Feuille d’exercices n$^{\mathrm{o}}$ 5

(dualité)

Exercice 1. Soit H un espace de Hilbert, et soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite (finie ou infinie) d’éléments de H. On dit que (f_i) est une **frame** (mot anglais) s’il existe deux constantes $C < \infty$ et $c > 0$ telles que

$$\forall x \in H \ : \ c\,\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, f_i\rangle|^2 \leq C\,\|x\|^2;$$

Montrer que (f_i) est une frame si et seulement si il existe un opérateur surjectif $T : \ell^2(I) \to H$ tel que $\forall i \in I \ : \ Te_i = f_i$, où (e_i) est la base canonique de $\ell^2(I)$.

Exercice 2. Montrer que si X un espace de Banach, alors X^* est complémenté dans X^{***}, *i.e.* il existe un sous-espace fermé $E \subseteq X^{***}$ tel que $X^{***} = E \oplus X^*$. (*En notant $j_X : X \to X^{**}$ et $j_{X^*} : X^* \to X^{***}$ les plongements canoniques de X dans X^{**} et de X^* dans X^{***}, montrer que $\pi := j_{X^*}(j_X)^* \in \mathcal{L}(X^{***}, X^{***})$ est une projection dont l’image est égale à $j_{X^*}(X^*)$.*)

Exercice 3. (Théorème d’extension de Tietze)
Soit K un espace métrique compact, et soit E un fermé de K. Le but de l’exercice est de montrer “très facilement” que toute fonction continue $\phi : E \to \mathbb{C}$ peut se prolonger en une fonction continue défini sur K tout entier.

(1) On note $R : \mathcal{C}(K) \to \mathcal{C}(E)$ l’*opérateur de restriction*, $Rf := f_{|E}$. Identifier l’opérateur adjoint $R^* : M(E) \to M(K)$.
(2) Démontrer le résultat souhaité.
(3) Pourquoi cette preuve est-elle malhonnête?

Exercice 4. Soit K un espace métrique compact. Soient également E un fermé de K, et $\mathcal{E}$ un sous-espace fermé de $\mathcal{C}(K)$. On note $\mathcal{E}^\perp$ l’ensemble des mesures boréliennes complexes μ sur K vérifiant $\int_K f\,d\mu = 0$ pour toute $f \in \mathcal{E}$, et on suppose qu’on a $|\mu|(E) = 0$ pour toute mesure $\mu \in \mathcal{E}^\perp$.

(1) Soit $R : \mathcal{E} \to \mathcal{C}(E)$ l’opérateur défini par $Rf := f_{|E}$. Soit également σ une mesure complexe sur E.
   (a) Montrer qu’il existe une mesure complexe ν sur K telle que $\|\nu\| = \|R^*(\sigma)\|$ et $\int_K f\,d\nu = \int_E f\,d\sigma$ pour toute $f \in \mathcal{E}$.
   (b) Montrer qu’on a $\nu(A) = \sigma(A)$ pour tout borélien $A \subseteq E$, et en déduire que $\|R^*(\sigma)\| \geq \|\sigma\|$.

(2) Montrer que pour toute fonction $\phi \in \mathcal{C}(E)$, il existe une fonction $f \in \mathcal{E}$ telle que $f_{|E} = \phi$.

Exercice 5. (Théorème de Rudin-Carleson)
Dans cet exercice, on note $\mathbf{A}$ le sous-espace fermé de $\mathcal{C}(\mathbb{T})$ engendré par les fonctions $z \mapsto z^n$, $n \geq 0$; autrement dit, $\mathbf{A}$ est l'adhérence des fonctions polynomiales dans $\mathcal{C}(\mathbb{T})$. Par ailleurs, on note m la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{T}$. Montrer que si $E \subseteq \mathbb{T}$ est un fermé tel que $m(E) = 0$, alors toute fonction continue $\phi : E \to \mathbb{C}$ peut se prolonger en une fonction continue sur $\mathbb{T}$ et appartenant à $\mathbf{A}$. (*Utiliser l'Exercice 4 et le Théorème des frères Riesz, Exo 20 de la Feuille 4.*)

Exercice 6. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que toute boule ouverte de X est un borélien de (X, w); et en déduire que si X est séparable, alors les boréliens de $(X, \|\cdot\|)$ et de (X, w) sont les mêmes.

Exercice 7. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que si $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ est une suite faiblement convergente, $x_n \xrightarrow{w} x \in X$, alors $\|x\| \leq \underline{\lim}\, \|x_n\|$. Démontrer le résultat analogue pour des suites w^*- convergentes.

Exercice 8. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que pour tout $A \subseteq X$, on a $\mathrm{diam}\Big(\overline{A}^{w}\Big) = \mathrm{diam}(A)$, et que pour tout $B \subseteq X^*$, on a $\mathrm{diam}\Big(\overline{B}^{w^*}\Big) = \mathrm{diam}(B)$.

Exercice 9. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, 2\pi]$, on pose $e_n(t) := e^{int}$. Montrer que $e_n \xrightarrow{w^*} 0$ dans $L^\infty([0, 2\pi])$. Est-il vrai que $e_n \xrightarrow{w} 0$ dans $\mathcal{C}([0, 2\pi])$?

Exercice 10. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $f_n := n\mathbf{1}_{[0,e^{-n}]}$. Montrer que $f_n \xrightarrow{w} 0$ dans $L^p(\mathbb{R})$ pour tout $p < \infty$. Est-il vrai que $f_n \xrightarrow{w^*} 0$ dans $L^\infty(\mathbb{R})$?

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n \in L^1([0, 1])$ la fonction définie par $f_n := 2^{n+1}\mathbf{1}_{[2^{-n-1}, 2^{-n}[}$. En considèrant $L^1([0, 1])$ comme une partie de $M([0, 1]) = \mathcal{C}([0, 1])^*$, montrer que la suite (f_n) est w^*- convergente dans $M([0, 1])$, et trouver sa limite.

Exercice 12. Soit X un espace de Banach séparable de dimension infinie. Montrer qu'il existe une suite $(z_n^*) \subseteq X^*$ telle que $z_n^* \xrightarrow{w^*} 0$ mais $\|z_n^*\| \not\to 0$. (*Partir d'une suite bornée $(x_n^*) \subseteq X^*$ sans sous-suite convergente*).

Exercice 13. (Théorème ℓ^1 de Schur)
Le but de l'exercice est de démontrer le résultat suivant : *Dans l'espace $\ell^1(\mathbb{N})$, toute suite faiblement convergente converge en norme.* Dans toute la suite, on notera e_i^* les formes linéaires coordonnées sur $\ell^1(\mathbb{N})$: si $x = (x(i))_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^1$, alors $\langle e_i^*, x\rangle = x(i)$. D'autre part, on note c_{00} l'ensemble des vecteurs $z \in \ell^1(\mathbb{N})$ à support fini; et si $z, z' \in c_{00}$, on écrit $z \prec z'$ si on a $\max\big(\mathrm{supp}(z)\big) < \min\big(\mathrm{supp}(z')\big)$.

(1) Soit $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de c_{00}, avec $z_k \prec z_{k+1}$ pour tout k.
   (a) Montrer qu'il existe une suite $\big(a(i)\big)_{i\in\mathbb{N}} \in \{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N} \;:\; \sum_{i\in\mathbb{N}} a(i)\langle e_i^*, z_k\rangle = \|z_k\|_{\ell^1}\,.$$
   (b) En déduire que si $z_k \xrightarrow{w} 0$, alors $\|z_k\| \to 0$
(2) Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\ell^1(\mathbb{N})$. On suppose que $\langle e_i^*, x_n\rangle \to 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Montrer qu'on peut construire une sous-suite $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de (x_n) et une suite $(z_k)_{k\in\mathbb{N}}$ d'éléments de c_{00} vérifiant les propriétés suivantes : $z_k \prec z_{k+1}$ pour tout k, et $\|z_k - x_{n_k}\|_{\ell^1} < 2^{-k}$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.
(4) Que peut-on dire dans $\ell^p(\mathbb{N})$ pour $p > 1$?

Exercice 14. Soit X un espace vectoriel normé. Montrer que si E est un sous-espace vectoriel de X^*, alors $\big(E_\perp\big)^\perp = \overline{E}^{w^*}$.

Exercice 15. (Théorème des bipolaires)
Soit X un espace vectoriel normé réel. Pour $A \subseteq X$, on pose
$$A^\circ = \{x^* \in X^*;\ \langle x^*, z\rangle \leq 1 \text{ pour tout } z \in A\}\,;$$
et pour $B \subseteq X^*$, on pose
$$B_\circ = \{x \in X;\ \langle z^*, x\rangle \leq 1 \text{ pour tout } z^* \in B\}\,.$$
Montrer que si $A \subseteq X$ est convexe et contient 0, alors $(A^\circ)_\circ = \overline{A}$; et que si $B \subseteq X^*$ est convexe et contient 0, alors $(B_\circ)^\circ = \overline{B}^{w^*}$.

Exercice 16. Soit X un espace vectoriel normé, et soit Z un sous-espace vectoriel de X^*.

(1) Montrer que si Z sépare les points de X, alors Z est w^*- dense dans X^*.
(2) On suppose que X est séparable et que le sous-espace Z est **normant**, ce qui signifie qu'il existe une constante $C < \infty$ telle que
$$\forall x \in X \;:\; \|x\| \leq C \sup\big\{|\langle z^*, x\rangle|;\ z^* \in B_Z\big\}.$$

Montrer que pour tout $x^* \in X^*$, on peut trouver une *suite* $(z_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de Z telle que $z_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$, avec de plus $\|z_n^*\| \leq C\,\|x^*\|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. (*Supposer que* $\|x^*\| = 1$, *et considérer* $\overline{CB_Z}^{w^*}$.)

Exercice 17. Soit X un espace de Banach de dimension infinie.

(1) On note B_X la boule unité fermée de X, et S_X la sphère unité. Montrer qu'on a $\overline{S_X}^{w} = B_X$. (*Commencer par observer que si* $x_1^*, \dots, x_N^* \in X^*$, *alors* $\bigcap_{k=1}^N \ker(x_k^*) \neq \{0\}$.)

(2) Montrer de même qu'on a $\overline{S_{X^*}}^{w^*} = B_{X^*}$.

Exercice 18. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite orthonormée dans un espace de Hilbert réel H. Soit également $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictement positifs.

(1) Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :

   (i) l'adhérence faible de $\{\lambda_n e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ dans H ne contient pas 0;

   (ii) il existe $a_1, \dots, a_d \in H$ tels que
$$\forall n \in \mathbb{N} \,:\, \sum_{j=1}^{d} \langle a_j, e_n\rangle^2 \geq 1/\lambda_n^2;$$

   (iii) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} 1/\lambda_n^2 < \infty$.

(2) D'après (1) l'adhérence faible de l'ensemble $\{\sqrt{n} e_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ dans H contient 0. Peut-on trouver une *suite* d'entiers (n_k) telle que $\sqrt{n_k}\, e_{n_k} \xrightarrow{w} 0$?

Exercice 19. Soit X un espace de Banach réel de dimension infinie, et soit $(x_n) \subseteq X$ une suite convergeant faiblement vers 0. On note K l'enveloppe convexe fermée de l'ensemble $\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

(1) Montrer que K est borné et contient 0. En déduire que si $z \in K \setminus \{0\}$, alors la droite $\mathbb{R}z$ rencontre ∂K, puis montrer que l'espace vectoriel engendré par ∂K contient K.

(2) On suppose que l'intérieur de K contient 0, et on fixe un point $x \in \partial K$.

   (a) Montrer qu'il existe une forme linéaire continue non-nulle $x^* \in X^*$ telle que $\langle x^*, x\rangle = \sup_{z\in K} \langle x^*, z\rangle$. (*Séparer* x *de* $\mathring{K}$). Montrer ensuite que $\langle x^*, x\rangle > 0$.

   (b) Justifier l'existence d'un $\varepsilon > 0$ et d'un entier N tel que $\langle x^*, x_n\rangle \leq \langle x^*, x\rangle - \varepsilon$ pour tout $n > N$.

   (c) On note A l'enveloppe convexe de $\{x_n;\ n \leq N\}$ et B l'enveloppe convexe de $\{x_n;\ n > N\}$.

(i) Montrer qu'il existe des suites $(a_k) \subseteq A$, $(b_k) \subseteq B$ et $(\lambda_k) \subseteq [0,1]$ telles que $(1-\lambda_k)a_k + \lambda_k b_k \to x$.

(ii) Montrer qu'on a nécessairement $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = 0$, et en déduire que $x \in A$.

(3) Déduire de (1) et (2) que si $\mathring{K}$ contient 0, alors $X = \mathrm{Vect}\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

(4) Montrer que K est d'intérieur vide dans X.

Exercice 20. (Théorème de Krein-Šmulian)
Soit X un espace de Banach réel. On note B_{X^*} la boule unité fermée de X^*, et pour tout $r > 0$, on note rB_{X^*} la boule fermée $\overline{B}(0,r) \subseteq X^*$. Soit également C une partie convexe de X^*. Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) C est w^*- fermé dans X^*;
(ii) pour tout $r > 0$, $C \cap rB_{X^*}$ est w^*- fermé.

(1) Démontrer l'implication "facile".
(2) Montrer que si (ii) est vérifiée, alors C est fermé en norme.
(3) Montrer que si (ii) est vérifiée, alors $C \cap B$ est w^*- fermé pour toute boule fermée $B \subseteq X^*$. En déduire que pour prouver l'implication (ii) $\Longrightarrow$ (i), on peut supposer que $0 \in C$.
(4) On suppose que (ii) est vérifiée et que $0 \in C$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $C_n := C \cap 2^n B_{X^*}$. On a donc $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} C_n$.
   (a) Avec les notations de l'exercice 15, on pose $G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (C_n)_\circ$. Montrer que $A \subseteq G^\circ$.
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$, et soit $x \in X \setminus ((C_{n+1})_\circ + 2^{-n}B_X)$. Montrer à l'aide du théorème de Hahn-Banach qu'il existe $\Phi \in X^*$ telle que $\Phi(x) > 1$, $\|\phi\| \leq 2^n$ et $\sup_{z\in(C_{n+1})_\circ} \Phi(z) \leq 1$.
   (c) Déduire de (b) qu'on a $(C_n)_\circ \subseteq (C_{n+1})_\circ + 2^{-n}B_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Montrer qu'on a $(C_n)_\circ \subseteq G + 2^{-n+1}B_X$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (e) En déduire que si une forme linéaire $z^* \in X^*$ appartient à G°, alors $z^* \in (1 + 2^{-n+1}\|z\|)\, C$ pour tout n suffisament grand.
   (f) Montrer que $C = G^\circ$.
(5) Conclure.

Exercice 21. Soit K un espace métrique compact. On note $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K, que l'on considère comme une partie de $\mathcal{C}(K)^*$. Montrer que $\mathbf{P}(K)$ est convexe et w^*- compact.

Exercice 22. Soit K un espace métrique compact, et soit $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K, que l'on considère comme une partie de $\mathcal{C}(K)^*$. Pour $x \in K$, on note δ_x la masse de Dirac au point x. Montrer que $\mathrm{conv}\{\delta_x;\ x \in K\}$ est w^*- dense dans $\mathbf{P}(K)$.

Exercice 23. Soit K un espace métrique compact, et soit $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K.

(1) Montrer que si U est un ouvert de K, alors $\mathbf{1}_U$ est limite simple d'une suite croissante de fonctions continues. Que peut-on dire pour $\mathbf{1}_F$ lorsque F est un fermé de K?
(2) Soit $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite dans $\mathbf{P}(K)$, et soit $\mu \in \mathbf{P}(K)$. Montrer que si $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, alors $\overline{\lim}\, \mu_n(U) \leq \mu(U)$ pour tout ouvert $U \subseteq K$ et $\underline{\lim}\, \mu_n(F) \geq \mu(F)$ pour tout fermé $F \subseteq K$. En déduire que si $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, alors $\mu_n(A) \to \mu(A)$ pour tout borélien $A \subseteq K$ tel que $\mu(\partial A) = 0$.
(3) Est il vrai que si $(\mu_n) \subseteq \mathbf{P}(K)$ et $\mu_n \xrightarrow{w^*} \mu$, alors $\mu_n(A) \to \mu(A)$ pour tout borélien $A \subseteq K$?

Exercice 24. (barycentre d'une mesure)
Soit K un convexe compact dans un espace vectoriel normé X. On note comme d'habitude $\mathbf{P}(K)$ l'ensemble des mesures de probabilité boréliennes sur K.

(1) Soit $\nu \in \mathbf{P}(K)$ une combinaison convexe de masses de Dirac : $\nu = \sum_{j=1}^N c_j \delta_{x_j}$ où $c_j \geq 0$ et $\sum_j c_j = 1$. On pose $a := \sum_j c_j x_j \in K$. Si $f : K \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue, comparer $f(a)$ et $\int_K f\, d\nu$.
(2) Montrer que pour toute mesure de probabilité $\mu \in \mathbf{P}(K)$, il existe un point $b \in K$ vérifiant la propriété suivante : pour toute fonction convexe continue $f : K \to \mathbb{R}$, on a $f(b) \leq \int_K f\, d\mu$. (*Utiliser l'Exercice 22.*)
(3) Avec les notations de (2), que peut-on dire pour une fonction *affine* continue $f : K \to \mathbb{R}$? En déduire qu'il existe un *unique* point b vérifiant la propriété précédente. On dit que b est le **barycentre** de la mesure μ.

Exercice 25. Dans cet exercice, H est un espace de Hilbert complexe et $U \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur unitaire. On se donne également $x_0 \in H$ tel que $\|x_0\| = 1$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur $[-\pi, \pi]$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{Z} \ : \ \langle T^n x_0, x_0\rangle = \widehat{\mu}(n) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int} d\mu(t).$$

(1) Soit $\phi : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ la fonction définie par $\phi(n) := \langle T^n x_0, x_0\rangle$. Calculer $\phi(0)$, et montrer que

$$\forall N \in \mathbb{N}\ \forall t \in [-\pi, \pi] \ : \ \sum_{k=0}^{N}\sum_{l=0}^{N} \phi(k-l) e^{i(k-l)t} \geq 0.$$

(2) Pour $N \in \mathbb{N}$, on note $P_N : [-\pi, \pi] \to \mathbb{C}$ la fonction définie par

$$P_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} \left(1 - \frac{|n|}{N}\right) \phi(n)\, e^{int}.$$

(a) Vérifier que $P_N(t) = \dfrac{1}{N+1} \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \sum_{l=0}^{N} \phi(k-l) e^{i(k-l)t}$.

(b) On note m la mesure de Lebesgue normalisée sur $[-\pi, \pi]$, *i.e.* $dm(t) = \frac{dt}{2\pi}\cdot$ Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}$, la mesure $\mu_N := P_N m$ est une mesure de probabilité.

(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 26. (produits de Riesz)
Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $n_k := 3^k$. On fixe également une suite $(a_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq [-1, 1]$.

(1) Montrer que si $n \in \mathbb{Z}$, alors n admet *au plus une* représentation sous la forme $n = \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j n_{k_j}$, où $k_1 < \cdots < k_p$ et $\varepsilon_j = \pm 1$.

(2) Pour $N \in \mathbb{N}^*$, on définit une fonction 2π-périodique $f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f_N(t) := \prod_{k=0}^{N} (1 + \cos(n_k t)).$$

(a) Montrer que f_N est positive.

(b) En utilisant (1), calculer $\widehat{f_N}(0)$ et $\widehat{f_N}(n_k)$ pour $k \in \{0, \dots, N\}$. (*Écrire les cosinus à l'aide des exponentielles correspondantes et développer le produit*).

(3) Montrer qu'il existe une mesure de probabilité borélienne μ sur $\mathbb{T}$ telle que $\widehat{\mu}(n_k) = a_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 27. Pour $i \in \mathbb{N}$, on note $\Phi_i : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{K}$ la forme linéaire (continue) définie par $\Phi_i\big((x_n)_{n \in \mathbb{N}}\big) := x_i$. Montrer que la suite (Φ_i) est bornée dans $\ell^\infty(\mathbb{N})^*$, mais ne possède aucune sous-suite w^*- convergente.

Exercice 28. (Théorème de Sobczyk)
Soit X un sous-espace fermé de $\ell^\infty(\mathbb{N})$. On suppose que X est séparable et contient $c_0(\mathbb{N})$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une projection continue de X sur c_0. Dans toute la suite, on note e_n^* les "formes linéaires coordonnées" sur X: si $x = (x_n) \in X \subseteq \ell^\infty$, alors $\langle e_n^*, x \rangle = x_n$. Enfin, on note $c_0^\perp$ l'ensemble des formes linéaires continues $x^* \in X^*$ vérifiant $\langle x^*, z \rangle = 0$ pour tout $z \in c_0$.

(1) Soit B_{X^*} la boule unité fermée de X^*.

(a) Montrer que si $e^* \in X^*$ est la limite w^* d'une sous-suite $(e_{n_k}^*)$ de (e_n^*), alors $e^* \in c_0^\perp$.

(b) Soit d une distance définissant la topologie de (B_{X^*}, w^*). Montrer qu'on a $\lim_{n\to\infty} d\big(e_n^*, B_{X^*} \cap c_0^\perp\big) = 0$.

(c) Conclure qu'il existe une suite $(z_n^*) \subseteq c_0^\perp \cap B_{X^*}$ telle que $z_n^* - e_n^* \xrightarrow{w^*} 0$.

(2) Soit $\pi : X \to c_0(\mathbb{N})$ définie par $\pi(x) := \big(\langle e_n^* - z_n^*, x\rangle\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que π est une projection continue de X sur c_0.

Exercice 29. (opérateurs p - sommants)
Soient K un espace topologique compact, X un sous-espace fermé de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ et Y un espace de Banach réel. Soit également $p \in [1, \infty[$, et soit $C \in \mathbb{R}^+$. On dit qu'un opérateur $T : X \to Y$ est p **- sommant** avec constante C si on a

$$\forall f_1, \dots, f_N \in X \ : \ \sum_{i=1}^N \|Tf_k\|^p \leq C^p \sup_{t\in K} \sum_{i=1}^N |f_i(t)|^p \,.$$

Le but de l'exercice est de montrer l'équivalence des deux propriétés suivantes :

(i) $T : X \to Y$ est p - sommant avec constante C;

(ii) il existe une mesure de probabilité (borélienne) μ sur K tels que

$$\forall f \in X \ : \ \|Tf\| \leq C \left(\int_K |f(t)|^p d\mu(t) \right)^{1/p} .$$

(1) Montrer que (ii) entraîne (i).

(2) On suppose que (i) est vérifiée.

(a) Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des parties finies de X. Pour $F = \{f_1, \dots, f_N\} \in \mathcal{F}$, on définit une fonction $\Phi_F \in \mathcal{C}(K)$ en posant

$$\Phi_F(t) := \sum_{i=1}^N \|T(f_k)\|^p - C^p \sum_{i=1}^N |f_i(t)|^p.$$

Enfin, on pose $\mathcal{C} := \{\Phi_F;\ F \in \mathcal{F}\}$ et $\mathcal{D} := \{g \in \mathcal{C}(K);\ g > 0 \text{ sur } K\}$. Montrer que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ sont des cônes convexes, et que $\mathcal{D}$ est ouvert dans $\mathcal{C}(K)$.

(b) Avec les notations de (a), montrer qu'il existe une mesure réelle $\nu \neq 0$ sur K telle que

$$\forall F \in \mathcal{F}\ \forall g \in \mathcal{D} \ : \ \int_K \Phi_F \, d\nu \leq 0 \leq \int_K g \, d\nu \,.$$

(c) Montrer que ν est une mesure positive.

(d) Montrer que (ii) est vérifiée.

Exercice 30. (Théorème du Minimax)
Soit K un compact convexe d'un espace vectoriel normé réel X, et soit L un convexe d'un espace vectoriel réel Y. Soit également $F : K \times L \to \mathbb{R}^+$. On suppose que pour

tout $y \in L$, la fonction $x \mapsto F(x,y)$ est concave continue, et que pour tout $x \in K$, la fonction $y \mapsto F(x,y)$ est convexe. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a

$$\sup_{x\in K}\inf_{y\in L} F(x,y) = \inf_{y\in L}\sup_{x\in K} F(x,y).$$

(1) Montrer qu'on a $0 \leq \sup_{x\in K}\inf_{y\in L} F(x,y) \leq \inf_{y\in L}\sup_{x\in K} F(x,y) < \infty$.

(2) On suppose qu'on a $\inf_{y\in L}\sup_{x\in K} F(x,y) < \sup_{x\in K}\inf_{y\in L} F(x,y)$, autrement dit qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$\inf_{y\in L}\sup_{x\in K} F(x,y) := c < c + \varepsilon = \sup_{x\in K}\inf_{y\in L} F(x,y).$$

(a) On note $C \subseteq \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ l'ensemble des fonctions f de la forme

$$f(x) = u(x) - \sum_{j=1}^{N} \lambda_j F(x, y_j),$$

où $\lambda_j \geq 0$, $\sum_j \lambda_j = 1$, $y_j \in L$ et $u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$ avec $u(x) \leq c$ pour tout $x \in K$. Montrer que C est une partie convexe de $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)$, et que C est à distance strictement positive de $\mathcal{C}^+(K) = \{g \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K);\ g \geq 0\}$. (*Vérifier qu'on a* $\inf_{x\in K} f(x) \leq -\varepsilon$ *pour toute* $f \in C$.)

(b) Montrer qu'il existe une mesure $\mu \in M_{\mathbb{R}}(K)$ non nulle telle que

$$\sup\left\{\int_K u\, d\mu;\ u \in \mathcal{C}_{\mathbb{R}}(K)\ ,\ u \leq c\right\} < \inf_{y\in L} \int_K F(x,y)\, d\mu(x).$$

(c) Montrer que la mesure μ est positive; et en déduire qu'il existe une mesure de probabilité ν sur K telle que

$$\inf_{y\in L} \int_K F(x,y)\, d\nu(x) > c.$$

(d) En déduire une contradiction en considérant le barycentre de la mesure ν. (*Voir l'Exercice 24.*)

Exercice 31. Soit X un espace de Banach réflexif. Montrer que toute forme linéaire continue sur X *atteint sa norme.* Autrement dit : si $\Phi \in X^*$, alors il existe $x \in B_X$ tel que $\Phi(x) = \|\Phi\|$.

Exercice 32. Soit X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, et soit $\Phi \in X^* \setminus \{0\}$. Soit également $a \in X$ vérifiant $\Phi(a) \neq 0$. Montrer qu'on a

$$\|\Phi\| = \frac{|\Phi(a)|}{\operatorname{dist}(a, \ker(\Phi))}.$$

Exercice 33. (distances atteintes)
Soient X un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé, H un sous-espace vectoriel fermé de X différent de X, et $a \in X \setminus H$.

(1) On suppose que H est réflexif. Montrer qu'il existe un point $h \in H$ tel que $\|a-h\| = \mathrm{dist}(a, H)$.

(2) Dans cette question, on suppose que H est le noyau d'une forme linéaire continue $\Phi : X \to \mathbb{R}$. En utilisant l'exercice 32, Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) Il existe $h \in H$ tel que $\mathrm{dist}(a, h) = \|a-h\|$;
   (ii) Il existe $x \in X$ tel que $\|x\| = 1$ et $|\Phi(x)| = \|\Phi\|$.

(3) Dans cette question, on prend $X := \mathcal{C}([0,1])$. Soit $a := \mathbf{1}$, la fonction constante égale à 1, et soit
$$H := \left\{ h \in \mathcal{C}([0,1]);\ \int_0^{1/2} h(t)\,dt = \int_{1/2}^1 h(t)\,dt \right\}.$$
Montrer qu'il n'existe aucune $h \in H$ telle que $\|a-h\|_\infty = \mathrm{dist}(a, H)$.

Exercice 34. (Théorème de James, cas séparable)
Soit X un espace de Banach réel *séparable.* On suppose que toute forme linéaire continue sur X atteint sa norme, autrement dit que pour toute $x^* \in X^*$, il existe $x \in B_X$ tel que $\langle x^*, x\rangle = \|x^*\|$. Le but de l'exercice est de montrer que X est réflexif.

(1) Dans cette question, on veut établir le fait suivant : *si $(x_n^*)_{n\geq 1}$ une suite quelconque d'éléments de B_{X^*}, alors*
$$\sup_{x\in B_X} \overline{\lim}\, \langle x_n^*, x\rangle \geq \inf\left\{ \|x^*\|;\ x^* \in \overline{\mathrm{conv}}\,\{x_n^*;\ n\geq 1\}\right\}.$$
   (a) Pour tout entier $k \geq 1$, on pose $C_k := \overline{\mathrm{conv}}\,\{x_n^*;\ n \geq k\}$. Soit également $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe une suite $(z_k^*)_{k\geq 1} \subseteq B_{X^*}$ avec $z_k^* \in C_k$ pour tout k telle que, si on pose $u_0^* := 0$ et $u_k^* := \sum_{n=1}^k 2^{-n} z_n^*$ pour $k \geq 1$, alors
$$\forall k \geq 0\ \forall z^* \in C_{k+1}\ :\ \|2^k u_k^* + z_{k+1}^*\| \leq \|2^k u_k^* + z^*\| + 2^{-k-1}\varepsilon.$$
   (b) Avec les notations de (a), montrer que $x^* := \sum_{n=1}^\infty 2^{-n} z_n^*$ appartient à $\overline{\mathrm{conv}}\,\{x_n^*;\ n\geq 1\}$.
   (c) Montrer que $2^k x^* - 2^k u_k^* \in C_{k+1}$ pour tout $k \geq 0$, et en déduire que
$$\forall k \geq 0\ :\ \|2^{k+1} u_{k+1}^* - 2^k u_k^*\| \leq 2^k \|x^*\| + 2^{-k-1}\varepsilon.$$
   (d) Par hypothèse sur X, il existe $x \in B_X$ tel que $\langle x^*, x\rangle = \|x\|$. Montrer que $\forall m \geq 0\ :\ 2^{m+1}\langle u_{m+1}^*, x\rangle \leq (2^{m+1}-1)\,\langle x^*, x\rangle + \varepsilon$.
   (e) Montrer que $\|x^*\| \leq \inf\limits_{m\geq 0} \langle 2^m x^* - 2^m u_m^*, x\rangle + \varepsilon \leq \overline{\lim}\,\langle x_n, x\rangle + \varepsilon$.

(f) Conclure.

(2) Déduire de (1) que si (x_n^*) est une suite d'éléments de B_{X^*}, alors
$$\forall x^{**} \in B_{X^{**}} \ : \ \overline{\lim} \, \langle x^{**}, x_n^* \rangle \leq \sup_{x \in B_X} \overline{\lim} \, \langle x_n^*, x \rangle.$$

(3) On suppose que X *n'est pas réflexif*, et on cherche à obtenir une contradiction. Soit $x^{**} \in B_{X^{**}}$ tel que $x^{**} \notin X$.

(a) Justifier l'existence de $x^{***} \in B_{X^{***}}$ tel que $\langle x^{***}, x^{**} \rangle > 0$ et $\forall x \in X$: $\langle x^{***}, x \rangle = 0$.

(b) En utilisant la séparabilité de X et le Théorème de Goldstine, montrer qu'il existe une suite $(x_n^*) \subseteq B_{X^*}$ telle que $\langle x^{**}, x_n^* \rangle \to \langle x^{***}, x^{**} \rangle$ et $\forall x \in X \ : \ \langle x_n^*, x \rangle \to 0$.

(c) En déduire une contradiction.

Exercice 35. (Théorème de Bishop-Phelps)
Soit X un espace de Banach réel. On note NA l'ensemble des $\Phi \in X^*$ qui atteignent leur norme; autrement dit, une $\Phi \in X^*$ appartient à NA si et seulement si il existe $x \in B_X$ tel que $\Phi(x) = \|\Phi\|$. Le but de l'exercice est de montrer que NA est dense dans X^*.

(1) Soient $\Phi_0, \Psi \in X^*$ avec $\|\Phi_0\| = 1 = \|\Psi\|$, et soit $\varepsilon > 0$. On suppose qu'on a $|\Psi(u)| \leq \varepsilon$ pour tout $u \in B_X \cap \ker(\Phi_0)$. Montrer qu'on a $\|\Phi_0 + \Psi\| \leq 2\varepsilon$ ou $\|\Phi_0 - \Psi\| \leq 2\varepsilon$. (*Commencer par montrer qu'il existe $\widetilde{\Psi} \in X^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ tels que $\|\widetilde{\Psi}\| \leq \varepsilon$ et $\widetilde{\Psi} - \Psi = \lambda \, \Phi_0$. Montrer ensuite que $\big|1 - |\lambda|\big| \leq \varepsilon$, puis discuter selon le signe de λ.*)

(2) Soit $\Phi_0 \in X^*$ avec $\|\Phi_0\| = 1$. Soit également $\varepsilon > 0$. On pose $A := \frac{1}{\varepsilon} B_X \cap \ker(\Phi_0)$ et $C := \operatorname{conv}\big(B_X \cup A\big)$. On suppose qu'il existe $x \in B_X$ tel que $x \notin \mathring{C}$. Montrer qu'il existe $\Phi \in \mathrm{NA}$ telle que $\|\Phi - \Phi_0\| \leq 2\varepsilon$.

(3) Soit $\Phi_0 \in X^*$ vérifiant $\|\Phi_0\| = 1$ et soit $\varepsilon > 0$. On définit $C = \operatorname{conv}\big(B_X \cup A\big)$ comme dans (2). Soit également $z_0 \in B_X$ tel que $\Phi_0(z_0) > 0$. Enfin, soit $k > 0$.

(a) On définit une relation binaire $\preceq$ sur B_X de la façon suivante :
$$x \preceq y \iff \Phi_0(y) \geq \Phi_0(x) \quad \text{et} \quad \|y - x\| \leq k\,(\Phi_0(y) - \Phi_0(x)).$$
Vérifier que $\preceq$ est une relation d'ordre.

(b) Soit $x \in B_X$ tel que $\Phi_0(x) \geq \Phi_0(z_0)$. On suppose que $x \in \mathring{C}$.

(i) Justifier qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $x + \alpha z_0 \in C$.

(ii) On écrit $x + \alpha z_0 = (1-\lambda)y + \lambda a$ où $y \in B_X$, $a \in A = \frac{1}{\varepsilon} B_X \cap \ker(\Phi_0)$ et $0 \leq \lambda \leq 1$. Montrer qu'on a $\|y - x\| \leq (1 + 1/\varepsilon)(\lambda + \alpha)$ et $\Phi_0(y) - \Phi_0(x) \geq (\lambda + \alpha)\Phi_0(z_0)$.

(c) Montrer que si k est convenablement choisi au départ, alors aucun $x \in B_X$ vérifiant $\Phi_0(x) \geq \Phi_0(z_0)$ et $x \in \mathring{C}$ n'est maximal pour la relation d'ordre $\preceq$.

(4) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 36. Soit X un espace de Banach réflexif. Montrer que toute suite décroissante de convexes fermés bornés non-vides de X a une intersection non-vide.

Exercice 37. Soit X un espace de Banach réflexif, et soit $C \subseteq X$ un ensemble convexe fermé. Montrer que si $f : C \to \mathbb{R}$ est une fonction convexe continue vérifiant $\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = +\infty$, alors f est minorée et atteint sa borne inférieure. (*On peut utiliser l'Exercice 36; ou pas.*) En particulier, si $x \in X$, alors il existe un point $z \in C$ tel que $\operatorname{dist}(x, C) = z$.

Exercice 38. Soit X un espace de Banach. On suppose qu'il existe un espace de Banach réflexif Z et une surjection linéaire continue T de Z sur X. Montrer que X est réflexif.

Exercice 39. Soient X et Y deux espaces de Banach, avec X réflexif. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, alors $T(B_X)$ est fermée dans Y.

Exercice 40. Soient X et Y des espaces de Banach. On note `WOT` la topologie sur $\mathcal{L}(X, Y)$ engendrée par les semi-normes $p_{x,y^*}(T) := |\langle y^*, Tx\rangle|$, où $x \in X$ et $y^* \in Y^*$. (Cette topologie s'appelle la **topologie opératorielle faible**.) En termes de suites généralisées, $T_p \xrightarrow{\texttt{WOT}} T$ signifie donc que $T_p x \xrightarrow{w} Tx$ pour tout $x \in X$. Montrer que si Y est réflexif, alors la boule unité fermée de $\mathcal{L}(X, Y)$ est `WOT`-compacte.

Exercice 41. Soit X un espace de Banach non réflexif. Montrer qu'il existe un convexe fermé $C \subseteq X^*$ qui n'est pas w^*- fermé.

Exercice 42. Si $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'espaces de Banach, on définit leur **somme directe** ℓ^2 par

$$\bigoplus_{\ell^2} X_n := \left\{ (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \prod_{n\in\mathbb{N}} X_n;\ \sum_{n=0}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty \right\},$$

et on munit $\bigoplus_{\ell^2} X_n$ de la norme définie par $\|(x_n)\| = (\sum_0^\infty \|x_n\|^2)^{1/2}$.

(1) Montrer que $\bigoplus_{\ell^2} X_n$ est un espace de Banach.

(2) Montrer que le dual de $\bigoplus_{\ell^2} X_n$ s'identifie isométriquement à $\bigoplus_{\ell^2} X_n^*$.

(3) Montrer que si les X_n sont réflexifs, alors $\bigoplus_{\ell^2} X_n$ est réflexif.

Exercice 43. Soit $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ un espace mesuré. On suppose qu'il existe une suite (A_n) d'ensembles mesurables deux à deux disjoints tels que $0 < \mu(A_n) < \infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $L^1(\Omega, \mu)$ n'est pas réflexif. (*Poser* $f_n := \frac{1}{\mu(A_n)} \mathbf{1}_{A_n}$ *et montrer que* (f_n) *ne possède aucune sous-suite faiblement convergente dans* $L^1(\mu)$).

Exercice 44. (Théorème d'Eberlein-Šmulian)
Soit X un espace de Banach. On suppose que toute suite bornée $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ possède une sous-suite w-convergente. Le but de l'exercice est de montrer que X est réflexif.

(1) Montrer que si $E \subseteq X^{**}$ est un sous-espace de dimension finie, alors on peut trouver un ensemble fini $\Lambda \subseteq B_{X^*}$ tel que

$$\forall z^{**} \in E \ : \ \sup_{x^* \in \Lambda} |\langle z^*, x^* \rangle| \geq \frac{1}{2} \|z^{**}\|.$$

(*Commencer par choisir* $z_1^{**}, \dots, z_N^{**} \in S_E$ *– la sphère unité de* E *– tels que* $S_E \subseteq \overline{B}(z_1^{**}, 1/4) \cup \dots \cup \overline{B}(z_N^{**}, 1/4)$, *puis* $x_1^*, \dots, x_N^* \in B_{X^*}$ *tels que* $|\langle z_k^{**}, x_k^* \rangle| \geq 3/4$ *pour* $k = 1, \dots, N$.)

(2) Soit $x^{**} \in B_{X^{**}}$ quelconque. En utilisant (1) et le Théorème de Goldstine, montrer qu'on peut construire par récurrence une suite $(\Lambda_n)_{n\geq 0}$ de parties finies de B_{X^*} et une suite $(x_n)_{n\geq 0} \subseteq B_X$ avec $x_0 = 0$ telles que les choses suivantes aient lieu :

- $\forall n \geq 0 \ \forall z^{**} \in \mathrm{vect}(x^{**} - x_0, \dots, x^{**} - x_n) \ : \ \sup_{x^* \in \Lambda_n} |\langle z^{**}, x^* \rangle| \geq \frac{1}{2} \|z^{**}\|$;
- $\forall n \geq 1 \ \forall x^* \in \Lambda_0 \cup \dots \cup \Lambda_{n-1} \ : \ |\langle x^{**} - x_n, x^* \rangle| < 2^{-n}$;
- la suite (x_n) est w-convergente, $x_n \xrightarrow{w} x \in X$.

(3) On garde les notations de (2), et on pose $\Lambda := \bigcup_{i\geq 0} \Lambda_i$.

(a) Justifier que $x^{**} - x \in \overline{\mathrm{vect}} \{x^{**} - x_i; \ i \in \mathbb{N}\}$, et en déduire que

$$\|x^{**} - x\| \leq 2 \sup_{x^* \in \Lambda} |\langle x^{**} - x, x^* \rangle|.$$

(b) Montrer que par ailleurs, on a $\langle x^{**} - x, x^* \rangle = 0$ pour tout $x^* \in \Lambda$.

(4) Conclure.

Exercice 45. (Uniforme convexité)
On dit qu'un espace de Banach $(X, \|\cdot\|)$ est **uniformément convexe** si la norme $\|\cdot\|$ vérifie la propriété suivante : pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\forall x, y \in B_X \ : \ \|x - y\| \geq \varepsilon \implies \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta \,.$$

(1) Montrer que tout espace de Hilbert est uniformément convexe.

(2) Le but de cette question est de montrer que tout espace de Banach uniformément convexe est réflexif. On fixe donc un espace uniformément convexe X, et on considère X comme un sous-espace de X^{**}.
   (a) Soit $x^{**} \in X^{**}$ vérifiant $\|x^{**}\| = 1$, et soit $\varepsilon > 0$. En utilisant l'uniforme convexité de X, montrer qu'il existe un voisinage ouvert V de x^{**} dans (X^{**}, w^{**}) tel que $\mathrm{diam}(V \cap B_X) \leq \varepsilon$. En déduire, à l'aide de l'exercice 8, qu'on a $\mathrm{diam}(V \cap B_{X^{**}}) \leq \varepsilon$.
   (b) Montrer que X est réflexif.

(3) Montrer que si X est uniformément convexe, alors la sphère unité de X ne contient pas de segments non-triviaux. En déduire un exemple d'espace de Banach réflexif non uniformément convexe.

Exercice 46. Soit X un espace de Banach uniformément convexe, et soit $C \subseteq X$ un ensemble convexe fermé.

(1) Montrer que pour tout $x \in X$, il existe un unique point $z \in C$ tel que $\|z - x\| = \mathrm{dist}(x, C)$. On note ce point $p_C(x)$.
(2) Montrer que l'application $p_C : X \to C$ est continue.

Exercice 47. (Théorème de Banach-Saks)
Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert.

(1) Soit $(z_n)_{n\geq 1}$ une suite de points de H convergeant faiblement vers 0.
   (a) Montrer que (z_n) possède une sous-suite $(z'_n)_{n\geq 1}$ telle que
$$\forall n \; \forall i < n \; : \; |\langle z'_n, z'_i\rangle| < \frac{1}{n} \cdot$$
   (b) Montrer qu'il existe une constante C telle que $\forall n \geq 1 \; : \; \left\| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} z'_i \right\| \leq \frac{C}{n}\cdot$

(2) Montrer que toute suite bornée $(x_n) \subseteq H$ possède une sous-suite qui converge (en norme) au sens de Cesàro.

Exercice 48. (un théorème ergodique)
Soit X un espace de Banach, et soit $T \in \mathcal{L}(X)$ vérifiant $\|T\| \leq 1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$T_n = \frac{1}{n+1}(I + T + \cdots + T^n)\,.$$

(1) Montrer que pour tout $z \in X$, les propriétés suivantes sont équivalentes :
   (i) $\lim_{n\to\infty} \|T_n z\| = 0$;
   (ii) il existe une suite (n_k) telle que $T_{n_k} z \to 0$ faiblement;
   (iii) $z \in \overline{\mathrm{Im}(I - T)}$.

(2) On suppose que X est réflexif. Montrer que pour tout $x \in X$, il existe une suite (n_k) telle que $(T_{n_k} x)$ converge faiblement vers un point fixe de T.

(3) On suppose que X est réflexif. Déduire de (1) et (2) qu'on a

$$X = \ker(I - T) \oplus \overline{\mathrm{Im}(I - T)}$$

et que pour tout $x \in X$, la suite $(T_n x)$ converge (en norme) vers la projection de x sur $\ker(I - T)$ associée à cette décomposition.