Feuille d'exercices n° 8

Exercice 1. Soient, $R, h > 0$, et soit $\mathcal{C}(R,h) \subseteq \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h basé sur le disque de centre 0 et de rayon R situé dans le plan des (x,y). Calculer le volume de $\mathcal{C}(R,h)$.

Exercice 2. Soit B un borélien de $\mathbb{R}^2$, et soit $h > 0$. En considérant B comme un borélien de $\mathbb{R}^3$ contenu dans le plan des (x,y), on note $\mathcal{C}(B,h) \subseteq \mathbb{R}^3$ le cône de hauteur h et de base B. Calculer le volume de $\mathcal{C}(B,h)$ en fonction de h et de $\lambda_2(B)$.

Exercice 3. Soit $R > 0$. On pose $B(R) := \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4;\ x^2+y^2+z^2+t^2 \leq R^2\}$. Calculer $\lambda_4(B(R))$.

Exercice 4. Soit $f :]0,1[\times]0,1[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) := \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

Montrer que les deux intégrales itérées $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right) dx$ et $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,dx\right) dy$ existent mais *ne sont pas égales*. Ceci contredit-il le théorème de Fubini?

Exercice 5. Calculer l'intégrale $J := \int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{x+y}$.

Exercice 6. Calculer $J := \int_\Omega \frac{dxdy}{x^2y}$, où $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 1 \text{ et } 1/x \leq y \leq x\}$.

Exercice 7. Soit $a > 0$, et soit $\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \leq a \text{ et } x+y \leq a\}$. Calculer l'intégrale $J := \int_\Omega e^{2x+y} dxdy$.

Exercice 8. Soit $\Omega := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ 0 \leq z \leq y \leq 1 \text{ et } 0 \leq x \leq yz\}$. Calculer $J := \int_\Omega x^3yz^2\,dxdydz$.

Exercice 9. Montrer que la fonction f définie par $f(x,y) := \frac{e^{-y}\sin(xy)}{x\sqrt{1+x^2}}$ est intégrable sur $\Omega :=]0,\infty[\times]0,\infty[$, et calculer $J := \int_\Omega f(x,y)\,dxdy$.

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne, et soit G_f le graphe de f. Montrer que $\lambda_2(G_f) = 0$.

Exercice 11. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^2$. On suppose que pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dy = 0$. Montrer que pour presque tout $y \in \mathbb{R}$, on a $\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\,dx = 0$.

Exercice 12. (produit de convolution)
Soient f et g deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}$. Montrer que

$$f * g(x) := \int_{\mathbb{R}} f(x-y)g(y)\,dy$$

est bien défini pour presque tout $x \in \mathbb{R}$, et que la fonction (presque partout définie) $f * g$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13. Soient f et g deux fonctions croissantes sur un intervalle $I = [a,b] \subseteq \mathbb{R}$.

(1) Montrer qu'on a $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ pour tout $(x,y) \in I \times I$.
(2) En déduire, en considérant $\int_{I \times I} (f(x) - f(y))(g(x) - g(y))\,dxdy$, qu'on a

$$\int_I fg \geq \left(\int_I f\right) \times \left(\int_I g\right).$$

Exercice 14. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^d$, et soit $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction croissante de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\varphi(0) = 0$. En utilisant le théorème fondamental de l'analyse et le théorème de Fubini, montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(f(x))\,dx = \int_0^\infty \varphi'(t)\,\lambda_d(\{f > t\})\,dt.$$

Exercice 15. (formule d'intégration par parties "générale")
Soient f et g deux fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, et soient F et G les fonctions définies par $F(x) := \int_0^x f(t)dt$ et $G(x) := \int_0^x g(t)dt$. Montrer à l'aide du théorème de Fubini que pour tous $a < b$ dans $\mathbb{R}$, on a $\int_a^b f(x)(G(x) - G(a))dx = \int_a^b (F(b) - F(x))g(x)dx$, et en déduire la formule d'intégration par parties

$$\int_a^b f(x)G(x)\,dx = [FG]_a^b - \int_a^b F(x)g(x)\,dx.$$

Exercice 16. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction intégrable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, et soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ *à support compact*, c'est- a-dire identiquement nulle en dehors d'un certain intervalle borné $[-A, A]$. Établir la formule suivante :

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_I |f(x) - t|\,dx\right) \varphi''(t)\,dt = 2\int_I \varphi\big(f(x)\big)\,dx.$$

Exercice 17. Soit $\phi : [0,\infty[\to [0,\infty[$ une bijection continue strictement croissante (avec donc $\phi(0)=0$), et soient $a, b \geq 0$.

(1) Expliquer pourquoi $\int_0^a \phi(x)\,dx = \lambda_2\big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq x\leq a \text{ et } y\leq \phi(x)\}\big)$, et montrer que $\int_0^b \phi^{-1}(y)\,dy = \lambda_2\big(\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\leq y\leq b \text{ et } y>\phi(x)\}\big)$.

(2) En déduire que si $b=\phi(a)$, alors $\int_0^a \phi(x)\,dx + \int_0^b \phi^{-1}(y)\,dy = ab$.

(3) Démontrer l'**inégalité de Young** :

$$\int_0^a \phi(x)\,dx + \int_0^b \phi^{-1}(y)\,dy \geq ab.$$

(*Distinguer les cas* $b\geq\phi(a)$ *et* $b\leq\phi(a)$*, i.e.* $a\geq\phi^{-1}(b)$*.*)

Exercice 18. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}^2$. Pour $\alpha>0$, on note D_α le disque de centre $(0,0)$ et de rayon α dans $\mathbb{R}^2$, et on pose

$$g(\alpha) = \frac{1}{\alpha^2}\int_{D_\alpha} f(x,y)\,dxdy.$$

Montrer qu'on a $\int_0^\infty g(\alpha)\,d\alpha = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy.$

Exercice 19. Soit $C :]0,\infty[\ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ positive, décroissante et tendant vers 0 à l'infini. Soit également $\Phi : \mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne telle que $\Phi(x)>0$ presque partout. Pour $\alpha>0$, on pose $\mathcal{D}_\alpha := \{\Phi\leq\alpha\}$. Montrer que pour toute fonction borélienne $f:\mathbb{R}^d\to[0,\infty]$, on peut écrire

$$\int_{\mathbb{R}^d} C(\Phi(x))f(x)\,dx = \int_0^\alpha g(\alpha)\,d\alpha,$$

où

$$g(\alpha) := -C'(\alpha)\int_{\mathcal{D}_\alpha} f(x)\,dx.$$

Exercice 20. Soient f et g deux fonctions positives sur un intervalle $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$, avec de plus $g(t)>0$ sur $]a,b]$. On suppose que f est croissante et que g est décroissante. On définit $F, G : [a,b]\to\mathbb{R}$ par

$$F(x) := \int_a^x f(t)\,dt \qquad \text{et} \qquad G(x) := \int_a^x g(t)\,dt.$$

Enfin, on pose

$$h(x) := \frac{F(x)}{G(x)}\cdot$$

(0) Justifier que $h(x)$ est bien défini sur $]a,b]$.

(1) Vérifier que si $x, y \in [a,b]$, alors
$$F(y)\,G(x) - F(x)\,G(y) = \int_a^x g(u)\,du \int_x^y f(v)\,dv - \int_x^y g(v)\,dv \int_a^x f(u)\,du.$$
(2) Montrer que la fonction h est croissante sur $]a,b]$.

Exercice 21. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x,y) := ye^{-y^2(1+x^2)}$. Calculer l'intégrale "itérée" $\int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x,y)\,dy\right) dx$, et en déduire la valeur de l'intégrale $J := \int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

Exercice 22. Soient α, β vérifiant $0 < \alpha < \beta$. En calculant de deux façons l'intégrale double $\int_0^\infty \left(\int_\alpha^\beta e^{-tu} du\right) dt$, déterminer la valeur de l'intégrale
$$J := \int_0^\infty \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{t}\,dt.$$

Exercice 23. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale
$$J := \int_0^1 \frac{\log(x)}{x^2 - 1}\,dx.$$

(1) Effectuer le changement de variable $x := 1/u$ dans l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\log(x)}{x^2-1}\,dx$, et en déduire qu'on a
$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{\log(x)}{x^2-1}\,dx.$$
(2) Pour $y > 0$ fixé, calculer $\int_0^\infty \frac{dx}{1+yx^2}$.
(3) Soit $x \in]0,1[$. Déterminer une primitive de la fonction $y \mapsto \frac{1}{(1+y)(1+x^2y)}$ en décomposant la fraction en éléments simples, et en déduire qu'on a
$$\int_0^\infty \frac{dy}{(1+y)(1+x^2y)} = 2\,\frac{\log(x)}{x^2-1}.$$
(4) Calculer J en utilisant (2) et (3).

Exercice 24. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale
$$J := \int_0^\infty \left(\frac{\arctan t}{t}\right)^2 dt.$$

(1) Soit $\Omega :=]0,1[\times]0,1[\times]0,\infty[\subseteq \mathbb{R}^3$, et soit $g = \Omega \to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par
$$g(x,y,t) := \frac{1}{1+x^2t^2} \times \frac{1}{1+y^2t^2}.$$
Montrer qu'on a
$$J = \int_\Omega g(x,y,t)\,dxdydt.$$

(2) Vérifier que pour $(x, y, t) \in \Omega$ tel que $x \neq y$, on a
$$g(x, y, t) = \frac{1}{x^2 - y^2}\left(\frac{x^2}{1 + x^2t^2} - \frac{y^2}{1 + y^2t^2}\right).$$

(3) Calculer les intégrales $\int_0^\infty \frac{dt}{1+x^2t^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dt}{1+y^2t^2}$ (pour x et y fixés) et en déduire, à l'aide de (2), qu'on a
$$\int_\Omega g(x, y, t)\, dxdydt = \frac{\pi}{2}\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{x + y}.$$

(4) Calculer J.

Exercice 25. En considérant l'intégrale double $\int_{[0,1]\times[0,1]} \frac{x}{(1+x^2)(1+xy)}\, dxdy$, calculer l'intégrale
$$J := \int_0^1 \frac{\log(1 + t)}{1 + t^2}\, dt.$$

Exercice 26. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale
$$J := \int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx.$$

(1) Soit $y > 0$ fixé.

  (a) Montrer que la fonction $x \mapsto \cos(2x)e^{-yx}$ est intégrable sur $]0, \infty[$ et qu'on a
  $$\int_0^\infty \cos(2x)\, e^{-yx}\, dx = \frac{y}{y^2 + 4}.$$

  (b) En utilisant l'identité $\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}$, en déduire que
  $$\int_0^\infty \sin^2 x\, e^{-yx}\, dx = \frac{2}{y(y^2 + 4)}.$$

(2) Soit $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x, y) := y \sin^2 x\, e^{-xy}$. En utilisant (1b), calculer l'intégrale "itérée"
$$J' := \int_0^\infty \left(\int_0^\infty f(x, y)\, dx\right) dy.$$

(3) Calculer J.

Exercice 27. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale
$$J := \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\, dx.$$

(1) Soit $f :]0, \infty[\times]0, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x, y :) = e^{-xy} \sin x$.

(a) Montrer que f est intégrable sur $]0,A[\times]0,\infty[$ pour tout $A>0$, et qu'on a

$$\int_{]0,A[\times]0,\infty[} f(x,y)\,dxdy = \int_0^A \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

(b) Montrer que pour $A>0$ et $y>0$ fixé, on a

$$\int_0^A f(x,y)\,dx = \frac{1}{1+y^2} - \cos A\,\frac{e^{-yA}}{1+y^2} - \sin A\,\frac{ye^{-yA}}{1+y^2}.$$

(2) Calculer J.

Exercice 28. Soit f une fonction borélienne positive sur $\mathbb{R}$. En utilisant le changement de variable $(u,v) := (x+y, x-y)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0,\infty[\times]0,\infty[} f(x-y)e^{-(x+y)}dxdy = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} f(v)e^{-|v|}dv.$$

Exercice 29. Soit $\Omega := \{(u,v)\in\mathbb{R}^2;\ u>v>0\}$. Calculer l'intégrale $I := \int_\Omega (u^4-v^4)e^{-(u+v)^2}dudv$ en posant $(x,y) := (u^2+v^2, 2uv)$.

Exercice 30. Soit $\Omega := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x>0\,,\ y>0\,,\ x^2+y^2<1\}$. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha>0$ la fonction $(x,y)\mapsto \frac{xy}{(x^2+y^2)^\alpha}$ est intégrable sur Ω.

Exercice 31. Soit $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ la somme d'une série entière convergente dans le disque unité $\mathbb{D} := \{z\in\mathbb{C};\ |z|<1\}$.

(1) Pour $r\in[0,1[$, exprimer $\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^2d\theta$ à l'aide de r et des coefficients a_n.

(2) Montrer qu'on a

$$\int_{\mathbb{D}} |f(x+iy)|^2\,dxdy = \pi\sum_{n=0}^\infty \frac{|a_n|^2}{n+1}.$$

Exercice 32. Démontrer la formule d'intégration “en coordonnées cylindriques” : pour toute fonction borélienne $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^+$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[\times\mathbb{R}} f(r\sin\theta, r\cos\theta, z)\,rdrd\theta dz.$$

Exercice 33. Démontrer la formules d'intégration “en coordonnées sphériques” : pour toute fonction borélienne $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^+$,

$$\int_{\mathbb{R}^3} f(x,y,z)\,dxdydz$$
$$= \int_{]0,\infty[\times]0,2\pi[\times]0,\pi[} f(r\cos\theta\sin\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\phi)\,r^2\sin\phi drd\theta d\phi.$$

Exercice 34. Pour $a, b, c > 0$, on pose

$$\mathcal{E}(a,b,c) := \left\{ (u,v,w) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} + \frac{w^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

(1) Quel est le volume de $\mathcal{E}(1,1,1)$?
(2) Calculer le volume de $\mathcal{E}(a,b,c)$ en utilisant (1) et la formule de changement de variables.

Exercice 35. Pour $a, b, c, h > 0$, on pose

$$\mathcal{H}(a,b,c,h) := \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ |z| \leq h \text{ et } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\}.$$

Calculer le volume de $\mathcal{H}(1,1,1,h')$ pour tout $h' > 0$, et en déduire le volume de $\mathcal{H}(a,b,c,h)$ pour tous a, b, c, h.

Exercice 36. (centre de gravité)
Soit $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$ un borélien borné et tel que $\lambda_d(\Omega) > 0$. Le **centre de gravité** de Ω est le point $g_\Omega \in \mathbb{R}^d$ défini par

$$\overrightarrow{Og_\Omega} = \frac{1}{\lambda_d(\Omega)} \int_\Omega \overrightarrow{Ox}\, d\lambda_d(x).$$

(L'intégrale d'une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est définie "coordonnée par coordonnée".)

(1) Justifier la définition.
(2) Montrer que g_Ω est l'unique point $g \in \mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\int_\Omega \overrightarrow{gx}\, d\lambda_d(x) = 0.$$

(3) En utilisant la formule de changement de variables, montrer que si $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une bijection affine telle que $\Phi(\Omega) = \Omega$, alors $\Phi(g_\Omega) = g_\Omega$.
(4) Dans cette question, on prend $d = 2$. Montrer que si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ est un rectangle ou un triangle, alors g_Ω est ce à quoi on s'attend.

Exercice 37. Soit Σ un borélien de $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$. En considèrant Σ comme une partie de $\mathbb{R}^3$ contenue dans le plan des (y,z), on note $\widehat{\Sigma}$ le "solide de révolution" obtenu en faisant tourner Σ autour de l'axe des z.

(1) Faire un dessin.
(2) En intégrant en coordonnées cylindriques, montrer que le volume de $\widehat{\Sigma}$ est donné par la formule

$$\lambda_3(\widehat{\Sigma}) = 2\pi \int_\Sigma y\,dydz.$$

(3) Que devient cette formule dans le cas où Σ est le sous-graphe d'une fonction borélienne $f : I \to [0, \infty]$, où I est un intervalle contenu dans $\mathbb{R}^+$?
(4) On suppose que Σ est borné et que $\lambda_2(\Sigma) > 0$, et on note g_Σ le centre de gravité de Σ (*cf* l'Exercice 36). Montrer que la formule de (2) peut également s'écrire

$$\lambda_3(\widehat{\Sigma}) = 2\pi\, \lambda_2(\Sigma)\ \mathrm{dist}\big(g_\Sigma, (0z)\big).$$

Exercice 38. On veut calculer l'intégrale $J := \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-x^2y^2}\cdot$

(1) Soit $\Omega := \big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ u > 0\,,\ v > 0\,,\ u+v < \pi/2\big\}$ et soit $\Phi = \Omega \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par

$$\Phi(u,v) := \left(\frac{\sin u}{\cos v}, \frac{\sin v}{\cos u}\right).$$

Montrer que Φ est un difféomorphisme de Ω sur le carré $\Omega' :=]0,1[\times]0,1[$.
(2) Calculer J en posant $(x,y) := \Phi(u,v)$.

Exercice 39. On veut calculer l'intégrale $J := \displaystyle\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy}\cdot$

(1) En utilisant le changement de variables $(u,v) := \left(\frac{x+y}{2}, \frac{y-x}{2}\right)$, montrer qu'on a

$$\int_{]0,1[\times]0,1[} \frac{dxdy}{1-xy} = 2\int_C \frac{dudv}{1-u^2+v^2},$$

où C est le carré de sommets $(0,0)$, $(1/2,-1/2)$, $(1,0)$ et $(1/2,1/2)$.
(2) On pose $C_+ := \{(u,v) \in C;\ v \geq 0\}$ et $I := \int_{C_+} \frac{dudv}{1-u^2+v^2}\cdot$
  (a) Montrer qu'on a

$$I = \int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du + \int_{1/2}^1 \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \arctan\left(\frac{1-u}{\sqrt{1-u^2}}\right) du.$$

  (b) Calculer les deux intégrales apparaissant dans (a) en posant $u := \sin t$ dans la première et $u := \cos(2t)$ dans la deuxième.
(3) Calculer J.

Exercice 40. Utiliser l'exercice 39 pour calculer la somme $S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}\cdot$

Exercice 41. On rappelle la définition de la fonction Gamma :

$$\forall s > 0\ :\ \Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}\, dx.$$

(1) Soit $\Omega :=]0,\infty[\times]0,\infty[\subseteq \mathbb{R}^2$. Montrer que la formule $\Phi(u,v) := (\frac{uv}{1+u}, \frac{v}{1+u})$ définit un difféomorphisme de Ω sur Ω.

(2) En déduire que pour tout $s \in]0,1[$, on a
$$\int_\Omega \left(\frac{x}{y}\right)^s e^{-(x+y)}\,\frac{dxdy}{x} = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\cdot$$

(3) Déduire de (2) que pour tout $s \in]0,1[$, on a
$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^\infty \frac{du}{u^{1-s}(1+u)}\cdot$$

(4) Calculer l'intégrale $\int_0^\infty \frac{du}{\sqrt{u}\,(1+u)}$ à l'aide du changement de variable $x = \sqrt{u}$, et en déduire la valeur de $\Gamma(1/2)$ en utilisant (3).

(5) Déduire de (4) la valeur de l'intégrale $\int_0^\infty e^{-u^2}du$.

Exercice 42. Pour $a, b > 0$, on pose
$$J(a,b) := \int_0^1 u^{a-1}(1-u)^{b-1}du.$$

(1) Soit $\mathcal{D} :=]0,\infty[\times]0,\infty[\subseteq \mathbb{R}^2$. Montrer que la formule $\Phi(u,t) := (ut, (1-u)t)$ définit un difféomorphisme de $]0,1[\times]0,\infty[$ sur $\mathcal{D}$.

(2) En déduire que pour tous $a, b > 0$ et pour toute fonction borélienne positive $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$, on a
$$\int_\mathcal{D} f(x+y)x^{a-1}y^{b-1}dxdy = J(a,b)\int_0^\infty t^{a+b-1}f(t)\,dt.$$

(3) Déduire de (2) l'identité
$$J(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}\cdot$$

(4) En posant $u = \sin^2\theta$, montrer qu'on a
$$J(a,b) = 2\int_0^{\pi/2} (\sin\theta)^{2a-1}(\cos\theta)^{2b-1}d\theta.$$

(5) Calculer $J(1/2,1/2)$ puis $\Gamma(1/2)$.

Exercice 43. (volume de la boule unité de $\mathbb{R}^d$)
Dans tout l'exercice on note $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$, et $\mathbb{B}_d$ la "boule unité" de $\mathbb{R}^d$, i.e. $\mathbb{B}_d = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| \leq 1\}$. On pose $V_d = \lambda_d(\mathbb{B}_d)$. Le but de l'exercice est d'établir la formule
$$V_d = \frac{\pi^{d/2}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}+1\right)}\cdot$$

(1) Vérifier que la formule est correcte pour $d = 1, 2, 3$.
(2) Pour $\lambda \geq 0$, calculer l'intégrale $\int_\lambda^\infty e^{-t} dt$.
(3) Pour $t > 0$, on pose $\mathbb{B}(t) := \{(x_1, \ldots, x_d) \in \mathbb{R}^d;\ \|x\|^2 \leq t\}$ et $V(t) := \lambda_d(\mathbb{B}(t))$.
   (a) En utilisant le théorème de Fubini et la question (2), montrer qu'on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)} dx_1 \cdots dx_d = \int_0^\infty e^{-t}\, V(t)\, dt.$$
   (b) Montrer qu'on a $V(t) = t^{d/2} V_d$ pour tout $t > 0$.
   (c) En déduire la formule
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-(x_1^2+\cdots+x_d^2)} dx_1 \cdots dx_d = \Gamma\left(\frac{d}{2} + 1\right) V_d.$$
(4) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 44. (volume d'une boule ℓ^p)
Soit p tel que $1 < p < \infty$. Pour $R > 0$, on note $\mathbb{B}_d^p(R)$ la boule de centre 0 et de rayon R dans $\mathbb{R}^d$ muni de la norme $\|\ \cdot\ \|_p$:
$$\mathbb{B}_d^p(R) = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\|_p \leq R\}.$$
Le but de l'exercice est de calculer le volume de $\mathbb{B}_d^p(R)$ à l'aide de la fonction Gamma; plus précisément, de montrer qu'on a
$$\lambda_d\big(\mathbb{B}_d^p(R)\big) = (2R)^d\, \frac{\Gamma(1 + 1/p)^d}{\Gamma(1 + d/p)}.$$
(1) Montrer qu'on a $\lambda_d(\mathbb{B}_d^p(R)) = R^d \lambda_d(\mathbb{B}_d^p(1))$ pour tout $R > 0$.
(2) Montrer qu'on a
$$\Gamma(1 + 1/p) = \int_0^\infty e^{-t^p} dt;$$
   et en déduire que
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|_p^p}\, dx = 2^d\, \Gamma(1 + 1/p)^d.$$
(3) Montrer qu'on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|x\|_p^p}\, dx = \int_0^1 \lambda_d\Big[\mathbb{B}_d^p\Big(\big((-\log(s)\big)^{1/p}\Big)\Big]\, ds.$$
(4) Démontrer la formule souhaitée.

Exercice 45. (intégration d'une fonction radiale)
On note $\|\ \ \|$ la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^d$. Pour $r > 0$, on pose $V_d(r) := \lambda_d(\mathbb{B}_d(r))$, où $\mathbb{B}_d(r) := \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| \leq r\}$.

(1) Montrer qu'on a $V_d(r) = r^d V_d(1)$.
(2) Soit $\varphi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction positive de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et tendant vers 0 à l'infini.
   (a) Montrer que pour tout $u \in [0, \infty[$, on peut écrire $\varphi(u) = -\int_u^\infty \varphi'(t)\,dt$.
   (b) En déduire l'identité
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|)\,dx = -\int_0^\infty \varphi'(r) V_d(r)\,dr.$$
   (c) En utilisant (b), (1) et une intégration par parties, montrer qu'on a
$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\|x\|)\,dx = d\,V_d(1) \int_0^\infty r^{d-1}\varphi(r)\,dr.$$

Exercice 46. Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice symétrique définie positive. Justifier l'existence d'une matrice orthogonale J telle que $J^{-1}AJ$ soit diagonale, puis utiliser le changement de variable $x := Ju$ pour établir la formule
$$\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\langle Ax, x\rangle} dx = \frac{\pi^{d/2}}{\sqrt{\det(A)}}.$$

Exercice 47. En utilisant l'Exercice 46, montrer que si $A, B \in M_d(\mathbb{R})$ sont des matrices symétriques définies positives, alors
$$\forall \theta \in]0,1[\ : \ \det\big((1-\theta)A + \theta B\big) \geq \det(A)^{1-\theta} \det(B)^\theta.$$

Exercice 48. (inégalité de Prekopa-Leindler)
Soit θ vérifiant $0 < \theta < 1$. Le but de l'exercice est d'établir pour tout $d \in \mathbb{N}^*$ le résultat suivant, qu'on notera $(\mathrm{PK})_d$: *si $f, g, h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sont des fonctions boréliennes ≥ 0 sur $\mathbb{R}^d$ vérifiant*
$$(*_d) \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^d \ : \ h\big((1-\theta)x + \theta y\big) \geq f(x)^{1-\theta} g(y)^\theta$$
alors
$$\int_{\mathbb{R}^d} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^d} f\right)^{1-\theta} \left(\int_{\mathbb{R}^d} g\right)^\theta.$$

(1) Dans cette question, on veut montrer le résultat suivant : *si A, B sont des boréliens de $\mathbb{R}$ alors, pour tout borélien C tel que*
$$(1-\theta)A + \theta B \subseteq C,$$
on a
$$\lambda_1(C) \geq (1-\theta)\lambda_1(A) + \theta\,\lambda_1(B).$$
   (a) Dans cette sous-question, on suppose que A et B sont compacts.

(i) Montrer que si on pose $a := \min A$ et $b := \max B$, alors l'intersection $\big((1-\theta)a + \theta B\big) \cap \big((1-\theta)A + \theta b\big)$ contient au plus 1 point.

(ii) Démontrer le résultat souhaité dans ce cas. (Observer que l'ensemble $(1-\theta)A + \theta B$ contient $\big((1-\theta)a + \theta B\big) \cup \big((1-\theta)A + \theta b\big)$.)

(b) On admet que pour tout borélien $E \subseteq \mathbb{R}$, on a

$$\lambda_1(E) = \sup\big\{\lambda_1(K);\ K \subseteq E\ ,\ K \text{ compact}\big\}.$$

Démontrer le résultat souhaité pour A, B boréliens quelconques.

(2) Montrer que pour toute fonction borélienne $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} u = \int_0^\infty \lambda_1\big(\{u > t\}\big)\, dt.$$

(3) En utilisant (1) et (2), montrer que si $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions vérifiant $(*_1)$, alors $\int_{\mathbb{R}} h \geq \int_{\mathbb{R}} f + \int_{\mathbb{R}} g$; et en déduire $(\mathrm{PL})_1$.

(4) On identifie $\mathbb{R}^{d+1}$ à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$. Pour toute fonction $u : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note $u_s : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $u_s(x) := u(s, x)$. Montrer que si $f, g, h : \mathbb{R}^{d+1} \to \mathbb{R}^+$ sont des fonctions vérifiant $(*_{d+1})$, alors, pour tout $s \in \mathbb{R}$, les fonctions f_s, g_s, h_s vérifient $(*_d)$.

(5) Démontrer $(\mathrm{PL})_d$ par récurrence sur la dimension d. (Il sera utile de penser à l'inégalité de Hölder.)

Exercice 49. (inégalité de Brunn-Minkowski)
Dans cet exercice, on note $|A|$ plutôt que $\lambda_d(A)$ la mesure de Lebesgue d'un borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$. Le but de l'exercice est de montrer que si K et L sont des compacts de $\mathbb{R}^d$ tels que $|K|, |L| > 0$, alors

$$|K + L|^{1/d} \leq |K|^{1/d} + |L|^{1/d}.$$

(1) Justifier que si A, B sont des compacts de $\mathbb{R}^d$ et si $s, t \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble $sA + tB := \{sx + ty;\ x \in A\ ,\ y \in B\}$ est compact.

(2) En utilisant l'inégalité de Prekopa-Leindler (Exercice 48), montrer que si A et B sont des compacts de $\mathbb{R}^d$, alors

$$\forall \theta \in]0,1[\ :\ \big|(1-\theta)A + \theta B\big| \leq |A|^{1-\theta}\, |B|^{\theta}.$$

(3) Conclure en appliquant (2) à $A := \frac{1}{|K|^{1/d}}\, K$, $B := \frac{1}{|L|^{1/d}}\, L$ et un θ bien choisi.