

Feuille d’exercices n° 6

(spectre)

Exercice 1. Soit $H := \ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que pour tout compact $K \subseteq \mathbb{C}$, il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ tel que $\sigma(T) = K$.

Exercice 2. On note B et S le “backward shift” et le “forward shift” sur $\ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que $\sigma_p(B) = \mathbb{D}$ (le disque unité ouvert); et en déduire $\sigma(B)$ et $\sigma(S)$.

Exercice 3. Soit $\mathbf{w} = (w_n)_{n \geq 1}$ une suite bornée de nombres strictement positifs. On note $B_{\mathbf{w}} : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ et $S_{\mathbf{w}} : \ell^2(\mathbb{N}) \rightarrow \ell^2(\mathbb{N})$ les opérateurs définis par $B_{\mathbf{w}}(x_0, x_1, x_2, \dots) := (w_1 x_1, w_2 x_2, \dots)$ et $S_{\mathbf{w}}(x_0, x_1, \dots) := (0, w_1 x_0, w_2 x_1, \dots)$.

- (1) Exprimer le rayon spectral de $B_{\mathbf{w}}$ en fonction des w_n .
- (2) On suppose que w_n admet une limite $r_{\mathbf{w}}$ quand $n \rightarrow \infty$. Montrer que tout nombre complexe λ vérifiant $|\lambda| < r_{\mathbf{w}}$ est valeur propre de $B_{\mathbf{w}}$; et en déduire que $\sigma(B_{\mathbf{w}})$ est le disque $\overline{D}(0, r_{\mathbf{w}})$.
- (3) Déterminer $\sigma(S_{\mathbf{w}})$ lorsque la suite (w_n) converge. L’opérateur $S_{\mathbf{w}}$ possède-t-il des valeurs propres?

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesuré sigma-fini, soit $\phi \in L^\infty = L^\infty(\Omega, m)$, et soit $M_\phi : L^2 \rightarrow L^2$ l’opérateur de multiplication associé. Le but de l’exercice est de montrer que $\sigma(M_\phi)$ est le plus petit fermé $K \subseteq \mathbb{C}$ tel que $\phi(t) \in K$ pp.

- (1) Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. On suppose que $\forall \varepsilon > 0 : m(\{t \in \Omega; |\phi(t) - \lambda| < \varepsilon\}) > 0$. Montrer que $M_\phi - \lambda I$ n’est pas un plongement; et donc $\lambda \in \sigma(M_\phi)$.
- (2) Soit B un borélien de \mathbb{C} . On suppose que $m(\phi^{-1}(B)) > 0$. Montrer qu’il existe $\lambda \in B$ tel que : $m(\phi^{-1}(V)) > 0$ pour tout voisinage ouvert V de λ . (*Raisonner par l’absurde.*)
- (3) Déduire de (1) et (2) qu’on a $\phi(t) \in \sigma(M_\phi)$ pp.
- (4) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 5. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, m)$ un espace mesuré sigma-fini, soit $\phi \in L^\infty = L^\infty(\Omega, m)$ et soit $M_\phi : L^2 \rightarrow L^2$ l’opérateur de multiplication associé. Montrer qu’un nombre complexe λ est valeur propre de M_ϕ si et seulement si l’ensemble $\{t \in \Omega; \phi(t) = \lambda\}$ est de mesure non-nulle.

Exercice 6. Soit K un espace topologique compact, et soit $\phi \in \mathcal{C}(K)$. On note $M_\phi : \mathcal{C}(K) \rightarrow \mathcal{C}(K)$ l'opérateur défini par $M_\phi(f) := \phi f$.

- (1) Montrer qu'on a $\sigma(M_\phi) = \phi(K)$.
- (2) Montrer qu'un nombre complexe λ est valeur propre de M_ϕ si et seulement si l'ensemble $\{t \in K; \phi(t) = \lambda\}$ est d'intérieur non-vide dans K .

Exercice 7. Soit H un espace de Hilbert et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ auto-adjoint. Montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $T - \lambda I$ n'est pas surjectif.

Exercice 8. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ normal. Montrer que si $\sigma(T)$ est un singleton $\{\lambda\}$, alors $T = \lambda I$.

Exercice 9. Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Soient également X_1 et X_2 deux sous-espaces fermés de X non réduits à $\{0\}$, stables par T et tels que $X = X_1 \oplus X_2$. Montrer qu'on a $\sigma(T) = \sigma(T|_{X_1}) \cup \sigma(T|_{X_2})$.

Exercice 10. Soit X un espace de Banach complexe, et soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'on a $AB = I$ et $BA \neq I$.

- (1) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a

$$(A - \lambda I)B(I - \lambda B)^{-1} = I \quad \text{et} \quad B(I - \lambda B)^{-1}(A - \lambda I) \neq I.$$

En déduire que si $I - \lambda B$ est inversible, alors $A - \lambda I$ n'est pas inversible.

- (2) Montrer que $\sigma(A)$ contient le disque $D(0, 1/r(B))$, et que $\sigma(B)$ contient le disque $D(0, 1/r(A))$.

Exercice 11. Soit X un espace de Banach.

- (1) Soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$ tels que $\|A\| < 1$ et $\|B\| < 1$. Montrer que $I - AB$ et $I - BA$ sont inversibles dans A , et exprimer $(I - BA)^{-1}$ en fonction de A, B et $(I - AB)^{-1}$.
- (2) Soient $A, B \in \mathcal{L}(X)$ quelconques. Montrer que $I - AB$ est inversible si et seulement si $I - BA$ est inversible.
- (3) Montrer que si $A, B \in \mathcal{L}(X)$, alors $\sigma(AB) \cup \{0\} = \sigma(BA) \cup \{0\}$ et $r(AB) = r(BA)$.
- (4) A-t-on toujours $\sigma(AB) = \sigma(BA)$?

Exercice 12. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$.

- (1) Montrer qu'on a $r(T) < 1$ si et seulement si $\|T^n\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.
- (2) Montrer que si $T^n x \rightarrow 0$ pour tout $x \in X$, alors $r(T) \leq 1$; mais qu'on n'a pas forcément $r(T) < 1$ dans ce cas.

Exercice 13. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'on a $\sigma(T) \cap \overline{\mathbb{D}} = \emptyset$, où \mathbb{D} est le disque unité ouvert de \mathbb{C} . Montrer qu'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n x\| = +\infty$ pour tout $x \neq 0$.

Exercice 14. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ vérifiant $r(T) < 1$. Montrer qu'il existe $L \in \mathcal{L}(X)$ tel que $I - T = e^L := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{L^k}{k!}$. (Chercher L sous forme d'une série).

Exercice 15. (rayon spectral sans analyse complexe)

Soit X un espace de Banach complexe. Le but de l'exercice est de démontrer la formule du rayon spectral pour $\mathcal{L}(X)$ sans utiliser la théorie des fonctions holomorphes. On fixe donc un opérateur $T \in \mathcal{L}(X)$, on note $r(T)$ le rayon spectral de T , et on cherche à montrer que $r(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$ (on tient pour acquis que la limite existe). Dans ce qui suit, on pose $\nu := \lim_{n \rightarrow \infty} \|T^n\|^{1/n}$ et $C_\nu := \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| \geq \nu\}$.

- (1) Rappeler pourquoi on a $r(T) \leq \nu$.
- (2) Montrer que si $\nu = 0$, alors T n'est pas inversible. En déduire la formule dans ce cas.
- (3) On suppose que $\nu > 0$, et qu'il n'existe aucun nombre $\lambda \in \sigma(T)$ vérifiant $|\lambda| = \nu$.

- (a) Pour $\lambda \in C_\nu$, on pose $\phi(\lambda) = (I - \lambda^{-1}T)^{-1}$. Justifier la définition, et montrer que la fonction ϕ est *uniformément continue* sur C_ν .
- (b) Montrer que pour tout $\lambda \in C_\nu$ et pour tout entier $n \geq 1$, l'opérateur $I - (\lambda^{-1}T)^n$ est inversible. (Factoriser le polynôme $P(z) := 1 - (\lambda^{-1}z)^n$).
- (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note Γ_n l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité.

(i) Pour $k \in \{1, \dots, n-1\}$, calculer $\sum_{\omega \in \Gamma_n} \omega^k$.

(ii) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et pour tout $\omega \in \Gamma_n$, on a

$$I - (\lambda^{-1}T)^n = (I - (\omega\lambda)^{-1}T) \left(I + (\omega\lambda)T + \dots + (\omega\lambda)^{n-1}T \right).$$

(iii) Déduire de (i) et (ii) que pour tout $\lambda \in C_\nu$, on a

$$(I - (\lambda^{-1}T)^n)^{-1} = \frac{1}{n} \sum_{\omega \in \Gamma_n} \phi(\omega\lambda).$$

- (d) En utilisant (a) et (c), montrer que $(I - (\lambda^{-1}T)^n)^{-1} \rightarrow (I - (\nu^{-1}T)^n)^{-1}$ quand $\lambda \in C_\nu$ tend vers ν , *uniformément* par rapport à $n \in \mathbb{N}^*$.
- (e) Montrer que si $|\lambda| > \nu$, alors $(\lambda^{-1}T)^n \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$. En déduire, à l'aide de (d), que $(\nu^{-1}T)^n$ tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$, puis obtenir une contradiction.

- (4) Conclure.

Exercice 16. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Soit également $\varepsilon > 0$. Pour $x \in X$, on pose

$$\|x\|_\varepsilon = \sup_{n \in \mathbb{N}} \frac{\|T^n x\|}{(r(T) + \varepsilon)^n}.$$

- (1) Justifier la définition, puis montrer que $\|\cdot\|_\varepsilon$ est une norme équivalente à la norme originelle de X .
- (2) On note encore $\|\cdot\|_\varepsilon$ la norme sur $\mathcal{L}(X)$ associée à $\|\cdot\|_\varepsilon$. Montrer qu'on a $\|T\|_\varepsilon \leq r(T) + \varepsilon$.
- (3) Montrer qu'il existe un opérateur inversible $J : X \rightarrow X$ tel que $\|JTJ^{-1}\| < r(T) + \varepsilon$.

Exercice 17. Soit X un espace de Banach complexe.

- (1) Montrer que l'ensemble $\{(T, \lambda) \in \mathcal{L}(X) \times \mathbb{C}; \lambda \in \sigma(T)\}$ est une partie fermée de $\mathcal{L}(X) \times \mathbb{C}$.
- (2) En déduire que si $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathcal{L}(X)$ telle que $T_n \rightarrow T \in \mathcal{L}(X)$, alors

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} r(T_n) \leq r(T).$$

- (3) Trouver un exemple où l'inégalité est stricte.

Exercice 18. Soit X un espace de Banach complexe. Montrer que pour tout ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, l'ensemble $\{T \in \mathcal{L}(X); \sigma(T) \subseteq \Omega\}$ est un ouvert de $\mathcal{L}(X)$.

Exercice 19. Soit X un espace de Banach complexe. Montrer que si $A, B \in \mathcal{L}(X)$ commutent (*i.e.* $AB = BA$), alors

$$r(AB) \leq r(A)r(B) \quad \text{et} \quad r(A+B) \leq r(A) + r(B).$$

(Pour la 2ème inégalité, observer d'abord que pour tous α, β tels que $\alpha > r(A)$ et $\beta > r(B)$, on peut trouver une constante M telle que $\forall m \in \mathbb{N} : \|A^m\| \leq M\alpha^m$ et $\|B^m\| \leq M\beta^m$.)

Exercice 20. Soit X un espace de Banach complexe.

- (1) Montrer que si $A \in \mathcal{L}(X)$ et si $\lambda \notin \sigma(A)$, alors $r((A - \lambda I)^{-1}) = \frac{1}{\text{dist}(\lambda, \sigma(A))}$.
- (2) En déduire, à l'aide l'exercice 19, que si $A, B \in \mathcal{L}(X)$ commutent, si $\lambda \notin \sigma(A)$ et si $\|B - A\| < \text{dist}(\lambda, \sigma(A))$, alors $\lambda \notin \sigma(B)$.
- (3) Soit $(T_n) \subseteq \mathcal{L}(X)$ une suite convergeant vers un opérateur T . On suppose qu'on a $TT_n = T_nT$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - (a) En utilisant (2), montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$, alors $\text{dist}(\lambda, \sigma(T_n)) = 0$.
 - (b) Montrer qu'on a $\lim_{n \rightarrow \infty} r(T_n) = r(T)$.

Exercice 21. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$.

- (1) On suppose qu'il existe un polynôme $P \neq 0$ tel que $P(T) = 0$. Montrer que $\sigma(T)$ est contenu dans l'ensemble des racines de P (noté $Z(P)$), et que si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus Z(P)$, alors on peut trouver un polynôme B_λ tel que $\deg(B_\lambda) < \deg(P)$ et $(T - \lambda I)^{-1} = B_\lambda(T)$.
- (2) On suppose que T est une projection, avec $T \neq 0$ et $T \neq I$. Déterminer $\sigma(T)$ et donner une formule pour $(T - \lambda I)^{-1}$ si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(T)$.

Exercice 22. Pour toute $f \in \mathcal{C}([0, 1])$, on définit une fonction $Tf : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ par $Tf(0) := 0$ et $Tf(x) := \int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x^2 - y^2}} dy$ pour $x > 0$.

- (1) Justifier la définition et montrer que Tf est continue pour toute $f \in \mathcal{C}([0, 1])$; puis montrer que T est un opérateur borné sur $\mathcal{C}([0, 1])$ et calculer $\|T\|$.
- (2) Montrer que tout nombre $\lambda \in]0, \pi/2]$ est valeur propre de T , et en déduire le rayon spectral de T . (Montrer d'abord qu'on peut écrire $\lambda = \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^r d\theta$, pour un certain $r \geq 0$).

Exercice 23. Soit $p \in [1, \infty]$. Répondre aux mêmes questions qu'à l'exercice précédent pour l'opérateur $T : L^p(]0, 1[) \rightarrow L^p(]0, 1[)$ défini par

$$Tf(x) := x^2 \int_0^1 y^2 f(y) dy.$$

Exercice 24. (Spectre d'une restriction)

Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Soit également $E \subseteq X$ un sous-espace fermé invariant par T , i.e. $T(E) \subseteq E$. Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : si Ω est une composante connexe de $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$ telle que $\Omega \cap \sigma(T|_E) \neq \emptyset$, alors $\Omega \subseteq \sigma(T|_E)$.

- (1) Montrer que si Γ est un compact de \mathbb{C} contenu dans $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\forall \lambda \in \Gamma \forall x \in X : \|Tx - \lambda x\| \geq c \|x\|$.
- (2) Soit Γ un compact de $\mathbb{C} \setminus \sigma(T)$, et soit $c > 0$ donnée par (1). Montrer que si $\lambda_0 \in \Gamma$ est tel que $T|_E - \lambda_0 I_E$ est inversible (dans $\mathcal{L}(E)$), alors $T|_E - \lambda I_E$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ vérifiant $|\lambda - \lambda_0| < c$.
- (3) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 25. (Théorème de Jamison)

Soit X un espace de Banach séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose qu'on a $\sup_{k \in \mathbb{N}} \|T^k\| < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que $\sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$ est dénombrable.

- (1) On pose $E := \sigma_p(T) \cap \mathbb{T}$; et pour tout $\lambda \in E$, on choisit $x_\lambda \in X$ tel que $Tx_\lambda = \lambda x_\lambda$ et $\|x_\lambda\| = 1$.
 - (a) Montrer que si $\lambda, \mu \in E$, alors

$$\forall k \geq 1 : |\mu^k - \lambda^k| \leq (1 + \|T^k\|) \|x_\mu - x_\lambda\|.$$

(b) En déduire qu'il existe une constante $c > 0$ telle que

$$\forall \lambda, \mu \in E \text{ avec } \lambda \neq \mu : \|x_\mu - x_\lambda\| \geq c.$$

(2) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 26. (spectre d'une isométrie)

Soit X un espace de Banach complexe, et soit $V : X \rightarrow X$ une isométrie (linéaire), pas forcément bijective.

- (1) Montrer qu'on a $\sigma_p(V) \subseteq \mathbb{T}$ et $\sigma(V) \subseteq \overline{\mathbb{D}}$, où $\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$.
- (2) Soit $\lambda \in \mathbb{D}$. Montrer qu'on a $\lambda \notin \sigma(V)$ si et seulement si $V - \lambda I$ est surjectif.
- (3) Montrer que $\mathbb{D} \setminus \sigma(V)$ est ouvert et fermé dans \mathbb{D} .
- (4) Établir les propriétés suivantes.
 - (i) Ou bien $\sigma(V) = \overline{\mathbb{D}}$, ou bien $\sigma(V) \subseteq \mathbb{T}$.
 - (ii) $\sigma(V) \subseteq \mathbb{T}$ si et seulement si V est bijective.

Exercice 27. (valeurs propres approchées)

Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. On dit qu'un nombre complexe λ est une **valeur propre approchée** de T si $T - \lambda I$ n'est pas un plongement. On note $\sigma_{ap}(T)$ l'ensemble des valeurs propres approchées de T .

- (1) Montrer que $\sigma_{ap}(T)$ est un compact de \mathbb{C} , et que $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{ap}(T) \subseteq \sigma(T)$.
- (2) Montrer que $\partial\sigma(T) \subseteq \sigma_{ap}(T)$.
- (3) Montrer qu'on a $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \sigma_p(T^*) = \sigma_p(T) \cup \sigma_{ap}(T^*)$, où T^* est l'adjoint banachique de T ; et que si $X = H$ est un espace de Hilbert, alors $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T) \cup \{\bar{\lambda}; \lambda \in \sigma_p(T^*)\} = \sigma_p(T) \cup \{\bar{\lambda}; \lambda \in \sigma_{ap}(T^*)\}$, où T^* est l'adjoint hilbertien de T .
- (4) On suppose que $X = H$, espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est normal, alors $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.
- (5) Dans cette question, on prend $H = \ell^2(\mathbb{N})$. On note B et S le "backward shift" et le "forward shift" sur H . Montrer que $\sigma_p(B) = \mathbb{D}$ (le disque unité ouvert) et $\sigma(B) = \sigma_{ap}(B) = \overline{\mathbb{D}}$; puis que $\sigma(S) = \overline{\mathbb{D}}$, $\sigma_{ap}(S) = \mathbb{T}$ et $\sigma_p(S) = \emptyset$.

Exercice 28. (image numérique)

Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. On pose

$$V(T) := \{\langle T(x), x \rangle; x \in H, \|x\| = 1\}.$$

- (1) Montrer qu'on a $\sigma(T) \subseteq \overline{V(T)}$. (Utiliser l'Exercice 27.)
- (2) On suppose que H est de dimension finie et que T est un opérateur normal. Montrer que $V(T)$ est l'enveloppe convexe de $\sigma(T)$.
- (3) On revient au cas général. Déduire de (1) qu'on a

$$r(T) \leq \sup_{\|x\|=1} |\langle T(x), x \rangle| \leq \|T\|.$$

Que peut-on en déduire si l'opérateur T est normal?

Exercice 29. Dans tout l'exercice, X un espace de Banach complexe.

- (1) Pour un opérateur $R \in \mathcal{L}(X)$, laquelle des deux propriétés suivantes implique l'autre?
- (i) R est un plongement;
 - (ii) R possède un *inverse à gauche* dans $\mathcal{L}(X)$; autrement dit, il existe $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $SR = I$.

Montrer que si $\text{Im}(R)$ possède un supplémentaire fermé dans X , alors (i) et (ii) sont équivalentes.

- (2) Pour $R \in \mathcal{L}(X)$, laquelle des deux propriétés suivantes implique l'autre?
- (i) R est surjectif;
 - (ii) R possède un *inverse à droite* dans $\mathcal{L}(X)$.

Montrer que si $\ker(R)$ possède un supplémentaire fermé dans X , alors (i) et (ii) sont équivalentes.

- (3) Soit $R \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que R possède un inverse à gauche S dans $\mathcal{L}(X)$. Montrer que si $R' \in \mathcal{L}(X)$ est suffisamment proche de R , alors R' possède un inverse à gauche S' vérifiant $\|S'\| \leq 2\|S\|$. (*Commencer par montrer que si R' est proche de R , alors SR' est inversible*).
- (4) Soit $T \in \mathcal{L}(X)$ et soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que si $\lambda \in \partial\sigma(T)$, alors $T - \lambda I$ ne possède pas d'inverse à gauche et pas d'inverse à droite dans $\mathcal{L}(X)$.

Exercice 30. (Théorème de Katznelson-Tzafriri)

Dans tout l'exercice, X est un espace de Banach complexe, et $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur vérifiant $\|T\| \leq 1$. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

- (i) $\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \emptyset$ ou $\sigma(T) \cap \mathbb{T} = \{1\}$;
- (ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} \|T^{n+1} - T^n\| = 0$.

Dans toute la suite, on note $A(\mathbb{T})$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues 2π -périodiques vérifiant $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(n)| < \infty$. Pour $g \in A(\mathbb{T})$, on pose $\|g\|_A := \sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{g}(n)|$. Enfin, si $F : \mathbb{R} \rightarrow Z$ est une fonction continue 2π -périodique à valeurs dans un espace de Banach Z , on définit ses coefficients de Fourier $\hat{F}(n)$ par la formule habituelle :

$$\hat{F}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\theta) e^{-in\theta} d\theta.$$

- (1) Montrer que si $\lambda \in \sigma(T) \cap \mathbb{T}$, alors $\|T^{n+1} - T^n\| \geq |\lambda - 1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que (ii) entraîne (i).
- (2) Montrer que toute fonction 2π -périodique de classe \mathcal{C}^1 appartient à $A(\mathbb{T})$.
- (3) Montrer que si $F : \mathbb{R} \rightarrow Z$ est une fonction continue 2π -périodique et si $g \in A(\mathbb{T})$, alors

$$\|\widehat{gF}(n)\| \leq \|g\|_A \sup_{k \in \mathbb{Z}} \|\hat{F}(k)\|.$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- (4) Soit χ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ à support contenu dans $[-1, 1]$ et valant 1 sur $[-1/2, 1/2]$. Pour $\varepsilon \in]0, \pi[$ on note χ_ε la fonction 2π -périodique égale à $\chi(\varepsilon)$ sur $[-\pi, \pi]$. Montrer que χ_ε vérifie les propriétés suivantes :

- $\chi_\varepsilon \equiv 1$ sur $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$ et $\text{supp}(\chi_\varepsilon) \subseteq [-\varepsilon, \varepsilon]$.
- $\sum_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{\chi}_\varepsilon(n+1) - \widehat{\chi}_\varepsilon(n)| \leq M\varepsilon$, où $M := \int_{\mathbb{R}} |\widehat{\chi}'(x)| dx$.

- (5) On suppose que (i) est vérifiée.

- (a) Montrer qu'il existe un ouvert $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ contenant $\overline{\mathbb{D}} \setminus \{1\}$ tel que

$$F(z) := (zT - I)^{-1}$$

est bien défini pour tout $z \in \Omega$. La fonction F est alors holomorphe dans Ω (à valeurs dans $\mathcal{L}(X)$).

- (b) Pour $r \in]0, 1[$, on définit $F_r : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(X)$ par $F_r(\theta) := F(re^{i\theta})$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$r^n T^n - r^{n-1} T^{n-1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_r(\theta) (1 - e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta.$$

En déduire que si $\varepsilon \in]0, \pi[$ et si χ_ε est la fonction donnée par (4), alors

$$\|r^n T^n - r^{n-1} T^{n-1}\| \leq M\varepsilon + \|\widehat{\Phi}_{r,\varepsilon}(n)\|,$$

où $\Phi_{r,\varepsilon}(\theta) := (1 - e^{i\theta})(1 - \chi_\varepsilon(\theta))F_r(\theta)$.

- (c) Observer que la fonction $\Phi_{r,\varepsilon}$ est nulle sur $[-\varepsilon/2, \varepsilon/2]$, et en déduire qu'il existe une constante C_ε indépendante de r telle que

$$\forall r \in [0, 1[\quad \forall \theta : \|\Phi'_{r,\varepsilon}(\theta)\| \leq C_\varepsilon.$$

- (d) Montrer que pour tout $r \in [0, 1[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\|r^n T^n - r^{n-1} T^{n-1}\| \leq M\varepsilon + \frac{C_\varepsilon}{n}.$$

- (6) Montrer que (i) entraîne (ii).

Exercice 31. Soient X et Y des espaces de Banach. Montrer que s'il existe un opérateur $T : X \rightarrow Y$ compact et surjectif, alors $\dim(Y) < \infty$.

Exercice 32. Soit $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $T_K : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ l'opérateur défini par $T_K f(x) := \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$. Montrer que T_K est un opérateur compact. (*Penser au Théorème d'Ascoli.*)

Exercice 33. Soit $V : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ l'opérateur défini par $Vf(x) := \int_0^x f(t) dt$. Montrer que V est compact et déterminer $\sigma(V)$.

Exercice 34. Soit $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue, et soit $T : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ l'opérateur défini par $Tf(x) := \int_0^x \phi(t)f(t) dt - \int_x^1 \phi(t)f(t) dt$. Montrer que T est compact et déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 35. Soit X un espace de Banach complexe, et soient $T \in \mathcal{L}(X)$. On suppose que T est inversible à droite, *i.e.* il existe un opérateur $S \in \mathcal{L}(X)$ tel que $TS = I$, et on suppose de plus qu'il existe un opérateur inversible $V \in \mathcal{L}(X)$ tel que $T - V$ est compact. Montrer que T est inversible. (*Commencer par montrer que $\sigma(TV^{-1})$ est dénombrable; puis poser $A = TV^{-1}$ et utiliser l'Exercice 10.*)

Exercice 36. Soit $T : \mathcal{C}([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ l'opérateur défini par $Tf(x) := \int_0^{1-x} f(t) dt$. Montrer que T est compact et déterminer $\sigma(T)$.

Exercice 37. Pour $p \in [1, \infty[$, on note $V_p : L^p([0, 1]) \rightarrow \mathcal{C}([0, 1])$ l'opérateur défini par $V_p f(x) := \int_0^x f(t) dt$.

- (1) Montrer que si $p > 1$, alors V_p est un opérateur compact.
- (2) Qu'en est-il pour $p = 1$? (*Considérer les fonctions $f_n = 2^n \mathbf{1}_{]2^{-n}, 2^{-n+1}]}$*).
- (3) Soit $p > 1$. En considérant V_p comme un opérateur de $L^p([0, 1])$ dans $L^p([0, 1])$, déterminer $\sigma(V_p)$

Exercice 38. Soit X un espace de Banach. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact, alors 0 est valeur propre approchée de T (*voir l'Exercice 27*). Donner un exemple où 0 n'est pas valeur propre de T .

Exercice 39. Soit X un espace de Banach complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$. Montrer que si $\sigma(T)$ est dénombrable, alors $\sigma(T) = \sigma_{ap}(T)$.

Exercice 40. (perturbation d'une base hilbertienne)

Soit H un espace de Hilbert séparable de dimension infinie, soit $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une base hilbertienne de H , et soit $(f_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite orthonormale dans H . On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \|f_i - e_i\|^2 < \infty$. Le but de l'exercice est de montrer que (f_i) est également une base hilbertienne de H .

- (1) Pour $x \in H$, on pose $Tx := \sum_0^\infty \langle x, e_i \rangle (e_i - f_i)$. Justifier la définition et montrer que $T \in \mathcal{L}(H)$.
- (2) Montrer que T est un opérateur compact.
- (3) Déterminer $\ker(I - T)$, puis montrer que $R := I - T$ est inversible.
- (4) Calculer Re_i pour $i \in \mathbb{N}$, et conclure.

Exercice 41. (Théorème de Lomonosov)

Dans cet exercice, X est un espace de Banach complexe tel que $\dim(X) \geq 2$, et $T \in \mathcal{L}(X)$ est un opérateur compact. On pose $\mathcal{A} := \{A \in \mathcal{L}(X); AT = TA\}$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel fermé $E \subseteq X$, avec $E \neq \{0\}$ et $E \neq X$, tel que $\forall A \in \mathcal{A} : A(E) \subseteq E$.

(1) Démontrer le résultat souhaité lorsque $\sigma(T)$ n'est pas réduit à $\{0\}$.

Dans la suite, on suppose que $\sigma(T) = \{0\}$ et $\|T\| = 1$.

(2) Soit $x_0 \in X$ tel que $\|Tx_0\| > 1$. On pose $B := B(x_0, 1)$. Montrer que $\|x_0\| > 1$ et que $\overline{T(B)} \subseteq X \setminus \{0\}$.

(3) Pour $z \in X \setminus \{0\}$, on pose $E_z := \overline{\{Rz; R \in \mathcal{A}\}}$. Montrer que E_z est un sous-espace vectoriel de X tel que $\forall A \in \mathcal{A} : A(E_z) \subseteq E_z$.

(4) Dans cette question, on suppose qu'on a $E_z = X$ pour tout $z \in X \setminus \{0\}$.

(a) Pour $R \in \mathcal{A}$, on pose $O_R := \{z \in X; \|Rz - x_0\| < 1\}$. Montrer qu'il existe un ensemble fini $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ tel que $\overline{T(B)} \subseteq \bigcup_{R \in \mathcal{F}} O_R$.

(b) Montrer qu'il existe une suite $(R_n)_{n \geq 1} \subseteq \mathcal{F}$ telle que

$$\forall n \geq 1 : \|(R_n T)(R_{n-1} T) \cdots (R_1 T)x_0 - x_0\| < 1.$$

(c) Montrer qu'il existe une constante C telle que

$$\forall n \geq 1 : \|(R_n T)(R_{n-1} T) \cdots (R_1 T)\| \leq C^n \|T^n\|;$$

et en déduire que $\|(R_n T)(R_{n-1} T) \cdots (R_1 T)\| \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow \infty$.

(d) En déduire une contradiction.

(5) Conclure.

Exercice 42. (décomposition polaire)

Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est inversible, alors T peut se décomposer de manière unique sous la forme $T = UP$, où U est unitaire et P est positif.

Exercice 43. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que T est positif et inversible si et seulement si il existe un opérateur auto-adjoint L tel que $T = e^L$; et que dans ce cas l'opérateur L est unique.

Exercice 44. Soit K un compact de \mathbb{C} , et soit $f : K \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et injective. Montrer que si T_1 et T_2 sont deux opérateurs normaux sur un espace de Hilbert H tels que $\sigma(T_1) = K = \sigma(T_2)$ et $f(T_1) = f(T_2)$, alors $T_1 = T_2$.

Exercice 45. (Théorème de Fuglede-Putnam)

Soit H un espace de Hilbert complexe, et soient $A, B \in \mathcal{L}(H)$ des opérateurs normaux. Soit également $T \in \mathcal{L}(H)$. On suppose qu'on a $AT = TB$. Le but de l'exercice est de montrer que $A^*T = TB^*$.

- (1) Montrer que pour tout $S \in \mathcal{L}(H)$, l'opérateur e^{S-S^*} est unitaire.
- (2) Montrer que $\forall z \in \mathbb{C} : e^{zA}T = Te^{zB}$.
- (3) Dédurre de (1) et (2) que pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe des opérateurs unitaires U_z et V_z tels que $e^{zA^*}Te^{-zB^*} = U_zTV_z$.
- (4) Montrer que la fonction $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathcal{L}(H)$ définie par $f(z) := e^{zA^*}Te^{-zB^*}$ est constante. (*Observer que f est holomorphe.*)
- (5) Conclure.

Exercice 46. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Montrer que si $A \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $AT = TA$, alors $Af(T) = f(T)A$ pour toute fonction $f \in \mathcal{C}(\sigma(T))$. (*Utiliser l'Exercice 45!*)

Exercice 47. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. En utilisant le Théorème spectral, montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur normal, alors

$$\|T\| = \sup \{ |\langle Tx, x \rangle|; \|x\| = 1 \}.$$

(À comparer avec la preuve donnée par l'Exercice 28.)

Exercice 48. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Montrer que T est auto-adjoint si et seulement si $\sigma(T) \subseteq \mathbb{R}$.

Exercice 49. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. On suppose que $\sigma(T) = \{0, 1\}$. Montrer que T est une projection orthogonale.

Exercice 50. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. On suppose que $\sigma(T)$ est dénombrable. Montrer que T est diagonalisable en base orthonormée.

Exercice 51. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal. Montrer que si $\lambda \in \sigma(T)$ est un point isolé de $\sigma(T)$, alors λ est une valeur propre de T .

Exercice 52. Démontrer le Théorème ergodique de von Neumann pour un opérateur T unitaire en utilisant le Théorème spectral.

Exercice 53. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. Montrer que si $U \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur unitaire, alors on peut écrire $U = e^{iT}$ pour un certain opérateur auto-adjoint T .

Exercice 54. Soit H un espace de Hilbert complexe séparable. Montrer que $\text{GL}(H)$ est connexe. (*Penser à la décomposition polaire.*)