

Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et soit X une va réelle uniformément distribuée sur l'ensemble $\Lambda = \{1, \dots, N\}$. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 2. Soit X une va réelle uniformément distribuée sur un intervalle $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$. Calculer l'espérance et la variance de X .

Exercice 3. Soit X une va suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que si λ est un *entier*, alors

$$\mathbb{E}(|X - \lambda|) = \frac{2\lambda^\lambda e^{-\lambda}}{(\lambda - 1)!}.$$

Exercice 4. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et de même loi $\mu := \frac{1}{t^2} \mathbf{1}_{[1, \infty[}(t) dt$. Calculer $\mathbb{E}\left(e^{-\frac{1}{X\sqrt{Y}}}\right)$.

Exercice 5. Soient X et Y deux va réelles indépendantes et strictement positives définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Montrer que les va (X, Y) et (Y, X) ont la même loi, et en déduire qu'on a $\mathbb{E}\left(\frac{X}{X+Y}\right) = \frac{1}{2} = \mathbb{E}\left(\frac{Y}{X+Y}\right)$.

Exercice 6. Montrer que si Z et S sont des va réelles indépendantes, alors

$$\forall t \in \mathbb{R} : F_{S+Z}(t) = \int_{\mathbb{R}} F_S(t - z) d\mathbb{P}_Z(z) = \mathbb{E}(F_S(t - Z)).$$

Exercice 7. Soient X et T deux va réelles indépendantes. On note F_X et F_T leurs fonctions de répartition. Montrer qu'on a

$$\mathbb{P}(X \leq T) = \mathbb{E}(F_X(T));$$

et que si la fonction F_T est continue, alors on a aussi

$$\mathbb{P}(X \leq T) = \mathbb{E}(1 - F_T(X)).$$

Exercice 8. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Soit également $a \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Enfin, pour $\omega \in \Omega$, on note $T(\omega)$ le plus petit entier n tel que $S_n(\omega) \geq a$ s'il en existe un, et on pose $T(\omega) = \infty$ si $S_n(\omega) < a$ pour tout $n \geq 1$.

- (1) Montrer que T est à valeurs dans $\{a, a + 1, a + 2, \dots\} \cup \{\infty\}$, et que T est une va (*i.e.* T est mesurable).
- (2) Montrer que $T < \infty$ ps.
- (3) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}(T = a + k) = \binom{a + k - 1}{a - 1} p^a (1 - p)^k.$$

- (4) Quelle formule “bien connue” obtient-on en appliquant (2) et (3) ?
- (5) On suppose que $a \geq 2$. Montrer que $\mathbb{E}\left(\frac{a-1}{T-1}\right) = p$ et $\mathbb{E}\left(\frac{a}{T}\right) > p$.

Exercice 9. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $\theta > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \frac{\theta}{\theta + k} = \prod_{k=1}^n \frac{k}{\theta + k}.$$

- (1) Montrer par récurrence sur n le résultat suivant : si X_1, \dots, X_n sont des va réelles indépendantes suivant la loi exponentielle $\mathcal{E}(1)$, et si Y_1, \dots, Y_n sont des va réelles indépendantes telles que Y_k suit la loi $\mathcal{E}(k)$ pour $k = 1, \dots, n$, alors $X := \max(X_1, \dots, X_n)$ a la même loi que $Y := Y_1 + \dots + Y_n$. (*Utiliser les fonctions de répartition et l'Exercice 6.*)
- (2) Soit T un va réelle suivant la loi $\mathcal{E}(\theta)$. Soient également X_1, \dots, X_n des va réelles indépendantes, indépendantes de T et de loi $\mathcal{E}(1)$, et soit $X := \max(X_1, \dots, X_n)$. En utilisant l'Exercice 7, montrer qu'on a

$$\mathbb{E}(e^{-\theta X}) = \mathbb{E}((1 - e^{-T})^n).$$

- (3) Démontrer la formule annoncée.

Exercice 10. Soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de va réelles indépendantes suivant toutes la loi uniforme sur $[0, 1]$, définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

- (1) En utilisant l'Exercice 6, montrer par récurrence sur n que

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \forall t \in [0, 1] : F_{S_n}(t) = \frac{t^n}{n!}.$$

- (2) Pour $n \geq 2$, calculer $\mathbb{P}(1 - X_n < S_{n-1} \leq 1)$.

- (3) On définit une application $T : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ de la façon suivante : si $\omega \in \Omega$, alors $T(\omega)$ est le plus petit entier n tel que $S_n(\omega) > 1$ s'il en existe un, et $T(\omega) = \infty$ si $S_n(\omega) \leq 1$ pour tout $n \geq 1$. Justifier que T est une va, et montrer que $\mathbb{E}(T) = e$.

Exercice 11. Soit X une va réelle, et soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X (définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$). Soit également N une va à valeurs dans \mathbb{N}^* , indépendante des X_i . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Enfin, pour $\omega \in \Omega$ on pose

$$S_N(\omega) := S_{N(\omega)}(\omega) = X_1 + \dots + X_{N(\omega)}(\omega).$$

- (1) Justifier que S_N est une va et exprimer S_N comme somme d'une série faisant intervenir N et les S_n .
- (2) Montrer que si X et N sont dans L^1 , alors $S_N \in L^1$ et

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(N) \mathbb{E}(X).$$

Exercice 12. Soit X une va à valeurs dans \mathbb{N} .

- (1) Justifier que la va $\frac{1}{X+1}$ est dans L^1 .
- (2) On note $G_X = [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction génératrice de X ,

$$G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(X = k) s^k.$$

Montrer qu'on a

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right) = \int_0^1 G_X(s) ds.$$

- (3) On suppose que X suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{1}{X+1}\right)$.

Exercice 13. Dans cet exercice, X est une va réelle.

- (1) Montrer qu'il existe au moins un nombre réel m tel que $\mathbb{P}(X \leq m) \geq 1/2$ et $\mathbb{P}(X \geq m) \geq 1/2$. On dit qu'un tel m est une **médiane** de X . (On pourra considérer $m := \inf\{t \in \mathbb{R} : F_X(t) \geq 1/2\}$.)
- (2) Montrer que si m est une médiane de X , alors :

$$\begin{aligned} \forall x > m : \mathbb{P}(X \leq x) &\geq \frac{1}{2} & \text{et} & \quad \mathbb{P}(X \geq x) \leq \frac{1}{2}; \\ \forall x < m : \mathbb{P}(X \geq x) &\geq \frac{1}{2} & \text{et} & \quad \mathbb{P}(X \leq x) \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

- (3) Soit $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $\psi(x) = \mathbb{P}(X \leq x) - \mathbb{P}(X \geq x)$. Montrer que si $X \in L^1$ et si $a < b$, alors

$$\mathbb{E}(|X - b|) - \mathbb{E}(|X - a|) = \int_a^b \psi(x) dx.$$

- (4) On suppose que $X \in L^1$. Dédurre des questions précédentes que si m est une médiane de X , alors

$$\mathbb{E}(|X - m|) = \inf \left\{ \mathbb{E}(|X - u|); u \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 14. Soit X une va réelle, et soit ε une va indépendante de X et suivant la loi de Rademacher, i.e. $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$. On pose $Y = \varepsilon X$.

- (1) Montrer qu'on a $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$.
- (2) Montrer que si la va X^2 n'est pas presque sûrement constante, alors X et Y ne sont pas indépendantes.

Exercice 15. Soient X et Y deux va réelles définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$.

- (1) On suppose que X ne peut prendre que 2 valeurs distinctes au plus. Montrer que si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction borélienne quelconque, alors $f(X)$ est fonction affine de X , i.e. il existe des constantes a et b telles que $f(X) = aX + b$.
- (2) On suppose que X et Y ne peuvent prendre chacune que 2 valeurs distinctes au plus. Montrer que X et Y sont indépendantes *si et seulement si* $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \mathbb{E}(Y)$.

Exercice 16. Soient X_1, \dots, X_N des va réelles deux à deux indépendantes et appartenant à L^2 , de même moyenne m et de même variance σ^2 . On pose

$$\bar{X} = \frac{X_1 + \dots + X_N}{N} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (X_i - \bar{X})^2.$$

Calculer $\mathbb{E}(\bar{X})$ et $\mathbb{E}(V)$.

Exercice 17. Soit X une va réelle définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, et soient $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes.

- (1) Montrer que si Y est une autre va réelle définie sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, alors la va $Z = (f(X) - f(Y))(g(X) - g(Y))$ est positive.

- (2) On suppose que les va $f(X)$ et $g(X)$ sont dans L^2 . En appliquant (1) à une va Y indépendante de X et de même loi que X , montrer qu'on a

$$\mathbb{E}(f(X)g(X)) \geq \mathbb{E}(f(X)) \mathbb{E}(g(X)).$$

Exercice 18. Soit X un va à valeurs dans un intervalle $[a, b]$. En utilisant le fait que $\sigma^2(X) = \sigma^2(X - c)$ pour toute constante c , montrer que $\sigma^2(X) \leq \frac{(b-a)^2}{4}$.

Exercice 19. Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, et soient $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ des va à valeurs dans $\{-1, 1\}$, deux à deux indépendantes et suivant chacune la loi de Rademacher, *i.e.* $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$. Calculer $\mathbb{E} \left(\left(\sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i \right)^2 \right)$.

Exercice 20. Soit $d \in \mathbb{N}^*$, et soient $u_1, \dots, u_N \in \mathbb{R}^d$ tels que $\|u_i\| \leq 1$ pour $i = 1, \dots, N$, où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d . Soient également $p_1, \dots, p_N \in [0, 1]$. On pose

$$v := \sum_{i=1}^N p_i u_i.$$

- (1) Soient X_1, \dots, X_N des va indépendantes, chaque X_i suivant la loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p_i)$. Montrer qu'on a

$$\mathbb{E} \left(\left\| v - \sum_{i=1}^N X_i u_i \right\|^2 \right) = \sum_{i=1}^N p_i (1 - p_i) \|u_i\|^2.$$

- (2) Montrer qu'il existe $x_1, \dots, x_N \in \{0, 1\}$ tels que

$$\left\| v - \sum_{i=1}^N x_i u_i \right\| \leq \frac{\sqrt{N}}{2}.$$

Exercice 21. (Borel-Cantelli amélioré)

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soit $(E_i)_{i \geq 1}$ une suite d'événements *deux à deux indépendants*. On suppose qu'on a $\sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_i) = \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mathbb{P}(\overline{\lim} E_i) = 1$. (La subtilité est qu'on ne suppose pas que les E_i sont indépendants.)

- (1) Soit $(S_n)_{n \geq 1}$ une suite *croissante* de va réelles positives et appartenant à L^2 . On suppose que

$$\mathbb{E}(S_n) \rightarrow \infty \quad \text{et} \quad \frac{\sigma^2(S_n)}{\mathbb{E}(S_n)^2} \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

- (a) Montrer que $T_n = \frac{S_n}{\mathbb{E}(S_n)}$ tend vers 1 en norme L^2 .

(b) En déduire que $S_n \rightarrow \infty$ presque sûrement.

(2) Conclure en observant que $\overline{\lim} E_i = \{\omega \in \Omega; \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{E_i}(\omega) = \infty\}$.

Exercice 22. Soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe \mathcal{C}^1 telle que ϕ' est intégrable sur \mathbb{R} et $\phi(t) \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow -\infty$. Montrer que si Z est une va réelle quelconque, alors $\phi(Z) \in L^1$ et

$$\mathbb{E}(\phi(Z)) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}(Z > t) \phi'(t) dt.$$

Exercice 23. Soit X une va à valeurs dans \mathbb{N} . Montrer que $\mathbb{E}(X) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X > n)$.

Exercice 24. Soit X une va réelle. On suppose qu'il existe des constantes $A, c, \alpha, t_0 > 0$ telles que $\forall t > t_0 : \mathbb{P}(|X| > t) \leq A e^{-ct^\alpha}$. Montrer que $X \in L^p$ pour tout $p \in [1, \infty[$.

Exercice 25. Soit X une va réelle suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que $X \in L^p$ pour tout $p < \infty$, et calculer $\mathbb{E}(X^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 26. Soit $p \in [1, \infty[$, et soient X et Y deux va réelles définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, indépendantes et appartenant à L^p .

(1) Montrer que $\|X + Y\|_p^p \geq \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |x + y| d\mathbb{P}_Y(y) \right)^p d\mathbb{P}_X(x)$.

(2) En déduire que si Y est centrée, alors $\|X + Y\|_p \geq \|X\|_p$.

Exercice 27. Soit X une va réelle appartenant à L^4 . Pour $k \in \llbracket 0, 4 \rrbracket$, on pose $m_k := \mathbb{E}(X^k)$.

(1) Montrer qu'on a $m_3 \leq m_4^{3/4}$.

(2) Dans cette question, on suppose que $m_1 \leq 0$.

(a) En considérant la forme quadratique $Q : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $Q(u, v, w) := \mathbb{E} \left[(u + vX + wX^2)^2 \right]$, montrer que

$$\det \begin{pmatrix} m_0 & m_1 & m_2 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ m_2 & m_3 & m_4 \end{pmatrix} \geq 0$$

(b) En déduire l'inégalité $m_3^2 \leq m_4 m_2 - m_2^3$.

(c) Montrer qu'on a $m_3 \leq \left(\frac{4}{27}\right)^{1/4} m_4^{3/4}$.

Exercice 28. Soit $a > 0$, et soit $\phi : \mathbb{R} \rightarrow [0, a]$ une fonction borélienne. Montrer que pour tout $0 \leq \alpha < a$, on a

$$\mathbb{P}(\phi(X) \geq \alpha) \geq \frac{\mathbb{E}(\phi(X)) - \alpha}{a - \alpha}.$$

Exercice 29. Soit X une va réelle positive appartenant à L^2 , et soit $\alpha \in]0, 1[$.

- (1) On pose $m = \mathbb{E}(X)$. En écrivant $X = X \mathbf{1}_{[\alpha m, \infty[}(X) + X \mathbf{1}_{]-\infty, \alpha m[}(X)$, établir l'inégalité

$$(1 - \alpha)m \leq \mathbb{E}(X \mathbf{1}_{[\alpha m, \infty[}(X)).$$

- (2) Montrer qu'on a

$$\mathbb{P}(X \geq \alpha \mathbb{E}(X)) \geq (1 - \alpha)^2 \frac{\mathbb{E}(X)^2}{\mathbb{E}(X^2)}.$$

(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Paley-Zygmund**.)

Exercice 30. Soit X une va réelle appartenant à L^2 , de moyenne m , et soit $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de va indépendantes et de même loi que X . Pour $n \geq 1$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. En utilisant convenablement l'inégalité de Tchebitchev, montrer que

$$\liminf \frac{|S_n - nm|}{\sqrt{n}} < \infty \quad \text{presque sûrement.}$$

Exercice 31. Dans cet exercice, n est un entier ≥ 2 . Le but de l'exercice est de montrer que si X_1, \dots, X_n sont des va réelles suivant toutes la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$\mathbb{E}\left(\max(X_1^2, \dots, X_n^2)\right) \leq 2 \log(n) + 2.$$

- (1) Montrer que si X est une va de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, alors

$$\forall u \geq 0 : \mathbb{P}(|X| > u) \leq e^{-\frac{u^2}{2}}.$$

- (2) Soient X_1, \dots, X_n des va de loi $\mathcal{N}(0, 1)$, et soit $Z := \max(X_1^2, \dots, X_n^2)$.

- (a) Montrer à l'aide de (1) que

$$\forall t \geq 0 : \mathbb{P}(Z > t) \leq n e^{-t/2}.$$

- (b) En déduire que

$$\forall \alpha > 0 : \mathbb{E}(Z) \leq \alpha + 2n e^{-\alpha/2}.$$

- (c) Démontrer l'inégalité annoncée.

Exercice 32. Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables réelles indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$. On suppose que les X_i sont dans L^2 , qu'elles sont centrées, et qu'on a $\sum_{i=0}^{\infty} \sigma^2(X_i) < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum X_i$ converge presque sûrement.

(1) Soient $m, N \in \mathbb{N}$, avec $N \leq m$. Pour $j \in \{N, \dots, m\}$, on pose $S_j := \sum_{i=N}^j X_i$.

Soit également $\varepsilon > 0$. Le but de cette question est d'établir l'inégalité suivante (qu'on appelle l'**inégalité maximale de Kolmogorov**) :

$$\mathbb{P}\left(\max_{N \leq j \leq m} |S_j| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^m \sigma^2(X_i).$$

(a) Pour $i \in \{N, \dots, m\}$, on pose

$$B_i := \{\omega \in \Omega; |S_k(\omega)| < \varepsilon \text{ pour tout } k \text{ vérifiant } N \leq k < i\}.$$

Montrer que pour tout $\omega \in \Omega$, on a l'équivalence suivante :

$$\max_{N \leq j \leq m} |S_j(\omega)| \geq \varepsilon \iff \left| \sum_{i=N}^m X_i(\omega) \mathbf{1}_{B_i}(\omega) \right| \geq \varepsilon.$$

(b) Montrer que si $N \leq i < i' \leq m$, alors les variables $X_{i'}$ et $X_i \mathbf{1}_{B_i} \mathbf{1}_{B_{i'}}$ sont indépendantes.

(c) Dédire de (b) qu'on a

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_{i=N}^m X_i \mathbf{1}_{B_i}\right)^2\right) \leq \sum_{i=N}^m \sigma^2(X_i).$$

(d) Démontrer l'inégalité souhaitée

(2) Dédire de (1) que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\exists m \geq N : \left|\sum_{i=N}^m X_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^{\infty} \sigma^2(X_i).$$

(3) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer à l'aide de (2) que pour tout $N \in \mathbb{N}$, on a

$$\mathbb{P}\left(\exists p, q \geq N : \left|\sum_{i=p}^q X_i(\omega)\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2} \sum_{i=N}^{\infty} \sigma^2(X_i).$$

(4) Conclure.

Exercice 33. Soit (a_i) une suite de nombres réels telle que $\sum_{i=0}^{\infty} a_i^2 < \infty$. En utilisant l'Exercice 32, montrer qu'il existe une suite de signes $(\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que la série $\sum \varepsilon_i a_i$ est convergente.

Exercice 34. Soit X une va à valeurs dans $[-1, 1]$ et telle que $\mathbb{E}(X) = 0$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $r > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|X| \geq r) \leq 2e^{-r^2/2}.$$

- (1) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $e^{tx} \leq \frac{1-x}{2} e^{-t} + \frac{x+1}{2} e^t$.
- (2) En déduire que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a $\mathbb{E}(e^{tX}) \leq e^{t^2/2}$.
- (3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 35. Soit X une variable aléatoire *bornée*, d'espérance nulle, et soit (X_i) une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que X . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Le but de l'exercice est de montrer que $\frac{S_n}{n^\alpha}$ tend presque sûrement vers 0 pour tout $\alpha > 1/2$.

- (1) Justifier que $e^{tX} \in L^1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
- (2) Soit $a > 0$. Montrer que pour tout $\lambda > 0$ et pour tout $n \geq 1$, on a

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq a) \leq e^{-\lambda a} (\mathbb{E}(e^{\lambda X})^n + \mathbb{E}(e^{-\lambda X})^n).$$

- (3) Montrer que la fonction $t \mapsto \mathbb{E}(e^{tX})$ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} , puis montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall t \in [-1, 1] : \mathbb{E}(e^{tX}) \leq 1 + Ct^2$.
- (4) Soit $\alpha > 0$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $\lambda \in]0, 1]$, on a

$$\mathbb{P}\left(\frac{|S_n|}{n^\alpha} \geq \varepsilon\right) \leq 2e^{-\lambda n^\alpha \varepsilon + Cn\lambda^2}.$$

- (5) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 36. Dans tout l'exercice, X est une va réelles, et X_1, \dots, X_n sont des va indépendantes et de même loi que X . On pose

$$S_n := X_1 + \dots + X_n \quad \text{et} \quad T_n := X_1^2 + \dots + X_n^2.$$

- (1) Montrer que si S, T sont des va réelles et si $x, y, u, v \geq 0$, alors

$$\mathbb{P}(S \geq x, T \leq y) \leq e^{-ux+vy} \mathbb{E}(e^{uS-vT})$$

- (2) Montrer à l'aide de (1) que

$$\forall x, y, u, v \geq 0 : \mathbb{P}((S_n \geq x, T_n \leq y)) \leq e^{-ux+vy} \mathbb{E}(e^{uX-vX^2})^n.$$

- (3) Dans cette question, on suppose que la va X est **symétrique**, ce qui signifie que $\mathbb{P}_{-X} = \mathbb{P}_X$. Montrer que

$$\forall u, v \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{uX - vX^2} \right) = \mathbb{E} \left(\text{ch}(uX) e^{-vX^2} \right);$$

et en déduire que

$$\forall u \geq 0 : \mathbb{E} \left(e^{uX - \frac{u^2}{2}X^2} \right) \leq 1.$$

- (4) On suppose que la va X est symétrique. Déduire des questions précédentes que

$$\forall x, y > 0 : \mathbb{P}(S_n \geq x, T_n \leq y) \leq e^{-\frac{x^2}{2y}}.$$

- (5) On suppose que la va X est symétrique et *bornée*, et on pose $C = \|X\|_\infty$. En observant que $T_n \leq C^2 n$, déduire de (4) que

$$\forall \varepsilon > 0 : \mathbb{P} \left(\frac{S_n}{n} \geq \varepsilon \right) \leq e^{-n\varepsilon^2/2C^2}.$$

Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hoeffding**.

Exercice 37. Dans tout l'exercice, on fixe une suite $(\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de va indépendantes définies sur $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$, à valeurs dans $\{-1, 1\}$, et suivant toutes la loi de Rademacher, *i.e.* $\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \frac{1}{2} = \mathbb{P}(\varepsilon = -1)$. On note $\mathcal{E} \subseteq L^\infty$ l'espace vectoriel engendré par les fonctions ε_i . Le but de l'exercice est d'établir le résultat suivant : *sur l'espace \mathcal{E} , toutes les normes $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$ sont équivalentes.* (Ce résultat est remarquable car \mathcal{E} est de dimension infinie.)

- (0) Soit $Z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$, où $I \subseteq \mathbb{N}$ est fini. Calculer $\|Z\|_2^2$.

- (1) Soit $Z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$.

(a) Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, calculer $\mathbb{E}(e^{\pm \lambda Z})$ et montrer qu'on a $\mathbb{E}(e^{\pm \lambda Z}) \leq e^{\frac{\lambda^2}{2} \sum_i a_i^2}$.

(b) Montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\mathbb{P}(|Z| > t) \leq 2 \exp \left(-\frac{t^2}{2 \sum_{i \in I} a_i^2} \right).$$

- (2) Soit $Z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$, et soit $1 \leq p < \infty$. En utilisant (1) et "la formule bien connue" pour $\mathbb{E}(|Z|^p)$, montrer que si $\|Z\|_2 = 1$, alors $\|Z\|_p \leq B_p$, où B_p est une constante finie dépendant uniquement de p .

- (3) Soient toujours $Z = \sum_{i \in I} a_i \varepsilon_i \in \mathcal{E}$ et $1 \leq p < \infty$.

(a) Comparer $\|Z\|_p$ et $\|Z\|_2$ lorsque $p \geq 2$.

(b) (i) Montrer que si X est une variable aléatoire positive, alors

$$\mathbb{E}(X^2) \leq (\mathbb{E}(X^p))^{2/3} \times (\mathbb{E}(X^{6-2p}))^{1/3} .$$

(ii) On suppose que $p < 2$. En utilisant (i) et en appliquant (2) à un autre exposant que p , montrer que si $\|Z\|_2 = 1$, alors $\|Z\|_p \geq A_p$ pour une certaine constante $A_p > 0$ dépendant uniquement de p .

(4) Conclure.

Exercice 38. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue. On définit les **polynômes de Bernstein** $B_n f$, $n \geq 1$ par

$$B_n f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}.$$

Le but de l'exercice est de montrer "de manière probabiliste" que $B_n f$ tend uniformément vers f sur $[0, 1]$ quand $n \rightarrow \infty$.

(1) Soit $x \in [0, 1]$ fixé. On considère une suite $(X_i)_{i \geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes définies sur le même espace de probabilité et suivant chacune une loi de Bernoulli de paramètre x . Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$.

(a) Vérifier que $B_n f(x) - f(x) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{S_n}{n}\right) - f(x)\right]$.

(b) Calculer $\mathbb{E}\left(\frac{S_n}{n}\right)$ et $\sigma^2\left(\frac{S_n}{n}\right)$, et en déduire que pour tout $\delta > 0$, on a

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n} - x\right| \geq \delta\right) \leq \frac{1}{4n\delta^2}.$$

(2) Pour $\delta > 0$, on pose $\omega_f(\delta) = \sup\{|f(v) - f(u)|; |v - u| < \delta\}$. Déduire de (1) que pour tout $x \in [0, 1]$, on a

$$|B_n f(x) - f(x)| \leq \omega_f(\delta) + \frac{\|f\|_\infty}{2n\delta^2}.$$

(3) Conclure.

Exercice 39. On garde les notations de l'exercice 38. Montrer que si la fonction f est *lipschitzienne* sur $[0, 1]$, alors il existe une constante C telle que

$$\forall n \geq 1 : \|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{C}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 40. On garde les notations de l'exercice 38, et on suppose que la fonction f est de classe \mathcal{C}^2 sur $[0, 1]$.

- (1) Soit $M = \sup \{|f''(t)|; t \in [0, 1]\}$. Montrer que pour $u, x \in [0, 1]$, on peut écrire

$$f(u) - f(x) = f'(x)(u - x) + R(u, x), \quad \text{où } |R(u, x)| \leq \frac{M}{2}(u - x)^2.$$

- (2) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \geq 1 : \|B_n f - f\|_\infty \leq \frac{C}{n}.$$

Exercice 41. Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = |x - \frac{1}{2}|$.

- (1) Vérifier que f est lipschitzienne.
 (2) Soient $B_n f$, $n \geq 1$ les polynômes de Bernstein associés à f (cf l'Exercice 38). Soit également $(\varepsilon_i)_{i \geq 1}$ une suite de va indépendantes suivant toutes la loi de Rademacher. Montrer que pour tout $n \geq 1$, on a

$$\left| B_n f(1/2) \right| = \frac{1}{2n} \mathbb{E} \left(\left| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \right| \right).$$

- (3) En utilisant l'Exercice 37, en déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall n \geq 1 : \|B_n f - f\|_\infty \geq \frac{c}{\sqrt{n}}.$$

Comparer ce résultat à celui de l'Exercice 39.