Feuille d'exercices n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1. Soit Ω un ensemble non vide. On note $\mathfrak{B}$ la famille de toutes les parties A de Ω telles que A est dénombrable ou $\Omega \setminus A$ est dénombrable. Montrer que $\mathfrak{B}$ est une tribu de parties de Ω.

Exercice 2. Soit Ω un ensemble non vide, et soit $\mathfrak{B}$ une tribu de parties de Ω.

(1) On dit qu'un ensemble $A \subseteq \Omega$ est un **atôme de** $\mathfrak{B}$ si $A \in \mathfrak{B} \setminus \{\emptyset\}$ et s'il n'existe pas d'ensemble $B \in \mathfrak{B}$ tel que $B \subseteq A$ avec $B \neq \emptyset$ et $B \neq A$.
   (a) Montrer que si A et A' sont des atômes de $\mathfrak{B}$, alors ou bien $A = A'$, ou bien $A \cap A' = \emptyset$.
   (b) Montrer que si A est un atôme de $\mathfrak{B}$ et si $B \in \mathfrak{B}$, alors ou bien $A \cap B = \emptyset$, ou bien $A \subseteq B$.

(2) Pour $x \in \Omega$, on note $A(x)$ l'intersection de tous les éléments de $\mathfrak{B}$ contenant x. Montrer que si $x \in \Omega$ et si $A(x) \in \mathfrak{B}$, alors $A(x)$ est un atôme de $\mathfrak{B}$.

(3) Dans cette question, on suppose que la tribu $\mathfrak{B}$ est *dénombrable.*
   (a) En utilisant (1) et (2), montrer que les atômes de $\mathfrak{B}$ forment une partition de Ω.
   (b) On note $(A_i)_{i \in I}$ la famille de tous les atômes de $\mathfrak{B}$ (les A_i étant 2 à 2 distincts); et pour toute partie J de I, on pose $B_J := \bigcup_{i \in J} A_i$. Justifier que I est dénombrable, puis montrer qu'un ensemble $B \subseteq \Omega$ appartient à $\mathfrak{B}$ si et seulement si il est de la forme B_J pour un certain $J \subseteq I$. (*On pourra considérer* $J = \{i \in I;\ A_i \cap B \neq \emptyset\}$.)
   (c) Montrer que l'application $J \mapsto B_J$ est injective. En déduire que l'ensemble I est nécessairement fini, et conclure que la tribu $\mathfrak{B}$ est finie.

Exercice 3. Soit $(\mu_i)_{i \in I}$ une famille de mesures sur un espace mesurable $(\Omega, \mathfrak{B})$. Montrer que la formule $\mu(A) = \sum_{i \in I} \mu_i(A)$ définit une mesure sur $(\Omega, \mathfrak{B})$.

Exercice 4. Soit Ω un ensemble non dénombrable, et soit $\mathfrak{B}$ la tribu définie dans l'Exercice 1. Montrer qu'on définit une mesure sur $(\Omega, \mathfrak{B})$ en posant, pour $A \in \mathfrak{B}$:

$$\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad A \text{ est dénombrable} \\ \infty & \text{si} \quad \Omega \setminus A \text{ est dénombrable} \end{cases}$$

Exercice 5. (principe d'inclusion-exclusion)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ est un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $1 \leq k \leq n$, on note $\mathcal{P}_k(n)$ l'ensemble des parties de $\{1, \ldots, n\}$ à k éléments. Si $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}$ et si $J = \{j_1, \ldots, j_k\}$ est une partie de $\{1, \ldots, n\}$, on pose $A_J := A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tous $A_1, \ldots, A_n \in \mathfrak{B}$, on a

$$\mu(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \left(\sum_{J \in \mathcal{P}_k(n)} \mu(A_J) \right).$$

Exercice 6. Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $m \geq n$. On note S_m^n le nombre de *surjections* de $\{1, \ldots, m\}$ sur $\{1, \ldots, n\}$.

(1) On note Ω l'ensemble de toutes les applications $f : \{1, \ldots, m\} \to \{1, \ldots, n\}$, et μ_c la mesure de comptage sur Ω. Combien vaut $\mu_c(\Omega)$?
(2) Pour $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $A_j := \{f \in \Omega;\ f \text{ ne prend pas la valeur } j\}$. Pour $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$, calculer $\mu_c(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k})$.
(3) En utilisant le principe d'inclusion-exclusion (Exercice 5), établir la formule

$$S_m^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^m.$$

Exercice 7. Soit N un entier au moins égal à 2. On note $\varphi(N)$ le nombres d'entiers $m \in \{1, \ldots, N\}$ tels que $\text{pgcd}(m, N) = 1$. On note également $p_1 < \cdots < p_n$ les facteurs premiers de N. En appliquant convenablement le principe d'inclusion-exclusion (Exercice 5), établir la formule

$$\varphi(N) = N \prod_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{p_j} \right).$$

Exercice 8. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec $\mu(\Omega) < \infty$. On suppose que la tribu $\mathfrak{B}$ contient tous les singletons.

(1) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, l'ensemble $\{x \in \Omega;\ \mu(\{x\}) \geq \varepsilon\}$ est fini.
(2) En déduire que l'ensemble $\Lambda = \{x;\ \mu(\{x\}) \neq 0\}$ est dénombrable.

Exercice 9. Soit $(\Omega, \mathfrak{B})$ un espace mesurable, la tribu $\mathfrak{B}$ contenant tous les singletons. On dit qu'une mesure μ sur $(\Omega, \mathfrak{B})$ est une mesure **discrète** si μ est de la forme $\sum_{p \in \Lambda} a_p \delta_p$, où Λ est un sous-ensemble dénombrable de Ω et les a_p sont des réels positifs. On dit qu'une mesure μ est **continue** si on a $\mu(\{x\}) = 0$ pour tout $x \in \Omega$. En utilisant l'Exercice 8, montrer que toute mesure finie μ sur $(\Omega, \mathfrak{B})$ peut se décomposer sous la forme $\mu = \mu_d + \mu_c$, où μ_d est une mesure discrète et μ_c est une mesure continue.

Exercice 10. Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré, avec μ finie. Soit également (A_n) une suite d'éléments de $\mathfrak{B}$. Établir les inégalités

$$\mu\left(\underline{\lim}\, A_n\right) \leq \underline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \overline{\lim}\, \mu(A_n) \leq \mu\left(\overline{\lim}\, A_n\right).$$

(On rappelle que $\overline{\lim}\, A_n = \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \bigcup_{n\geq m} A_n$ et $\underline{\lim}\, A_n = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \bigcap_{n\geq m} A_n$.)

Exercice 11. (lemme de Borel-Cantelli)
Soit $(\Omega, \mathfrak{B}, \mu)$ un espace mesuré. Montrer que si (A_n) est une suite d'éléments de $\mathfrak{B}$ vérifiant $\sum_0^\infty \mu(A_n) < \infty$, alors $\mu\Big(\overline{\lim}\, A_n\Big) = 0$.

Exercice 12. Montrer que la tribu $\mathfrak{B}$ de l'Exercice 1 est engendrée par les singletons.

Exercice 13. Soit Ω un ensemble non vide, et soit $(A_i)_{i\in I}$ une partition dénombrable de Ω (*i.e.* l'ensemble I est dénombrable et les A_i forment une partition de Ω). Montrer que la tribu engendrée par les A_i est l'ensemble de toutes les parties B de Ω de la forme

$$B = \bigcup_{i\in J} A_i\,, \quad \text{où} \quad J \subseteq I.$$

Exercice 14. Montrer que la tribu borélienne de $\mathbb{R}$ est engendrée par les intervalles compacts à extrémités rationnelles.

Exercice 15. Montrer que si (Ω, d) est un espace métrique séparable, alors la tribu borélienne de Ω est engendrée par les boules ouvertes.

Exercice 16. Montrer que si $\Omega_1, \dots, \Omega_d$ sont des espaces métriques séparables, alors la tribu borélienne de $\Omega_1 \times \cdots \times \Omega_d$ est engendrée par les produits d'ouverts, *i.e.* les ensembles P de la forme $P = O_1 \times \cdots \times O_d$, où O_i est un ouvert de Ω_i pour $i = 1, \dots, d$.

Exercice 17. Soit $\Omega = [0, 1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$ on note $\mathfrak{D}_n$ la famille de toutes les parties A de Ω qui sont réunions d'intervalles de la forme $\left[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n}\right[$, où $k \in \{0; 1; \dots; 2^n - 1\}$.

(1) Montrer que chaque $\mathfrak{D}_n$ est une tribu, et que la suite $(\mathfrak{D}_n)$ est croissante.
(2) La famille $\mathfrak{D} = \bigcup_n \mathfrak{B}_n$ est-elle une tribu?
(3) Montrer que la tribu engendrée par $\mathfrak{D}$ est la tribu borélienne de Ω.

Exercice 18. (régularité des mesures)
Soit μ une mesure borélienne *finie* sur un espace métrique (Ω, d). On dira qu'un borélien $A \subseteq \Omega$ est **régulier** pour μ s'il vérifie les deux propriétés suivantes :

(i) $\quad \mu(A) = \sup\{\mu(F);\ F \subseteq A,\ F \text{ fermé}\}$;
(ii) $\quad \mu(A) = \inf\{\mu(O);\ O \supseteq A,\ O \text{ ouvert}\}$.

(1) Montrer que tout ouvert de Ω est régulier pour μ. (*On rappelle que tout ouvert de Ω est réunion dénombrable de fermés.*)

(2) Soit (A_n) une suite de boréliens réguliers de Ω, et soit $A := \bigcup_n A_n$.
   (a) Montrer que A vérifie (i).
   (b) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on peut trouver un ouvert O_n tel que $O_n \supseteq A_n$ et $\mu(O_n \setminus A_n) < 2^{-n}\varepsilon$.
   (c) En déduire que A vérifie (ii).

(3) Montrer que la famille des boréliens réguliers pour μ est une tribu.

(4) Montrer que tout borélien de Ω est régulier pour μ.

(5) Que peut-on dire de deux mesures boréliennes finies sur Ω qui prennent les mêmes valeurs sur les ouverts?

Exercice 19. Soient μ_1 et μ_2 deux mesures boréliennes sur $\mathbb{R}$ telles que $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ pour tout intervalle compact $I \subseteq \mathbb{R}$. Montrer qu'on a $\mu_1(J) = \mu_2(J)$ pour tout intervalle *ouvert* J, et en déduire que $\mu_1(O) = \mu_2(O)$ pour tout ouvert $O \subseteq \mathbb{R}$. (*Utiliser une description "bien connue" des ouverts de* $\mathbb{R}$.)

Exercice 20. En utilisant les résultats des Exercices 18 et 19, *montrer* que si μ_1 et μ_2 sont deux mesures boréliennes finies sur $\mathbb{R}$ telles que $\mu_1(I) = \mu_2(I)$ pour tout intervalle compact $I \subseteq \mathbb{R}$, alors $\mu_1 = \mu_2$.

Exercice 21. (théorème des classes monotones)
Soit Ω un ensemble. On dit qu'une famille $\mathcal{M}$ de parties de Ω est une **classe monotone** si elle vérifie les propriétés suivantes.
   (i) $\Omega \in \mathcal{M}$;
   (ii) si $A, B \in \mathcal{M}$ et $A \subseteq B$, alors $B \setminus A \in \mathcal{M}$;
   (iii) si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de $\mathcal{M}$, alors $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{M}$.

(1) Définir la classe monotone **engendrée** par une famille $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$.

(2) Soit $\mathcal{C}$ une famille de parties de Ω stable par intersections finies. On note $\mathcal{M}$ la classe monotone engendrée par $\mathcal{C}$.
   (a) Pour $A \in \mathcal{C}$, on pose
$$\mathcal{M}_A := \{B \in \mathcal{P}(\Omega);\ A \cap B \in \mathcal{M}\}.$$
   Montrer que $\mathcal{M}_A$ est une classe monotone. En déduire que pour tout $A \in \mathcal{C}$ et pour tout $B \in \mathcal{M}$, on a $A \cap B \in \mathcal{M}$.
   (b) Montrer que $\mathcal{M}$ est stable par intersections finies.
   (c) Montrer que $\mathcal{M}$ est une tribu.

(3) Démontrer le résultat suivant : *si $\mathcal{C}$ est une famille de parties de Ω stable par intersections finies et si $\mathcal{M}$ est une classe monotone contenant $\mathcal{C}$, alors $\mathcal{M}$ contient la tribu engendrée par $\mathcal{C}$.*

Exercice 22. En utilisant le théorème des classes monotones (Exercice 21), montrer que si deux mesures boréliennes finies μ et ν sur $\mathbb{R}$ prennent les mêmes valeurs sur les intervalles bornés, alors $\mu = \nu$.

Exercice 23. Montrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable en utilisant la mesure de Lebesgue.

Exercice 24. Montrer que si $A \subseteq \mathbb{R}$ est tel que $\mathbb{R} \setminus A$ est λ_1-négligeable, alors A est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 25. En utilisant l'Exercice 24, montrer que si deux fonctions continues $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont égales λ_1-presque partout, alors $f = g$.

Exercice 26. (ensemble triadique de Cantor)
On définit une suite de fermés $K_n \subseteq [0,1]$ de la manière suivante : $K_0 = [0,1]$, $K_1 = [0,1/3] \cup [2/3,1]$, $K_2 = [0,1/9] \cup [2/9,1/3] \cup [2/3,7/9] \cup [8/9,1]$, et "ainsi de suite". Enfin, on pose $K := \bigcap_{n \geq 0} K_n$.

(1) Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer la mesure de Lebesgue de K_n.
(2) Quelle est la mesure de K?
(3) Dans cette question, on veut montrer que K n'est pas dénombrable.
   (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour toute suite $s = (\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_{n-1}) \in \{0,1\}^n$, on note $I(s)$ l'intervalle $[a(s), b(s)]$, où
$$a(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2\varepsilon_i}{3^{i+1}} \quad \text{et} \quad b(s) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{2\varepsilon_i}{3^{i+1}} + \frac{1}{3^n} \cdot$$
   Montrer que $I(s) \subseteq K_n$ pour toute $s \in \{0,1\}^n$, et que les intervalles $I(s)$ sont deux à deux disjoints.
   (b) Montrer que pour toute suite $\varepsilon = (\varepsilon_i)_{i \in \mathbb{N}} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, l'intersection
$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I((\varepsilon_0, \ldots, \varepsilon_n))$$
   est un singleton $\{x_\varepsilon\}$. Montrer ensuite que $x_\varepsilon \in K$. On pourra même montrer que réciproquement si $x \in K$ alors il existe $\varepsilon \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ tel que $x = x_\varepsilon$.
   (c) Montrer que $x_\varepsilon \neq x_{\varepsilon'}$ si $\varepsilon \neq \varepsilon'$, et conclure.

Exercice 27. Le but de l'exercice est de montrer qu'il n'existe pas de mesure μ *définie sur toutes les parties de* $\mathbb{R}$, invariante par translations et telle que $0 < \mu(I) < \infty$ pour tout intervalle borné non trivial I.

(1) Montrer qu'on définit une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $[0,1]$ en décrétant que $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$.
(2) On note $(C_i)_{i\in I}$ la famille de toutes les classes d'équivalences pour la relation $\mathcal{R}$. Pour chaque $i \in I$, on choisit un point $x_i \in C_i$, et on pose $V := \{x_i;\ i \in I\}$. Ainsi, V est une partie de $[0,1]$ qui rencontre chaque $\mathcal{R}$ - classe d'équivalence en exactement 1 point.
   (a) Soit $\{r_n;\ n \in \mathbb{N}\}$ une énumération injective de l'ensemble des rationnels de $[-1,1]$. Montrer qu'on a $[0,1] \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(V + r_n) \subseteq [-1,2]$.
   (b) Montrer que les ensembles $V + r_n$ sont deux-à-deux disjoints.
(3) Démontrer par l'absurde le résultat souhaité.

Exercice 28. Soit $r > 0$. Pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$, on pose $r \cdot A := \{rx;\ x \in A\}$.
(1) Montrer qu'on définit une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^d$ en posant $\mu(A) = \lambda_d(r\cdot A)$ pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$.
(2) Calculer $\mu(P)$ pour tout pavé P, et en déduire que
$$\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\ :\ \lambda_d(r \cdot A) = r^d\,\lambda_d(A)\,.$$

Exercice 29. Soient $r_1, \dots, r_d > 0$ et soit $\Phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ l'application définie par $\Phi(x_1, \dots, x_d) = (r_1x_1, \dots, r_dx_d)$. En raisonnant comme dans l'exercice 28, déterminer $\lambda_d(\Phi(A))$ en fonction de $\lambda_d(A)$ et des r_j, pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$.

Exercice 30. Montrer que la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$ est invariante par symétries centrales.

Exercice 31. (aire d'un rectangle quelconque)
Soit $R \subseteq \mathbb{R}^2$ un rectangle *quelconque*, i.e. à côtés non nécessairement parallèles aux axes de coordonnés. On note a et b les longueurs des côtés de R. Le but de l'exercice est de montrer que $\lambda_2(R)$ est (heureusement) égale à ab.
(1) Démontrer le résultat en une ligne en admettant que la mesure de Lebesgue est invariante par rotations.
(2) Dans cette question, on admet uniquement les propriétés suivantes : λ_2 est invariante par symétries centrales, et la mesure d'un segment quelconque est égale à 0.
   (a) Montrer que la mesure d'un triangle rectangle dont les "côtés de l'angle droit" sont parallèles aux axes de coordonnés, est bien égale à ce qu'on imagine.
   (b) Compléter intelligemment le rectangle R en un rectangle à côtés parallèles aux axes de coordonnées.
   (c) Démontrer le résultat souhaité.

Exercice 32. (aire d'un triangle)
Soit $\Delta = ABC$ un triangle de $\mathbb{R}^2$. On note H le pied de la hauteur issue de A. En admettant le résultat de l'Exercice 31, *montrer* qu'on a $\lambda_2(\Delta) = \frac{1}{2}BC \times AH$.

Exercice 33. (aire d'un disque)
Soit $D \subseteq \mathbb{R}^2$ un disque de centre 0 et de rayon R. Le but de l'exercice est de montrer que $\lambda_2(D)$ est bien égal à ce qu'on attend.

(1) On fixe un point $A \in \partial D$, et pour tout entier $N \geq 2$, on note $\mathcal{P}_N$ le polygône régulier à 2^N côtés inscrit dans D dont A est l'un des sommets. Calculer $\lambda_2(\mathcal{P}_N)$ en découpant $\mathcal{P}_N$ en triangles.
(2) Montrer que la suite $(\mathcal{P}_N)_{N\geq 2}$ est croissante.
(3) Conclure.

Exercice 34. Soient $a, b > 0$. On note $\mathcal{E}$ l'intérieur de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. En utilisant les Exercices 33 et 29, déterminer l'aire de $\mathcal{E}$.

Exercice 35. (mesures invariantes par translations)
Soit μ une mesure borélienne sur $\mathbb{R}^d$. On suppose que μ est *invariante par translations* et qu'on a $\mu(B) < \infty$ pour tout borélien borné $B \subseteq \mathbb{R}^d$. Le but de l'exercice est de montrer qu'il existe une constante c telle que $\mu = c\,\lambda_d$.

(1) Soit $P \subseteq \mathbb{R}^d$ un "pavé semi-ouvert rationnel"; autrement dit un pavé de la forme $[a_1, b_1[\times \cdots \times [a_d, b_d[$, où les a_i et les b_i sont rationnels.
   (a) Montrer qu'on peut trouver $N \in \mathbb{N}^*$ et $k_1, l_1, \dots, k_d, l_d \in \mathbb{Z}$ tels que
$$P = \left[\frac{k_1}{N}, \frac{l_1}{N}\right[\times \cdots \times \left[\frac{k_d}{N}, \frac{l_d}{N}\right[.$$
   (b) On pose $m := (l_1 - k_1)\cdots(l_d - k_d)$. Montrer que P est reunion de m translatés du pavé $Q_N = \big[0, \frac{1}{N}\big[\times \cdots \times \big[0, \frac{1}{N}\big[$ deux à deux disjoints.
(2) Soit $Q = [0,1[\times \cdots \times [0,1[$. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, le pavé Q est réunion de N^d translatés du pavé $Q_N = \big[0, \frac{1}{N}\big[\times \cdots \times \big[0, \frac{1}{N}\big[$ deux à deux disjoints.
(3) On pose $c := \mu(Q)$. Déduire de (1) et (2) que pour tout pavé semi-ouvert rationnel P, on a $\mu(P) = c\,\lambda_d(P)$.
(4) Conclure.

Exercice 36. Le but de l'exercice est de montrer que la mesure de Lebesgue λ_d est *invariante par isométries*; autrement dit, que si $I : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une isométrie linéaire, alors
$$\forall A \in \mathfrak{B}(\mathbb{R}^d)\ :\ \lambda_d(I(A)) = \lambda_d(A).$$

(1) On note B_2 la boule unité euclidienne de $\mathbb{R}^n$. Comparer B_2 et $I(B_2)$ lorsque I est une isométrie.

(2) Soit $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ une application linéaire inversible. Montrer qu'on définit une mesure invariante par translations sur $\mathbb{R}^d$ en posant $\mu(A) = \lambda_d(L(A))$ pour tout borélien A.

(3) Conclure en utilisant l'exercice 35.

Exercice 37. En utilisant les Exercices 29 et 36 et la *décomposition polaire*, montrer que si $L : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ est une application linéaire inversible, alors on a pour tout borélien $A \subseteq \mathbb{R}^d$:

$$\lambda_d(L(A)) = |\det(L)|\, \lambda_d(A).$$