M2 "Analyse avancée"

Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 1

(opérateurs hilbertiens)

Exercice 1. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, et soient $(e_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq H_1$ et $(f_i)_{i\in\mathbb{N}} \subseteq H_2$ deux suites orthonormales. Montrer que si $a = (a_i)_{i\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$, alors la formule

$$Tx := \sum_{i=0}^{\infty} a_i \langle x, e_i\rangle\, f_i$$

définit un opérateur borné $T : H_1 \to H_2$. Calculer $\|T\|$ et déterminer T^*.

Exercice 2. Soit H un espace de Hilbert complexe. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ et si $x, y \in H$, alors on a l'**identité de polarisation**

$$\begin{aligned} 4\langle Tx, y\rangle =& \langle T(x+y), x+y\rangle - \langle T(x-y), x-y\rangle \\ &+ i\,\langle T(x+iy), x+iy\rangle - i\,\langle T(x-iy), x-iy\rangle. \end{aligned}$$

Exercice 3. Soit H un espace de Hilbert complexe. En utilisant l'identité de polarisation (*Exercice 2*), montrer que pour tout $T \in \mathcal{L}(H)$, on a

$$\|T\| \le 2\, \sup\big\{|\langle Tx, x\rangle|;\ \|x\| = 1\big\}.$$

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert *réel* de dimension ≥ 2. Montrer qu'il existe un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ non nul tel que $\forall x \in H\ :\ \langle T(x), x\rangle = 0$.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $A_1, \dots, A_N, B_1 \dots, B_N \in \mathcal{L}(H)$, alors

$$\left\| \sum_{i=1}^{N} A_i B_i \right\|^2 \le \left\| \sum_{i=1}^{N} A_i A_i^* \right\| \left\| \sum_{i=1}^{N} B_i^* B_i \right\|.$$

Exercice 6. Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert. Pour $e \in H_1$ et $f \in H_2$, on note $e \otimes f \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ l'opérateur défini par $(e \otimes f)\, x := \langle x, e\rangle\, f$.

(1) Montrer que $\|e \otimes f\| = \|e\|\, \|f\|$.
(2) Montrer que $(e \otimes f)^* = f \otimes e$.
(3) Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H_1)$, alors $(e \otimes f)T = (T^* e) \otimes f$, et que si $T \in \mathcal{L}(H_2)$, alors $T(e \otimes f) = e \otimes (Tf)$.

(4) Montrer que tout opérateur de rang 1 est de la forme $e \otimes f$.
(5) Montrer que tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ de rang fini est de la forme $\sum_{i=1}^{d} e_i \otimes f_i$.

Exercice 7. Soient H_1 et H_2 des espaces de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ est de rang fini, alors T^* est de rang fini.

Exercice 8. Soit H un espace de Hilbert, et soit Y un espace de Banach. Montrer que si $E \subseteq H$ est un sous-espace vectoriel et si $T \in \mathcal{L}(E, Y)$, alors T peut se prolonger en un opérateur $T \in \mathcal{L}(H, Y)$ tel que $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. (*Utiliser une projection orthogonale.*)

Exercice 9. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert. Montrer qu'un opérateur $A \in \mathcal{L}(H_2, H_1)$ est un plongement si et seulement si il existe un opérateur $B \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$ tel que $BA = I$. (*Utiliser une projection orthogonale.*)

Exercice 10. Soient H_1 et H_2 deux espaces de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H_1, H_2)$. Montrer que si T^* est un plongement, alors T est surjectif. (*Utiliser l'Exercice 9.*)

Exercice 11. Soit H un espace de Hilbert, et soit $(f_i)_{i\in I}$ une suite (finie ou infinie) d'éléments de H. On dit que (f_i) est une **suite de Bessel** s'il existe une constante $C < \infty$ telle que

$$\forall x \in H \ : \ \sum_{i\in I} |\langle x, f_i\rangle|^2 \leq C\,\|x\|^2;$$

et on dit que (f_i) est une **frame** (mot anglais) s'il existe deux constantes $C < \infty$ et $c > 0$ telles que

$$\forall x \in H \ : \ c\,\|x\|^2 \leq \sum_{i\in I} |\langle x, f_i\rangle|^2 \leq C\,\|x\|^2;$$

(1) Montrer que (f_i) est une suite de Bessel si et seulement si il existe un opérateur linéaire continu $T : \ell^2(I) \to H$ tel que $Te_i = f_i$ pour tout $i \in I$, où $(e_i)_{i\in I}$ est la base canonique de $\ell^2(I)$. Identifier alors l'adjoint de T.
(2) Montrer que si (f_i) est une frame, alors il existe un opérateur *surjectif* $T : \ell^2(I) \to H$ tel que $Te_i = f_i$ pour tout $i \in I$. (*Utiliser l'Exercice 10.*)

Exercice 12. Soit H un espace de Hilbert, et soit $p \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $p^2 = p$ et $p \neq 0$. Montrer que $\|p\| \geq 1$, et qu'on a $\|p\| = 1$ si et seulement si p est une projection orthogonale. (*On pourra par exemple montrer en s'aidant d'un dessin que s'il existe $x \in \ker(p)^\perp$ tel que $x \notin \mathrm{Im}(p)$, alors $\|p(x)\| > \|x\|$.*)

Exercice 13. Soit H un espace de Hilbert, et soient $p_1, \dots, p_n \in \mathcal{L}(H)$ des projections orthogonales. On pose $E_i := \mathrm{Im}(p_i)$. Montrer que $p := p_1 + \cdots + p_n$ est une projection (orthogonale) si et seulement si les E_i sont deux-à-deux orthogonaux; ce qui revient à dire que $p_i p_j = 0$ pour tous i, j tels que $i \neq j$.

Exercice 14. Montrer qu'un opérateur diagonal $T = \Delta_a$ sur $\ell^2(\mathbb{N})$ est inversible si et seulement si $\inf_{n\in\mathbb{N}} |a_n| > 0$. Plus généralement, montrer qu'un opérateur de multiplication $T = M_\phi$ sur $L^2(\Omega, m)$ est inversible si et seulement si il existe une constante c telle que $|\phi(t)| \geq c$ presque partout.

Exercice 15. (opérateur de Volterra)

(1) Montrer que la formule
$$Vf(x) := \int_0^x f(y)\,dy$$
définit un opérateur borné $V : L^2(]0,1[) \to L^2(]0,1[)$.

(2) En utilisant le test de Schur avec $w_1(t) := \cos(\frac{\pi}{2}t)$ et $w_2(t)$ à préciser, montrer que $\|V\| \leq \frac{2}{\pi}\cdot$

(3) Montrer qu'en fait $\|V\| = \frac{2}{\pi}\cdot$

Exercice 16. Soit $T_K : L^2(\Omega, m) \to L^2(\Omega, m)$ un opérateur à noyau. On suppose que le noyau K est ≥ 0. On suppose de plus qu'il existe une fonction $f \in L^2$ telle que $f > 0$, $T_K f > 0$ et $T_K^* T_K f = \lambda f$ avec $\lambda > 0$. Montrer que $\|T_K\| = \sqrt{\lambda}$.

Exercice 17. (matrice de Gram)
Soient $u_1, \dots, u_d$ des vecteurs dans un espace de Hilbert (réel ou complexe) H. On note $A \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^d)$ l'opérateur dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^d$ est $M := \big(\langle u_i, u_j\rangle\big)_{1\leq i,j\leq d}$. Montrer que A est un opérateur positif et trouver un opérateur $T \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^d, H)$ tel que $A = T^*T$.

Exercice 18. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur positif, alors
$$\forall x \in H \;:\; \|Tx\|^2 \leq \|x\|\,\|T^2x\|.$$

Exercice 19. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $A, B \in \mathcal{L}(H)$ vérifient $I \leq A \leq B$, alors A et B sont inversibles et $A^{-1} \geq B^{-1}$.

Exercice 20. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$.

(1) Montrer que si T est auto-adjoint, alors $T - \lambda I$ est inversible pour tout nombre complexe $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

(2) Montrer que si T est positif, alors $T + aI$ est inversible pour tout nombre réel $a > 0$.
(3) Montrer que si T est unitaire, alors $T - \lambda I$ est inversible pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| \neq 1$.

Exercice 21. Soit H un espace de Hilbert, et soient $p, q \in \mathcal{L}(H)$ des projections orthogonales. Montrer les équivalences suivantes :

$$p \leq q \iff \mathrm{Im}(p) \subseteq \mathrm{Im}(q) \iff \ker(q) \subseteq \ker(p) \iff pq = p \iff qp = p.$$

Exercice 22. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $p, q \in \mathcal{L}(H)$ sont des projections orthogonales telles que $p \leq q$, alors $q - p$ est une projection orthogonale. Identifier $\mathrm{Im}(q-p)$ et $\ker(q-p)$.

Exercice 23. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie, alors $\mathrm{Im}(T) = \ker(I - TT^*)$ et $I - TT^*$ est la projection orthogonale sur $\ker(T^*)$.

Exercice 24. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $x, x' \in H$ vérifient $\|x\| = 1 = \|x'\|$, alors on peut trouver un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(H)$ tel que $Ux = x'$.

Exercice 25. Soit H un espace de Hilbert complexe. Montrer que tout opérateur auto-adjoint $A \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|A\| \leq 1$ peut s'écrire sous la forme $A = \frac{1}{2}(U + U^*)$, où U est un opérateur unitaire. (*Examiner d'abord le cas $H = \mathbb{C}$.*) En déduire que tout opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est combinaison linéaire de 4 opérateurs unitaires.

Exercice 26. Soit H un espace de Hilbert complexe, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$. Montrer que si T est auto-adjoint, alors e^{iT} est unitaire.

Exercice 27. (transformation de Cayley)
Soit H un espace de Hilbert complexe. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est auto-adjoint, alors $U := (T - iI)(T + iI)^{-1}$ est un opérateur unitaire. (*L'opérateur U est bien défini d'après l'exercice 20.*)

Exercice 28. Soit H un espace de Hilbert. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ est un opérateur compact, alors $\|T\|^2$ est égale à la plus grande valeur propre de T^*T.

Exercice 29. Soit $d \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $T \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^d)$, alors $|\mathrm{Tr}(T)| \leq \sqrt{d}\, \|T\|_{\mathrm{HS}}$.

Exercice 30. Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $|\alpha| < 1$. Montrer que la matrice infinie $A := \left(\alpha^{i+j}\right)_{i,j\in\mathbb{N}}$ définit un opérateur de Hilbert-Schmidt sur $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 31. Soit H un espace de Hilbert séparable, et soit $p \in \mathcal{L}(H)$ une projection orthogonale. Montrer que pour toute base hilbertienne $(e_i)_{i\in I}$ de H, on a

$$\sum_{i\in I} \langle pe_i, e_i\rangle = \dim(\mathrm{Im}(p)).$$

Exercice 32. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact normal. On note $\sigma_p(T)$ l'ensemble des valeurs propres de T; et pour $\lambda \in \sigma_p(T)$, on note P_λ la projection orthogonale sur $\ker(T - \lambda I)$. Montrer que pour $y \in H$, les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) L'équation $Tx = y$ possède au moins une solution $x \in H$;

(ii) $\sum\limits_{\lambda\in\sigma_p(T)\setminus\{0\}} \frac{1}{|\lambda|^2} \|P_\lambda x\|^2 < \infty$.

Exercice 33. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur normal.

(1) Montrer que s'il existe un polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ scindé et à racines simples tel que $P(T) = 0$, alors T est diagonalisabe en base orthonormée et ses valeurs propres sont racines de P.

(2) Montrer que ceci s'applique à la transformation de Fourier-Plancherel $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$. Quelles sont les valeurs propres de $\mathcal{F}$?

Exercice 34. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|T\| \leq 1$. Le but de l'exercice est de montrer que pour tous $u, v \in H$, on a l'équivalence suivante :

$$\langle T^n u, v\rangle \to 0 \text{ quand } n \to \infty \iff \langle T^{*n} u, v\rangle \to 0 \text{ quand } n \to \infty.$$

(1) Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|S\| \leq 1$.

  (a) Montrer que $\forall z \in H \ \ \|z - S^*Sz\|^2 \leq \|z\|^2 - \|Sz\|^2$.

  (b) En déduire que si $x \in H$, alors $\|S^n x - S^*S^{n+1}x\| \to 0$ quand $n \to \infty$.

  (c) Montrer que si $x, y \in H$, alors $\langle S^n x, y\rangle - \langle S^{n+1}x, Sy\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$.

(2) Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|S\| \leq 1$, et soit $x \in H$. On pose

$$E := \left\{y \in H;\ \langle S^n x, y\rangle \to 0 \text{ quand } n \to \infty\right\}.$$

  (a) Montrer que E est un sous-espace vectoriel fermé de H.

  (b) Montrer que E est invariant par S^*.

  (c) Montrer en utilisant (1c) que E est également invariant par S.

(3) Soit $S \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|S\| \leq 1$, et soit $x \in H$. On suppose que $\langle S^n x, x\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$. Avec les notations de (2), montrer que si $z \in E^\perp$, alors $z \perp S^n x$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que $\forall y \in H \ :\ \langle S^n x, y\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$.

(4) Soient $u, v \in H$. On suppose que $\langle T^n u, v\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$.

(a) On pose $E := \{y \in H;\ \langle T^n u, y\rangle \to 0 \text{ quand } n \to \infty\}$. Justifier que E est un sous-espace fermé de H invariant par T et T^*.

(b) On note u_0 le projeté orthogonal de u sur E. Montrer que $T^n(u_0-u) \perp u_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et en déduire que $\langle T^n u_0, u_0\rangle \to 0$ quand $n \to \infty$.

(c) Déduire de (b) et (3) que $\langle T^{*n} u_0, y\rangle \to 0$ pour tout $y \in H$.

(d) Montrer que $\langle T^{*n} u, v\rangle \to 0$.

Exercice 35. Soit $A = \big(a_{i,j}\big)_{i,j\in\mathbb{N}}$ une matrice infinie. On suppose qu'il existe $r < 1$ tel que

$$\forall i, j \in \mathbb{N}\ :\ |a_{i,j}| \le r^{|j-i|}.$$

Montrer que A définit un opérateur borné sur $\ell^2(\mathbb{N})$ avec $\|A\| \le \frac{1+r}{1-r}$.

Exercice 36. (matrice de Hilbert)

(1) Montrer qu'on définit un opérateur borné $\mathcal{H} : \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ en posant, pour $x = (x_i)_{i\ge 1} \in \ell^2(\mathbb{N})$:

$$(\mathcal{H}x)_i = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{i+j+1}\, x_j,$$

et qu'on a $\|\mathcal{H}\| \le \pi$. (*Utiliser le test de Schur en posant* $w_1(k) = w_2(k) := \frac{1}{\sqrt{k+1}}$ *pour* $k \in \mathbb{N}$).

(2) Déduire de (1) qu'on définit un opérateur borné $\mathcal{G} : \ell^2(\mathbb{N}) \to L^2([0,1[)$ en posant, pour $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $t \in [0,1[$:

$$\mathcal{G}x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n t^n.$$

(3) Montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{G}^*\mathcal{G}$; ce qui prouve que $\mathcal{H}$ est un opérateur positif.

(4) Dans cette question, on veut montrer que $\|\mathcal{H}\|$ est exactement égale à π.

(a) Soit $N \in \mathbb{N}^*$, et soit $x \in \ell^2(\mathbb{N})$ défini par $x_i := \frac{1}{\sqrt{i+1}}$ pour $0 \le i \le N-1$, et $x_i := 0$ pour $i \ge N$. On pose

$$L_N := \|x\|^2 = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{1}{i+1}.$$

(i) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}$, on a

$$(\mathcal{H}x)_i \ge \int_1^N \frac{dt}{(t+i+1)\sqrt{t}};$$

et en déduire que

$$\begin{aligned}(\mathcal{H}x)_i &\geq \int_0^\infty \frac{dt}{(t+i+1)\sqrt{t}} - \frac{2}{i+1} - \frac{2}{\sqrt{N}} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{i+1}} - \frac{2}{i+1} - \frac{2}{\sqrt{N}}.\end{aligned}$$

(ii) En remarquant que $\|\mathcal{H}x\|^2 \geq \sum_{i=0}^{N-1} (\mathcal{H}x)_i^2$, montrer qu'il existe une constante C indépendante de N telle que

$$\|\mathcal{H}x\|^2 \geq \pi^2 L_N - C.$$

(b) Montrer que $\|\mathcal{H}\| = \pi$.

Exercice 37. (matrice de Hilbert, 2)

(1) Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction 2π-périodique valant $\pi - t$ pour $t \in [0, 2\pi[$. Calculer les coefficients de Fourier de φ.

(2) On pose $L^2 := L^2([0, 2\pi[)$ et $H^2 := \{f \in L^2;\ \widehat{f}(n) = 0 \text{ si } n \leq 0\}$.

(a) Montrer que l'application $f \mapsto \overline{\varphi} f$ est linéaire continue de H^2 dans L^2, et majorer sa norme.

(b) Soit $f(t) = \sum_{l=0}^d a_l e^{ilt}$ un polynôme trigonométrique appartenant à H^2. Pour $k \in \{0, \dots, d\}$, exprimer le coefficient de Fourier $c_{-k-1}(\overline{\varphi} f)$ à l'aide des a_l.

(3) Si $d \in \mathbb{N}$ on identifie $M_{d+1}(\mathbb{R})$ à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^{d+1})$. Montrer que pour tout $d \geq 0$ la "matrice de Hilbert $(d+1)$-dimensionnelle" $H_{d+1} := (\frac{1}{k+l+1})_{0 \leq k, l \leq d}$ vérifie $\|H_{d+1}\| \leq \pi$.

Exercice 38. Soit $\alpha \in]0, 1[$. Montrer que la formule

$$(\mathcal{L}_\alpha x)_k := \sum_{l=1}^\infty \alpha^{kl} x_l$$

définit un opérateur bornée $\mathcal{L}_\alpha : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*)$, avec $\|\mathcal{L}_\alpha\| \leq \sqrt{\frac{\pi}{\log(1/\alpha)}}$.

Exercice 39. Montrer que la formule

$$(Tx)_i := \sum_{j=1}^\infty \frac{\sqrt{ij}}{(i+j)^2} x_j$$

définit un opérateur bornée $T : \ell^2(\mathbb{N}^*) \to \ell^2(\mathbb{N}^*)$, avec $\|T\| \leq 1\cdot$

Exercice 40. (opérateur de Cesáro)

(1) Montrer que la formule

$$Af(x) := \frac{1}{x}\int_0^x f(y)\,dy$$

définit un opérateur borné $A : L^2(]0,\infty[) \to L^2(]0,\infty[)$, avec $\|A\| \le 2$. (*Utiliser le test de Schur avec* $w_1(t) = w_2(t) := t^{-\alpha}$ *pour* $\alpha > 0$ *bien choisi*).

(2) Montrer qu'en fait $\|A\| = 2$. (*Considérer* $f_\beta(t) := \mathbf{1}_{]0,1]}(t)t^{-\beta}$, $\beta > 0$).

(3) Déterminer l'adjoint de l'opérateur A.

(4) Montrer qu'on a $A^*A = A+A^* = AA^*$. En déduire que l'opérateur $U := I-A$ est unitaire.

Exercice 41. (transformation de Laplace sur L^2)

(1) Montrer que la formule

$$\mathcal{L}f(x) := \int_0^\infty e^{-xy}f(y)\,dy$$

définit un opérateur borné et auto-adjoint $\mathcal{L} : L^2(]0,\infty[) \to L^2(]0,\infty[)$, avec $\|\mathcal{L}\| \le \sqrt{\pi}$. (*Utiliser le test de Schur avec* $w_1(t) = w_2(t) := t^{-1/2}$.)

(2) Pour $\alpha > 1/2$, on note f_α la fonction définie sur $]0,\infty[$ par $f_\alpha(t) = \mathbf{1}_{[1,\infty[}(t)t^{-\alpha}$.

 (a) Montrer que $f_\alpha \in L^2$ et calculer $\|f_\alpha\|_2$.

 (b) Montrer qu'on a

$$\|\mathcal{L}f_\alpha\|_2^2 = \int_1^\infty\int_1^\infty \frac{(uv)^{-\alpha}}{u+v}\,dudv.$$

 (c) En déduire que si $1/2 < \alpha < 1$, alors

$$\|\mathcal{L}f_\alpha\|_2^2 \ge c_\alpha\|f_\alpha\|_2^2 - \frac{1}{\alpha(1-\alpha)}, \qquad \text{où} \quad c_\alpha := \int_0^\infty \frac{x^{-\alpha}}{1+x}\,dx.$$

 (*Poser* $v = xu$ *dans l'expression de* $\|\mathcal{L}f_\alpha\|_2^2$ *trouvée en* (b).)

 (d) Combien vaut la constante c_α?

(3) Montrer que $\|\mathcal{L}\| = \sqrt{\pi}$.

Exercice 42. (matrice de Hilbert "continue")

(1) Montrer que la formule

$$\mathcal{H}f(x) := \int_0^\infty \frac{f(y)}{x+y}$$

définit un opérateur borné $\mathcal{H} : L^2(]0,\infty[) \to L^2(]0,\infty[)$, avec $\|\mathcal{H}\| \le \pi$. (*Utiliser le test de Schur avec* $w_1(t) = w_2(t) := t^{-1/2}$.)

(2) Avec les notations de l'Exercice 41, montrer que $\mathcal{H} = \mathcal{L}^2$.

(3) Conclure que $\mathcal{H}$ est un opérateur positif et que $\|\mathcal{H}\| = \pi$.

Exercice 43. Soit H un espace de Hilbert, et soit Soit $(S_n) \subset \mathcal{L}(H)$ une suite d'opérateurs auto-adjoints. On suppose que la suite (S_n) est **croissante** ($S_{n+1} - S_n \geq 0$ pour tout n) et bornée.

(1) Soit $M = \sup_n \|S_n\|$. Montrer que si $n, p \in \mathbb{N}$ et $x \in H$, alors
$$\|S_{n+p}(x) - S_n(x)\|^2 \leq 2M \left(\langle S_{n+p}(x), x \rangle - \langle S_n(x), x \rangle \right).$$

(2) Montrer que la suite (S_n) converge simplement vers un opérateur $S \in \mathcal{L}(H)$.

Exercice 44. Soit H un espace de Hilbert, et soit $u : [a,b] \to \mathcal{L}(H)$ une application continue, où $[a,b]$ est un intervalle de $\mathbb{R}$. On suppose que pour tout $t \in [a,b]$, l'opérateur $u(t)$ est positif. Soit également $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Le but de l'exercice est de montrer qu'on a
$$\left\| \int_a^b \varphi(t) u(t)\, dt \right\| \leq \|\varphi\|_\infty \left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\|.$$

(*Les intégrales ont un sens en tant qu'intégrales de fonctions continues à valeurs dans un espace de Banach.*)

(1) On note A l'opérateur $\int_a^b \varphi(t) u(t)\, dt$. Montrer que si $x, y \in H$, alors
$$|\langle Ax, y \rangle| \leq \|\varphi\|_\infty \left[\int_a^b \langle u(t)x, x \rangle\, dt \right]^{1/2} \left[\int_a^b \langle u(t)y, y \rangle\, dt \right]^{1/2}.$$

(2) Démontrer l'inégalité annoncée.

Exercice 45. Dans tout l'exercice, H est un espace de Hilbert complexe.

(1) Pour tout opérateur $S \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|S\| < 1$, on pose
$$\mathbf{P}_S := \sum_{n=1}^{\infty} S^n + I + \sum_{n=1}^{\infty} S^{*n},$$
Justifier cette définition.

(2) Avec les notations de (1), montrer qu'on peut écrire
$$\mathbf{P}_S = (I - S^*)^{-1} (Id - S^* S)\, (I - S)^{-1};$$
et en déduire que $\mathbf{P}_S$ est un opérateur *positif.*

(3) Soit $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|T\| < 1$. Montrer que l'application $\theta \mapsto \mathbf{P}_{e^{-i\theta}T}$ est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{L}(H)$, puis montrer que pour tout polynôme $f \in \mathbb{C}[X]$, on a
$$f(T) = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \mathbf{P}_{e^{-i\theta}T} \frac{d\theta}{2\pi}.$$
Cette formule s'appelle la **formule de Poisson opératorielle.**

Exercice 46. (Inégalité de von Neumann)
Soit H un espace de Hilbert. Le but de l'exercice est de donner une preuve de l'**inégalité de von Neumann**, *i.e.* de montrer que si $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifie $\|T\| \leq 1$, alors, pour tout polynôme $f \in \mathbb{C}[X]$, on a

$$\|f(T)\| \leq \|f\|_\infty := \sup\{|f(z); \in \mathbb{T}\}.$$

(1) Montrer qu'on peut se contenter de traiter le cas où $\|T\| < 1$.
(2) Démontrer le résultat souhaité en utilisant les exercices 44 et 45.

Exercice 47. Soit H un espace de Hilbert, et soit $V \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie. Montrer que V possède une *extension unitaire*; autrement dit, qu'il existe un espace de Hilbert K contenant H et un opérateur unitaire $U \in \mathcal{L}(K)$ tel que $U_{|H} = V$. (*Considérer $K := H \oplus H$, et écrire un opérateur $T \in \mathcal{L}(K)$ "matriciellement" relativement à la décomposition $K = H \oplus H$.*)

Exercice 48. (shifts, décomposition de Wold des isométries)
Dans cet exercice, on utilisera constamment le fait que si V est une isométrie sur un espace de Hilbert H, alors l'image par V de tout sous-espace fermé Z et H est un sous-espace fermé de H (et donc tous les $V^n(Z)$, $n \geq 0$ sont fermés car les V^n sont aussi des isométries).

(1) Pour tout espace de Hilbert Z, on pose

$$\ell^2(\mathbb{N}, Z) := \left\{ \mathbf{z} := (z_n) \in Z^{\mathbb{N}};\ \|\mathbf{z}\|^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \|z_n\|^2 < \infty \right\},$$

et on note S l'opérateur sur $\ell^2(\mathbb{N}, Z)$ défini par

$$S_Z(x_0, x_1, x_2, \dots) := (0, x_0, x_1, x_2, \dots).$$

On dit que S est le **shift canonique** sur $\ell^2(\mathbb{N}, Z)$.

(a) Montrer que S_Z est une isométrie.
(b) On identifie Z au sous-espace $\big\{(z, 0, 0, \dots);\ z \in Z\big\} \subseteq \ell^2(\mathbb{N}, Z)$. Montrer que les sous-espaces $S^n(Z)$, $n \geq 0$ sont 2 à 2 orthogonaux, et qu'on a $\overline{\bigcup_{n\geq 0} S^n(Z)} = \ell^2(\mathbb{N}, Z)$. Montrer de plus que $Z = \mathrm{Im}(S)^\perp$ et que $\bigcap_{n\geq 0} \mathrm{Im}(S^n) = \{0\}$.

(2) Soit H un espace de Hilbert. On dit qu'une isométrie $V \in \mathcal{L}(H)$ est un **shift** s'il existe un sous-espace fermé $Z \subseteq H$ tel que les sous-espaces $V^n(Z)$, $n \geq 0$ sont deux à deux orthogonaux et $\overline{\bigcup_{n\geq 0} V^n(Z)} = H$. Montrer que si V est un shift et si Z est comme dans la définition, alors V est unitairement équivalente au shift canonique sur $\ell^2(\mathbb{N}, Z)$.

(3) Soit $V \in \mathcal{L}(H)$ une isométrie. Montrer que le sous-espace $E := \bigcap_{k\geq 1} \mathrm{Im}(V^k)$ est invariant par V, et que $V_{|E}$ est unitaire. Montrer plus précisément que E est le *plus grand* sous-espace fermé $M \subseteq H$ tel que $V_{|M}$ soit unitaire.

(4) On dit qu'un opérateur $T \in \mathcal{L}(H)$ est **complètement non unitaire** s'il n'existe aucun sous-espace fermé $M \subseteq H$ invariant par T et non réduit à $\{0\}$ tel que $T_{|M}$ soit unitaire. Montrer qu'une isométrie V est complètement non unitaire si et seulement si $\bigcap_{k\geq 1} \mathrm{Im}(V^k) = \{0\}$.

(5) Montrer que si $V \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie et si on pose $Z := \mathrm{Im}(V)^\perp$, alors

$$\left[\bigcup_{n\geq 0} V^n(Z)\right]^\perp = \bigcap_{k\geq 1} \mathrm{Im}(V^k).$$

(6) En utilisant les questions précédentes, établir les résultats suivants.
   (i) Une isométrie $V \in \mathcal{L}(H)$ est un shift si et seulement si V est complètement non unitaire.
   (ii) Si $V \in \mathcal{L}(H)$ est une isométrie quelconque, alors on peut décomposer H sous la forme $H = E \oplus F$, où E et F sont des sous-espaces fermés invariants par T et orthogonaux tels que $T_{|E}$ est unitaire et $T_{|F}$ est un shift.

Exercice 49. (Lemme de Langer)
Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ vérifiant $\|T\| \leq 1$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une décomposition orthogonale $H = E \oplus F$, où E et F sont des sous-espaces fermés invariants par T tels que $T_{|E}$ est unitaire et $T_{|F}$ est complètement non unitaire (*cf l'Exercice 48*).

(1) On pose $E := \big\{x \in H;\ \forall n \in \mathbb{N}\ :\ \|T^n x\| = \|x\| = \|T^{*n} x\|\big\}$. Montrer que

$$E = \bigcap_{n\geq 0} \ker(I - T^{*n}T^n) \cap \ker(I - T^n T^{*n});$$

puis montrer que E est un sous-espace fermé de H invariant par T et par T^*.

(2) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 50. Soit H un espace de Hilbert, et soit $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{L}(H)$ un **idéal bilatère**; autrement dit, $\mathcal{I}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(H)$ tel que $\forall T \in \mathcal{I}\ \forall A \in \mathcal{L}(H)\ :$ $AT \in \mathcal{I}$ et $TA \in \mathcal{I}$. On suppose de plus que $\mathcal{I} \neq \{0\}$.

(1) Montrer que $\mathcal{I}$ contient un opérateur de rang 1.
(2) En utilisant les exercices 6 et 24, montrer que $\mathcal{I}$ contient tous les opérateurs de rang fini.
(3) Montrer que si $\mathcal{I}$ est fermé, alors $\mathcal{I}$ contient tous les opérateurs compacts.

Exercice 51. Soient H un espace de Hilbert, Y un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(H, Y)$. On *suppose* que pour toute suite orthonormale $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq H$, on a que $\|Tf_n\| \to 0$. Le but de l'exercice est de montrer que T est compact. Pour cela, on procède par l'absurde. On suppose donc que T n'est *pas* compact, et on cherche à obtenir une contradiction. Dans la suite, on note B_H la boule unité fermée de H.

(1) Montrer qu'il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que la chose suivante ait lieu : pour tout compact $K \subseteq Y$, on peut trouver $x \in B_H$ tel que $\mathrm{dist}(Tx, K) \geq \varepsilon_0$.
(2) Montrer que si $E \subseteq H$ est un sous-espace de dimension finie, alors on peut trouver $v \in E^\perp$ tel que $\|Tv\| \geq \varepsilon$. (*Poser* $K := T(E \cap B_H)$ *et appliquer* (1).)
(3) En déduire qu'on peut trouver une suite orthogonale $(v_n)_{n\geq 0} \subseteq B_H$ telle que $\|Tv_n\| \geq \varepsilon_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et conclure.

Exercice 52. (opérateurs de Hankel)
Soient $L^2 := L^2(\mathbb{T})$ et $H^2 := \{f \in L^2;\ \widehat{f}(n) = 0 \text{ pour tout } n < 0\}$. Pour $\phi \in L^\infty(\mathbb{T})$, on définit un opérateur $H_\phi : L^2 \to L^2$ par

$$H_\phi(f) := (I - p_{H^2})(\phi\, p_{H^2}(f)),$$

où p_{H^2} est la projection orthogonale de L^2 sur H^2.

(1) Montrer qu'on a $\|H_\phi\| \leq \|\phi\|_\infty$ pour toute $\phi \in L^\infty$.
(2) Montrer que si ϕ est un polynôme trigonométrique, alors l'opérateur H_ϕ est de rang fini.
(3) Montrer que si $\phi \in \mathcal{C}(\mathbb{T})$, alors H_ϕ est compact.

Exercice 53. Soit H un espace de Hilbert, et soit $T \in \mathcal{L}(H)$ un opérateur compact positif et injectif. On note $(\lambda_k)_{k\geq 0}$ la suite des valeurs propres de T, comptées selon leur multiplicité et rangées par ordre décroissant, et on fixe une base hilbertienne de vecteurs propres associée (f_k). Soit également $x \in H$ avec $x \neq 0$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\|T^n x\|^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k^{2n} |\langle x, f_k\rangle|^2.$$
(2) On note k_0 le plus petit entier k tel que $\langle x, f_k\rangle \neq 0$. Déduire de (1) que
$$\|T^n x\|^{1/n} \to \lambda_{k_0} \qquad \text{quand } n \to \infty.$$
(3) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose
$$\beta_n := \frac{\|T^n x\|}{\|T^{n+1} x\|}.$$
Montrer que la suite (β_n) est décroissante et converge vers $1/\lambda_{k_0}$.

Exercice 54. Dans cet exercice, on note $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ le noyau (continu) défini par $K(x, y) := \min(x, y) - xy$.

(1) Montrer que si $f \in L^2([0,1])$ est continue, alors il existe unique fonction $g \in \mathcal{C}^2([0,1])$ vérifiant $g'' = -f$ et $g(0) = 0 = g(1)$, et que cette fonction g est égale à $T_K f$.

(2) En utilisant (1), établir les faits suivants.

  (i) L'opérateur T_K est injectif (*commencer par montrer que* $\mathrm{Im}(T_K)$ *est dense dans* $L^2([0,1])$).

  (ii) Si $\lambda \neq 0$ alors une fonction $f \in L^2([0,1])$ vérifie $T_K f = \lambda f$ si et seulement si elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et solution de l'équation différentielle $f'' = -\frac{1}{\lambda} f$ avec "conditions aux limites" $f(0) = 0 = f(1)$.

(3) *Déduire de* (2) que les fonctions $e_n(t) := \sqrt{2}\sin(n\pi t)$, $n \geq 1$ forment une base hilbertienne de $L^2([0,1])$, et démontrer les formules suivantes :

$$\forall x, y \in [0,1] \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\pi x)\sin(n\pi y)}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}\big(\min(x,y) - xy\big);$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \qquad \text{et} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}\cdot$$

Exercice 55. En considérant le noyau $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ défini par $K(x,y) := \min(x,y)$, établir les formules

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{et} \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}\cdot$$

Exercice 56. Soit (Ω, d) un espace métrique compact, et soit m une mesure borélienne finie sur K. Soit également $K : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $K(y,x) = \overline{K(x,y)}$ pour tous $x, y \in \Omega$, et que de plus K possède la propriété suivante : pour tous $x_1, \dots, x_n \in I$ et pour tous $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$,

$$\sum_{i,j=1}^{n} K(x_i, x_j)\, z_i \overline{z_j} \geq 0.$$

Le but de l'exercice est de montrer que l'opérateur $T_K : L^2(\Omega, m) \to L^2(\Omega, m)$ est positif.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $\mathcal{P}_n$ une partition finie de Ω en ensembles boréliens de diamètre inférieur à $\frac{1}{n}$ (*justifier l'existence d'une telle partition*), et pour tout $E \in \mathcal{P}_n$, choisissons un point $x_E \in E$. Montrer que pour toute fonction continue $u : \Omega \times \Omega \to \mathbb{C}$, on a

$$\int_{\Omega\times\Omega} u(x,y)\, dm(x)dm(y) = \lim_{n\to\infty} \sum_{E, E' \in \mathcal{P}_n} m(E)m(E')u(x_E, x_{E'}).$$

(2) Montrer à l'aide de (1) qu'on a $\langle T_K, f\rangle \geq 0$ pour toute fonction continue $f : K \to \mathbb{C}$.

(3) Conclure.

Exercice 57. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable positive. Soit également I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $K : I \times I \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $K(x, y) := \widehat{h}(y - x)$. Montrer que l'opérateur $T_K : L^2(I) \to L^2(I)$ est positif, et que T_K est de plus injectif si $h(s) > 0$ pour tout $s \in \mathbb{R}$.

Exercice 58. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$. Montrer que le résultat de l'Exercice 57 s'applique au noyau $K : I \times I \to \mathbb{R}$ défini par $K(x, y) := e^{-|y-x|}$.

Exercice 59. Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $K : I \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue. Montrer que si l'opérateur T_K est positif, alors $K(x, x) \geq 0$ pour tout $x \in I$. (*Tester la positivité de T_K sur des fonctions indicatrices.*)

Exercice 60. (Théorème de Mercer)
Soit I un intervalle compact de $\mathbb{R}$, et soit $K : I \times I \to \mathbb{C}$ une fonction continue telle que que l'opérateur associé $T_K : L^2(I) \to L^2(I)$ soit positif. Soit $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne de $L^2(I)$ formée de vecteurs propres pour T_K, et (λ_n) la suite des valeurs propres associées. On rappelle que si $\lambda_n \neq 0$, alors φ_n est continue sur I (avec l'abus de langage habituel). Le but de l'exercice est de montrer que la série $\sum \lambda_n \varphi_n(x)\overline{\varphi}_n(y)$ converge *uniformément* vers $K(x, y)$ sur $I \times I$.

(1) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}$, l'opérateur T_r associé au noyau $K_r(x, y) := K(x, y) - \sum_{n=0}^{r} \lambda_n \varphi_n(x)\overline{\varphi_n(y)}$ est positif; et en déduire, à l'aide de l'Exercice 59, que
$$\forall t \in I \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \, |\varphi_n(t)|^2 \leq C := \|K\|_\infty^2.$$

(2) Déduire de (1) que pour tout $(x, y) \in I$, la série $\sum \lambda_n \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n(y)}$ est absolument convergente, et que pour $x \in I$ fixé, la convergence de la série est uniforme par rapport à $y \in I$.

(3) Montrer que $\forall (x, y) \in I \times I \ : \ \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(x)\,\overline{\varphi_n(y)} = K(x, y)$. (*On pourra par exemple fixer $x \in I$, noter $f_x(y)$ la somme de la série, poser $K_x(y) := K(x, y)$, et commencer par montrer que f_x et K_x sont égales en tant qu'éléments de $L^2(I)$.*)

(4) Montrer que la série $\sum \lambda_n |\varphi_n(x)|^2$ converge uniformément sur I. (*Penser au théorème de Dini.*)

(5) Démontrer le résultat annoncé.

Exercice 61. (diagonalisation de la transformation de Fourier)
Dans cet exercice, on note $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ la transformation de Fourier-Plancherel, qui est l'unique opérateur sur L^2 tel que

$$\forall u \in L^2 \cap L^1 \;:\; \mathcal{F}u(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-ixt} dt \qquad \text{pp.}$$

D'après l'Exercice 33, $\mathcal{F}$ est diagonalisable en base orthonormée. Le but de l'exercice est de déterminer explicitement une base hilbertienne de vecteurs propres pour $\mathcal{F}$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$h_n(t) = e^{t^2/2} \frac{d^n}{dt^n}\big(e^{-t^2}\big).$$

  (a) Vérifier que h_n est de la forme $h_n(t) = P_n(t)e^{-t^2/2}$, où P_n est un polynôme de degré n. (*En particulier, h_n appartient à l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*)
  (b) Montrer que les h_n sont orthogonales dans L^2.
  (c) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $h_{n+1}(s) = h_n'(s) - s h_n(s)$.
  (d) Montrer que $\mathcal{F}h_n = (-i)^n h_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(2) Dans cette question, on note $\mathcal{P}$ l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R})$ de la forme $f(t) = P(t)e^{-t^2/2}$, où P est un polynôme. On veut montrer que $\mathcal{P}$ est dense dans $L^2(\mathbb{R})$.

  (a) Montrer que si $h \in L^2(\mathbb{R})$, alors la formule

$$\widehat{h}(z) := \int_{\mathbb{R}} h(t) e^{-izt} e^{-t^2/2} dt$$

  définit une fonction holomorphe sur $\mathbb{C}$, et donner une formule pour $\widehat{h}^{(k)}(z)$, $k \in \mathbb{N}$.
  (b) En déduire que si une fonction $h \in L^2(\mathbb{R})$ vérifie $\int_{\mathbb{R}} h(t) t^k e^{-t^2/2} dt = 0$ pour tout $k \in \mathbb{N}$, alors $h = 0$.
  (c) Conclure.

(3) Montrer que les fonctions $e_n := \frac{1}{\|h_n\|_2} h_n$ forment une base orthonomrée de vecteurs propres pour $\mathcal{F}$.