Feuille d'exercices n° 4

Exercice 1. (inclusion-exclusion, bis)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$, et soient $A_1, \dots, A_N \in \mathfrak{B}$. Justifier l'identité $\mathbf{1}_{\bigcup_{j=1}^N A_j} = \mathbf{1} - \prod_{j=1}^N (\mathbf{1} - \mathbf{1}_{A_j})$, et en déduire la formule

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \mu(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) \right) .$$

Exercice 2. (intégrale et aire sous le graphe)
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour toute fonction borélienne $f : I \to [0, \infty]$, on pose

$$\mathrm{SG}(f, I) := \big\{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R};\ x \in I \text{ et } 0 \le y < f(x) \big\}.$$

(1) Montrer que $\mathrm{SG}(f, I)$ est un borélien de $\mathbb{R}^2$, pour toute fonction borélienne positive f.
(2) Montrer que pour toute fonction borélienne $f : I \to [0, \infty]$, on a

$$\int_I f \, d\lambda_1 = \lambda_2\big(\mathrm{SG}(f, I)\big).$$

(*Commencer par traiter le cas d'une fonction f étagée.*)

Exercice 3. Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{B})$, et soit $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i$ (*i.e.* μ est la mesure définie par $\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu_i(A)$ pour tout $A \in \mathfrak{B}$). Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \Omega \to [0, \infty]$, on a $\int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i \in I} \int_\Omega f \, d\mu_i$.

Exercice 4. (intégration par rapport à une mesure discrète)
Que devient la formule de l'Exercice 3 lorsqu'on prend $\mathfrak{B} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\mu_i = a_i \delta_{x_i}$, où $(a_i)_{i \in I}$ est une famille de nombres réels positifs et $(x_i)_{i \in I}$ une famille de points de Ω?

Exercice 5. (intégration par rapport à une mesure à densité)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit w une fonction mesurable positive sur Ω. On note ν la mesure de densité w par rapport à μ :

$$\nu(A) = \int_A w \, d\mu \qquad \text{pour tout } A \in \mathfrak{B}.$$

Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \Omega \to [0,\infty]$, on a

$$\int_\Omega f\, d\nu = \int_\Omega f w\, d\mu.$$

Exercice 6. Déterminer la limite de $\zeta(s) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$ quand s tend vers 1^+.

Exercice 7. Déterminer la limite de $f(x) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} e^{-n^2 x}$ quand x tend vers 0^+.

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(\Omega) = 1$. Soient également $m, M \in \mathbb{R}$ avec $0 < m \leq M$, et soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. On suppose qu'on a $m \leq f(x) \leq M$ pour tout $x \in \Omega$.

(1) En observant que la fonction $\phi := \frac{(f-m)(M-f)}{f}$ est positive, établir l'inégalité

$$\int_\Omega f\, d\mu + mM \int_\Omega \frac{1}{f}\, d\mu \leq m + M.$$

(2) En déduire qu'on a

$$\left(\int_\Omega f\, d\mu\right)\left(\int_\Omega \frac{1}{f}\, d\mu\right) \leq \frac{(m+M)^2}{4mM}.$$

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables sur Ω, à valeurs complexes. On suppose qu'on a $\sum_0^\infty \int_\Omega |f_n|\, d\mu < \infty$. Montrer que pour presque tout $x \in \Omega$, la série $\sum f_n(x)$ est absolument convergente.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $f : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. On suppose qu'il existe une famille dénombrable d'ensembles mesurables $(B_i)_{i \in I}$ telle que $\bigcup_{i \in I} B_i = \Omega$ et $\sum_{i \in I} \int_{B_i} |f|\, d\mu < \infty$. Montrer que la fonction f est intégrable.

Exercice 11. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres réels positifs, et soit $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}^+$ la fonction définie comme suit : $f(x) \equiv a_n$ sur $x \in [n, n+1[$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Justifier que f est borélienne, puis calculer $\int_{[0,\infty[} f\, d\lambda_1$ en fonction des a_n.

Exercice 12. (Borel-Cantelli, bis)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{B}$. On suppose qu'on a $\sum_1^\infty \mu(A_n) < \infty$. Montrer que la fonction $f = \sum_0^\infty \mathbf{1}_{A_n}$ vérifie $f(x) < \infty$ pp, et en déduire que $\mu(\overline{\lim}\, A_n) = 0$. (On rappelle que $\overline{\lim}\, A_n$ est l'ensemble des $x \in \Omega$ appartenant à une infinité d'ensembles A_n.)

Exercice 13. (inégalité de Hölder)
Dans tout l'exercice, p et q sont des nombres réels positifs vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

(1) montrer que pour tous $a,b\in[0,\infty]$, on a $ab\leq\frac{1}{p}\,a^p+\frac{1}{q}b^q$.
(2) En déduire que si $(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ est un espace mesuré, alors, pour toutes fonctions mesurables $f,g:\Omega\to[0,\infty]$, on a
$$\int_\Omega fg\,d\mu\leq\left(\int_\Omega f^p\,d\mu\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_\Omega g^q\,d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$
(Cette inégalité s'appelle l'**inégalité de Hölder**; et pour $p=2=q$, elle s'appelle plutôt **inégalité de Cauchy-Schwarz**.)
(3) Comment s'écrit l'inégalité de Hölder lorsque $\Omega=\{1,\dots,d\}$ avec la mesure de comptage?

Exercice 14. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de nombres complexes. Soient également p et q des nombres réels positifs vérifiant $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. On suppose que les séries $\sum|x_n|^p$ et $\sum|y_n|^q$ sont convergentes. Montrer que la série $\sum x_ny_n$ est absolument convergente.

Exercice 15. Soit $(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ un espace mesuré, et soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction intégrable. Montrer qu'on a $\left|\int_\Omega f\,d\mu\right|=\int_\Omega|f|\,d\mu$ si et seulement si il existe une constante λ telle que $|\lambda|=1$ et $f(x)=\lambda\,|f(x)|$ presque partout.

Exercice 16. Soit $\lambda>0$, et soit μ la mesure sur $(\mathbb{R}^+,\mathcal{P}(\mathbb{R}^+))$ définie par
$$\mu:=\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\lambda^ke^{-\lambda}}{k!}\,\delta_k.$$

(1) Calculer $\mu(\mathbb{R}^+)$.
(2) Montrer qu'on a $\int_{\mathbb{R}^+}x\,d\mu(x)=\lambda$ et $\int_{\mathbb{R}^+}x^2d\mu(x)=\lambda+\lambda^2$.
(3) Montrer que pour tout $t\in\mathbb{R}$, la fonction $x\mapsto e^{ix}$ est intégrable par rapport à μ, puis calculer $\int_{\mathbb{R}^+}e^{itx}d\mu(x)$.

Exercice 17. Soit $(\Omega,\mathfrak{B},\mu)$ un espace mesuré, et soit $f:\Omega\to\mathbb{C}$ une fonction intégrable. Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose
$$A_n:=\big\{x\in\Omega;\ |f(x)|\geq n\big\}.$$

(1) Dans cette question, on veut montrer que la série $\sum\mu(A_n)$ est convergente.
    (a) Pour $p\in\mathbb{N}^*$, on pose $B_p:=\big\{x\in\Omega;\ p\leq|f(x)|<p+1\big\}$. Montrer qu'on a $\sum_{p=1}^\infty p\,\mu(B_p)<\infty$.
    (b) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, exprimer $\mu(A_n)$ à l'aide des $\mu(B_p)$, $p\geq n$.

(c) Démontrer le résultat souhaité.

(2) Dans cette question, on suppose de plus que la fonction f est bornée et que la mesure μ est *finie*. Montrer qu'on a $\int_\Omega e^{|f|} d\mu < \infty$, et en déduire que $\mu(A_n) = O\left(e^{-n}\right)$.

Exercice 18. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit f une fonction intégrable sur Ω, à valeurs complexes.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $A_n := \big\{x \in \Omega;\ |f(x)| \leq n\big\}$.

(a) En considérant la mesure ν définie par $\nu(A) := \int_A |f|\, d\mu$, déterminer la limite de $\int_{\Omega\setminus A_n} |f|\, d\mu$ quand $n \to \infty$.

(b) Montrer que pour tout ensemble mesurable $B \subseteq \Omega$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\int_B |f|\, d\mu \leq n\, \mu(B) + \int_{\Omega\setminus A_n} |f|\, d\mu\, .$$

(2) En utilisant (1), montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, on peut trouver $\delta > 0$ tel que

$$\forall B \in \mathfrak{B} \ \ :\ \mu(B) < \delta \Longrightarrow \int_B |f|\, d\mu < \varepsilon\, .$$

(3) On suppose que $\Omega = \mathbb{R}$ et que μ est la mesure de Lebesgue. Pour $x \in \mathbb{R}$, on pose

$$F(x) := \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt.$$

Montrer que la fonction F est uniformément continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 19. Dans tout l'exercice $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ est un espace mesuré.

(1) Soit f une fonction *étagée* positive sur Ω, qu'on écrit

$$f = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i\, \mathbf{1}_{A_i}$$

avec $\alpha_i \in \mathbb{R}^+$ et des A_i mesurables et deux à deux disjoints. Montrer que pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mu\big(\{f > t\}\big) = \sum_{i=1}^{N} \mu(A_i)\, \mathbf{1}_{[0,\alpha_i[}(t)\, .$$

(2) Soit $\phi : [0, \infty[\to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, croissante, positive et vérifiant $\phi(0) = 0$. Montrer que toute fonction mesurable positive f sur Ω, on a

$$\int_\Omega \phi(f(x))\, d\mu(x) = \int_0^\infty \phi'(t)\, \mu\big(\{f > t\}\big)\, dt\, .$$

Exercice 20. Dans cet exercice, on donne deux applications de l'Exercice 19.

(1) Soit $g : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction mesurable. Montrer que dans chacun des deux cas suivants, la fonction g est intégrable sur Ω.
   (i) $\mu(\Omega) < \infty$ et il existe $\alpha > 1$ tel que $\mu\big(\{|g| > t\}\big) = O(1/t^\alpha)$ quand $t \to \infty$.
   (ii) g est bornée et il existe $\alpha < 1$ tel que $\mu\big(\{|g| > t\}\big) = O(1/t^\alpha)$ quand $t \to 0^+$.

(2) Soit f une fonction mesurable positive sur Ω. On suppose qu'il existe deux constantes $A < \infty$ et $c > 0$ telles que $\forall t > 0 \ : \ \mu(\{f \geq t\}) \leq A\, e^{-ct}$. Montrer qu'on a $\int_\Omega f(x)^p d\mu(x) < \infty$ pour tout $p \geq 1$.

Exercice 21. (inégalité de Salem-Zygmund)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$, et soit $f : \Omega \to [0, \infty]$ une fonction mesurable. On pose $I_1(f) := \int_\Omega f\, d\mu$ et $I_2(f) := \int_\Omega f^2\, d\mu$.

(1) Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. On pose $A := \{x \in \Omega;\ f(x) \geq \varepsilon\, I_1(f)\}$. En écrivant $\int_\Omega = \int_{\Omega \setminus A} + \int_A$, montrer qu'on a

$$I_1(f) \leq \varepsilon\, I_1(f) + \int_A f\, d\mu\,.$$

(2) On suppose qu'on a $0 < I_2(f) < \infty$. En utilisant (1) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que pour tout $\varepsilon \in]0, 1[$, on a

$$\mu\big(\{f \geq \varepsilon\, I_1(f)\}\big) \geq (1 - \varepsilon)^2\, \frac{I_1(f)^2}{I_2(f)}.$$

Exercice 22. (Borel-Cantelli, ter)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) = 1$. Soit également $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathfrak{B}$. On suppose qu'on a $\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) = \infty$, et que les A_n sont **deux à deux indépendants**, ce qui signifie que $\mu(A_i \cap A_j) = \mu(A_i)\mu(A_j)$ si $i \neq j$. Le but de l'exercice est de montrer que $\mu\left(\overline{\lim}\, A_n\right) = 1$.

(1) Pour $i \geq 1$, on pose $\alpha_i := \mu(A_i)$; et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$S_n := \sum_{i=1}^n \alpha_i \qquad \text{et} \qquad P_n := 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_i \alpha_j.$$

Montrer qu'on a $S_n^2 \geq P_n \geq S_n^2 - S_n$, et en déduire que

$$\frac{P_n}{S_n^2} \to 1 \qquad \text{quand } n \to \infty.$$

(2) Montrer que pour toute suite d'ensembles mesurables (B_n), on a

$$\mu\left(\overline{\lim}\, B_n\right) \geq \overline{\lim}\, \mu(B_n).$$

(3) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $\varepsilon \in]0,1[$, on pose

$$f_n := \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{A_i} \qquad \text{et} \qquad B_{n,\varepsilon} := \big\{x \in \Omega;\ f_n(x) \geq \varepsilon\, S_n\big\}.$$

(a) En utilisant l'Exercice 21, montrer que

$$\mu(B_{n,\varepsilon}) \geq (1-\varepsilon)^2\, \frac{S_n^2}{S_n + P_n}\cdot$$

(b) En déduire que $\forall \varepsilon \in]0,1[\ :\ \mu\big(\overline{\lim}\, B_{n,\varepsilon}\big) \geq (1-\varepsilon)^2$.

(c) Montrer que pour tout $\varepsilon \in]0,1[$, on a $\overline{\lim}\, B_{n,\varepsilon} \subseteq \overline{\lim}\, A_n$.

(4) Conclure.

Exercice 23. (convergence en mesure)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, et soit (f_n) une suite de fonctions mesurables positives sur Ω. On dit que la suite (f_n) **tend vers** 0 **en mesure** si

$$\forall \varepsilon > 0\ :\ \mu\left(\{f_n \geq \varepsilon\}\right) \to 0 \quad \text{quand } n \to \infty\,.$$

(1) Montrer que si $\int_\Omega f_n\, d\mu \to 0$, alors (f_n) tend vers 0 en mesure.

(2) Dans cette question, on suppose que la mesure μ est *finie*. Montrer que si $f_n(x) \to 0$ presque partout, alors (f_n) tend vers 0 en mesure. (*Utiliser le fait que* $\mu\big(\{f_n \geq \varepsilon\}\big) \leq \mu\big(\bigcup_{k\geq n}\{f_k \geq \varepsilon\}\big)$ *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$.)

(3) Dans cette question, on suppose que la suite (f_n) tend vers 0 en mesure.

(a) Montrer que (f_n) possède une sous-suite $(f_{n_k})_{k\geq 1}$ telle que

$$\mu\left(\{f_{n_k} \geq 1/k\}\right) \leq 2^{-k} \quad \text{pour tout } k \geq 1\,.$$

(b) Montrer qu'on a $\sum_1^\infty \mu(\{f_{n_k} \geq \varepsilon\}) < \infty$ pour tout $\varepsilon > 0$.

(c) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli (*cf* Exercice 12), montrer que la suite (f_{n_k}) converge presque partout vers 0.

(4) On suppose que la mesure μ est finie. Montrer que la suite (f_n) converge vers 0 en mesure si et seulement si toute sous-suite de (f_n) possède une sous-suite qui tend vers 0 presque partout.