Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Soient $[a,b]$ et $[c,d]$ deux intervalles compacts de $\mathbb{R}$, et soit $f : [a,b] \times [c,d]$ une fonction *bornée* et *séparément continue*.

(1) Justifier que les fonctions $x \mapsto \int_c^d f(x,y)\, dy$ et $y \mapsto \int_a^b f(x,y)\, dx$ sont continues sur $[a,b]$ et $[c,d]$ respectivement.

(2) Justifier que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b \left(\frac{d-c}{n} \sum_{k=1}^{n} f\Big(x, c + k\, \frac{d-c}{n}\Big) \right) dx.$$

(3) En déduire que

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy.$$

Exercice 2. Montrer que la formule $f(x) := \int_0^\infty e^{-\sqrt{t}x} \sin(t^7 x)\, dt$ définit une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$.

Exercice 3. Pour $x > 0$, on pose $f(x) := \int_0^\infty \frac{\cos t}{1+t^2}\, e^{-xt} dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0,\infty[$, et qu'elle est solution d'une équation différentielle "intéressante" à déterminer.

Exercice 4. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $F : I \times \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $f(x) = \int_\Omega F(x,t)\, d\mu(t)$ est bien défini pour tout $x \in I$. Soit également $a \in I$. On fait les hypothèses suivantes :

(a) pour presque tout $t \in \Omega$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est dérivable en a;

(b) pour tout compact $K \subseteq I$, il existe une fonction intégrable $C_K : \Omega \to \mathbb{R}^+$ telle que, pour presque tout $t \in \Omega$, la fonction $x \mapsto F(x,t)$ est $C_K(t)$-lipschitzienne sur K.

Montrer que la fonction f est dérivable en a, avec la bonne formule pour $f'(a)$.

Exercice 5. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable telle que $t\phi(t)$ est également intégrable sur $\mathbb{R}$. Justifier que $f(x) := \int_\mathbb{R} |x-t|\, \phi(t)\, dt$ est bien défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis montrer à l'aide de l'Exercice 4 que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. Ce résultat pouvait-il se déduire du théorème de dérivation tel qu'il est énoncé dans le cours?

Exercice 6. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I := \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2} dt$.

(1) Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) := \int_0^\infty \frac{e^{-x^2(1+t^2)/2}}{1+t^2} dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et qu'on a $f'(x) = -J\, e^{-x^2/2}$, où $J = \int_0^\infty e^{-t^2/2} dt$.
(2) En déduire la valeur de J, puis celle de I.

Exercice 7. Dans cet exercice, on donne une méthode pour calculer, pour tout $\alpha > 0$, la valeur de l'intégrale

$$I_\alpha := \int_{\mathbb{R}} e^{-\alpha t^2} dt.$$

(1) On définit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ par $f(x) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$
   (a) Justifier la définition, et montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Calculer $f(0)$ et déterminer $\lim_{x\to\infty} f(x)$.
   (c) Montrer que f est dérivable sur $]0, \infty[$ et vérifie une équation différentielle du type $f'(x) - f(x) = \frac{c}{\sqrt{x}}$, où c est une constante qu'on exprimera en fonction de I_1.
   (d) Résoudre l'équation différentielle précédente, puis calculer I_1.
(2) Calculer I_α pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 8. (régularité d'une transformée de Fourier)
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction intégrable, et soit $\widehat{f}$ sa transformée de Fourier,

$$\widehat{f}(x) = \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-ixt} dt.$$

(1) Montrer que la fonction $\widehat{f}$ est continue.
(2) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. On suppose que la fonction $t \mapsto t^r f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que $t^k f(t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ pour tout $k \in \{1, \dots, r\}$.
   (b) Montrer que $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^r$, et donner une formule pour ses dérivées.

Exercice 9. Le but de l'exercice est de déterminer la transformée de Fourier de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(t) := \frac{1}{1+t^2}$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit $g_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $g_n(x) = \int_{-n}^n \frac{e^{-itx}}{1+t^2} dt$. Montrer que les g_n sont de classe $\mathcal{C}^1$, et que la suite (g_n') converge uniformément sur tout intervalle $[a, \infty[$, $a > 0$.
(2) Déduire de (1) que la fonction $\widehat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \infty[$, et donner une formule pour $\widehat{f}\,'(x)$. Montrer ensuite que pour tout $x > 0$, on peut écrire

$$\widehat{f}\,'(x) = \int_{-\infty}^\infty \frac{-iu}{u^2 + x^2}\, e^{-iu}\, du\,.$$

(3) Montrer que $\widehat{f}$ est deux fois dérivable sur $]0,\infty[$ et y vérifie l'équation différentielle $\widehat{f}'' = \widehat{f}$.
(4) Montrer qu'on a $\widehat{f}(x) = \pi e^{-|x|}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 10. (transformée de Laplace)
Soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{C}$ une fonction borélienne. On suppose que que pour tout $\lambda > 0$, la fonction $t \mapsto e^{-\lambda t} f(t)$ est intégrable sur $[0,\infty[$; et on définit une fonction $\mathcal{L}f :]0,\infty[\to \mathbb{C}$ par

$$\mathcal{L}f(\lambda) := \int_0^\infty f(t)e^{-\lambda t}dt.$$

(On dit que $\mathcal{L}f$ est la **transformée de Laplace** de la fonction f.)

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^k f(t)e^{-\varepsilon t}$ est intégrable sur $[0,\infty[$.
(2) En déduire que la fonction $\mathcal{L}f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$, et donner une formule pour ses dérivées.
(3) Montrer que $\mathcal{L}f(\lambda)$ tend vers 0 quand $\lambda \to \infty$.

Exercice 11. Pour $x \geq 0$, on pose $F(x) := \int_0^\infty \frac{1-e^{-t^2 x}}{t^2}\, dt$.

(1) Justifier la définition, et montrer que F est continue à droite en 0.
(2) Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$ et calculer $F'(x)$ pour $x > 0$.
(3) Calculer $F(x)$ pour tout $x \geq 0$.

Exercice 12. En utilisant le théorème de dérivation des intégrales à paramètres, montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a $\int_0^\infty \frac{e^{-x}-e^{-\lambda x}}{x}\, dx = \log\lambda$. En déduire, pour $a, b > 0$, la valeur de l'intégrale $I(a,b) := \int_0^\infty \frac{e^{-ax}-e^{-bx}}{x}\, dx$.

Exercice 13. Le but de l'exercice est de calculer $I_n := \int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Pour $\lambda > 0$, on pose $f(\lambda) := \int_0^\infty \frac{dt}{\lambda+t^2}$. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$ et trouver une relation entre I_n et $f^{(n-1)}(1)$.
(2) Calculer directement $f(\lambda)$ en utilisant un changement de variable.
(3) Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14. Calculer $f(\alpha) := \int_0^\infty e^{-\alpha t}dt$ pour $\alpha > 0$, et *en déduire* la valeur de $I_n := \int_0^\infty t^n e^{-t}dt$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 15. On rappelle que $\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2/2}dt = \sqrt{2\pi}$. Calculer $f(x) := \int_{\mathbb{R}} e^{-xt^2/2}dt$ pour $x > 0$, et *en déduire* la valeur de $I_k := \int_{\mathbb{R}} t^{2k}e^{-t^2/2}dt$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 16. Montrer que pour tout $c \geq 0$, on a
$$\int_0^\infty e^{-c/x^2}\, e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-\sqrt{2c}}\,.$$

Exercice 17. Calculer $F(t) := \int_0^{+\infty} \frac{\log(1+t^2x^2)}{1+x^2}\, dx$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 18. Calculer l'intégrale $I := \int_0^1 \frac{x-1}{\log x}\, dx$ en considérant la fonction f définie sur $]0,\infty[$ par $f(\alpha) := \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\log x}\, dx$.

Exercice 19. (fonction Gamma, 1)
Pour $x > 0$, on pose
$$\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt.$$

(1) Justifier la définition.
(2) Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,\infty[$.
(3) Déterminer $\lim_{x\to 0^+} \Gamma(x)$ et $\lim_{x\to\infty} \Gamma(x)$.
(4) Montrer que la fonction $\log \Gamma$ est convexe.
(5) Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20. (fonction Gamma, 2)
On garde les notations de l'Exercice 19. Le but de l'exercice est de montrer que pour tout $x > 0$, on a
$$\Gamma(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, on pose $J_n(x) := \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^n\, du$. Trouver une relation entre $J_n(x)$ et $J_{n-1}(x+1)$ pour $n \geq 1$, et en déduire $J_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
(2) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$.
(3) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 21. (fonction Gamma, 3)
On garde les notations de l'Exercice 19. Le but de l'exercice est d'établir la **formule de Stirling**, qui donne un équivalent de $\Gamma(x+1)$ quand $x \to \infty$:
$$\Gamma(x+1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}.$$

(1) Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\Gamma(x+1) = x^x e^{-x} \sqrt{x} \int_{\mathbb{R}} g(x,u)\, du$, où $g(x,u) = 0$ si $\sqrt{x} \leq -u$ et $g(x,u) = \exp\left(x \log\left(1 + \frac{u}{\sqrt{x}}\right) - u\sqrt{x}\right)$ si $\sqrt{x} > -u$.

(2) Pour $u > 0$, déterminer $\sup_{x \geq 1} g(x,u)$; et pour $u < 0$, déterminer $\sup_{x>0} g(x,u)$.
(3) Démontrer la formule de Stirling.

Exercice 22. Soit $c > 0$ et soit $g : [0, c[\to \mathbb{C}$ une fonction borélienne, continue en 0, avec $g(0) \neq 0$.

(1) On suppose qu'on a $\int_0^c e^{-\lambda u} |g(u)| \, du < \infty$ pour $\lambda > 0$ assez grand.
  (a) Montrer que si $\delta \in]0, c[$, alors $\int_\delta^c e^{-\lambda u} g(u) \, du = o\left(\frac{1}{\lambda^k}\right)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ quand $\lambda \to \infty$.
  (b) Montrer que $\int_0^c e^{-\lambda u} g(u) \, du \sim \frac{g(0)}{\lambda}$ quand $\lambda \to \infty$.
(2) On suppose qu'on a $\int_0^c e^{-\lambda u^2} |g(u)| \, du < \infty$ pour $\lambda > 0$ assez grand. Déterminer un équivalent de $\int_0^c e^{-\lambda u^2} g(u) \, du$ quand $\lambda \to \infty$.

Exercice 23. (méthode de Laplace)
Soient $\varphi : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $f : [a, b[\to \mathbb{C}$ une fonction borélienne. On suppose que la fonction $t \mapsto e^{-\lambda \varphi(t)} f(t)$ est intégrable sur $[a, b[$ pour$\lambda > 0$ assez grand, et on pose

$$F(\lambda) := \int_a^b e^{-\lambda \varphi(t)} f(t) \, dt.$$

(1) On suppose qu'on a $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in [a, b[$, et que f est continue en a avec $f(a) \neq 0$.
  (a) Montrer que le changement de variable $u := \varphi(t) - \varphi(a)$ permet d'écrire

$$F(\lambda) = \int_0^c e^{-\lambda u} g(u) \, du,$$

  où c est à déterminer et g est une fonction continue sur $[0, c[$ telle que $g(0) = \frac{f(a)}{\varphi'(a)}$.
  (b) En déduire, à l'aide de l'Exercice 22, qu'on a l'équivalent suivant quand $\lambda \to \infty$:

$$F(\lambda) \sim \frac{f(a)}{\varphi'(a)} \frac{e^{-\lambda \varphi(a)}}{\lambda}.$$

(2) On suppose que φ est de classe $\mathcal{C}^2$, avec $\varphi'(t) > 0$ pour tout $t \in]a, b[$, $\varphi'(a) = 0$ et $\varphi''(a) > 0$. Enfin on suppose toujours que f est continue en a avec $f(a) \neq 0$. En utilisant le changement de variable $u = \sqrt{\varphi(t) - \varphi(a)}$, montrer qu'on a l'équivalent suivant quand $\lambda \to \infty$:

$$F(\lambda) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{f(a)}{\sqrt{\varphi''(a)}} \frac{e^{-\lambda \varphi(a)}}{\sqrt{\lambda}}.$$

Exercice 24. Utiliser l'Exercice 23 pour donner un équivalent de $\int_x^\infty e^{-t^2} dt$ quand $x \to \infty$.

Exercice 25. Utiliser l'Exercice 23 pour donner un équivalent de l'intégrale de Wallis $W_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^n dt$ quand $n \to \infty$.

Exercice 26. Déterminer un équivalent de l'intégrale I_n dans les cas suivants.

(1) $I_n := \int_{-1}^1 (1 - t^2)^n dt$.
(2) $I_n := \int_0^1 [\log(1 + x)]^n dt$.
(3) $I_n := \int_0^\pi t^n \sin t \, dt$.

Exercice 27. Montrer que pour $x > 0$, on a

$$\Gamma(x + 1) = x^{x+1} \int_0^\infty e^{-x(u - \log u)} du \,.$$

En déduire la formule de Stirling : $\Gamma(x + 1) \sim x^x e^{-x} \sqrt{2\pi x}$ quand $x \to \infty$.