

Feuille d'exercices n° 1

Exercice 1. Soit Ω un ensemble fini. Montrer que toute algèbre \mathfrak{A} de parties de Ω est en fait une tribu, et que toute fonction finiment additive $\mu : \mathfrak{A} \rightarrow [0, \infty]$ telle que $\mu(\emptyset) = 0$ est en fait une mesure.

Exercice 2. Soit $\Omega := \mathbb{N}$. On note \mathfrak{A} la famille de toutes les parties A de \mathbb{N} vérifiant la propriété suivante : ou bien A est un ensemble fini, ou bien A^c est fini. Pour $A \in \mathfrak{A}$, on pose $\mathbb{P}(A) := 0$ si A est fini, et $\mathbb{P}(A) := 1$ si A^c est fini.

- (1) Montrer que \mathfrak{A} est une algèbre de parties de \mathbb{N} , et que l'application \mathbb{P} est finiment additive.
- (2) Montrer que \mathfrak{A} n'est pas une tribu, et que \mathbb{P} n'est pas dénombrablement additive.

Exercice 3. Soit Ω un ensemble dénombrable, et soit $\mu : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction finiment additive. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) μ est dénombrablement additive ;
- (2) $\mu(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} \mu(\{\omega\})$;
- (3) $\forall A \subseteq \Omega : \mu(A) = \sum_{\omega \in A} \mu(\{\omega\})$.

Exercice 4. Montrer qu'il n'existe pas de loi de probabilité \mathbb{P} sur \mathbb{N} telle que $\mathbb{P}(\{a\})$ soit la même pour tous les $a \in \mathbb{N}$.

Exercice 5. On note \mathfrak{A} la famille de toutes les parties A de \mathbb{N} telles que $\frac{\#(A \cap [0, n[)}{n}$ admette une limite quand $n \rightarrow \infty$; et pour $A \in \mathfrak{A}$, on pose

$$\mathbb{P}_0(A) := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\#(A \cap [0, n[)}{n}.$$

- (1) Établir les faits suivants : (i) \mathfrak{A} contient \mathbb{N} et $\mathbb{P}_0(\mathbb{N}) = 1$; (ii) \mathfrak{A} contient tous les singletons et $\mathbb{P}_0(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{N}$; (iii) \mathfrak{A} est stable par complémentation ; (iv) \mathfrak{A} est stable par réunions finies disjointes et \mathbb{P}_0 est finiment additive sur \mathfrak{A} .
- (2) Soient $b \in \mathbb{N}^*$ et $r \in \{0, \dots, b-1\}$. Déterminer la probabilité, au sens de la "loi" \mathbb{P}_0 , qu'un entier soit congru à r modulo b .

Exercice 6. On conserve les notations de l'Exercice 5. Montrer que l'ensemble $E := \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \llbracket (2k)!, (2k+1)! \rrbracket$ n'appartient pas à \mathfrak{A} , et en déduire que la famille \mathfrak{A} n'est pas une tribu. (On peut en fait montrer que \mathfrak{A} n'est même pas une *algèbre*.)

Exercice 7. On conserve les notations de l'Exercice 5. Déterminer la probabilité qu'un entier soit un carré parfait.

Exercice 8. Quand on lance 3 dés, a-t-on plus de chances d'obtenir 11 ou bien d'obtenir 12 ?

Exercice 9. Combien de fois faut-il lancer un dé pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois "6" ? De même, combien de fois faut-il lancer deux dés pour avoir plus d'une chance sur deux d'obtenir au moins une fois un "double 6" ?

Exercice 10. On lance plusieurs fois un dé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ donné, quelle est la probabilité d'obtenir "6" pour la 1ère fois au n -ième coup ?

Exercice 11. (problème du chevalier de Méré)

Deux souris, l'une blanche et l'autre grise, trouvent un morceau de fromage et se disputent pour savoir qui va le manger. Pour régler la dispute, elles décident de jouer un certain nombre de parties d'un jeu de hasard non spécifié. La première à avoir gagné 10 parties pourra manger le morceau de fromage. Au bout de 14 parties, la souris blanche a gagné 8 fois et la souris grise 6 fois. A ce moment, les souris se disent qu'elles ont vraiment trop faim et qu'il vaut mieux se partager le morceau de fromage en tenant compte des parties déjà jouées. Comment doivent elles faire pour que le partage soit "juste" ?

Exercice 12. Une grille d'euromillion comporte 5 numéros entre 1 et 50, et 2 numéros entre 1 et 12.

- (1) Quelle est la probabilité de gagner le gros lot ?
- (2) À combien de tirages faut-il participer (en jouant 1 grille à chaque fois) pour avoir au moins une chance sur 100 de gagner au moins une fois le gros lot ?

Exercice 13. La sorcière apporte à Blanche Neige un cageot de 18 pommes dans lequel elle a placé 6 pommes empoisonnées. Comme Blanche Neige a très faim, elle mange 4 pommes. Quelle est la probabilité qu'elle mange une pomme empoisonnée ?

Exercice 14. On considère un groupe de n personnes prises au hasard, dont aucune n'est née un 29 Février.

- (1) Déterminer la probabilité p que deux d'entre elles au moins aient la même date d'anniversaire.
- (2) Vérifier que si $n \geq 23$, alors $p > 50\%$; que si $n \geq 30$, alors $p > 70\%$; et que si $n \geq 57$, alors $p > 99\%$.

Exercice 15. On achète une galette des rois de 30 cm de diamètre dont la fève est circulaire et de diamètre 2 cm, et a été placée "au hasard" dans la galette. Étant donné $l \geq 0$, quelle est la probabilité que le centre de la fève se trouve à une distance au plus égale à l cm du centre de la galette ?

Exercice 16. On coupe en 4 une galette des rois de 30 cm de diamètre dont la fève est circulaire et de diamètre 2 cm, et a été placée "au hasard" dans la galette. Déterminer la probabilité de couper sur la fève.

Exercice 17. On coupe en 4 une galettes des rois de 30 cm de diamètre dont la fève est circulaire et de diamètre 2 cm, et dont on sait que le centre se trouve à 8 cm du centre de la galette. Déterminer la probabilité de couper sur la fève.

Exercice 18. (problème des rencontres)

Deux individus A et B (sans doute des espions) projettent d'essayer de se rencontrer à un certain endroit. Il est convenu que A et B doivent se rendre à l'endroit prévu entre 12h et 13h, et que chacun doit attendre l'autre au plus 20 minutes et repartir si la rencontre n'a pas eu lieu dans les 20 minutes.

- (1) Si A arrive à 12h et x minutes au point de rendez-vous et si B arrive à 12h et y minutes, à quelle condition portant sur x et y la rencontre aura-t-elle lieu ?
- (2) Déterminer la probabilité que la rencontre ait effectivement lieu.

Exercice 19. Pour $N \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \dots, N\}$, on note $p_{N,k}$ la probabilité d'obtenir exactement k fois "pile" en lançant N fois une pièce de monnaie (non truquée).

- (1) Exprimer $p_{N,k}$ en fonction de N et de k , et calculer $p_{20,10}$.
- (2) En utilisant par exemple la formule de Stirling, déterminer (si elle existe) la limite de $p_{2n,n}$ quand $n \rightarrow \infty$. Ce résultat est-il surprenant ?
- (3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note q_n la probabilité d'obtenir un nombre de "piles" compris entre $9n$ et $11n$ quand on lance $20n$ fois la pièce. Montrer que q_n tend vers 1 quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 20. Une boîte opaque contient N dragibus noirs et M dragibus rouges.

- (1) On prend au hasard n dragibus dans la boîte. Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ donné, quelle est la probabilité d'avoir tiré k dragibus rouges ?
- (2) Même question si on a pris les n dragibus un par un en les remettant à chaque fois dans la boîte.
- (3) Même question si on a pris les n dragibus un par un et qu'on les a mangés au fur et à mesure.

Exercice 21. (tirage “sans remise” vs tirage “avec remise”)

Une collection de N objets comprend N_1 objets “de type 1” et $N_2 = N - N_1$ objets “de type 2”. On prélève au hasard n objets dans la collection, avec $n \leq N_1$.

- (1) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ donné, déterminer la probabilité qu'exactly k parmi les n objets prélevés soient “de type 1”.
- (2) Montrer que si n est très petit devant N_1 et N_2 , alors cette probabilité est approximativement égale à $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où $p := \frac{N_1}{N}$.
- (3) On suppose que N est très grand devant n , et que 1 objet sur 50 est “de type 1”. Montrer que dans ces conditions, on peut considérer que la probabilité qu'aucun des objets prélevés ne soit “de type 1” est au moins égale à $e^{-n/49}$. (Par exemple, si $n = 50$, cette probabilité est au moins égale à 0,36.)

Exercice 22. Dans un pays où le vote est obligatoire, une élection oppose 2 candidats C_1 et C_2 . Il y a N électeurs dans le pays, dont N_1 ont l'intention de voter pour C_1 et N_2 ont l'intention de voter pour C_2 .

- (1) On effectue un sondage auprès de n électeurs (dont on suppose *a priori* qu'ils ne vont pas mentir). Pour $k \in \{0, \dots, n\}$ donné, on note p_k la probabilité que k électeurs parmi les n sondés disent avoir l'intention de voter pour C_1 . Montrer que si N_1 et N_2 sont très grands devant n , alors on peut considérer que p_k est quasiment égale à $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, où $p := N_1/N$.
- (2) En réalité, 60% des électeurs ont l'intention de voter pour le candidat C_1 . Déterminer la probabilité que le sondage le donne perdant si on interroge 9 (!) électeurs.

Exercice 23. On tire 5 cartes dans un jeu de 52. Quelle est la probabilité d'obtenir un brelan (mais pas mieux) ?

Exercice 24. Un tiroir contient $2n$ chaussettes. Pressé par le temps, le propriétaire des chaussettes prend 2 chaussettes au hasard dans le tiroir. Quelle est la probabilité qu'il ait pris 2 chaussettes de la même paire ?

Exercice 25. (problème de Monty Hall)

Dans un jeu télévisé, le candidat a devant lui 3 boîtes fermées (et opaques). L'une de ces boîtes contient un lingot d'or, et les deux autres sont vides. L'animateur sait quelle boîte contient le lingot d'or. Le jeu se déroule de la manière suivante : le candidat désigne une des 3 boîtes, sans l'ouvrir ; puis l'animateur ouvre une boîte *vide* parmi celles non désignées par le candidat ; puis le candidat ouvre une des 2 boîtes restantes, et gagne le lingot d'or si celui-ci s'y trouve. Quelle est la meilleure "stratégie" pour le candidat : décider à l'avance qu'il va changer de boîte, décider à l'avance qu'il va s'en tenir à la boîte qu'il désigne au départ, ou bien décider de choisir au hasard quand arrive le moment d'ouvrir une boîte ?

Exercice 26. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Montrer que si E_1, \dots, E_n sont des événements, alors

$$\mathbf{1}_{E_1 \cup \dots \cup E_n} = \mathbf{1} - \prod_{i=1}^n (1 - \mathbf{1}_{E_i}).$$

En déduire la formule suivante, appelée **formule de Poincaré**, ou encore **principe d'inclusion-exclusion** :

$$\mathbb{P}(E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \mathbb{P}(E_{j_1} \cap \dots \cap E_{j_k}) \right).$$

Exercice 27. (inégalité de Bonferroni)

Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soient E_1, \dots, E_n des événements. Le but de l'exercice est d'établir l'inégalité suivante :

$$\mathbb{P}(E_1 \cup \dots \cup E_n) \geq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(E_i) - \sum_{\{(i,j); i < j\}} \mathbb{P}(E_i \cap E_j).$$

(1) Montrer que pour tout entier $m \geq 2$, on a $1 - m + \binom{m}{2} \geq 0$.

(2) En déduire que $\mathbf{1}_{E_1 \cup \dots \cup E_n} - \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{E_i} + \sum_{\{(i,j); i < j\}} \mathbf{1}_{E_i \cap E_j} \geq 0$, et conclure.

Exercice 28. Une personne envoie des cartes de vœux personnalisées à n de ses amis. Comme cette personne est un peu étourdie, elle referme les enveloppes avant d'avoir écrit les adresses, et se trouve donc "obligée" d'écrire les adresses au hasard.

(1) On note p la probabilité que personne ne reçoive la carte qui lui était destinée. En utilisant le principe d'inclusion-exclusion (Exercice 26), montrer que

$$p = 1 - \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.$$

- (2) Montrer que si $n \geq 7$, il y a entre 36% et 37% de chances que personne ne reçoive la carte qui lui est destinée.

Exercice 29. On reprend les notations de l'Exercice 5. Le but de l'exercice est de montrer que presque tous les entiers (au sens de \mathbb{P}_0) sont non-premiers. Autrement dit, en notant \mathcal{P} l'ensemble des nombres premiers, que $\mathbb{P}_0(\mathcal{P})$ existe et vaut 0. Dans la suite, on notera $(p_i)_{i \geq 1}$ la suite des nombres premiers rangés par ordre croissant ; et pour tout entier $n \geq 1$, on note $\pi(n)$ l'ensemble des nombres premiers inférieurs ou égaux à n .

- (1) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Pour $n \geq 1$, on note $\pi_r(n)$ l'ensemble des entiers $k \in \{1, \dots, n\}$ qui ne sont pas divisibles par p_1, \dots, p_r .

(a) En utilisant le principe d'inclusion-exclusion (Exercice 26), montrer que

$$\pi_r(n) = n - \sum_{1 \leq i \leq r} E\left(\frac{n}{p_i}\right) + \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq r} E\left(\frac{n}{p_{i_1} p_{i_2}}\right) - \dots + (-1)^r E\left(\frac{n}{p_1 \cdots p_r}\right).$$

(b) En déduire que

$$\pi_r(n) \leq n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + 2^r.$$

- (2) Montrer que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\pi(n) \leq n \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right) + 2^r + r.$$

- (3) Montrer que $\prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$ tend vers 0 quand $r \rightarrow \infty$.

- (4) Déduire de (2) et (3) que $\frac{\pi(n)}{n}$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, et conclure.

Exercice 30. On fait sécher n paires de chaussettes, toutes différentes mais (malheureusement) toutes de la même couleur. Pour ne pas s'abimer les yeux, on constitue ensuite des paires au hasard. Cependant, on peut sans difficulté distinguer les chaussettes "gauches" des chaussettes "droites". Quelle est la probabilité de constituer correctement toutes les paires ? De constituer correctement au moins une paire ?

Exercice 31. Sur une planète imaginaire peuplée d'une infinité de lapins, 1% des lapins sont carnivores. Si on choisit 100 lapins au hasard, quelle est la probabilité qu'exactly 1 lapin soit carnivore ? Qu'au moins 3 lapins soient carnivores ?

Exercice 32. (Théorème de Poisson)

Soit (\mathbb{P}_n) une suite de lois de probabilité sur \mathbb{N} . On suppose que \mathbb{P}_n est en fait une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p_n)$, i.e. \mathbb{P}_n est portée par $\{0, \dots, n\}$ et $\mathbb{P}_n(\{k\}) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$ pour $k = 0, \dots, n$. On suppose également que np_n admet une limite $\lambda > 0$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que (\mathbb{P}_n) “converge” vers une certaine loi de probabilité \mathbb{P} à déterminer, au sens où $\mathbb{P}_n(\{k\}) \rightarrow \mathbb{P}(\{k\})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ fixé quand $n \rightarrow \infty$.

Exercice 33. Soit $(\mathbb{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de lois de probabilités sur un univers Ω supposé dénombrable, et soit \mathbb{P} une loi de probabilité sur Ω . On suppose que $\mathbb{P}_n(\{\omega\}) \rightarrow \mathbb{P}(\{\omega\})$ pour tout $\omega \in \Omega$ quand $n \rightarrow \infty$.

- (1) Soit $\varepsilon > 0$. Justifier qu’il existe un ensemble fini $F \subseteq \Omega$ tel que $\mathbb{P}(\Omega \setminus F) < \varepsilon$, puis montrer qu’il existe un entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0 : \mathbb{P}_n(\Omega \setminus F) < \varepsilon$.
- (2) Montrer que $\mathbb{P}_n(A) \rightarrow \mathbb{P}(A)$ pour tout ensemble $A \subseteq \Omega$.

Exercice 34. Pour $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$, on pose $\mathbb{P}_{m,\sigma} = g_{m,\sigma}(x)dx$, où $g_{m,\sigma} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la densité Lebesguienne définie par

$$g_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}.$$

Montrer que $\mathbb{P}_{\sigma,m}$ “tend vers la masse de Dirac δ_m ” quand $\sigma \rightarrow 0$, au sens suivant : pour toute fonction continue bornée $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, on a

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} f d\mathbb{P}_{\sigma,m} = f(m).$$

Exercice 35. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité vérifiant la propriété suivante : pour tout $E \in \mathfrak{A}$ et pour tout $x \in [0, \mathbb{P}(E)]$, il existe $A \subseteq E$ tel que $\mathbb{P}(A) = x$. Soit également donnée, pour tout $E \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbb{P}(E) \neq 0$, une application $\mathbb{P}_E : \mathfrak{A} \rightarrow [0, 1]$. On suppose que les conditions suivantes sont satisfaites :

- (i) \mathbb{P}_E est une loi de probabilité ;
- (ii) $\mathbb{P}_E(E) = 1$;
- (iii) si $A \subseteq E$, alors $\mathbb{P}_E(A)$ ne dépend que de $\mathbb{P}(A)$.

Le but de l’exercice est de montrer qu’on a $\mathbb{P}_E(A) = \mathbb{P}(A | E)$ pour tout E et pour tout $A \in \mathfrak{A}$. Dans ce qui suit, on fixe $E \in \mathfrak{A}$ tel que $\mathbb{P}(E) \neq 0$ et on pose $c := 1/\mathbb{P}(E)$.

- (1) Justifier qu’il existe une fonction $\varphi : [0, \mathbb{P}(E)] \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\varphi(x) = \mathbb{P}_E(A) \quad \text{pour tout } A \subseteq E \text{ tel que } \mathbb{P}(A) = x.$$

- (2) Montrer qu’on a $\mathbb{P}_E(A) = \varphi(\mathbb{P}(A \cap E))$ pour tout $A \in \mathfrak{A}$.
- (3) Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(\mathbb{P}(E))$.

- (4) Montrer que si $0 \leq x, y \leq \mathbb{P}(E)$ et $x + y \leq \mathbb{P}(E)$, alors $\varphi(x + y) = \varphi(x) + \varphi(y)$.
- (5) En déduire que $\varphi(rv) = r\varphi(v)$ pour tout $v \in [0, \mathbb{P}(E)]$ et pour tout rationnel $r \geq 0$ tel que $rv \leq \mathbb{P}(E)$.
- (6) Montrer que la fonction φ est croissante.
- (7) Montrer que $\varphi(x) = cx$ pour tout $x \in [0, \mathbb{P}(E)]$, et conclure.

Exercice 36. Soit \mathbb{P} une loi de probabilité (borélienne) sur \mathbb{R} . On suppose que \mathbb{P} est diffuse, *i.e.* $\mathbb{P}(\{a\}) = 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$. Montrer que $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P}) := (\mathbb{R}, \mathfrak{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ vérifie la propriété de l'Exercice 35. (Commencer par montrer que la fonction $t \mapsto \mathbb{P}(] - \infty, t])$ est continue sur \mathbb{R} .)

Exercice 37. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, et soient E, F deux évènements tels que $0 < \mathbb{P}(E) < 1$ et $0 < \mathbb{P}(F) < 1$. Montrer qu'on a $\mathbb{P}(E | F) > \mathbb{P}(E)$ si et seulement si $\mathbb{P}(F | E) > \mathbb{P}(F | E^c)$.

Exercice 38. Une boîte opaque contient 30 dragibus noirs et 40 dragibus rouges. Une petite fille n'aimant que les dragibus noirs tire 5 dragibus l'un après l'autre. Si le dragibus qu'elle tire est noir, elle le mange ; et s'il est rouge, elle le remet dans la boîte. Quelle est la probabilité que la petite fille mange exactement 3 dragibus ?

Exercice 39. La même petite fille qu'à l'Exercice 38 a devant elle 3 boîtes opaques. La 1ère boîte contient 10 dragibus noirs et 30 dragibus rouges, la 2ème contient 40 dragibus noirs et 20 dragibus rouges, et la 3ème contient 20 dragibus noirs et 20 dragibus rouges. La petite fille choisit une boîte au hasard, et prend un dragibus dedans. Quelle est la probabilité qu'elle mange le dragibus ?

Exercice 40. Une boîte contient 10 dragibus, les uns noirs et les autres rouges. Quelle est la probabilité que tous les dragibus soient rouges sachant qu'au moins l'un d'entre eux est rouge ?

Exercice 41. On choisit un entier N au hasard selon une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, puis on lance N fois un dé. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins une fois un 6.

Exercice 42. Dans une entreprise imaginaire, une personne A doit faire parvenir à une personne B une information de type binaire ("stop" ou "encore"). Comme la répartition des rôles dans l'entreprise est très précisément fixée, l'information doit impérativement passer par un certain nombre d'intermédiaires avant d'arriver jusqu'à B . À chaque étape, il y a une probabilité $p \in]0, 1[$ que l'intermédiaire ne transmette pas correctement l'information.

- (1) Déterminer, pour tout $n \geq 0$, la probabilité q_n que l'information émise par A soit correctement transmise à B s'il y a n intermédiaires entre A et B . (Commencer par déterminer une relation de récurrence entre q_{n+1} et q_n .)
- (2) Déterminer, si elle existe, la limite de q_n quand n tend vers l'infini.
- (3) L'entreprise est en fait tellement grande qu'on ignore complètement le nombre n d'intermédiaires entre A et B . On a cependant de bonnes raisons de penser que n suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, autrement dit que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{P}(n = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$. Calculer la probabilité que l'information soit correctement transmise.

Exercice 43. (loi de succession de Laplace)

On pioche des dragibus dans une boîte opaque. La boîte contient des dragibus noirs et des dragibus roses. Il y a N dragibus au total, et on n'a aucune information *a priori* sur la proportion de dragibus noirs

- (1) Soit $n < N$ et soit $r \leq n$. On note $p_{n+1|r}(N)$ la probabilité que le $n + 1$ -ième dragibus tiré soit noir sachant que r parmi les n premiers dragibus tirés sont noirs. Calculer $p_{n+1|r}(N)$.
- (2) On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \leq n$. Déterminer la limite de $p_{n+1|r}(N)$ quand $N \rightarrow \infty$. Montrer en particulier que $\lim_{N \rightarrow \infty} p_{n+1|n}(N) = \frac{n+1}{n+2}$.

Exercice 44. On se place dans les conditions de l'Exercice 43, et on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe également $\alpha \in [0, 1]$. En supposant $N > n$, on note $q_{\alpha|n}(N)$ la probabilité que la proportion de dragibus noirs soit au moins égale à α sachant que les n premiers dragibus tirés sont noirs. Montrer que si N est très grand, on peut considérer que $q_{\alpha|n}(N)$ est approximativement égale à $1 - \alpha^{n+1}$.

Exercice 45. (“urne de Pólya”)

Soient $b, r, c \in \mathbb{N}^*$. Une boîte opaque contient initialement b dragibus bleus et r dragibus rouges. On effectue l'opération suivante : on tire un dragibus au hasard dans la boîte, puis on le remet en même temps que c dragibus de la même couleur. Cette opération est répétée une infinité de fois.

- (1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'évènement “le n -ième tirage amène un dragibus bleu”. Calculer $\mathbb{P}(B_n)$ pour tout n .
- (2) Dans cette question, on suppose que $b = r = c = 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note X_n le nombre de dragibus bleus dans la boîte après qu'on a effectué n fois l'opération décrite plus haut. Montrer que $X_n \in \{1, \dots, n + 1\}$ et qu'on a $\mathbb{P}(X_n = k) = \frac{1}{n+1}$ pour tout $k \in \{1, \dots, n + 1\}$. (Autrement dit, la variable aléatoire X_n est uniformément distribuée sur l'ensemble $\{1, \dots, n + 1\}$.)

Exercice 46. (reproduction des bidragibus)

Un bidragibus est une créature composée de 2 dragibus magiques. Les dragibus magiques ne peuvent être que noirs ou rouges (N ou R). Il existe donc trois types de bidragibus : NN , NR et RR . Lorsque deux bidragibus se rencontrent, ils se reproduisent : chacun des deux dédouble au hasard l'un des dragibus magiques qui le constituent, et l'enfant bidragibus est formé avec les 2 nouveaux dragibus.

- (1) On considère une population de bidragibus dont les proportions de NN , NR et RR sont respectivement p_0 , q_0 et r_0 . On fait se rencontrer deux bigragibus \mathbf{b} et \mathbf{b}' pris au hasard. Déterminer les probabilités p_1 , q_1 , r_1 que leur enfant soit de type NN , NR , RR .
- (2) On part maintenant d'une population de bidragibus dont les proportions de NN , NR , RR sont p_1 , q_1 , r_1 , et on répète l'expérience précédente. Avec les notations qu'on pense, montrer que $(p_2, q_2, r_2) = (p_1, q_1, r_1)$.

Exercice 47. 200 personnes regardent ensemble la finale de la Champions League, qui oppose le PSG au Bayern Munich. Il y a dans l'assistance 50 supporters du PSG, 50 supporters du Bayern, 40 supporters de Barcelone, 30 supporters du Real Madrid et 30 supporters du RC Lens. Parmi les supporters de Barcelone, 35 soutiennent le Bayern, 1 soutient le PSG et 4 ne soutiennent aucune équipe. Parmi les supporters du Real, 20 soutiennent le PSG, 5 soutiennent le Bayern et 5 ne soutiennent aucune équipe. Parmi les supporters du RC Lens, 10 soutiennent le PSG, 10 soutiennent le Bayern et 10 ne soutiennent aucune équipe. On interroge une personne au hasard, qui dit soutenir le Bayern. Quelle est la probabilité que cette personne soit supportrice du RC Lens ?

Exercice 48. Aux Jeux Olympiques, tous les médaillés subissent un contrôle antidopage. Le contrôle est efficace à 99%, mais 1% de médaillés "propres" sont cependant contrôlés positifs.

- (1) On estime *a priori* que 1 médaillé sur 10 est dopé. Dans ces conditions, peut-on considérer que le test est fiable ?
- (2) Même question si on estime que 1 médaillé sur 200 est dopé.

Exercice 49. Monsieur Fantasio est désespéré car 80% des courriers électroniques qu'il reçoit sont indésirables. En lisant un magazine très sérieux, il apprend que 60% des courriers électroniques indésirables contiennent le mot "zorglub", tandis que seulement 1% des courriers légitimes contiennent ce mot. Il décide donc de filtrer les messages qu'il reçoit de la façon suivante : si un message contient le mot "zorglub", il est automatiquement dirigé vers la boîte de spams, et s'il ne contient pas "zorglub" il est dirigé vers la boîte de réception.

- (1) Quelle est la probabilité qu'un message arrivé dans les spams soit indésirable ?
- (2) Quelle est la probabilité qu'un message arrivé dans la boîte de réception soit légitime ?

Exercice 50. Dans un pays imaginaire, une étude menée par des experts internationaux montre que 1% des fonctionnaires sont des feignants. Désireux d'éliminer ces parasites qui coûtent un pognon de dingue, le roi du pays ordonne que l'on soumette tous les fonctionnaires à une évaluation poussée, et que les feignants soient immédiatement déchus de leur nationalité et donc envoyés sur Mars. L'évaluation est très performante : la probabilité qu'un individu soit déclaré feignant s'il l'est effectivement est de 99,9%. Cependant, elle n'est pas parfaite : il y a 5% de chances qu'un individu soit déclaré feignant après l'évaluation alors qu'il ne l'est pas. Déterminer la probabilité qu'un fonctionnaire envoyé sur Mars le soit par erreur.

Exercice 51. Une maladie touche $x\%$ d'une population. On peut la dépister en effectuant un test sanguin. Le test est efficace à 98%, mais cependant 3% d'individus non malades sont déclarés malades par le test. Déterminer en fonction de x la probabilité qu'un individu déclaré malade le soit effectivement. Que vaut cette probabilité lorsque $x = 0,1$? Pour quelles valeurs de x cette probabilité est-elle supérieure à 90% ?

Exercice 52. Un petit supermarché possède 2 caisses. Une étude concernant le temps d'attente en caisse et le comportement des clients donne les résultats suivants : la probabilité qu'une file d'attente avance lentement est de 20% ; la probabilité qu'un client observe la file voisine si la sienne avance rapidement est de 4% ; la probabilité qu'un client observe la file voisine si la sienne avance lentement est de 95% ; la probabilité que la file voisine de celle où se trouve un client avance rapidement est indépendante du fait que ce client l'observe ou non, et indépendante de la vitesse de progression de sa propre file. Quelle est la probabilité qu'un client observant la file voisine constate que la file voisine avance rapidement et que sa propre file avance lentement ?

Exercice 53. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Que peut-on dire de la probabilité d'un évènement E qui est indépendant de lui même ?

Exercice 54. Soit n un entier, $n \geq 2$. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers $m \in \{1, \dots, n\}$ qui sont premiers avec n , et $p_1 < \dots < p_s$ les diviseurs premiers de n .

- (1) Soit $\Omega = \{1, \dots, n\}$ muni de la probabilité uniforme. Pour $i = 1, \dots, s$, on note E_i l'évènement "être divisible par p_i ". Montrer que les évènements E_1, \dots, E_s sont indépendants.

(2) Établir la formule

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^s \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$