Feuille d'exercices n° 5

Exercice 1. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ la fonction $t \mapsto \left(1 - \frac{1}{t^\alpha}\right)^t$ est intégrable sur $]1, \infty[$.

Exercice 2. Soit $a > 0$, et soit $u : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que $u(t)/\log(t)$ admet une limite $l > 1$ quand $t \to \infty$ (la valeur $l = \infty$ n'est pas exclue). Montrer que la fonction $t \mapsto e^{-u(t)}$ est intégrable sur $[a, \infty[$.

Exercice 3. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable sur $[0, \infty[$.

(1) Peut-on affirmer que $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$?
(2) Montrer que si $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$, alors cette limite est nécessairement égale à 0.
(3) Montrer que si f est *uniformément* continue, alors $f(x) \to 0$ quand $x \to \infty$.

Exercice 4. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Montrer que si la fonction f' est intégrable sur $[0, \infty[$, alors $f(x)$ admet une limite quand $x \to \infty$.

Exercice 5. Calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$.

Exercice 6. Soient $a, b \in \mathbb{R}$ avec $b \neq 0$, et soit $\lambda = a + ib$. En notant $\operatorname{sgn}(b)$ le signe de b, montrer qu'on a

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x - \lambda} = i\pi \operatorname{sgn}(b).$$

Exercice 7. Dans tout l'exercice, f est une fonction rationnelle, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$, où les polynômes P et Q sont à coefficients réels. On suppose que Q n'a pas de racines réelles, et que $\deg(Q) \geq 2 + \deg(P)$. On suppose également que toutes les racines complexes de Q sont simples, et que le coefficient du terme de plus haut degré de $Q(x)$ est égal à 1.

(1) Montrer que f est intégrable sur $\mathbb{R}$.
(2) On note $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ les racines complexes de Q à partie imaginaire strictement positive.

(a) Justifier qu'on peut écrire $f(x)$ sous la forme

$$f(x) = \sum_{j=1}^{N} \frac{c_j}{x - \lambda_j} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\overline{c_j}}{x - \overline{\lambda_j}},$$

où les c_j sont des constantes.

(b) Montrer que les coefficients c_j sont donnés par $c_j = \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}$.

(c) Montrer également qu'on a $\sum_{j=1}^{N} c_j + \sum_{j=1}^{N} \overline{c_j} = 0$.

(3) Avec les notations de (2), et en utilisant l'Exercice 6, établir la formule suivante (qu'on appelle la **formule des résidus**) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 2i\pi \sum_{j=1}^{N} \frac{P(\lambda_j)}{Q'(\lambda_j)}.$$

(4) *Application numérique :* calculer $I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^4}$ et $I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6}$.

Exercice 8. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I := \int_0^{\pi/2} \log(\sin t)\, dt$.

(1) Justifier que I a bien un sens.

(2) En remarquant que $\sin t = \cos(\frac{\pi}{2} - t)$, montrer qu'on a $I = \int_0^{\pi/2} \log(\cos t)\, dt$.

(3) En déduire que $2I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log(\cos t \sin t)\, dt$, puis que

$$I = -\frac{\pi}{2} \log(2) + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \log(\sin 2t)\, dt\,.$$

(4) Montrer qu'on a $\int_{\pi/2}^{\pi} \log(\sin u)\, du = I$, puis que $\int_0^{\pi} \log(\sin u)\, du = 2I$.

(5) calculer I.

Exercice 9. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un segment $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, et soit $\phi : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Soit également $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On suppose qu'on a $\phi'(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$, et que la fonction G définie par $G(x) := \int_a^x g(t)\, dt$ est *bornée* sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'on a

$$\lim_{|\lambda| \to \infty} \int_a^b f(t) g(\lambda\phi(t))\, dt = 0\,.$$

(*Suggestion* : écrire $f(t)g(\lambda\phi(t)) = \frac{f(t)}{\phi'(t)} \times g(\lambda\phi(t))\phi'(t)$.)

Exercice 10. Soit $f : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(t) := \sin(t^{1/4}) e^{-t^{1/4}}$.

(1) Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}$, la fonction $t \mapsto t^p f(t)$ est intégrable sur $[0, \infty[$. Dans la suite, on pose $I_p =: \int_0^{\infty} t^p f(t)\, dt$.

(2) Montrer que I_p est la partie imaginaire de $J_p := 4 \int_0^{\infty} u^{4p+3} e^{-\lambda u} du$, où λ est un nombre complexe à déterminer.

(3) Calculer I_p pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Exercice 11. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $\alpha > 0$, calculer l'intégrale $\int_0^\infty t^n e^{-\alpha t}\, dt$.

Exercice 12. Pour $x > 0$, on pose $\Gamma(x) := \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt$. Trouver une relation entre $\Gamma(x+1)$ et $\Gamma(x)$, et en déduire la valeur de $\Gamma(n+1)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 13. Pour toute fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\widehat{u} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ la **transformée de Fourier** de u, qui est la fonction définie par

$$\widehat{u}(\lambda) := \int_{\mathbb{R}} u(t) e^{-i\lambda t} dt.$$

(1) Justifier la définition.
(2) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction continue identiquement nulle en dehors d'un intervalle $[a, b]$.
   (a) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^1$, alors $\widehat{f'}(\lambda) = i\lambda\, \widehat{f}(\lambda)$.
   (b) Si f est de classe $\mathcal{C}^k$, exprimer $\widehat{f^{(k)}}(\lambda)$ en fonction de $\widehat{f}(\lambda)$.
   (c) Montrer que si f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, alors $\widehat{f}(\lambda) = o\left(\frac{1}{|\lambda|^n}\right)$ quand $\lambda \to \pm\infty$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 14. Pour $x > 0$, on pose $R(x) := \int_x^\infty e^{-t^2}\, dt$. Justifier que $R(x) < \infty$; puis montrer que $R(x)$ est équivalent à $\phi(x) := \frac{e^{-x^2}}{2x}$ quand $x \to \infty$. (Intégrer par parties.)

Exercice 15. Soit $\alpha > 0$. Déterminer un équivalent simple de $F(x) := \int_1^x e^{t^\alpha} dt$ quand $x \to \infty$.

Exercice 16. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $F_n(x) := \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

(1) Calculer $F_1(x)$.
(2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
$$2nF_{n+1}(x) = \frac{x}{(x^2+1)^n} + (2n-1)F_n(x).$$
(3) En déduire $F_2(x)$ et $F_3(x)$.
(4) Calculer $F_2(x) = \int_0^x \frac{dt}{(1+t^2)^2}$ en posant $t = \tan u$.

Exercice 17. Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Soit également $\lambda > 0$.

(1) On suppose qu'on a $|F'(t)| \geq \lambda$ pour tout $t \in [a,b]$. Montrer que si on pose $G := 1/F'$, alors
$$\left|\int_a^b e^{iF(t)}dt\right| \leq \frac{2}{\lambda} + \left|\int_a^b G'(t)e^{iF(t)}dt\right|.$$
(2) On suppose qu'on a $|F'(t)| \geq \lambda$ pour tout $t \in [a,b]$, et que la fonction F' est monotone. Établir l'inégalité
$$\left|\int_a^b e^{iF(t)}dt\right| \leq \frac{4}{\lambda}.$$

Exercice 18. Soit $\beta > 0$. Calculer l'intégrale $I := \int_1^\infty \frac{dx}{x(1+x^\beta)}$.

Exercice 19. Soient $\alpha, \beta > 0$. Pour $t > 0$, on pose $f(t) := \frac{(1+t)^\alpha}{(1+t^2)^\beta}$. Montrer que si $2\beta - \alpha = 2$, alors $\int_{]0,1]} f = \int_{[1,\infty[} f$.

Exercice 20. Soit $a > 0$. On pose $J(a) := \int_0^\infty t^{-1/2}\, e^{-a(t+\frac{1}{t})}dt$.

(1) Montrer que $J(a) = \int_1^\infty (t^{-1/2} + t^{-3/2})\, e^{-a(t+\frac{1}{t})}dt$.
(2) Déterminer la valeur de $J(a)$ en posant $u = \sqrt{a}\big(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\big)$ et en admettant que $\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}/2$.

Exercice 21. Montrer que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne ou bien positive, ou bien intégrable sur $\mathbb{R}$, alors
$$\int_{\mathbb{R}^*} f\Big(t - \frac{1}{t}\Big)\, dt = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, dx.$$

Exercice 22. Soit $f :]0,\infty[\, \to \mathbb{R}$ une fonction localement intégrable admettant des limites finies α et β respectivement en 0 et en ∞. Soient également $a, b > 0$. Montrer que l'intégrale $\int_0^\infty \frac{f(bt)-f(at)}{t}\, dt$ existe et vaut $(\beta - \alpha)\log(b/a)$. (On pourra commencer par vérifier que pour tous $0 < u, v < \infty$, on a $\int_u^v \frac{f(bt)-f(at)}{t}\, dt = \int_{av}^{bv} \frac{f(x)}{x}\, dx - \int_{au}^{bu} \frac{f(x)}{x}\, dx$.)

Exercice 23. Montrer que si $u : [a,\infty[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, décroissante et tendant vers 0 à l'infini, alors $\int_a^\infty u(t)e^{it}dt$ existe en tant qu'intégrale généralisée.

Exercice 24. Montrer qu'on a $\int_{2n\pi+\frac{\pi}{4}}^{2n\pi+\frac{3\pi}{4}} \frac{\sin t}{t}\, dt \geq \frac{\sqrt{2}}{4(2n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, et en déduire que la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1,\infty[$.

Exercice 25. Montrer que $f(t) = \frac{\sin t}{t}$ n'est pas intégrable sur $[1, \infty[$ en utilisant l'inégalité $|\sin t| \geq \sin^2 t$.

Exercice 26. Montrer que $\int_0^\infty \cos(x^2)\, dx$ existe en tant qu'intégrale généralisée, mais que la fonction $x \mapsto \cos(x^2)$ n'est pas intégrable sur $[0, \infty[$.

Exercice 27. Déterminer pour quelles valeurs de $\alpha > 0$ l'intégrale $\int_1^\infty \frac{\sin t}{\sin t + t^\alpha}$ est convergente.

Exercice 28. Pour $\alpha \in]0, 1]$, déterminer un équivalent de $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$ quand $n \to \infty$.

Exercice 29. Pour $\alpha, \beta > 0$, déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}$.

Exercice 30. Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\cos(\log n)}{n}$ et $\sum \frac{\sin(\sqrt{n})}{n}$.

Exercice 31. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $W_n := \int_0^{\pi/2} (\sin x)^n dx$. Les W_n sont appelées les **intégrales de Wallis**.

(1) Montrer qu'on a $W_{n+2} = W_n - \int_0^{\pi/2} [\cos x\, (\sin x)^n] \cos x\, dx$, et en déduire la relation de récurrence
$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n\,.$$

(2) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a
$$W_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}(k!)^2} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad W_{2k+1} = \frac{2^{2k}(k!)^2}{(2k+1)!}\,.$$

(3) Montrer que la suite (W_n) est décroissante, puis que $W_{n+1} \sim W_n$ quand $n \to \infty$. Déterminer ensuite un équivalent simple de $W_{2k}W_{2k+1}$ en utilisant (2), et conclure que
$$W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \quad \text{quand } n \to \infty\,.$$

Exercice 32. Le but de l'exercice est d'établir la **formule de Stirling**, qui donne un équivalent de $n!$ quand $n \to \infty$:
$$n! \sim n^n\, e^{-n} \sqrt{2\pi n}\,.$$

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $v_n := \log\left(\frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}\right)$. Montrer qu'on a
$$v_{n+1} - v_n = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$
et en déduire que la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$ est absolument convergente.

(2) Déduire de (1) qu'il existe une constante C telle que $n! \sim C\, n^n e^{-n}\sqrt{n}$ quand $n \to \infty$.

(3) Déterminer la contante C en utilisant les intégrales de Wallis (Exercice 31) et conclure.

Exercice 33. Le but de l'exercice est de calculer l'intégrale $I := \int_0^\infty e^{-t^2} dt$.

(1) En utilisant convenablement le Théorème de convergence monotone, montrer qu'on a
$$I = \lim_{k\to\infty} J_k, \qquad \text{où} \quad J_k := \int_0^k \left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right)^{k^2}.$$

(2) Vérifier que $J_k = k\, W_{2k^2+1}$ où les W_n sont les intégrales de Wallis, puis calculer I en utilisant l'Exercice 31.

Exercice 34. Le but de l'exercice est de calculer la somme $S := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

(1) Pour $k \in \mathbb{N}$, on pose $W_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos t)^k\, dt$ et $I_k := \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^2\, (\cos t)^k\, dt$. Montrer que si $k \geq 2$, alors
$$W_k = \frac{k(k-1)}{2}\, I_{k-2} - \frac{k^2}{2}\, I_k \qquad \text{et} \qquad W_k = \frac{k-1}{k}\, W_{k-2}.$$

(2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $\varepsilon_n := \frac{I_{2n}}{W_{2n}}$.

(a) Montrer à l'aide de (1) que si $n \geq 1$, alors $\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n = \frac{1}{2n^2}$.

(b) Montrer que ε_n tend vers 0 quand $n \to \infty$. (*Suggestion* : commencer par montrer que pour tout $0 < \delta < \pi/2$ fixé, on a $\int_\delta^{\pi/2} (\cos t)^k\, dt = o(W_k)$ quand $k \to \infty$.)

(3) Déterminer la valeur de S.