbb{P}_Z$, et $\widetilde{Z}_n \to \widetilde{Z}$ *presque sûrement.*

(1) On prend $\Omega :=]0,1[$ muni de la mesure de Lebesgue, que l'on note $\mathbb{P}$, et on définit des va $\widetilde{Z}_n$ et $\widetilde{Z}$ sur Ω en posant pour tout $\omega \in]0,1[$:
$$\widetilde{Z}_n(\omega) := \inf\left\{y \in \mathbb{R};\ F_{Z_n}(y) > \omega\right\} \quad \text{et} \quad \widetilde{Z}(\omega) = \inf\left\{y \in \mathbb{R};\ F_Z(y) > \omega\right\}.$$
Montrer qu'on a $\mathbb{P}_{\widetilde{Z}} = \mathbb{P}_Z$, et $\mathbb{P}_{\widetilde{Z}_n} = \mathbb{P}_{Z_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Pour $\omega \in \Omega$, on pose $a(\omega) = \inf\{y \in \mathbb{R};\ F_Z(y) \geqslant \omega\}$. Vérifier qu'on a $a(\omega) \leqslant \widetilde{Z}(\omega)$, et $\widetilde{Z}(\omega) \leqslant a(\omega')$ si $\omega < \omega'$. En déduire que si on pose $I_\omega :=]a(\omega), \widetilde{Z}(\omega)[$, alors les intervalles I_ω sont deux à deux disjoints, puis montrer que l'ensemble $D := \{\omega \in \Omega;\ a(\omega) < \widetilde{Z}(\omega)\}$ est dénombrable.

(3) Soit $\omega \in \Omega$, et soit $t \in \mathbb{R}$ un point de continuité de F_Z. Montrer que si $t < a(\omega)$, alors $\underline{\lim}\, \widetilde{Z}_n(\omega) \geqslant t$, et que si $t > \widetilde{Z}(\omega)$, alors $\overline{\lim}\, \widetilde{Z}_n(\omega) \leqslant t$.

(4) Montrer que $\widetilde{Z}_n(\omega) \to \widetilde{Z}(\omega)$ pour tout $\omega \in \Omega \backslash D$, et conclure.